

Licence mention Informatique parcours MIAGE - Semestre 5
Mathématiques Financières

EMPRUNTS OBLIGATAIRES

I - Généralités

Les **obligations** sont des valeurs mobilières, c'est-à-dire des titres représentant un droit de créance collectif à long terme, et qui, émises par une personne morale pour le financement de son activité, est négociable et susceptibles d'être cotées en bourse. Elles représentent un capital prêté à une organisation (société, association, collectivité locale, Etat), donnant droit au versement d'un intérêt et remboursable selon des modalités précisées à l'émission. A la différence des emprunts indivis, la **dette** est **fractionnée** et répartie entre **plusieurs investisseurs** (appelés également **souscripteurs**) qui se partagent les obligations émises, leur nombre allant de quelques dizaines à plusieurs milliers lorsque l'émetteur fait appel public à l'épargne.

Le marché domestique français comptait ces dernières années près de 500 emprunts émis par les secteurs public et semi-public (hors Etat) et près de 1000 emprunts émis par le secteur privé. Les obligations peuvent également être émises sur les marchés internationaux. Le montant des émissions brutes internationales s'est élevé à 2105,4 milliards de dollars en 2002 ; l'euro occupant la place de deuxième monnaie avec 807,8 milliards de dollars, soit 38,4 % du total contre 46,9 % pour le dollar américain. 76,7 % des émissions en euros sont le fait d'émetteurs originaires de l'union monétaire européenne, principalement des établissements financiers, des collectivités ou institutions publiques et des entreprises non financières du secteur privé. Une grosse moitié se fait à taux fixe. Au titre des investisseurs, on retrouve des compagnies d'assurance, des fonds d'investissement ou OPCVM, des banques et des entreprises privées.

Dans ce document, on s'intéresse essentiellement aux obligations émises dans le cadre d'une **procédure d'appel public à l'épargne**, autrement dit sans aucune restriction nominative ou qualitative concernant les souscripteurs.

1) Les marchés obligataires

On distingue trois grands compartiments : marché primaire, marché secondaire et marché gris.

Le **marché primaire** (ou marché à l'émission) : c'est le marché financier dont la fonction est le placement des titres nouvellement émis. Ce placement est assuré par des intermédiaires : pour les emprunts d'Etat, les **SVT** (spécialistes en valeurs de Trésor) qui sont des institutions financières qui conseillent le Trésor et contrôlent le bon déroulement des émissions ; pour les sociétés privées, une banque ou une **syndication bancaire** (ensemble de banques) dirigée par une banque **chef de file**. Toute société faisant publiquement appel à l'épargne doit publier une **note d'opération** indiquant les caractéristiques complètes et détaillées du produit financier proposé aux investisseurs.

Quelques jours ou semaines après leur émission, les titres peuvent être échangés sur le **marché secondaire**. Les cours y fluctuent en fonction de l'offre et de la demande. Les transactions sont soumises à des frais de courtage versés aux intermédiaires financiers (société de Bourse, banques, ...).

Entre l'émission et l'introduction au marché officiel, les titres peuvent être échangés sur le **marché gris**, marché de gré à gré donc non réglementé, essentiellement accessible aux professionnels compte tenu de l'importance des lots traités.

Le premier émetteur français étant l'Etat, les plus grosses lignes cotées sur le marché secondaire sont constituées par les **OAT** (obligations assimilables du Trésor). Elles constituent la part la plus importante de la dette à long terme de l'Etat français avec un encours de 522 milliards d'euros au 31 janvier 2004. Ces titres sont assimilables, c'est-à-dire que certains emprunts nouveaux offrent des caractéristiques semblables à ceux lancés antérieurement. Après l'émission, la nouvelle tranche est assimilée à la première. Cette technique permet de concentrer les transactions sur un nombre limité de lignes de cotation (quelques dizaines) et d'assurer ainsi à chaque emprunt une liquidité suffisante.

2) Les différents types d'obligations

Une **obligation à taux fixe** verse un intérêt calculé à taux constant pendant toute la durée de vie du titre. Les obligations à taux fixe représentent la part la plus importante des émissions.

Une **obligation à taux flottant** verse un intérêt calculé à partir d'un taux de marché qui fluctue au cours du temps. L'intérêt versé n'est donc pas constant pendant la durée de vie du titre. On distingue :

- les **obligations à taux révisable**, pour lesquels l'intérêt versé en n est calculé en référence avec un taux connu en $n - 1$; on connaît donc l'intérêt avec une période d'avance.

- les **obligations à taux variable**, pour lesquels l'intérêt versé en n est calculé en fonction d'un taux de référence représentant une moyenne de taux sur une période définie précédant le versement de l'intérêt ; c'est une particularité française.

Les **obligations indexées** sont des titres de créance dont l'intérêt est totalement ou partiellement indexé sur un élément de référence, généralement en relation avec l'activité de la société (par exemple sur le prix de l'acier, de l'or, du pétrole, ...).

Les **obligations à caractéristiques optionnelles** sont des titres qui présentent certaines caractéristiques des obligations auxquelles viennent s'ajouter certaines options. Citons par exemple :

- les **obligations convertibles en actions** (OAC) permettant au souscripteur de convertir ses obligations en actions à tout moment (à une ou plusieurs dates précises) selon un rapport de conversion prédéfini (par exemple deux actions pour une obligation).

- les **obligations à bons de souscription d'actions** (OBSA), obligations classiques auxquelles on adjoint un (des) bon(s) donnant le droit d'acheter des actions de la société à un prix fixé d'avance.

- les **obligations remboursables en actions** (ORA) sont des titres de créance portant intérêt mais dont le remboursement (généralement in fine) s'effectue en livrant des actions de la société.

II - Les caractéristiques d'un emprunt obligataire

Un **emprunt obligataire** est donc un emprunt à long terme émis par un emprunteur ou **émetteur** qui est une collectivité (Etat, organisme public ou privé) auprès de plusieurs créanciers ou **obligataires** ou **souscripteurs**. Chaque obligataire reçoit une **obligation**, titre de créance négociable, représentant une fraction de l'emprunt lui donnant le droit de percevoir un intérêt le plus souvent annuel et d'être remboursé de son titre à l'échéance.

Toutes les obligations ont la même **valeur nominale** (ou nominal ou pair ou valeur faciale) C servant de base au calcul des intérêts.

Le **taux d'intérêt nominal** (ou taux facial) t est le taux exprimé en base annuelle qui, appliquée à la valeur nominale, permet de définir l'intérêt versé par l'émetteur au souscripteur.

L'intérêt versé pour un titre est donc Ct , et est appelé **coupon**. On dit que l'obligation détache son coupon, en souvenir de l'époque où chaque obligation était matérialisée par une grande feuille de papier comportant une série de coupons rectangulaires que l'on découpait pour réclamer le paiement de l'intérêt annuel. Le premier coupon peut être de valeur différente des autres pour prendre en compte des spécificités.

Le **prix d'émission** E est le prix payé pour l'achat d'une obligation par le souscripteur. La **prime d'émission** est la différence entre la valeur nominale et le prix d'émission, soit $C - E$. Le titre peut être émis :

- **au pair**, son prix d'émission est alors égal à sa valeur nominale, soit $C = E$;
- **au-dessous du pair**, le prix d'émission est inférieur à la valeur nominale, soit $C > E$ (et s'exprime souvent en pourcentage de la valeur nominale) ;

Exemple : Valeur nominale des obligations : 800 €.

Prix d'émission : 99,95 %, soit 799,60 € par obligation.

Le souscripteur paie 799,60 € pour acquérir une obligation, mais l'intérêt sera calculé sur 800 €.

- **au-dessus du pair**, le prix d'émission est supérieur à la valeur nominale, soit $C < E$.

Exemple : Valeur nominale des obligations : 800 €.

Prix d'émission : 100,50 %, soit 804 € par obligation.

Le souscripteur verse 804 € pour acquérir une obligation, mais l'intérêt sera calculé sur 800 €.

La **date d'émission** est la date de lancement de l'emprunt. Elle précède la **date de règlement**, où les souscriptions doivent être réglées (parfois le règlement est effectué en plusieurs versements à des dates différentes). La **date de jouissance** est la date à compter de laquelle les intérêts commencent à courir. Le coupon, lorsqu'il est annuel, est généralement payé à la date anniversaire de la date de jouissance. La date de jouissance coïncide normalement avec la date de règlement, mais peut lui être antérieure et dans ce cas, le souscripteur remboursera, au moment du règlement la part du premier coupon allant de la date de jouissance à la date de règlement.

Le **prix de souscription** d'une obligation se compose :

- du prix d'émission ;
- du remboursement éventuel du coupon couru entre les dates de jouissance et le règlement.

Le **prix de remboursement** R correspond à la valeur à laquelle les titres sont remboursés.

La **prime de remboursement** est égale à la différence $R - C$. Le remboursement peut se faire au pair, soit $R = C$, ou au-dessus du pair, soit $R > C$.

La **durée de vie** de l'emprunt est la durée séparant la date de jouissance et la date du dernier remboursement. Il n'y a pas de durée de vie minimum réglementaire mais en pratique, elle va de 3 à 30 ans.

Le **montant nominal** de l'emprunt est égal au nombre de titres N multiplié par la valeur faciale C d'un titre, soit NC .

Les différentes sommes qui interviennent (souscriptions, coupons, remboursements) portent le nom de **flux** ou de **versements**.

Le **taux actuariel** est le taux d'intérêt assurant l'équivalence à intérêts composés entre les sommes versées et les sommes reçues. Il est **de rendement** pour le souscripteur et **de revient** pour l'emprunteur.

Pour que le lancement d'un emprunt sur le marché obligataire soit réussi, il faut concilier deux attitudes a priori contradictoires : celle de l'émetteur qui souhaite emprunter au taux le moins élevé possible, celle de l'investisseur qui attend le rendement le plus élevé possible.

L'équilibre entre ces deux comportements définit le "niveau du marché", mesuré par un taux rendement qui dépend de deux variables : le taux d'intérêt et le prix d'émission.

Pour obtenir le rendement le plus proche du marché, il faut : soit offrir un taux d'intérêt nominal légèrement supérieur et parallèlement augmenter le prix d'émission (qui se trouve alors supérieur à la valeur nominale), soit offrir un taux d'intérêt plus faible, mais émettre au-dessous du pair. C'est la première situation qui est la plus fréquente.

III - Etude d'un exemple

On considère un emprunt représenté par 70 000 obligations de 800 € nominal.

Prix de souscription : 103 %, soit 824 € par obligation, payable en une seule fois à la date de règlement, comprenant le prix d'émission de 101,5 %, soit 812 €, et le coupon couru de 1,5 %, soit 12 €.

Rémunérations globales dues aux intermédiaires financiers : 698 400 €.

Frais légaux et administratifs : 41 120 €.

Date d'émission : 27 mai 1997.

Date de jouissance : 29 mars 1997.

Date de règlement : 10 juin 1997.

Durée : 12 ans.

Intérêt : Ces obligations rapporteront un intérêt annuel de 7,5 %, soit 60 € par obligation, payable en totalité à terme échu le 29 mars de chaque année et pour la première fois le 29 mars 1998.

Amortissement normal : en totalité par remboursement au pair in fine le 29 mars 2009.

Montant nominal de l'emprunt : $70000 \times 800 = 56000000$ €.

Produit brut de l'émission : $70000 \times 824 = 57680000$ €.

Produit net de l'émission : $57680000 - 698400 - 41120 = 56940480$ €.

Montant des coupons versés chaque année par l'émetteur : $70000 \times 60 = 4200000$ €.

Somme versée par l'émetteur le 29 mars 2009 : $4200000 + 56000000 = 60200000$ €.

Le souscripteur paie : 824 € le 10 juin 1997,

et reçoit : - 11 annuités de 60 € les 29 mars, de 1998 à 2008,

- 1 annuité de 860 € le 29 mars 2009.

Le taux de rendement actuariel est t tel que :

$$824 = 60 \times \frac{1 - (1 + t)^{-11}}{t} \times (1 + t)^{\frac{73}{365}} + 860 \times (1 + t)^{-11 - \frac{292}{365}}.$$

On en déduit que $t \simeq 0.0730$, soit 7,30 %.

L'émetteur reçoit : 56 940 480 € le 10 juin 1997,

et paie : - 11 annuités de 4 200 000 € les 29 mars, de 1998 à 2008,

- 1 annuité de 60 200 000 € le 29 mars 2009.

Le taux de revient actuariel est t' tel que :

$$569.40480 = 42 \times \frac{1 - (1 + t')^{-11}}{t'} * (1 + t')^{\frac{73}{365}} + 602 \times (1 + t')^{-11 - \frac{292}{365}}.$$

On en déduit que $t' \simeq 0.0747$, soit 7,47 %.

IV - Les modalités d'amortissement d'un emprunt obligataire

1) Les principales modalités de remboursement d'un emprunt obligataire

Sauf défaillance de l'émetteur, toute obligation sera amortie. Différentes modalités, similaires à celles des emprunts indivis, sont possibles.

Remboursement in fine

L'emprunt est remboursé en totalité à la dernière échéance. L'émetteur ne paie que les coupons pendant la durée de vie des titres et rembourse les obligations à leur valeur de remboursement lors du versement du dernier coupon. C'est le procédé le plus simple et le plus répandu. L'avantage pour le souscripteur est de connaître avec certitude les montants et les dates de ses encaissements, ce qui n'est pas le cas dans les deux procédés suivants.

Remboursement par séries égales

Si l'emprunt comprend N obligations et a une durée de vie de n années, un remboursement par séries égales consiste à amortir le même nombre de titres chaque année, soit $\frac{N}{n}$ titres (méthode similaire au remboursement à amortissements constants des emprunts indivis). Les titres remboursées à la fin de chaque période sont tirés au sort. L'avantage pour l'émetteur est de mieux répartir ses décaissements dans le temps. L'inconvénient pour le souscripteur est qu'il s'expose chaque année à un remboursement de tout ou partie des titres qu'il détient.

Remboursement par annuités sensiblement constantes

Le service annuel de la dette (remboursement des titres et paiement des coupons) est quasi constant pour l'émetteur. Il se calcule de la même façon que pour un emprunt indivis, à ceci près que chaque amortissement doit correspondre à un nombre entier d'obligations, ce qui oblige à arrondir les résultats théoriques.

Cas particulier des obligations sans coupon

Appelés abusivement obligations sans coupon ou obligations zéro-coupon, ces titres procurent pourtant un intérêt mais qui est versé en une seule fois à l'échéance, en même temps que le remboursement du nominal. Par exemple, un titre est émis à 61,39 € et remboursé pour un montant de 100 € dans dix ans. Le taux servi est de 5 %, puisque $61,39 \times 1,05^{10} = 100$.

Pour ces titres, on appelle souvent valeur nominale la valeur de remboursement. Le prix d'émission est donc très en dessous du pair. Bien que peu répandu, ce type de titre présente un intérêt considérable en matière d'évaluation d'actifs financiers.

Clauses particulières

A titre d'exemples :

- possibilité d'effectuer des rachats en Bourse ; l'émetteur rachète alors ses propres titres, ce qui équivaut à un remboursement partiel anticipé ;
- possibilité de remboursement anticipé sous certaines conditions, soit au gré de l'émetteur, soit au gré du porteur ;
- remboursement différé de quelques années ; pendant k années, la société ne verse que les intérêts, l'amortissement ne commençant qu'à partir de la $(k + 1)$ -ème année.

Dans le contrat d'émission, l'émetteur peut se réserver le droit de rembourser par anticipation tout ou partie des obligations encore en circulation.

S'il renonce expressément à ce droit, il prend soin de garder la possibilité d'amortir par anticipation soit par rachat en bourse, soit par voie d'Offres Publiques d'Achat, soit par voie d'Offres Publiques d'Echange d'Obligations.

Ces remboursements anticipés sont envisagés si le taux du marché obligataire diminue considérablement.

2) Le tableau d'amortissement d'un emprunt obligataire

Il fournit les mêmes renseignements que celui d'un emprunt indivis (capital restant dû, amortissement, intérêt, annuité). Ces montants respectent les règles fondamentales ainsi que les équations actuarielles présentées pour les emprunts indivis. Il comporte toutefois deux colonnes supplémentaires indiquant le capital restant dû et l'amortissement en nombre d'obligations.

La procédure de construction est la suivante :

- utiliser les formules présentées dans le cadre des emprunts indivis, à partir du montant total de l'émission, afin de calculer les amortissements, les annuités et les intérêts ;
- arrondir les montants pour tenir compte du fait que seul un nombre entier d'obligations peut être amorti chaque année ;
- distribuer le reliquat éventuel des arrondis selon des règles qui peuvent varier en fonction des émetteurs.

Pour p entier variant de 1 à n , on désigne par m_p le nombre d'obligations amorties à l'occasion de la p -ème échéance, et d_{p+1} le nombre d'obligations vivantes (c'est-à-dire non encore amorties) après p échéances (au début de la $(p + 1)$ -ème période). On a donc $d_{p+1} = d_p - m_p$. Remarquons que $d_1 = N$, nombre d'obligations émises.

3) Exemples d'amortissement par séries égales et par annuités sensiblement constantes

a) Par séries annuelles égales.

Une société décide d'émettre un emprunt de 8 millions d'euros, réparti en $N = 8000$ obligations de nominal $C = 1000$ €, remboursable en $n = 4$ séries annuelles égales. Le taux nominal est $t = 0.05$ (soit 5 %), les obligations sont émises à $E = 990$ € et remboursées à $R = 1020$ €.

L'amortissement est constant et concerne donc $\frac{N}{n} = \frac{8000}{4} = 2000$ obligations chaque année, soit un amortissement annuel de $2000 \times 1020 = 2\,040\,000$ €. Ces informations permettent de remplir les deux colonnes "amortissement" m_p et $m_p R$.

On remplit alors les deux colonnes "capital restant dû" d_p et $d_p R$.

On complète enfin la colonne "intérêts", puis la colonne "annuité".

Année p	d_p	Capital restant à amortir en début d'année : $C_p = d_p R$	m_p	Amortissement $A_p = m_p R$	Intérêt à payer $I_p = d_p C t$	Annuité $m_p R + d_p C t$
1	8000	8 160 000	2000	2 040 000	400 000	2 440 000
2	6000	6 120 000	2000	2 040 000	300 000	2 340 000
3	4000	4 080 000	2000	2 040 000	200 000	2 240 000
4	2000	2 040 000	2000	2 040 000	100 000	2 140 000
			8000	8 160 000	1 000 000	9 160 000

Le prix d'émission n'influence pas le tableau d'amortissement.

Les capitaux restant dus sont calculés sur la valeur de remboursement R alors que les intérêts le sont sur la valeur nominale C .

Les montants des colonnes "capital" et "amortissement" sont en progression arithmétique (sauf en cas d'éventuels arrondis).

Ici, il n'y a pas eu d'arrondi à faire, dans la mesure où le nombre de titres est multiple de la durée. Par exemple, sur six ans, le nombre de titres à amortir chaque année aurait été de $\frac{8000}{6} = 1333.33$, que l'on arrondirait à 1333. Le reliquat serait de 2 titres, que l'on pourrait par exemple répartir sur les deux dernières années.

b) Par annuités sensiblement constantes

Une société décide d'émettre un emprunt de 8 millions d'euros, réparti en $N = 8000$ obligations de nominal $C = 1000$ €. Le taux nominal est $t = 0.05$ (soit 5 %), les obligations sont émises et remboursées au pair ($R = C$). L'amortissement se fait au moyen de $n = 4$ annuités sensiblement constantes.

Calcul de l'annuité théorique

Il n'y a pas de prime de remboursement donc le capital à rembourser est NC , et l'annuité constante est alors donnée par la formule : $a = \frac{NCt}{1 - (1+t)^{-n}} = \frac{8000 \times 1000 \times 0.05}{1 - (1 + 0.05)^{-4}} = 2\,256\,094.66$ €.

Calcul des amortissements théoriques

Rappelons que la suite (A_p) est donc géométrique de raison $(1 + t)$ et de premier terme

$A_1 = a(1+t)^{-n} = a - NCt$. On a donc

$$A_1 = 2\,256\,094.66 \times (1 + 0.05)^{-4} = 1\,856\,094.66 \text{ € ou } A_1 = 2\,256\,094.66 - 8000 \times 1000 \times 0.05$$

$$A_2 = A_1(1+t) = 1\,948\,899.39 \text{ €, } A_3 = A_2(1+t) = 2\,046\,344.36 \text{ €, } A_4 = A_3(1+t) = 2\,148\,661.58 \text{ €}$$

Réalisation des arrondis

Tous ces montants doivent être ajustés car un nombre entier d'obligations de nominal 1000 € doit être amorti chaque année. On obtient ainsi :

$$m_1 = 1856, m_2 = 1949, m_3 = 2046, m_4 = 2149, \text{ d'où la valeur des } d_i.$$

Le tableau d'amortissement

Année p	d_p	Capital restant à amortir en début d'année : $C_p = d_p C$	m_p	Amortissement $A_p = m_p C$	Intérêt à payer $I_p = d_p C t$	Annuité $m_p C + d_p C t$
1	8000	8 000 000	1856	1 856 000	400 000	2 256 000
2	6144	6 144 000	1949	1 949 000	307 200	2 256 200
3	4195	4 195 000	2046	2 046 000	209 750	2 255 750
4	2149	2 149 000	2149	2 149 000	107 450	2 256 450
			8000	8 000 000	1 024 400	9 024 400

L'ensemble des colonnes s'obtient par des formules analogues à celles des emprunts indivis, avec le capital NC .

Les arrondis font que les amortissements ne sont plus rigoureusement en progression géométrique.

L'annuité réelle moyenne (2 256 100 €) est très proche de l'annuité théorique.

c) Par annuités sensiblement constantes et à prime de remboursement.

Considérons toujours un emprunt de 8 millions d'euros, réparti en $N = 8000$ obligations de nominal $C = 1000$ €, de taux facial $t = 0.05$ (soit 5 %), et de durée $n = 4$ ans. Le remboursement de l'emprunt est assorti d'une prime de remboursement de 10 € ($R = C + 10 = 1010$ €).

Calcul de l'annuité théorique

Chaque annuité comprend maintenant une part d'intérêt calculée sur la valeur nominale du titre et une part d'amortissement calculée sur le prix de remboursement. Par rapport au b), dans les formules donnant l'annuité théorique et les amortissements théoriques, on remplace C par R , et le taux t par t' défini par :

$$t' = \frac{Ct}{R}$$

cette valeur pouvant s'interpréter comme le taux d'intérêt qui, appliqué au prix de remboursement, donne le montant du coupon. On trouve ici $t' = 0.04950495$.

L'annuité théorique est donc : $a = \frac{NRt'}{1 - (1 + t')^{-n}} = \frac{8000 \times 1010 \times 0.04950495}{1 - (1 + 0.04950495)^{-4}} = 2\,276\,035.83$ €.

Calcul des amortissements théoriques

Rappelons que la suite (A_p) est donc géométrique de raison $(1 + t')$ et de premier terme

$A_1 = a(1 + t')^{-n} = a - NCt$. On a donc

$$A_1 = 1\,876\,035.66 \text{ €}, A_2 = A_1(1 + t') = 1\,968\,908.89 \text{ €},$$

$$A_3 = A_2(1 + t') = 2\,066\,379.63 \text{ €}, A_4 = A_3(1 + t') = 2\,168\,675.65 \text{ €}$$

Les nombres d'obligations à rembourser chaque année s'obtiennent en divisant ces amortissements théoriques par le prix de remboursement $R = 1010$. On obtient ainsi (à 0.01 près) : 1857.46, 1949.41, 2045.92, 2147.20.

Arrondis et répartition du reliquat

En arrondissant à l'entier le plus proche, on obtient : 1857, 1949, 2046, 2147.

Le total obtenu est 7999 : le reliquat est égal à 1 titre. On rectifie en attribuant ce solde à la ligne faisant l'objet de la plus grosse erreur d'arrondi, soit ici la première. On a enfin :

$$m_1 = 1858, m_2 = 1949, m_3 = 2046, m_4 = 2147.$$

Le tableau d'amortissement

Année p	d_p	Capital restant à amortir en début d'année : $C_p = d_p R$	m_p	Amortissement $A_p = m_p R$	Intérêt à payer $I_p = d_p C t$	Annuité $m_p R + d_p C t$
1	8000	8 080 000	1858	1 876 580	400 000	2 276 580
2	6142	6 203 420	1949	1 968 490	307 100	2 275 590
3	4193	4 234 930	2046	2 066 460	209 650	2 276 110
4	2147	2 168 470	2147	2 168 470	107 350	2 275 820
			8000	8 080 000	1 024 100	9 104 100

Les procédés d'arrondis et d'attribution du reliquat peuvent varier. Cela n'entraîne cependant que des modifications mineures du tableau d'amortissement.

V - Exercices

Exercice 1

On considère un emprunt présentant les caractéristiques suivantes :

Valeur nominale des obligations : 900 €.

Prix de souscription : 105,841 %, soit 952,57 € par obligation, payable en totalité à la souscription, comprenant le prix d'émission de 101,26 % soit 911,34 €, et la fraction du coupon courue depuis la date de jouissance de 4,581 %, soit 41,23 €.

Date de jouissance : 5 mars 1998. Date de règlement des souscripteurs : 11 septembre 1998.

Intérêt annuel : 8,80 %, soit 79,20 € par obligation, payable pour la première fois le 5 mars 1999.

Expliquer le prix de souscription.

Exercice 2

On considère un emprunt présentant les caractéristiques suivantes :

Valeur nominale des obligations : 800 €.

Prix de souscription : 98,30 %, soit 786,40 € par titre, dont 98,017 % correspondant au prix d'émission et 0,283 % correspondant au coupon couru.

Date de jouissance : 15 février 1998. Date de règlement : 27 février 1998.

Intérêt annuel : 8,60 % payable à terme échu le 15 février de chaque année et pour la première fois le 15 février 1999.

Expliquer le prix de souscription.

Exercice 3

On considère un emprunt présentant les caractéristiques suivantes :

Valeur nominale : 750 €. Date de règlement : 3 octobre 1998.

Intérêt annuel : de 8,80 %, soit 66 €, payable le 2 février de chaque année.

Le premier coupon payable le 2 février 1999 sera de 22,06 €.

Expliquer le prix du premier coupon.

Exercice 4

On considère un emprunt présentant les caractéristiques suivantes :

Valeur nominale : 800 €. Date de règlement : 26 juin 1999.

Intérêt : l'intérêt sera payable le 3 octobre de chaque année.

Les obligations bénéficient sur toute la durée de l'emprunt d'un taux d'intérêt de 9 %, soit 72 € par titre.

Le premier coupon d'intérêt, payable le 3 octobre 1999, sera de 19,53 € par titre, soit 2,44 % sur la période ou 9,00 % sur l'année.

Expliquer les taux d'intérêt du premier coupon.

Exercice 5

On considère un emprunt présentant les caractéristiques suivantes :

Valeur nominale : 1 000 €. Date de règlement : 4 septembre 1998.

Intérêt : 8,30 %, soit 83 € par titre, payable le 18 décembre de chaque année.

Exceptionnellement, le premier terme d'intérêt venant à échéance le 18 décembre 1998 sera de 43 €, soit 4,30 % sur la période ou 14,95 % sur l'année.

Expliquer les taux d'intérêt du premier coupon.

Exercice 6

On considère un emprunt d'un montant nominal de 280 000 000 € représenté par 280 000 obligations d'une valeur nominale de 1 000 €.

Prix d'émission : 100,50 %, soit 1 005 € par obligation.

Rémunérations globales dues aux intermédiaires financiers : 3 627 000 €.

Frais légaux et administratifs : 205 600 €.

Durée : 14 ans. Date de jouissance : 20 novembre 1997. Date de règlement : 18 septembre 1997.

Intérêt : Ces obligations rapporteront un intérêt annuel de 9 %, soit 90 € par titre, payable en totalité à terme échu le 20 novembre de chaque année. Le premier terme d'intérêt, soit 90 €, sera mis en paiement le 20 novembre 1998.

Amortissement normal : en totalité par remboursement au pair in fine le 20 novembre 2011.

- 1) Déterminer :
 - a) le produit brut de l'émission ;
 - b) le produit net de l'émission ;
 - c) le montant des coupons versés chaque année par l'émetteur ;
 - d) la somme versée par l'émetteur le 20 novembre 2011.
- 2) Calculer le taux effectif de rendement pour le souscripteur (taux de rendement actuariel brut à la date du règlement).
- 3) Si l'émetteur avait reçu le produit net de l'emprunt le 20 novembre 1997, quel serait le taux de revient actuariel de cet emprunt ?

Exercice 7

Un emprunt est représenté par 800 000 obligations de 900 € nominal.

Prix d'émission : le pair, soit 900 € par obligation.

Le produit net de l'emprunt sera versé à l'émetteur après prélèvement sur le montant brut, de 2 % correspondant aux rémunérations dues aux intermédiaires financiers et de 0,15 % correspondant aux frais légaux et administratifs, tous frais de publicité compris.

Date de règlement : 25 juillet 1998. Date de jouissance : 25 juillet 1998. Durée : 7 ans.

Intérêt : Les obligations rapporteront un intérêt annuel de 8,70 %, soit 78,30 € par titre, payable en totalité le 25 juillet de chaque année. Le premier coupon sera mis en paiement le 25 juillet 1999.

Amortissement normal : le 25 juillet 2005, par remboursement au pair.

Quel est le taux de revient actuariel de cet emprunt ?

Exercice 8

Un emprunt est représenté par 100 000 obligations d'une valeur nominale de 800 €.

Prix d'émission : 99,95 %, soit 799,60 € par obligation.

Le produit net de l'emprunt sera versé à l'émetteur après prélèvement sur le montant brut, de 1 141 800 € correspondant aux rémunérations dues aux intermédiaires financiers et 24 500 € correspondant aux frais légaux et administratifs.

Date de règlement : 6 mars 1998. Date de jouissance : 10 avril 1998. Durée : 7 ans.

Intérêt : 8,80 %, soit 70,40 € par titre, payable à terme échu le 10 avril de chaque année et, pour la première fois, le 10 avril 1999.

Amortissement normal : au pair in fine le 10 avril 2005.

- 1) Calculer le taux de rendement actuariel brut.
- 2) Si l'émetteur avait reçu le produit net de l'emprunt le 10 avril 1998, quel serait le taux de revient actuariel de cet emprunt ?

Exercice 9 D'après examen janvier 2008

On considère un emprunt obligataire sur 10 ans de 100 000 obligations de valeur nominale de 100 €, ayant les caractéristiques suivantes.

Frais pour l'émetteur :
 - frais d'émission : 2% du nominal.
 - frais de paiement de chaque coupon : 1 € par titre.

Prix de souscription : au pair. Date de règlement : 15 mars 2008. Date de jouissance : 15 avril 2008.

Taux nominal annuel : 5%. Coupon payable à terme échu le 15 avril de chaque année, pour la première fois en 2009.

- 1) Supposons le remboursement in fine le 15 avril 2018 au prix de 110 € (prime de remboursement : 10 €).
 - a) Déterminer une équation vérifiée par le taux de rendement actuariel de cet emprunt pour le souscripteur.
 - b) Déterminer une équation vérifiée par le taux de revient actuariel de cet emprunt pour l'émetteur.
- 2) Supposons le remboursement par séries égales au prix de 110 €.
 - a) Rappeler le principe et la mise en oeuvre de ce type de remboursement.
 - b) Déterminer une équation vérifiée par le taux de rendement actuariel d'une obligation remboursée au bout de 2 ans.

Exercice 10 D'après examen janvier 2010

EDF a lancé en 2009 un emprunt auprès des particuliers. Les données suivantes sont extraites de la brochure "Emprunt obligataire EDF - Du 17 juin au 10 juillet 2009", destinée au grand public.

Caractéristiques des Obligations EDF

Coupon : 4,5 % (brut) l'an, soit un rendement actuariel de 4,5 %. L'intérêt sera payable annuellement à terme échu le 17 juillet de chaque année, et pour la première fois le 19 juillet 2010. Le taux actuariel est déterminé au 27 mai 2009 et n'est significatif que pour un souscripteur qui conserverait ses obligations jusqu'à leur remboursement final.

Echéance : 5 ans (17 juillet 2014) Valeur nominale : 1 000 euros

Prix d'émission et de souscription : 100 % du nominal Date de jouissance et de règlement : 17 juillet 2009

Remboursement normal : 100 % de la valeur nominale, en totalité à l'échéance le 17 juillet 2014

Durée conseillée de l'investissement : 5 ans ; toute revente des Obligations avant l'échéance peut entraîner un gain ou une perte

Montant total : - de l'émission : 3 268 926 000 euros - du produit net de l'émission : 3 206 922 630 euros

Fiscalité sur les revenus et sur les plus-values

Les intérêts perçus par des personnes physiques fiscalement domiciliées en France, sont soumis :

- au barème progressif de l'impôt sur le revenu, ou, sur option, au prélèvement forfaitaire libératoire (PFL) de l'impôt sur le revenu au taux de 18 %.

- aux prélèvements sociaux, au taux global de 12,1 % à compter du 1er janvier 2009.

La plus-value n'existe qu'en cas de cession de l'Obligation avant son échéance à un prix supérieur à son prix d'achat par son propriétaire. Les plus-values sont imposables au taux de 18 % auquel s'ajoutent les prélèvements sociaux au taux global de 12,1% à compter du 1er janvier 2009.

- 1) a) Combien d'obligations ont été émises ? Quel est le montant des frais d'émission ?
b) Quel est le montant en euros du coupon pour une obligation ? A quelle(s) date(s) sera-t-il versé ?
- 2) a) Déterminer une équation vérifiée par le taux de rendement actuariel brut de cet emprunt pour un souscripteur conservant son(ses) titre(s) jusqu'à l'échéance.
b) Le taux de 4,5 % annoncé dans la brochure vérifie-t-il bien cette équation ?
- 3) a) En prenant en compte l'incidence de la fiscalité sur le rendement d'une obligation, déterminer une équation vérifiée par le taux de rendement actuariel net de cet emprunt pour un souscripteur conservant son(ses) titre(s) jusqu'à l'échéance et ayant opté pour le PFL.
b) Le taux de rendement actuariel net est-il de 3,15 % ? 4,5 % ? 5,25 % ?
- 4) Un souscripteur a acheté 5 obligations et décide de les revendre au bout de 2 ans au prix du marché, soit 110 % du montant nominal.
a) Déterminer les sommes brutes versées et reçues, en précisant leurs dates.
b) En tenant compte de la fiscalité sur les revenus (avec option PFL) et les plus-values, préciser les sommes nettes versées et reçues, en précisant leurs dates, puis écrire une équation vérifiée par le taux de rendement actuariel net de cet emprunt pour ce souscripteur.