

Licence mention Mathématiques - Semestre 4
Probabilités 1

Espaces Probabilisés

Le but de ce chapitre est de proposer un modèle mathématique permettant de décrire une expérience aléatoire.

1 - La notion d'événement ; algèbre des événements.**1.1. La notion d'événement.**

Pour construire un modèle probabiliste d'un phénomène aléatoire, il convient d'abord de se donner un *ensemble des éventualités* adapté au problème. On adopte la définition suivante.

Définition.

Soit $\mathcal{E}$ une expérience aléatoire, i.e. une expérience susceptible d'être répétée dans les mêmes conditions mais dont le résultat n'est pas prévisible (du "au hasard"). On appelle *ensemble fondamental* ou *univers* associé à $\mathcal{E}$ l'ensemble noté Ω de tous les résultats possibles (a priori) ou *éventualités* de $\mathcal{E}$. On désignera par ω toute éventualité, c'est-à-dire tout élément de Ω .

Remarque.

La notion de "résultat" n'est pas clairement définie ; en fait, c'est l'expérimentateur qui fixe lui-même ce qui mérite le nom de "résultat" en fonction de ses préoccupations. C'est pourquoi il n'y a pas unicité dans le choix de Ω .

Exemple 1. $\mathcal{E}$: "lancer d'un dé cubique (faces numérotées de 1 à 6)".

On peut prendre $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ si l'on s'intéresse au numéro obtenu, ou $\Omega = \{0, 1\}$ si l'on s'intéresse seulement à la parité du numéro obtenu.

Exemple 2. $\mathcal{E}$: "lancer deux dés cubiques discernables (faces numérotées de 1 à 6)".

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2 = \{\text{arrangements avec répétition d'ordre 2 de } \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$ si l'on s'intéresse aux numéros obtenus, ou $\Omega = \{2, 3, \dots, 12\}$ si l'on s'intéresse à la somme des deux numéros obtenus.

Exemple 3. $\mathcal{E}$: "tirer une main de 8 cartes dans un jeu de 32 cartes".

$\Omega = \{\text{combinaisons de 8 cartes prises parmi 32}\}$.

Remarque. L'ensemble Ω n'est pas nécessairement un ensemble fini.

Exemple 4. $\mathcal{E}$: "on lance une pièce jusqu'à obtenir 1 fois Pile".

Si l'on appelle "résultat" le nombre de lancers nécessaires, alors $\Omega = \mathbb{N}^*$.

Exemple 5. $\mathcal{E}$: "on tire une balle sur une cible de diamètre 1m".

Si l'on appelle "résultat" :

- le point d'impact de la balle sur le plan de la cible : $\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4} \right\}$;
- la distance du point d'impact au centre de la cible : $\Omega = \left[0, \frac{1}{2} \right]$;
- le gain éventuel, la cible étant divisée en 5 zones : $\Omega = \{0, 5, 10, 20, 30\}$.

Définition.

Soit $\mathcal{E}$ une expérience aléatoire et Ω un univers associé. On appelle *événement lié à $\mathcal{E}$* toute assertion ou proposition logique dont on peut dire qu'elle est vraie ou non une fois l'expérience $\mathcal{E}$ réalisée (i.e. pour toute éventualité $\omega \in \Omega$).

On dit qu'un *événement* est *réalisé* si l'assertion qui le définit est vraie.

On convient alors d'identifier un tel événement au sous-ensemble des $\omega \in \Omega$ pour lesquels il est réalisé : un *événement lié à $\mathcal{E}$* est alors une *partie de Ω* .

Ainsi, lorsque ω est le résultat d'une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ et A est un événement, on a

$$(A \text{ est réalisé}) \Leftrightarrow \omega \in A$$

Reprenons l'exemple 2.

$\mathcal{E}$: "lancer de deux dés". $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2 = \{(x, y) / x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$.

Considérons l'événement A : "la somme des points obtenus est supérieure ou égale à 10". L'événement A est identifié au sous-ensemble de Ω suivant, noté encore A :

$$A = \{(4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}.$$

De même, les événements B : "la somme des points obtenus est égale à 3" et C : "le produit des points obtenus est égal à 2" sont $B = \{(1, 2), (2, 1)\}$ et $C = \{(1, 2), (2, 1)\}$. On remarque que ces événements B et C , apparemment différents, correspondent à la même partie de Ω . On confondra donc B et C , et on écrira $B = C$.

Définitions.

Soit Ω un univers associé à une expérience aléatoire $\mathcal{E}$. Alors, pour tout $\omega \in \Omega$, $\{\omega\}$ est un événement appelé *événement élémentaire*. De plus, Ω est appelé *événement certain* et $\emptyset$ est appelé *événement impossible*.

1.2. Algèbre des événements.

D'après ce qui précède, tout événement est une partie de Ω . Réciproquement, toute partie de Ω est-elle un événement ? Pour aborder cette question, supposons que l'ensemble des événements est un ensemble $\mathcal{A}$ de parties de Ω (i.e. $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$), dont nous allons définir les propriétés en nous référant à des besoins usuels.

Si A et B sont deux événements liés à une expérience aléatoire $\mathcal{E}$, il est naturel de considérer la non-réalisation de A (ou événement contraire de A), la réalisation simultanée de A et B , ou encore la réalisation de l'un au moins des événements A ou B . La définition d'événement comme partie de Ω conduit à :

- l'événement contraire de A est l'événement $\bar{A} = C_{\Omega}A$;
- la réalisation simultanée de A et B est l'événement $A \cap B$;
- la réalisation de l'un au moins des événements A ou B est l'événement $A \cup B$.

Reprenons l'exemple 1.

$\mathcal{E}$: "lancer de un dé". $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Les événements A : "on obtient un nombre pair" et B : "on obtient un multiple de 3" sont $A = \{2, 4, 6\}$ et $B = \{3, 6\}$. Les événements $A \cap B$: "on obtient un multiple pair de 3" et $A \cup B$: "on obtient un nombre pair ou un multiple de 3" sont alors $A \cap B = \{6\}$ et $A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$.

Plus généralement, si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite infinie d'événements, on peut également être amené à considérer les événements $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ (tous les événements A_n sont réalisés) et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ (l'un au moins des événements A_n est réalisé).

Exemple 6.

$\mathcal{E}$: "lancer une pièce de monnaie une infinité de fois".

Considérons l'événement A : "obtenir "pile" à chaque lancer".

Un choix naturel d'univers Ω associé à $\mathcal{E}$ est celui de l'ensemble des suites infinies formées de P et de F. On a donc $\Omega = \{P, F\}^{\mathbb{N}^*} = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} / u_n \in \{P, F\}\}$. Considérant la suite infinie d'événements A_n : "obtenir "pile" au n -ième lancer", on a $A = \{(P, P, \dots, P, \dots)\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$.

Ces considérations nous amènent à la définition suivante.

Définition.

Soit Ω un ensemble quelconque. On appelle *tribu* (ou σ -*algèbre*) sur Ω toute partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ telle que :

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$ (ii) $\forall A \in \mathcal{A}, \bar{A} \in \mathcal{A}$ (stabilité par passage au complémentaire)

(iii) pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est encore un élément de $\mathcal{A}$

(stabilité par réunion dénombrable).

Propriétés.

Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω . Alors :

- (i) $\emptyset \in \mathcal{A}$
- (ii) Pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est encore un élément de $\mathcal{A}$
(stabilité par intersection dénombrable)
- (iii) Si $A_1, \dots, A_n$ sont n éléments de $\mathcal{A}$ ($n \geq 2$), alors $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$ et $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$
- (iv) $\forall (A, B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}, A \setminus B \in \mathcal{A}$
- (v) $\forall (A, B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}, A \Delta B \in \mathcal{A}$ (stabilité par différence symétrique)

Corollaire.

Soit Ω un ensemble. Alors :

- (i) $\{\emptyset, \Omega\}$ est une tribu sur Ω , appelée *tribu grossière* sur Ω .
- (ii) $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu sur Ω .
- (iii) pour toute partie propre A de Ω , $\{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}$ est une tribu sur Ω .

Si Ω est un univers associé à une expérience aléatoire $\mathcal{E}$, les conditions imposées aux événements liés à $\mathcal{E}$ font que ces derniers constituent une tribu $\mathcal{A}$ sur Ω .

Il faut noter que la tribu $\mathcal{A}$ des événements liés à $\mathcal{E}$ contient tous les singletons de Ω (événements élémentaires).

Proposition

Soit $\mathcal{E}$ une expérience aléatoire dont l'univers Ω considéré est fini ou infini dénombrable. Alors on prendra $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ pour tribu des événements liés à $\mathcal{E}$.

Remarque.

Si Ω est infini non-dénombrable, alors on ne choisira pas pour tribu $\mathcal{P}(\Omega)$ (cette question n'est pas étudiée ici) mais la plus petite tribu $\mathcal{A}$ contenant une certaine classe de parties de Ω . Par exemple, si $\Omega = \mathbb{R}$, on prendra la tribu borélienne $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ (strictement incluse dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$) qui contient tous les intervalles de $\mathbb{R}$.

1.3. Espaces probabilisables.**Définitions.**

Un espace probabilisable est un couple $(\Omega, \mathcal{A})$ où Ω est un ensemble quelconque et $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω .

Si Ω est un univers associé à une expérience aléatoire $\mathcal{E}$, l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ est alors dit *lié à l'expérience aléatoire $\mathcal{E}$* .

Définitions.

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable lié à une expérience aléatoire $\mathcal{E}$.

- (i) Les éléments de $\mathcal{A}$ sont appelés *événements*.
- (ii) Soient $A, B \in \mathcal{A}$. On dit que l'événement A *entraîne* (ou *implique*) l'événement B si $A \subset B$.
- (iii) Soient $A, B \in \mathcal{A}$. On dit que A et B sont *incompatibles* (ou *disjoints*) si $A \cap B = \emptyset$.
- (iv) On appelle *système complet d'événements* toute partition finie ou dénombrable de Ω formée d'éléments de $\mathcal{A}$, i.e. toute famille $\{A_i\}_{i \in I}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux incompatibles ($A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$) et dont la réunion est Ω ($\Omega = \bigcup_{i \in I} A_i$).

Exemples.

a) Reprenons l'exemple 2. Considérons les événements suivants : A : la somme des deux dés est supérieure ou égale à 10, B : l'un des deux dés est supérieur ou égal à 4, C : l'un des deux dés est inférieur à 2. Alors $A \subset B$ et $A \cap C = \emptyset$.

b) Soit $A \in \mathcal{A}$. $\{A, \bar{A}\}$ est un système complet fini d'événements.

c) Soit $\Omega = \{\omega_n, n \in \mathbb{N}\}$. $\{\{\omega_n\}, n \in \mathbb{N}\}$ est un système complet dénombrable d'événements.

Pour conclure, voici un tableau comparatif des vocabulaires ensembliste et probabiliste.

Notations	Vocabulaire ensembliste	Vocabulaire probabiliste
$\emptyset$	ensemble vide	événement impossible
Ω	ensemble plein	événement certain
$\{\omega\}$	singleton de Ω	événement élémentaire
A	sous-ensemble de Ω	événement
$\omega \in A$	ω appartient à Ω	le résultat ω est une réalisation possible de A
$\bar{A}$	complémentaire de A dans Ω	événement contraire de A
$A \cup B$	réunion de A et B	A ou B
$A \cap B$	intersection de A et B	A et B
$A \cap B = \emptyset$	A et B sont disjoints	A et B sont incompatibles
$A \subset B$	A est inclus dans B	A implique B

2 - La notion de probabilité.

2.1. Introduction - Approche par les fréquences.

On rencontre constamment dans la vie courante la notion de probabilité d'un événement. Elle est parfois purement subjective, mais elle apparaît souvent sous une forme mathématique relativement précise.

Dans le jeu du pile ou face, il est naturel de dire que l'apparition de "pile" a la probabilité $1/2$. Cela provient d'abord d'une intuition d'égalité de chance d'apparition des deux faces. Plus quantitativement, si l'on répète un grand nombre de fois l'expérience qui consiste à jeter la pièce, on s'attend à trouver à peu près autant de "pile" que de "face", ce qui donne à la fréquence d'apparition de "pile" (fraction nombre de "pile" sur nombre d'expériences) une valeur voisine de $1/2$.

On ne peut démontrer ce résultat expérimental mais le but de la théorie des probabilités est de construire des modèles mathématiques qui traduisent ce genre de phénomènes sous une forme logique de telle sorte que, si une expérience est en accord avec les hypothèses mathématiques, ses résultats puissent être prévus par la théorie.

Généralisons l'exemple précédent. On effectue n expériences aléatoires identiques et "indépendantes". On note n_A le nombre de réalisations d'un événement A donné au cours de ces n expériences. On considère un autre événement B .

Soit $f_A = \frac{n_A}{n}$ la fréquence statistique de l'événement A , f_B celle de B . On a :

(i) $f_A \in [0, 1]$ et $f_B \in [0, 1]$.

(ii) si A est l'événement certain, alors $n_A = n$, et donc $f_A = \frac{n}{n} = 1$.

(iii) si A et B sont incompatibles, alors $n_{A \cup B} = n_A + n_B$, et donc $f_{A \cup B} = \frac{n_{A \cup B}}{n} = \frac{n_A + n_B}{n} = f_A + f_B$.

Lorsque n tend vers l'infini, on s'attend aussi à voir $f_A = \frac{n_A}{n}$ se stabiliser autour d'une valeur limite, qui sera la probabilité de A .

Cette approche de probabilité comme limite de fréquence conduit naturellement à la définition suivante.

Définition.

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable **fini**. On appelle *probabilité* sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application P de $\mathcal{A}$ dans $[0, 1]$ telle que :

(i) $P(\Omega) = 1$

(ii) Si A et B sont deux événements incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (additivité de P).

Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est appelé espace probabilisé.

Pour des raisons déjà rencontrées (répétition infinie d'expériences aléatoires), on doit étendre la propriété (ii) à une famille dénombrable d'événements deux à deux incompatibles. Cette propriété de σ -additivité fait qu'une probabilité est une mesure à valeurs dans $[0, 1]$.

2.2. Définition et propriétés d'une probabilité.

Définitions.

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. On appelle *probabilité* sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application P de $\mathcal{A}$ dans $[0, 1]$ telle que :

- (i) $P(\Omega) = 1$ (ii) Pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles, on a

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n) \quad (\sigma\text{-additivité de } P)$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est appelé espace probabilisé.

Si $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable lié à une expérience aléatoire $\mathcal{E}$, et si P est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$, alors $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est appelé espace probabilisé associé à l'expérience aléatoire $\mathcal{E}$.

Remarques.

- a) Une probabilité P sur un espace probabilisable n'est pas unique.
 b) De façon générale, toute étude probabiliste d'une expérience aléatoire devrait commencer par la recherche d'un espace probabilisé lié à cette expérience. Comme plusieurs espaces probabilisés peuvent parfois la décrire, on peut obtenir des résultats numériques différents.
 c) Il est parfois possible de résoudre certains problèmes sans connaître l'univers Ω . Il sera quand même nécessaire de connaître P , au moins pour un certains nombres d'événements.

Propriétés.

Soit P une probabilité sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.

- (i) $P(\emptyset) = 0$.

- (ii) Si $A_1, \dots, A_n$ sont n ($n \geq 2$) événements 2 à 2 incompatibles, alors $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$.

En particulier, si A et B sont deux événements incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

- (iii) $\forall A \in \mathcal{A}, P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

- (iv) $\forall A, B \in \mathcal{A}, P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$.

- (v) $\forall A, B \in \mathcal{A}, (A \subset B) \Rightarrow (P(B \setminus A) = P(B) - P(A) \text{ et } P(A) \leq P(B))$.

- (vi) $\forall A, B \in \mathcal{A}, P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Cas d'un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ fini ou infini dénombrable.

Posons $\Omega = \{\omega_i, i \in I\}$, avec $I \subset \mathbb{N}$ et $p_i = P(\{\omega_i\})$. On a $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Pour tout événement $A = \bigcup_{\omega \in A} \{\omega\} = \{\omega_j, j \in J\} = \bigcup_{j \in J} \{\omega_j\}$ avec $J \subset I$, on a

$$P(A) = P\left(\bigcup_{j \in J} \{\omega_j\}\right) = \sum_{j \in J} P(\{\omega_j\}) = \sum_{j \in J} p_j, \text{ les } \{\omega_j\} \text{ étant 2 à 2 incompatibles.}$$

De plus, $1 = P(\Omega) = P\left(\bigcup_{i \in I} \{\omega_i\}\right) = \sum_{i \in I} P(\{\omega_i\}) = \sum_{i \in I} p_i$.

Une probabilité P sur $\Omega = \{\omega_i, i \in I\}$ est donc définie par la donnée des nombres $p_i = P(\{\omega_i\})$, avec $p_i \geq 0$ et $\sum_{i \in I} p_i = 1$.

On parle aussi de distribution de probabilité.

Exemple fondamental de l'équiprobabilité.

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable **fini**, i.e. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Soit P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Tout événement A peut s'écrire $A = \bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}$, et on a $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$. De plus, $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Si l'on suppose qu'aucun événement élémentaire $\{\omega_i\}$ n'a plus de chance de se réaliser que les autres, on dit qu'il y a équiprobabilité (les p_i sont égaux) et on a :

$$\forall i = 1, \dots, n, p_i = P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}.$$

On a donc $P(A) = \sum_{\omega \in A} \frac{1}{n} = \text{card}A \times \frac{1}{n}$.

La probabilité P est alors définie de façon unique, comme l'indique le résultat suivant :

Théorème.

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable fini. L'hypothèse d'équiprobabilité définit sur cet espace une unique probabilité P donnée par :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), P(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{\text{nombre de résultats favorables à } A}{\text{nombre de résultats possibles}}$$

Les calculs avec une telle probabilité se ramènent alors à des problèmes de dénombrement.

Remarque.

Il n'est pas possible de définir l'équiprobabilité si Ω est infini dénombrable. Mais on peut choisir d'autres distributions de probabilité. Par exemple pour $\Omega = \mathbb{N}$, la distribution de Poisson : $\forall k \in \mathbb{N}, p_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.

2.3. D'autres propriétés d'une probabilité.**Formule de Poincaré (ou formule du crible).**

Soit P une probabilité sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.

- (i) Pour tous $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{A}$,
 $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$
- (ii) Pour tous $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, avec $n \geq 2$, $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} S_k$, avec $S_k = \sum_{I_k(n)} P\left(\bigcap_{i \in I_k(n)} A_i\right)$,
 où $I_k(n)$ est une partie quelconque de cardinal k de $\{1, 2, \dots, n\}$.

Preuve.

- (i) On a $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A_1 \cup (A_2 \cup A_3)$, donc en appliquant la propriété (vi) précédente, on a $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2 \cup A_3) - P(A_1 \cap (A_2 \cup A_3))$.
 De plus, $P(A_2 \cup A_3) = P(A_2) + P(A_3) - P(A_2 \cap A_3)$.
 et $P(A_1 \cap (A_2 \cup A_3)) = P((A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)) = P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.
 D'où le résultat.

(ii) La démonstration se fait par récurrence sur n . La propriété est vraie au rang $n = 2$ (et $n = 3$ au (i)).
 Supposons qu'elle soit vraie à un rang $n \geq 2$ fixé. Alors :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = P\left(\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \cup A_{n+1}\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) + P(A_{n+1}) - P\left(\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \cap A_{n+1}\right)$$

$$\text{Par hypothèse, } P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{I_k(n)} P\left(\bigcap_{i \in I_k(n)} A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) + \sum_{k=2}^n (-1)^{k-1} \sum_{I_k(n)} P\left(\bigcap_{i \in I_k(n)} A_i\right)$$

$$\text{et } P\left(\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \cap A_{n+1}\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^n (A_i \cap A_{n+1})\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{I_k(n)} P\left(\bigcap_{i \in I_k(n)} (A_i \cap A_{n+1})\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \sum_{I_k(n)} P\left(\left(\bigcap_{i \in I_k(n)} A_i\right) \cap A_{n+1}\right) + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \dots \cap A_{n+1})$$

$$= \sum_{k=2}^n (-1)^k \sum_{I_{k-1}(n)} P\left(\left(\bigcap_{i \in I_{k-1}(n)} A_i\right) \cap A_{n+1}\right) + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \dots \cap A_{n+1}).$$

$$\text{On en déduit que } P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) + \sum_{k=2}^n (-1)^{k-1} \sum_{I_k(n+1)} P\left(\bigcap_{i \in I_k(n+1)} A_i\right) + (-1)^n P(A_1 \cap \dots \cap A_{n+1}).$$

$$\text{Ainsi, } P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} S_k, \text{ avec } S_k = \sum_{I_k(n+1)} P\left(\bigcap_{i \in I_k(n+1)} A_i\right),$$

où $I_k(n+1)$ est une partie quelconque de cardinal k de $\{1, 2, \dots, n+1\}$.

Théorème.

Soit P une probabilité sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.

- (i) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements ($\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$), alors $P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)$.
- (ii) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements ($\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} \subset A_n$), alors $P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)$.

Preuve.

(i) Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$. On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}, P(A_n) \leq P(A_{n+1}) \leq 1$. La suite $(P(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est ainsi croissante et majorée (par 1) donc convergente ; ce qui prouve l'existence de $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)$.

Posons $B_0 = A_0$, et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$. Ainsi, $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements deux à deux incompatibles telle que $A_n = \bigcup_{i=0}^n B_i$ et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$. Par conséquent, $P(A_n) = \sum_{i=0}^n P(B_i)$ et

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B_n). \text{ On a alors } \sum_{n=0}^{+\infty} P(B_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^n P(B_i) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n), \text{ d'où le résultat.}$$

(ii) Supposons que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit une suite décroissante d'événements. Alors $(\overline{A_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements donc d'après (i), $P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(\overline{A_n})$.

$$\text{Or } P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = P\left(\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}}\right) = 1 - P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}\right)$$

$$\text{donc } P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} P(\overline{A_n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - P(\overline{A_n})) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n).$$

Reprenons l'exemple 6 du paragraphe 1.2.

Posons A : "obtenir "pile" à chaque lancer" et A_n : "obtenir "pile" aux n premiers lancers". Remarquons d'abord que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante d'événements et que $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$. D'autre part, $P(A_n) = \frac{1}{2^n}$.

$$\text{On en déduit que } P(A) = P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

L'événement A a donc une probabilité nulle, alors que $A \neq \emptyset$. (Rappelons que $P(\emptyset) = 0$).

De façon analogue, on pourrait avoir $P(A) = 1$ avec $A \neq \Omega$. Ceci conduit à adopter les définitions suivantes.

Définitions.

- (i) On dit qu'un événement A est quasi impossible si $P(A) = 0$.
- (ii) On dit qu'un événement A est quasi certain si $P(A) = 1$.
- (iii) On appelle *système quasi complet d'événements* toute famille dénombrable d'événements deux à deux incompatibles et dont la réunion est un événement quasi-certain.

Pour terminer ce paragraphe, nous énonçons d'autres propriétés dont la démonstration est laissée au soin du lecteur.

Proposition.

Soit P une probabilité sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.

- (i) Pour tous $A, B \in \mathcal{A}$, $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.
- (ii) Pour tous $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, avec $n \geq 2$, $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i)$.
- (iii) Pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, $P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n)$.

Proposition. (Inégalité de Bonferroni)

Soit P une probabilité sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.

- (i) Pour tous $A, B \in \mathcal{A}$, $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$.
- (ii) Pour tous $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, avec $n \geq 2$, $P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \geq \sum_{i=1}^n P(A_i) - (n - 1)$.

3 - Les schémas d'urne.

De nombreuses situations aléatoires peuvent s'interpréter par un "schéma d'urne", i.e. par des tirages dans une urne contenant des boules de différentes couleurs en proportion connues. Par exemple, les boules "représentent" les individus d'une population et les couleurs des caractéristiques des individus.

3.1. Urne à 2 catégories.

Considérons une urne contenant N boules indiscernables au toucher, dont N_1 sont blanches et N_2 sont noires ; il y a donc une proportion $p_1 = \frac{N_1}{N}$ de boules blanches et $p_2 = \frac{N_2}{N} = 1 - p_1$ de boules noires. On considère l'expérience aléatoire $\mathcal{E}$: "extraire n boules de l'urne". On cherche à calculer la probabilité d'obtenir exactement k boules blanches. Pour se faire, il faut distinguer les différents modes de tirage possibles.

3.1.1. Tirages successifs avec remise.

Pour ce mode de tirage, n peut prendre n'importe quelle valeur entière positive.

Si l'on suppose que les boules d'une même couleur sont numérotées, on peut associer à l'expérience aléatoire $\mathcal{E}$ l'univers :

$$\Omega = \{\text{arrangements avec répétition d'ordre } n \text{ de l'ensemble des } N \text{ boules}\}.$$

Comme $\text{card}\Omega = N^n$ est fini, la tribu des événements est $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

On considère naturellement sur $(\Omega, \mathcal{A})$ l'équiprobabilité P .

Soit l'événement A_k : "obtenir exactement k boules blanches", $0 \leq k \leq n$.

Il y a C_n^k choix possibles pour les positions des k boules blanches ; les positions des $n - k$ boules noires étant ainsi déterminées. Il y a alors N_1^k choix des boules blanches et N_2^{n-k} choix des boules noires. On a donc $\text{card}A_k = C_n^k N_1^k N_2^{n-k}$ et $\alpha_k = P(A_k) = \frac{C_n^k N_1^k N_2^{n-k}}{N^n}$.

$$\text{On en déduit que } \alpha_k = C_n^k \left(\frac{N_1}{N}\right)^k \left(\frac{N_2}{N}\right)^{n-k} = C_n^k p_1^k (1 - p_1)^{n-k}, 0 \leq k \leq n.$$

Cette "loi de probabilité" est appelée *loi Binomiale de paramètres* (n, p_1) .

3.1.2. Tirages successifs sans remise.

Pour ce mode de tirage, on doit avoir $0 \leq n \leq N$. On choisit alors :

- $\Omega = \{\text{arrangements (sans répétition) d'ordre } n \text{ de l'ensemble des } N \text{ boules}\}$;
- $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, car $\text{card}\Omega = A_N^n$ est fini ;
- P l'équiprobabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Le nombre k de boules blanches obtenues est compris entre $\max(0, n - N_2)$ et $\min(n, N_1)$.

Il y a C_n^k choix possibles pour les positions des k boules blanches ; les positions des $n - k$ boules noires étant ainsi déterminées. Il y a alors $A_{N_1}^k$ choix des boules blanches et $A_{N_2}^{n-k} = A_{N-N_1}^{n-k}$ choix des boules noires.

$$\text{On a donc } \beta_k = P(A_k) = \frac{C_n^k A_{N_1}^k A_{N-N_1}^{n-k}}{A_N^n}, \max(0, n - N_2) \leq k \leq \min(n, N_1).$$

3.1.3. Tirages simultanés (ou par poignées).

Pour ce mode de tirage, on doit avoir $0 \leq n \leq N$. On choisit alors :

- $\Omega = \{\text{combinaisons (sans répétition) d'ordre } n \text{ de l'ensemble des } N \text{ boules}\}$;
- $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, car $\text{card}\Omega = C_N^n$ est fini ;
- P l'équiprobabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Le nombre k de boules blanches obtenues est compris entre $\max(0, n - N_2)$ et $\min(n, N_1)$.

Il y a $C_{N_1}^k$ choix des boules blanches et $C_{N_2}^{n-k} = C_{N-N_1}^{n-k}$ choix des boules noires.

$$\text{On a donc } \gamma_k = P(A_k) = \frac{C_{N_1}^k C_{N-N_1}^{n-k}}{C_N^n}, \max(0, n - N_2) \leq k \leq \min(n, N_1).$$

Remarque.

Pour tout k tel que $0 \leq k \leq n$, on a :

$$\beta_k = \frac{C_n^k A_{N_1}^k A_{N-N_1}^{n-k}}{A_N^n} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{A_{N_1}^k A_{N-N_1}^{n-k}}{A_N^n} = \frac{\frac{A_{N_1}^k}{k!} \frac{A_{N-N_1}^{n-k}}{(n-k)!}}{\frac{A_N^n}{n!}} = \frac{C_{N_1}^k C_{N-N_1}^{n-k}}{C_N^n} = \gamma_k.$$

Il y a donc équivalence entre tirages successifs sans remise et tirages simultanés.

Cette "loi de probabilité" est appelée *loi Hypergéométrique de paramètres* $(N, n, p_1 = \frac{N_1}{N})$.

3.2. Urne à l catégories, $l \geq 2$.

Considérons une urne contenant N boules indiscernables au toucher, dont N_1 sont de couleur 1, N_2 de couleur 2, ..., N_l de couleur l (on a donc $N = N_1 + N_2 + \dots + N_l$). Pour tout $i = 1, \dots, l$, la proportion de boules de couleur i est $p_i = \frac{N_i}{N}$. On considère l'expérience aléatoire $\mathcal{E}$: "extraire n boules de l'urne". On cherche à calculer la probabilité d'obtenir exactement et en même temps k_i boules de couleur i , $1 \leq i \leq l$, avec $\sum_{i=1}^l k_i = n$.

3.2.1. Tirages successifs avec remise.

On considère le même espace probabilisé qu'au 1.1.

Soit l'événement $A_{k_1, \dots, k_{l-1}}$; "obtenir exactement k_i boules de couleur i , $1 \leq i \leq l$ ".

Choisir les positions pour les k_i boules de couleur i , $1 \leq i \leq l$, revient à choisir une permutation avec répétition de la combinaison avec répétition $[C_1, \dots, C_1, C_2, \dots, C_2, \dots, C_l, \dots, C_l]$, où chaque couleur C_i est répétée k_i fois ; cette combinaison ayant n éléments. Le nombre de choix des positions est donc le nombre de ces permutations avec répétition, i.e. $\frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_l!}$.

Les positions étant déterminées, il y a $N_i^{k_i}$ choix des boules de couleur i , $1 \leq i \leq l$.

$$\text{On a donc } \alpha_{k_1, \dots, k_{l-1}} = P(A_{k_1, \dots, k_{l-1}}) = \frac{\frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_l!} N_1^{k_1} N_2^{k_2} \dots N_l^{k_l}}{N^n} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_l!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_l^{k_l}.$$

Cette "loi de probabilité" est appelée *loi Multinomiale de paramètres* $(n, p_1, p_2, \dots, p_{l-1})$.

3.2.2. Tirages successifs sans remise.

On considère le même espace probabilisé qu'au 1.2.

Pour simplifier, on suppose que $k_i \leq N_i$ pour tout $i = 1, \dots, l$.

Il y a toujours $\frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_l!}$ choix des positions.

Il y a alors $A_{N_i}^{k_i}$ choix des boules de couleur i , $1 \leq i \leq l$.

$$\text{On a donc } \beta_{k_1, \dots, k_{l-1}} = P(A_{k_1, \dots, k_{l-1}}) = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_l!} \frac{A_{N_1}^{k_1} A_{N_2}^{k_2} \dots A_{N_l}^{k_l}}{A_N^n}.$$

3.2.3. Tirages simultanés (ou par poignées).

On considère le même espace probabilisé qu'au 1.3.

Pour simplifier, on suppose que $k_i \leq N_i$ pour tout $i = 1, \dots, l$.

Il y a $C_{N_i}^{k_i}$ choix des boules de couleur i , $1 \leq i \leq l$.

$$\text{On a donc } \gamma_{k_1, \dots, k_{l-1}} = P(A_{k_1, \dots, k_{l-1}}) = \frac{C_{N_1}^{k_1} C_{N_2}^{k_2} \dots C_{N_l}^{k_l}}{C_N^n}, 0 \leq k \leq n.$$

Remarque.

$$\text{On a } \beta_{k_1, \dots, k_{l-1}} = \frac{\frac{A_{N_1}^{k_1}}{k_1!} \frac{A_{N_2}^{k_2}}{k_2!} \dots \frac{A_{N_l}^{k_l}}{k_l!}}{\frac{A_N^n}{n!}} = \frac{C_{N_1}^{k_1} C_{N_2}^{k_2} \dots C_{N_l}^{k_l}}{C_N^n} = \gamma_{k_1, \dots, k_{l-1}}.$$

Il y a encore équivalence entre tirages successifs sans remise et tirages simultanés. Cette "loi de probabilité" est appelée *loi Multi-hypergéométrique de paramètres* $(N, n, p_1 = \frac{N_1}{N}, \dots, p_{l-1} = \frac{N_{l-1}}{N})$.

4 - Exercices.

Exercice 1.

On tire trois boules avec remise dans une urne contenant cinq boules numérotées de 1 à 5. Soient les événements A_i : "la i -ème boule tirée porte le numéro 1", pour $i = 1, 2, 3$.

Exprimer en fonction des A_i les événements suivants :

- on obtient trois fois la boule numéro 1,
- on obtient au moins une fois la boule numéro 1,
- on obtient une seule fois la boule numéro 1,
- la boule numéro 1 est obtenue pour la première fois au 2ème tirage,
- la boule numéro 1 est obtenue pour la première fois au 3ème tirage,
- la boule numéro 1 est obtenue au 1er tirage ou alors n'est pas obtenue.
- on obtient deux fois ou plus la boule numéro 1,
- on obtient deux fois exactement la boule numéro 1,
- on n'obtient jamais la boule numéro 1.

Exercice 2.

On effectue une suite infinie de lancers d'un dé dont les six faces sont numérotées de 1 à 6.

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on considère l'événement A_i : obtention de l'as au $i^{\text{ème}}$ lancer.

- Définir par une phrase ne comportant aucun vocabulaire mathématique les événements suivants :

$$B = \bigcap_{i=5}^{+\infty} A_i, C = \left(\bigcap_{i=1}^4 \bar{A}_i \right) \cap \left(\bigcap_{i=5}^{+\infty} A_i \right), D = \bigcup_{i>4} A_i.$$

- Ecrire à l'aide des A_i l'événement E : on obtient au moins une fois l'as au-delà du $n^{\text{ème}}$ lancer.

3) Montrer que la suite $(E_n) = \left(\bigcup_{i>n} A_i \right)$ est décroissante. Caractériser par une phrase ne comportant aucun vocabulaire mathématique l'événement $E = \bigcap_{n \geq 1} E_n$.

4) Ecrire à l'aide des A_i les événements F_n : on n'obtient plus que des as à partir du $n^{\text{ème}}$ lancer, et F : on n'obtient plus que des as à partir d'un certain lancer.

Exercice 3.

On jette quatre dés discernables équilibrés dont les 6 faces sont numérotées de 1 à 6. On appelle résultat la suite ordonnée des quatre faces obtenues. Proposer un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ adapté à cette expérience et calculer la probabilité des événements suivants :

- A : "on n'obtient pas d'as au cours des quatre lancers",
- B : "on obtient exactement deux as",
- C : "on obtient au moins un as",
- D : "on obtient un as aux deuxième et troisième lancers",
- E : "on obtient au moins une fois un numéro pair".
- F : "on obtient un carré" (quatre faces identiques),
- G : "on obtient un brelan" (trois faces identiques et une autre différente),
- H : "on obtient une double paire" (deux couples différents de faces identiques),
- I : "on obtient une simple paire" (deux faces identiques et deux autres différentes),
- J : "on obtient un résultat banal" (quatre faces différentes).

Exercice 4.

On rappelle qu'un jeu de 52 cartes est constitué de 13 cartes de valeur 1, 2, ..., 9, 10, Valet, Dame, Roi dans chacune des 4 couleurs Pique, Carreau, Coeur et Trèfle.

On tire simultanément 6 cartes d'un jeu de 52 cartes. Calculer la probabilité d'obtenir :

- six cartes de valeurs différentes ;
- deux brelans (brelan = 3 cartes de même valeur) ;
- une paire et un carré (paire = 2 cartes de même valeur, carré = 4 cartes de même valeur) ;
- trois paires (différentes) ;
- un brelan, une paire, un singleton

Exercice 5.

Dans une loterie de 100 billets, deux billets sont gagnants.

- 1) Quelle est la probabilité de gagner au moins un lot si l'on prend 12 billets ?
- 2) Combien faut-il prendre de billets pour que la probabilité de gagner au moins un lot soit supérieure à $\frac{4}{5}$?

Exercice 6.

Dans une assemblée de n personnes, quelle est la probabilité que deux d'entre elles au moins aient le même jour d'anniversaire ?

Exercice 7.

On lance six fois de suite un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6.

Quelle est la probabilité que le résultat du lancer et le numéro du lancer coïncident au moins une fois ?

Exercice 8.

On place au hasard sur une étagère les n tomes d'un encyclopédie, numérotés de 1 à n .

Pour $i = 1, \dots, n$, on désigne par A_i l'événement "le tome i retrouve sa place".

Calculer la probabilité des événements suivants :

- a) le tome i retrouve sa place,
- b) les tomes i et j retrouvent leur place,
- c) les k tomes $i_1, i_2, \dots, i_k$ retrouvent leur place, avec $1 \leq k \leq n$,
- d) chacun des tomes retrouve sa place,
- e) aucun des tomes ne retrouve sa place.

En déduire le nombre de *dérangements* de $E = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$, c'est-à-dire de permutations de E telle qu'aucun élément i_k ne retrouve sa position.

Exercice 9.

On lance un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6, et truqué de telle sorte que les faces paires sont équiprobables, les faces impaires sont équiprobables, et la probabilité d'obtenir une face paire est égale au double de celle d'obtenir une face impaire.

- 1) a) Proposer un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ adapté à cette expérience.
On pourra considérer les probabilités p_i d'obtenir la face i , $i = 1, \dots, 6$.
- b) Calculer la probabilité d'obtenir une face inférieure ou égale à 3.
- 2) Comparer au cas d'un dé équilibré.

Exercice 10.

Soient $\Omega = \mathbb{N}^*$, α un réel et $(p_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $p_k = \frac{\alpha}{k(k+1)}$. Déterminer α pour que $(p_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ soit une distribution de probabilité sur Ω .

Exercice 11

Une urne contient 10 boules dont 6 blanches et 4 noires. On effectue successivement 5 tirages d'une boule de l'urne.

- 1) Les tirages sont effectués avec remise. Calculer la probabilité d'obtenir :
 - a) aucune boule blanche ;
 - b) au moins une boule blanche ;
 - c) une boule blanche (exactement) ;
 - d) deux boules blanches (exactement) ;
 - e) deux boules blanches suivies de trois boules noires.
- 2) Reprendre les questions du 1) avec des tirages effectués sans remise.