Université de Picardie Jules Verne
UFR des Sciences **2011-2012**

Licence mention Mathématiques - Semestre 4
Probabilités 1

Généralités sur les variables aléatoires réelles

1 - Généralités.

1.1. Notion de variable aléatoire réelle (v.a.r.).

Soient $\mathcal{E}$ une expérience aléatoire et $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé lié à cette expérience. Dans de nombreuses situations, on associe à chaque résultat $\omega \in \Omega$ un nombre réel noté $X(\omega)$; on construit ainsi une application $X \;:\; \Omega \to \mathbb{R}$. Historiquement, $\mathcal{E}$ était un jeu et X représentait le gain du joueur.

Exemples.

1) Un joueur lance un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6, et on observe le numéro obtenu. Si le joueur obtient 1, 3 ou 5, il gagne 1 euro ; s'il obtient 2 ou 4, il gagne 5 euros ; s'il obtient 6, il perd 10 euros. Prenons $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et P l'équiprobabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$

Soit X l'application de Ω dans $\mathbb{R}$ qui à tout $\omega \in \Omega$ associe le gain correspondant. On a $X(1) = X(3) = X(5) = 1,\; X(2) = X(4) = 5$ et $X(6) = -10$.

On peut s'intéresser à la probabilité de gagner 1 euro, c'est-à-dire d'avoir $X(\omega) = 1,$ ce qui se réalise si et seulement si $\omega \in \{1,3,5\}$. La probabilité cherchée est donc égale à $P(\{1,3,5\}) = 1/2$. On écrira aussi $P(X = 1) = 1/2$. On pourra donc considérer l'événement :

$$(X = 1) = \left\{\omega \in \Omega \;/\; X(\omega) = 1\right\} = \left\{\omega \in \Omega \;/\; X(\omega) \in \{1\}\right\} = X^{-1}(\{1\}) = \{1,3,5\}.$$

On aura de même $P(X = 5) = 1/3$ et $P(X = -10) = 1/6$.

On a ainsi construit un nouvel ensemble $\Omega_X = \{1,5,-10\}$, et muni cet ensemble de la probabilité P_X définie par les valeurs ci-dessus : $P_X(\{1\}) = 1/2$, $P_X(\{5\}) = 1/3$ et $P_X(\{-10\}) = 1/6$

2) Une machine est utilisée pour fabriquer des pièces de longueur l. On choisit une pièce au hasard. Soient Ω l'ensemble des pièces produites et X l'application qui à toute pièce ω associe sa longueur $X(\omega)$. Dans la pratique, on accepte une pièce avec un défaut ε, soit une longueur X comprise entre $l-\varepsilon$ et $l+\varepsilon$. On s'intéresse à la probabilité qu'une pièce choisie au hasard soit acceptée, soit $P([l-\varepsilon \leq X \leq l+\varepsilon])$. On devra donc considérer l'événement

$$(l-\varepsilon \leq X \leq l+\varepsilon) = \left\{\omega \in \Omega \;/\; X(\omega) \in [l-\varepsilon, l+\varepsilon]\right\} = X^{-1}([l-\varepsilon, l+\varepsilon])$$

Plus généralement, nous serons amenés à calculer la probabilité d'ensembles du type $(X = x)$, $(X \leq x)$, $(x < X \leq y)$, $\ldots$, si toutefois cette probabilité est bien définie. Pour s'en assurer, il faut, et il suffit, que ces ensembles soient des événements, c'est-à-dire qu'ils appartiennent à $\mathcal{A}$. On adopte alors la définition suivante.

Définition.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. On appelle *variable aléatoire réelle* sur $(\Omega, \mathcal{A})$ (on note v.a.r.) toute application X de Ω dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, $X^{-1}(I) = \left\{\omega \in \Omega \;/\; X(\omega) \in I\right\} \in \mathcal{A}$.

Remarque.

Considérons les intervalles de $\mathbb{R}$ de la forme $]-\infty, x]$. On peut alors montrer que tout intervalle I de $\mathbb{R}$ (et aussi tout borélien de $\mathbb{R}$) peut s'écrire comme réunion, intersection, complémentaire d'une suite d'intervalles de cette forme. Par exemple, $]a,b] =]-\infty,b] \setminus]-\infty,a]$ et $]a,b[= \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\infty, b-\frac{1}{n}\right]\right) \setminus]-\infty,a]$, et donc $X^{-1}(]a,b]) = X^{-1}(]-\infty,b]) \setminus X^{-1}(]-\infty,a])$ et $X^{-1}(]a,b[) = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} X^{-1}\left(\left]-\infty, b-\frac{1}{n}\right]\right)\right) \setminus X^{-1}(]-\infty,a])$. Ainsi,

Proposition.

X est une v.a.r. si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(X \leq x) = X^{-1}(]-\infty,x]) \in \mathcal{A}$.

Exemple. **Indicatrice d'un événement**.

Soient $\mathcal{E}$ une expérience aléatoire, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé associé et $A \in \mathcal{A}$.

On appelle *indicatrice de A* l'application $1_A \ : \ \Omega \to \{0,1\}, \omega \mapsto X(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ si } \omega \in A \\ 0 \text{ si } \omega \notin A \end{cases}$.

On note $X = 1_A$. On a $\Omega_X = X(\Omega) = 1_A(\Omega) = \{0,1\}$. L'application 1_A est bien une v.a.r.

car $(1_A \leq x) = \begin{cases} \emptyset \ \text{ si } x < 0 \\ \overline{A} \ \text{ si } x \in [0,1[\\ \Omega \ \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$ et donc $(1_A \leq x) = (1_A)^{-1}(]-\infty, x]) \in \mathcal{A}$.

1.2. Espace probabilisé image.

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une application de Ω dans $\mathbb{R}$. On note $\Omega_X = X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par X. On a $\Omega_X \subset \mathbb{R}$.

Si Ω est fini ou infini dénombrable (i.e. au plus dénombrable), alors $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et toute application X de Ω dans $\mathbb{R}$ est une v.a.r. (puisque pour tout réel x, $X^{-1}(]-\infty, x])$ est une partie de Ω !) . On a de plus Ω_X au plus dénombrable, et on peut le munir de la tribu $\mathcal{A}_X = \mathcal{P}(\Omega_X)$. On étudiera cette situation dans le chapitre suivant.

Si Ω est infini non-dénombrable, par exemple $\Omega = \mathbb{R}$, on peut munir Ω de la tribu $\mathcal{A} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, tribu borélienne sur $\mathbb{R}$ (ou tribu des boréliens de $\mathbb{R}$), i.e. la plus petite tribu $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ sur $\mathbb{R}$ contenant tous les intervalles de $\mathbb{R}$. Nous admettons ici l'existence et l'unicité d'une telle tribu. On peut démontrer que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ est la tribu engendrée par la classe des intervalles de la forme $]-\infty, x]$. On aura alors $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ (inclusion stricte). Le fait qu'une application X de Ω dans $\mathbb{R}$ soit une v.a.r. n'est donc plus trivial.

De façon générale, on considère une v.a.r. X de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.

Théorème (**admis**).

Soit X une v.a.r. sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. L'application P_X définie par :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, P_X(]-\infty, x]) = P(X^{-1}(]-\infty, x])) = P(X \leq x)$$

est un probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, appelée *probabilité image de P par X* (ou *loi de probabilité de X*).

Ainsi, $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, P_X)$ est un espace probabilisé. Par cette construction, on a transporté l'information de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sur l'espace probabilisé $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, P_X)$.

1.3. Fonction de répartition.

Définition.

Soit X une v.a.r. définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On appelle *fonction de répartition de X* (ou de P_X) la fonction numérique F_X définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \ F_X(x) = P(X \leq x) = P_X(]-\infty, x]).$$

Propriétés.

Soit F la fonction de répartition d'une v.a.r. X sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Alors :

(i) F est à valeurs dans $[0,1]$; (iii) F est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$;

(ii) F est croissante sur $\mathbb{R}$; (iv) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

Preuve.

(i) Evident.

(ii) Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$. Alors $]-\infty, y] =]-\infty, x] \cup]x, y]$ et donc $X^{-1}(]-\infty, y]) = X^{-1}(]-\infty, x]) \cup X^{-1}(]x, y])$, i.e. $(X \leq y) = (X \leq x) \cup (x < X \leq y)$, cette réunion étant disjointe, d'où $P(X \leq y) = P(X \leq x) + P(x < X \leq y)$, et donc $F(y) = F(x) + P(x < X \leq y) \geq F(x)$.

(iii) F étant une fonction bornée et croissante sur $\mathbb{R}$, elle admet des limites finies à droite et à gauche en tout point x_0 de $\mathbb{R}$. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $(x_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par $x_n = x_0 + \dfrac{1}{n}$, convergeant vers x_0 par valeurs supérieures : on a $\lim_{n \to +\infty} F(x_n) = \lim_{x \to x_0^+} F(x)$. La suite d'événements $((X \leq x_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et on a

$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} (X \leq x_n) = (X \leq x_0)$, donc $P(X \leq x_0) = P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} (X \leq x_n) \right) = \lim_{n \to +\infty} P((X \leq x_n))$, i.e. $F(x_0) = \lim_{n \to +\infty} F(x_n)$.

On en déduit que $F(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} F(x)$.

(iv) F étant une fonction bornée et croissante sur $\mathbb{R}$, elle admet des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$.

La suite d'événements $((X \leq -n))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(X \leq -n) = \emptyset$, donc

$$0 = P(\emptyset) = P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(X \leq -n)\right) = \lim_{n\to+\infty} P(X \leq -n) = \lim_{n\to+\infty} F(-n) = \lim_{x\to-\infty} F(x).$$

La suite d'événements $((X \leq n))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(X \leq n) = \Omega$, donc

$$1 = P(\Omega) = P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(X \leq n)\right) = \lim_{n\to+\infty} P(X \leq n) = \lim_{n\to+\infty} F(n) = \lim_{x\to+\infty} F(x).$$

Remarque.

Réciproquement, on peut démontrer que toute fonction numérique $F \ : \ \mathbb{R} \to [0,1]$ vérifiant les propriétés (i) à (iv) est la fonction de répartition d'une v.a.r. X.

Propriétés.

Soit F la fonction de répartition d'une v.a.r. X sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Alors

(i) pour tous réels x et y tels que $x < y$, $P(x < X \leq y) = F(y) - F(x)$.

(ii) pour tout réel x_0, $P(X = x_0) = F(x_0) - \lim_{x\to x_0^-} F(x)$;

en particulier, F est continue en x_0 si et seulement si $P(X = x_0) = 0$.

Ainsi, la fonction de répartition F de X caractérise la loi de probabilité P_X.

Preuve.

(i) On a déja vu que $P(X \leq y) = P(X \leq x) + P(x < X \leq y)$.

(ii) On a $(X \leq x_0) = (X < x_0) \cup (X = x_0)$ d'où $F(x_0) = P(X < x_0) + P(X = x_0)$. Il reste à montrer que $P(X < x_0) = \lim_{x\to x_0^-} F(x)$. Pour cela, considérons la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ définie par $x_n = x_0 - \frac{1}{n}$. La suite d'événements $\left(\left(X \leq x_0 - \frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left(X \leq x_0 - \frac{1}{n}\right) = (X < x_0)$ d'où $P(X < x_0) = \lim_{n\to+\infty} P\left(X \leq x_0 - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} F\left(x_0 - \frac{1}{n}\right) = \lim_{x\to x_0^-} F(x)$.

Si F est continue en x_0, alors $F(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} F(x)$, et donc $P(X = x_0) = 0$.

Dans les chapitres suivants, nous étudierons deux types de variables aléatoires réelles :

- les v.a.r. discrètes, prenant un nombre fini ou infini dénombrable (i.e. au plus dénombrable) de valeurs en lesquelles la fonction de répartition n'est pas continue ;
- les v.a.r. absolument continues (ou à densité), prenant un nombre infini non-dénombrable de valeurs, dont la fonction de répartition est continue sur $\mathbb{R}$.

2 - Vecteur aléatoire.

Dans des situations où interviennent plusieurs variables aléatoires, le calcul de la probabilité d'un événement dont la réalisation dépend des valeurs de ces variables doit faire intervenir ces variables considérées dans leur ensemble et non chacune isolément. On est ainsi amené à étudier une nouvelle notion, celle de vecteur aléatoire.

2.1. Définitions.

Définitions.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et n un entier naturel non nul. On appelle *vecteur aléatoire à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$ *tout* n-uplet $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A})$:

$$(X_1, X_2, \ldots, X_n) \ : \ \Omega \to \mathbb{R}^n, \ \ \omega \mapsto (X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)).$$

La fonction de répartition du vecteur aléatoire $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est la fonction $F_{(X_1, X_2, \ldots, X_n)}$ définie par :

$$F_{(X_1, X_2, \ldots, X_n)} \ : \ \mathbb{R}^n \to [0,1], \ \ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto P((X_1 \leq x_1) \cap (X_2 \leq x_2) \cap \ldots \cap (X_n \leq x_n)).$$

Remarque.

La fonction $F_{(X_1,X_2,\ldots,X_m)}$ est bien définie pour tout $(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$. En effet, puisque $X_1,X_2,\ldots,X_n$ sont des v.a.r. sur $(\Omega,\mathcal{A})$, les ensembles $(X_1 \leq x_1)$, $(X_2 \leq x_2)$, $\ldots$, $(X_n \leq x_n)$ sont des éléments de $\mathcal{A}$, et donc leur intersection est aussi un élément de $\mathcal{A}$, qui admet donc une probabilité.

Cas particulier : **couple de variables aléatoires réelles**.

Si X et Y sont deux v.a.r., alors (X,Y) est appelé couple de v.a.r. Sa fonction de répartition est la fonction $F_{(X,Y)}$ définie par : $F_{(X,Y)}$: $\mathbb{R}^2 \to [0,1]$, $(x,y) \mapsto P((X \leq x) \cap (Y \leq y))$

On démontre que pour tout réel a, $\lim\limits_{y\to+\infty} F_{(X,Y)}(a,y) = F_X(a)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F_{(X,Y)}(x,a) = F_Y(a)$.

2.2. Opérations sur les v.a.r.

Propriétés.

Soient X et Y sont deux v.a.r. sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$, λ un réel. Alors $X+Y$, λX, XY, $\max(X,Y)$ et $\min(X,Y)$ sont des v.a.r. sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$.

Ainsi, muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire, l'ensemble des v.a.r. sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (en tant que sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de Ω dans $\mathbb{R}$). Si de plus on le munit du produit, c'est une algèbre sur $\mathbb{R}$ (en tant que sous-algèbre de l'algèbre des applications de Ω dans $\mathbb{R}$).

Exemple. **Variable aléatoire binomiale**.

On considère une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ au cours de laquelle un événement A a une probabilité p de se réaliser. On répète n fois cette expérience dans les mêmes conditions et de manière indépendante. Soit X le nombre (aléatoire) de réalisations de A au cours de ces n expériences.

On peut écrire $X = \sum\limits_{i=1}^{n} 1_A^{(i)}$, où $1_A^{(i)}$ est l'indicatrice de A au cours de la $i^{ème}$expérience. En tant que somme de v.a.r., X est une v.a.r. On a déja vu que : $\Omega_X = \{0,1,\ldots,n\}$, et pour tout $k \in \{0,1,\ldots,n\}$, $P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$. X est appelée variable aléatoire binomiale : on dit X suit la loi Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

2.3. V.a.r. indépendantes.

Définitions.

Soient X et Y deux v.a.r. définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$. On dit que X et Y sont *indépendantes* si pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, les événements $(X \leq x)$ et $(Y \leq y)$ sont indépendants, i.e. $P((X \leq x) \cap (Y \leq y)) = P(X \leq x)P(Y \leq y)$, i.e. $F_{(X,Y)}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$.

Soient n un entier naturel non nul, X_1, X_2, ..., X_n n v.a.r. définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$. On dit que X_1, X_2, ..., X_n sont *indépendantes (mutuellement)* si pour tous x_1, x_2, ..., $x_n \in \mathbb{R}$, les événements $(X_1 \leq x_1)$, $(X_2 \leq x_2)$,..., $(X_n \leq x_n)$ sont indépendants (mutuellement).

Proposition.

Si X_1, X_2, ..., X_n sont indépendantes, alors toute fonction numérique de k d'entre elles est indépendante de toute fonction des $n-k$ autres.

3. Exercices

Exercice 1.Soient $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire réelle et F_X sa fonction de répartition. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Exprimer à l'aide de F_X les probabilités $P(X > a)$, $P(X \geq a)$, $P(a < X \leq b)$, $P(a < X < b)$ et $P(a \leq X \leq b)$. On distinguera le cas général et le cas d'une variable aléatoire X à densité (pour lequel F_X est continue sur $\mathbb{R}$).

Exercice 2.Soient $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace probabilisé, X et Y deux variables aléatoires réelles, F_X et F_Y leurs fonctions de répartition, $F_{(X,Y)}$ la fonction de répartition du couple (X,Y). On considère les deux variables aléatoires réelles $U = \max(X,Y)$ et $V = \min(X,Y)$, et F_U et F_V leur fonction de répartition. Exprimer F_U et F_V en fonction de F_X, F_Y et $F_{(X,Y)}$. Observer ensuite le cas particulier où X et Y sont indépendantes.