Université de Picardie Jules Verne
UFR des Sciences **2017-2018**

Licence mention Mathématiques - Semestre 3
Statistique

Tests non paramétriques

Dans une population P, on étudie un caractère quantitatif représenté par une variable aléatoire X de moyenne μ et d'écart-type σ. De P on extrait un échantillon $E = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de taille n de X.

On a alors les estimateurs usuels : moyenne d'échantillon $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ et variance corrigée d'échantillon $S_c^2 = \frac{n}{n-1}S^2$ avec $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$

Dans les précédents chapitres, nous avons présenté des formules d'intervalle de confiance et des procédures de tests statistiques dont la mise en oeuvre nécessitait souvent de supposer que la variable aléatoire X suivait la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$.

Cette hypothèse de normalité n'est pas gratuite et doit être vérifiée par un test statistique permettant de la valider ou de la réfuter.

1. Un test de normalité

Un test d'adéquation permet de statuer sur la compatibilité d'une distribution observée avec une distribution théorique associée à une loi de probabilité. Il s'agit de modélisation. Nous avons déjà présenté le test de khi-deux d'adéquation à une loi théorique, et en particulier à la loi normale, mais il n'est pas toujours adapté, en particulier au cas de petits échantillons.

Nous ne présentons ici qu'un test de normalité alternatif. Nous renvoyons par exemple vers http://eric.univ-lyon2.fr/~ricco/cours/cours/Test_Normalite.pdf pour plus d'informations sur ce sujet.

Très populaire, le **test de Shapiro-Wilk** est basé sur la statistique W. En comparaison des autres tests, il est particulièrement puissant pour les petits effectifs ($n \leq 50$). La statistique du test s'écrit :

$$W = \frac{T^2}{S_c^2} = \frac{\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} a_i\left(X_{(n+1-i)} - X_{(i)}\right)\right)^2}{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$$

où $X_{(i)}$ correspond à l'échantillon trié dans l'ordre croissant, $\left[\frac{n}{2}\right]$ est la partie entière du rapport $\frac{n}{2}$ et les a_i sont des constantes générées à partir de la moyenne et de la matrice de variance co-variance des quantiles d'un échantillon de taille n suivant la loi normale, et fournies dans des tables spécifiques (voir page 6).

La statistique W peut donc être interprétée comme le coefficient de détermination (le carré du coefficient de corrélation) entre la série des quantiles générées à partir de la loi normale et les quantiles empiriques obtenues à partir des données. Plus W est élevé, plus la compatibilité avec la loi normale est crédible.

Test de H_0 : X suit une loi normale contre H_1 : X ne suit pas une loi normale.

A partir des observations $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, les calculs se mènent de la manière suivante :

- trier dans l'ordre croissant les données x_i, ce qui donne la série $x_{(i)}$;
- calculer les écarts $(x_{(n+1-i)} - x_{(i)})$
- lire dans la table pour n les valeurs des coefficients a_i ;
- former le numérateur de W ;
- former le dénominateur de W, puis en déduire W ;
- pour un risque α, lire le seuil critique w_α dans la table table de Shapiro-Wilk pour n (voir page 6).

Décision : si $w < w_\alpha$, on rejette H_0 au risque α, c'est-à-dire on rejette la normalité ; si $w \geq w_\alpha$, on ne peut rejeter H_0 au risque α, c'est-à-dire on ne peut rejeter la normalité.

Remarque : **la** p**-valeur**.

L'utilisation de logiciels (tels R) évite d'avoir à mener tous ces calculs. Lors de la mise en oeuvre de tout test avec un logiciel, ce dernier fournit souvent la p**-valeur** qui sera comparée au risque α pour la prise de décision. Ainsi, lorsque $p \leq \alpha$, on rejette H_0 au risque α ; lorsque $p > \alpha$, on ne peut rejeter H_0 au risque α.

L'interprétation de la p-valeur est simple : plus elle est faible, plus la décision de rejeter H_0 est fiable.

2. D'autres tests non paramétriques

Lorsque l'on considère des échantillons de tailles faibles et que l'hypothèse de normalité ne peut être retenue, les tests paramétriques, appuyés sur les estimateurs usuels et décrits dans les précédents chapitres, ne peuvent être mis en oeuvre. Une alternative est d'utiliser des tests non paramétriques.

Là encore, l'utilisation de logiciels (tels R) évitera des calculs parfois pénibles.

2.1. Comparaison de moyennes - Cas de deux populations

Dans deux populations P_1 et P_2, on étudie un même caractère, représenté par des variables aléatoires X_1 et X_2, de moyennes respectives μ_1 et μ_2, d'écart-types respectifs σ_1 et σ_2. De P_1 et P_2 on extrait un échantillon $E_1 = (X_{1,1}, X_{1,2}, \ldots, X_{1,n_1})$ de taille n_1 de X_1 et un échantillon $E_2 = (X_{2,1}, X_{2,2}, \ldots, X_{2,n_2})$ de taille n_2 de X_2.

Les moyennes d'échantillon sont alors $\overline{X_1} = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_{1,i}$ et $\overline{X_2} = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} X_{2,i}$, et les variances corrigées d'échantillon $S_{c,1}^2 = \frac{n_1}{n_1-1}S_1^2$ et $S_{c,2}^2 = \frac{n_2}{n_2-1}S_2^2$, avec $S_1^2 = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_{1,i}^2 - \overline{X_1}^2$ et $S_2^2 = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} X_{2,i}^2 - \overline{X_2}^2$.

2.1.1. Cas de petits échantillons indépendants : test de Mann et Whitney

On suppose que $n_1 \leq 30$ ou $n_2 \leq 30$, que les échantillons E_1 et E_2 sont indépendants et que les lois de X_1 et de X_2 sont inconnues.

On classe par ordre croissant l'ensemble des valeurs observées $x_{1,1}, x_{1,2}, \ldots, x_{1,n_1}$ et $x_{2,1}, x_{2,2}, \ldots, x_{2,n_2}$ des deux échantillons. On affecte à chaque valeur son rang dans ce classement. S'il y a des ex-aequo, on attribue à chacun d'eux un rang égal à la moyenne des rangs qu'ils occupent.

A chaque valeur $x_{1,i}$ de E_1 on associe le nombre de valeurs de E_2 situées à un rang supérieur (en comptant pour $0,5$ toute valeur ex-aequo avec $x_{1,i}$) ; on calcule alors la somme u_1 de tous les nombres ainsi associés aux valeurs $x_{1,i}$ de E_1. On calcule de même u_2 en permutant les rôles de E_1 et E_2. On calcule alors u, plus petite des deux valeurs u_1 et u_2 : $u = \min(u_1, u_2)$.

On peut vérifier que $u_1 + u_2 = n_1 n_2$. De plus, on peut obtenir u_1 et u_2 comme suit : si r_1 et r_2 désigne la somme des rangs des valeurs de chacun des deux échantillons, alors $u_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - r_1$ et $u_2 = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - r_2$.

Test (bilatéral) **de** $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ **contre** $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$.

Soit U la variable aléatoire prenant la valeur u à chaque échantillonnage. Les tables 7 et 8 permettent de déterminer le réel m_α tel que $P(U \leq m_\alpha) = \alpha$ sous l'hypothèse H_0, et on décide que :

- si $u > m_\alpha$, alors on ne peut rejeter H_0 ;
- si $u \leq m_\alpha$, alors on rejette H_0 avec une probabilité α de se tromper.

Si $n_1 > 20$ et $n_2 > 20$, alors sous l'hypothèse H_0, U suit approximativement la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, avec $\mu = \frac{n_1 n_2}{2}$ et $\sigma = \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}}$. On calcule alors $\varepsilon = \frac{u - \mu}{\sigma}$. On détermine u_α tel que $P(-u_\alpha < U < u_\alpha) = 1 - \alpha$, i.e. $u_\alpha = \phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ (table 2) et on décide que :

- si $\varepsilon \in]-u_\alpha, u_\alpha[$, alors on ne peut rejeter H_0 ;
- si $\varepsilon \notin]-u_\alpha, u_\alpha[$, alors on rejette H_0 avec une probabilité α de se tromper.

Remarque. Ce test est dit *non-paramétrique* car il ne nécessite pas d'estimation des paramètres (moyenne et variance). C'est également un *test de rangs* car les valeurs observées sont remplacées par leur rang au sein des échantillons.

2.1.2. Cas de petits échantillons appariés : test de Wilcoxon

On suppose que $n_1 = n_2 = n \leq 30$, que les échantillons E_1 et E_2 sont appariés et que les lois de X_1 et de X_2 sont inconnues.

Les notations sont les mêmes que dans le paragraphe 2.1.1. On calcule les différences $d_i = x_{1,i} - x_{2,i}$ entre les valeurs observées des deux échantillons ; on supprime les différences nulles et on note N le nombre de différences non nulles.

On classe ces différences par ordre croissant des valeurs absolues. On affecte à chaque différence son rang dans ce classement. S'il y a des ex-aequo, on attribue à chacun d'eux un rang égal à la moyenne des rangs qu'ils occupent.

On calcule alors la somme w_+ des rangs des différences positives et la somme w_- des rangs des différences négatives. On calcule alors w, plus petite des deux valeurs w_+ et w_- : $w = \min(w_+, w_-)$.

On peut vérifier que $w_+ + w_- = \dfrac{N(N+1)}{2}$.

Test (bilatéral) **de** $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ **contre** $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$.

Soit W la variable aléatoire prenant la valeur w à chaque échantillonnage. La table 9 permet de determiner le réel w_α tel que $P(W \leq w_\alpha) = \alpha$ sous l'hypothèse H_0, et on décide que :

- si $w > w_\alpha$, alors on ne peut rejeter H_0 ;
- si $w \leq w_\alpha$, alors on rejette H_0 avec une probabilité α de se tromper.

Si $N > 25$, alors sous l'hypothèse H_0, W suit approximativement la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$, avec $\mu = \dfrac{N(N+1)}{2}$ et $\sigma = \sqrt{\dfrac{N(N+1)(2N+1)}{24}}$. On calcule alors $\varepsilon = \dfrac{w-\mu}{\sigma}$. On détermine u_α tel que $P(-u_\alpha < U < u_\alpha) = 1 - \alpha$ (table 2) et on décide que :

- si $\varepsilon \in \,]-u_\alpha, u_\alpha[$, alors on ne peut rejeter H_0 ;
- si $\varepsilon \notin \,]-u_\alpha, u_\alpha[$, alors on rejette H_0 avec une probabilité α de se tromper.

Remarque. Comme le test de Mann et Whitney, le test de Wilcoxon est un test de rangs non-paramétrique.

2.2. Comparaison de moyennes - Cas de k populations

Le **test de Kruskal et Wallis** est l'analogue non paramétrique de l'analyse de la variance à un facteur.

Les k échantillons E_i de taille n_i sont supposés indépendants, mais on fait plus d'hypothèse sur les lois des X_i.

On classe par ordre croissant l'ensemble des valeurs observées $x_{1,1}, x_{1,2}, \ldots, x_{1,n_1}$, $x_{2,1}, x_{2,2}, \ldots, x_{2,n_2}$ et $x_{k,1}, x_{k,2}, \ldots, x_{k,nk}$ des k échantillons. On affecte à chaque valeur son rang dans ce classement. S'il y a des ex-aequo, on attribue à chacun d'eux un rang égal à la moyenne des rangs qu'ils occupent.

A chaque échantillon E_i on associe la somme r_i des rangs des valeurs de cet échantillon. Soit H la variable aléatoire qui prend au cours de chaque échantillonnage la valeur $h = \dfrac{12}{n(n+1)} \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{r_i^2}{n_i} - 3(n+1)$, avec $n = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} n_i$.

Test de $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k$ **contre** H_1 : **les moyennes ne sont pas égales**.

Sous l'hypothèse H_0, lorsque les n_i sont assez grands ($n_i > 5$ en pratique), H suit approximativement la loi de khi-deux à $k-1$ degrés de liberté. On détermine le réel b_α tel que $P(H \geq b_\alpha) = \alpha$ (table 4), et on décide que :

- si $h < b_\alpha$, alors on ne peut rejeter H_0 ;
- si $h \geq b_\alpha$, alors on rejette H_0 avec une probabilité α de se tromper.

Lorsque certains n_i ne sont pas assez grands, on ne peut plus utiliser l'approximation précédente de la loi de H. La table 10 donne le réel h_α tel que $P(H \geq h_\alpha) = \alpha$, et on décide que :

- si $h < h_\alpha$, alors on ne peut rejeter H_0 ;
- si $h \geq h_\alpha$, alors on rejette H_0 avec une probabilité α de se tromper.

2.3. Coefficient de corrélation de rang : test de Spearman.

Sur une population, on considère deux variables aléatoires X et Y, et on veut tester l'absence de corrélation entre X et Y. Sans hypothèse sur les lois de X et Y, on ne peut pas utiliser les résultats précédents.

Dans ce cas, à partir des n couples d'observations (x_1,y_1), (x_2,y_2), ... (x_n,y_n), on range par ordre croissant les valeurs x_1, x_2, ..., x_n d'une part et les valeurs y_1, y_2, ..., y_n d'autre part. On remplace alors les x_i par leur rang x_i' et les y_i par leur rang y_i' ; en cas d'ex-aequo, le rang est la moyenne des rangs occupés par ces ex-aequos. Soient alors X' et Y' les variables aléatoires ainsi déterminées.

On appelle *coefficient de corrélation de rang de Spearman* le nombre ρ_S égal au coefficient de corrélation entre X' et Y'. Une estimation de ρ_S est donnée par le coefficient de corrélation r_S calculé à partir des n couples (x_i',y_i'). Soit R_S la variable aléatoire qui prend la valeur r_S au cours de chaque échantillonnage.

Soit $d_i = x_i' - y_i'$. S'il n'y a pas d'ex-aequo, on a aussi $r_S = 1 - \dfrac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n(n^2-1)}$.

Test de $H_0 : \rho_S = 0$ **contre** $H_1 : \rho_S \neq 0$.

Sous l'hypothèse H_0, lorsque $n \geq 10$, la variable aléatoire $T = \dfrac{R_S\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-R_S^2}}$ suit approximativement la loi de Student à $n-2$ degrés de liberté. On calcule $t = \dfrac{r_S\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_S^2}}$. On détermine le réel t_α tel que $P(-t_\alpha < T < t_\alpha) = 1-\alpha$ (table 3) et on décide que :

- si $t \in\,]-t_\alpha, t_\alpha[$, alors on ne peut rejeter H_0 ;
- si $t \notin\,]-t_\alpha, t_\alpha[$, alors on rejette H_0 avec une probabilité α de se tromper, i.e. que l'on considère que X et Y sont liées, sans savoir de quelle façon.

Lorsque $n < 10$, on ne peut plus utiliser l'approximation précédente de la loi de T. La table 11 donne alors le réel r_α tel que $P(|R_S| > r_\alpha) = \alpha$, et on décide que :

- si $|r_S| < r_\alpha$, alors on ne peut rejeter H_0 ;
- si $|r_S| \geq r_\alpha$, alors on rejette H_0 avec une probabilité α de se tromper.

3. Exercices **Sauf mention explicite, les tests seront réalisés au risque 5%.**

Exercice 1 Sur deux échantillons indépendants issus de deux populations, l'observation d'une variable quantitative a donné les résultats suivants :

- échantillon 1 : 3,0 ; 9,8 ; 2,0 ; 5,2 ; 3,6 ; 5,9 ; 8,5 ; 9,4 ;
- échantillon 2 : 9,3 ; 12,5 ; 11,3 ; 7,6 ; 3,2 ; 8,6 ; 7,2 ; 14,2 ; 9,6 ; 3,8.

Ne faisant aucune hypothèse sur la loi suivie par la variable étudiée, comparer les moyennes des deux populations.

Exercice 2 Dans le cadre d'une expertise clinique de validation d'un médicament M, on administre à 10 malades, successivement et dans un ordre tiré au sort, le médicament M et une même dose d'un médicament de référence R. Les effets des deux substances sur chacun des 10 malades sont :

M	5	4	2	3	4	3	8	5	4	5
R	6	3	3	1	1	3	4	2	5	7

Peut-on dire que les médicaments M et R ont des effets significativement différents au risque 5% ?

Exercice 3. Plusieurs sujets sont choisis au hasard dans une population et, parmi ceux-ci, certains sont tirés au sort pour recevoir un traitement (groupe A), les autres devant servir de témoins (groupe B).

Le traitement est censé modifier le résultat d'un dosage biologique. Les résultats, exprimés en mg/l, sont les suivants :

Groupe A	6,50	5,50	8,00	7,00	6,00		
Groupe B	7,00	8,50	8,00	7,50	9,00	7,20	8,20

Peut-on admettre que le traitement modifie le paramètre biologique ?

Exercice 4. La quantité de bactéries par cm^3 de lait provenant de 8 vaches différentes est estimée juste après la traite et 24 h plus tard. Les distributions des résultats obtenus ne suivent pas une loi normale. Existe-t-il un accroissement significatif du nombre de bactéries par cm^3 de lait au cours du temps ?

Vache n°	Juste après	24 h après	Vache n°	Juste après	24 h après
1	12000	14000	5	15000	26000
2	13000	20000	6	22000	30000
3	21500	31000	7	11000	16000
4	17000	28000	8	21000	29000

Exercice 5. On a dosé la teneur en calcium de trois types d'eaux issues d'origines géographiques différentes. Chaque type d'eau a fait l'objet de quatre prélèvements. Les résultats des dosages (en mg de calcium par litre d'eau) sont :

Eau 1 : 18 , 20 , 22 , 25. Eau 2 : 15 , 16 , 17 , 21. Eau 3 : 15 , 20 , 21 , 25.

L'origine géographique a-t-elle une influence significative sur la teneur en calcium des eaux considérées ?

Exercice 6. On a étudié l'activité d'une enzyme, l'actylcholinestérase, chez des animaux soumis à l'action d'un insecticide organophosphoré. Elle est exprimé ici en micromoles de substrat hydrolysé par minute et par mg de protéines. Les résultats obtenus sur des échantillons indépendants en fonction du temps d'exposition sont fournis par le tableau suivant.

aucune exposition	1 jour	2 jours	3 jours
15,0	15,0	2,0	0,5
8,5	9,0	2,2	3,0
10,0	8,0	4,0	2,3
10,0	2,0	2,4	0,6
7,6	5,0	1,1	0,9
5,0	3,0	0,7	0,5

L'insecticide entraîne-t-il une diminution signicative de l'activité de l'enzyme ?

Exercice 7. On donne ci-dessous les notes obtenus par un groupe d'étudiants de 1ère année dans deux UE de mathématiques et de physique :

M	9	10	14	8	13	19	18	6
P	13	9	12	12	11	20	19	14

Y a-t-il une corrélation significative entre les résultats des élèves dans les deux UE ?

Exercice 8. On se demande s'il existe une relation entre la longueur de la queue et celle du corps d'un souriceau élevé dans des conditions normales d'éclairement. On tire au sort huit souris adultes élevées dans des conditions d'éclairement normal, et on mesure pour chacune d'elles, le corps et la queue, obtenant ainsi les résultats suivants :

Longueur du corps	11,6	12,4	10,9	11,2	12,1	11,8	13,1	12,5
Longueur de la queue	10,4	10,1	9,7	9,9	10,8	11,0	12,1	11,7

Peut-on considérer, au vu de ces données, que la queue est d'autant plus longue que la souris est plus grande ?

Table des coefficients a_i du test de Shapiro-Wilk

i \ n	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0,6646	0,6431	0,6233	0,6052	0,5888	0,5739	0,5601	0,5475	0,5359	0,5251	0,5150
2	0,2413	0,2806	0,3031	0,3164	0,3244	0,3291	0,3315	0,3325	0,3325	0,3318	0,3306
3	0,0000	0,0875	0,1401	0,1743	0,1976	0,2141	0,2260	0,2347	0,2412	0,2460	0,2495
4			0,0000	0,0561	0,0947	0,1224	0,1429	0,1586	0,1707	0,1802	0,1878
5					0,0000	0,0399	0,0695	0,0922	0,1099	0,1240	0,1353
6							0,0000	0,0303	0,0539	0,0727	0,0880
7									0,0000	0,0240	0,0433
8											0,0000

i \ n	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
1	0,5056	0,4968	0,4886	0,4808	0,4734	0,4643	0,4590	0,4542	0,4493	0,4450	0,4407	0,4366
2	0,3290	0,3273	0,3253	0,3232	0,3211	0,3185	0,3156	0,3126	0,3098	0,3069	0,3043	0,3018
3	0,2521	0,2540	0,2553	0,2561	0,2565	0,2578	0,2571	0,2563	0,2554	0,2543	0,2533	0,2522
4	0,1939	0,1988	0,2027	0,2059	0,2085	0,2119	0,2131	0,2139	0,2145	0,2148	0,2151	0,2152
5	0,1447	0,1524	0,1587	0,1641	0,1686	0,1736	0,1764	0,1787	0,1807	0,1822	0,1836	0,1848
6	0,1005	0,1109	0,1197	0,1271	0,1334	0,1399	0,1443	0,1480	0,1512	0,1539	0,1563	0,1584
7	0,0593	0,0725	0,0837	0,0932	0,1013	0,1092	0,1150	0,1201	0,1245	0,1283	0,1316	0,1346
8	0,0196	0,0359	0,0496	0,0612	0,0711	0,0804	0,0878	0,0941	0,0997	0,1046	0,1089	0,1128
9		0,0000	0,0163	0,0303	0,0422	0,0530	0,0618	0,0696	0,0764	0,0823	0,0876	0,0923
10				0,0000	0,0140	0,0263	0,0368	0,0459	0,0539	0,0610	0,0672	0,0728
11						0,0000	0,0122	0,0228	0,0321	0,0403	0,0476	0,0540
12								0,0000	0,0107	0,0200	0,0284	0,0358
13										0,0000	0,0094	0,0178
14												0,0000

Table des valeurs critiques w_α du test de Shapiro-Wilk

TABLE 7

Test de Mann et Whitney ($\alpha = 0{,}05$)

$$0 \quad m_\alpha \quad \frac{n_1 n_2}{2}$$

La table donne la valeur m_α telle que $P(U \leqslant m_\alpha) = \alpha = 0{,}05$ pour deux échantillons d'effectifs n_1 et n_2 avec $n_1 \leqslant n_2$.

n_1 \ n_2	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	—	—	—	—	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2
3	—	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8
4	0	1	2	3	4	4	5	6	7	8	9	10	11	11	12	13	14
5		2	3	5	6	7	8	9	11	12	13	14	15	17	18	19	20
6			5	6	8	10	11	13	14	16	17	19	21	22	24	25	27
7				8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34
8					13	15	17	19	22	24	26	29	31	34	36	38	41
9						17	20	23	26	28	31	34	37	39	42	45	48
10							23	26	29	33	36	39	42	45	48	52	55
11								30	33	37	40	44	47	51	55	58	62
12									37	41	45	49	53	57	61	65	69
13										45	50	54	59	63	67	72	76
14											55	59	64	69	74	78	83
15												64	70	75	80	85	90
16													75	81	86	92	98
17														87	93	99	105
18															99	106	112
19																113	119
20																	127

TABLE 8

Test de Mann et Whitney ($\alpha = 0{,}01$)

$$0 \quad m_\alpha \quad \frac{n_1 n_2}{2}$$

La table donne la valeur m_α telle que $P(U \leqslant m_\alpha) = \alpha = 0{,}01$ pour deux échantillons d'effectifs n_1 et n_2 avec $n_1 \leqslant n_2$.

n_1 \ n_2	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0	0
3	—	—	—	—	—	0	0	0	1	1	1	2	2	2	2	3	3
4	—	—	0	0	1	1	2	2	3	3	4	5	5	6	6	7	8
5		0	1	1	2	3	4	5	6	7	7	8	9	10	11	12	13
6			2	3	4	5	6	7	9	10	11	12	13	15	16	17	18
7				4	6	7	9	10	12	13	15	16	18	19	21	22	24
8					7	9	11	13	15	17	18	20	22	24	26	28	30
9						11	13	16	18	20	22	24	27	29	31	33	36
10							16	18	21	24	26	29	31	34	37	39	42
11								21	24	27	30	33	36	39	42	45	48
12									27	31	34	37	41	44	47	51	54
13										34	38	42	45	49	53	57	60
14											42	46	50	54	58	63	67
15												51	55	60	64	68	73
16													60	65	70	74	79
17														70	75	81	86
18															81	87	92
19																93	99
20																	105

TABLE 9

Test de Wilcoxon

$$0 \quad w_\alpha \quad \frac{N(N+1)}{4}$$

La table donne la valeur w_α telle que $P(W \leqslant w_\alpha) = \alpha$, dans les cas $\alpha = 0{,}05$ et $\alpha = 0{,}01$.

α \ N	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
0,05	2	4	6	8	11	14	17	21	25	30	35	40	46	52	59	66	73	81	89
0,01	—	0	2	3	5	7	10	13	16	20	23	28	32	38	43	49	55	61	68

TABLE 10

Test de Kruskal et Wallis

La table donne la valeur h_α telle que $P(H \geqslant h_\alpha) = \alpha$.

taille des échantillons	$\alpha = 0{,}05$	$\alpha = 0{,}01$
3 2 2	4,71	
3 3 1	5,10	
3 3 2	5,22	6,26
3 3 3	5,60	6,50
4 2 1	4,94	
4 2 2	5,15	6,30
4 3 1	5,21	
4 3 2	5,42	6,35
4 3 3	5,73	6,75
4 4 1	4,93	6,67
4 4 2	5,45	6,90
4 4 3	5,60	7,14
4 4 4	5,70	7,60
5 2 1	5,00	
5 2 2	5,10	6,40
5 3 1	4,91	6,42
5 3 2	5,25	6,82
5 3 3	5,66	7,03
5 4 1	4,92	6,90
5 4 2	5,27	7,12
5 4 3	5,63	7,44
5 4 4	5,62	7,75
5 5 1	5,00	7,08
5 5 2	5,27	7,30
5 5 3	5,64	7,55
5 5 4	5,64	7,80
5 5 5	5,72	7,98

TABLE 11

Coefficient de corrélation de rang de Spearman

La table donne la valeur r_α telle que $P(|R_S| > r_\alpha) = \alpha$.

α \ n	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0,10	0,99	0,87	0,77	0,69	0,64	0,59	0,56	0,53	0,51	0,49
0,05	–	0,95	0,85	0,78	0,73	0,68	0,64	0,61	0,59	0,56
0,02	–	0,99	0,93	0,87	0,82	0,77	0,73	0,70	0,67	0,64
0,01	–	–	0,97	0,91	0,86	0,82	0,79	0,75	0,72	0,70