

Licence mention Informatique parcours MIAGE - Semestre 5
Mathématiques Financières

L'EQUIVALENCE A INTERETS SIMPLES

I – Généralités

Il arrive fréquemment que, pour éviter un incident de paiement à l'échéance, un client demande à son fournisseur le report d'une échéance. Concrètement, s'il accepte la requête, le fournisseur va procéder de deux façons selon que l'effet est encore en sa possession ou non. Dans le premier cas, il détruit l'effet initial et établit un nouvel effet d'échéance postérieure. Dans le second cas, il avance les fonds afin qu'il puisse honorer le paiement du nouvel effet et matérialise cette dette par un nouvel effet. Du point de vue du fournisseur, il s'agit d'accorder un délai supplémentaire qui s'apparente à l'allongement d'un crédit. La valeur nominale du nouvel effet ne peut évidemment être égale à celle de l'ancien.

Le problème à résoudre consiste à rechercher, au jour du renouvellement la nouvelle valeur nominale qui, compte tenu d'un taux d'intérêt donnée, rende le nouvel effet **équivalent** à l'ancien. Pour cela, il suffit d'**égaler les valeurs actuelles** des deux effets.

Par exemple, un créancier perçoit la même somme s'il escompte au taux annuel de 10 % et dans les mêmes conditions, une traite de 90 000 € à 20 jours ou une traite de 90 786,14 € à 51 jours. Il peut donc au moment de la création de la traite laisser le choix au débiteur. On dit que les deux effets sont équivalents. En effet,

$$90000 \times \left(1 - 0.10 \times \frac{20}{360}\right) = 89500 \text{ €} \quad \text{et} \quad 90786.14 \times \left(1 - 0.10 \times \frac{51}{360}\right) = 89500 \text{ €}.$$

En cas d'impayé, le créancier peut remplacer la traite impayée par une nouvelle traite de valeur actuelle commerciale la valeur nominale de la traite impayée, augmentée d'intérêts de retards et d'une somme en récupération des commissions et des frais engagés.

Les problèmes d'échange d'effets et de report d'échéances sont résolus par la notion d'équivalence. Le choix de la date d'équivalence est fondamental, il résulte d'un accord entre les parties ; l'essentiel étant que le créancier recouvre, le jour de l'escompte, l'intégralité de sa créance.

II - La notion d'équivalence

1) Equivalence de deux effets

a) Définition

Deux effets sont équivalents à une date déterminée lorsque, étant escomptés au même taux et dans les mêmes conditions à cette date, ils ont la même valeur actuelle commerciale.

Si V_1 et V_2 sont les valeurs nominales des deux effets ayant respectivement à courir n_1 et n_2 jours à compter de la date d'équivalence choisie :

$$V_1 \left(1 - \frac{n_1 t}{360}\right) = V_2 \left(1 - \frac{n_2 t}{360}\right)$$

où t est le taux annuel d'escompte.

b) Propriétés

La date d'équivalence doit être postérieure aux dates de création des deux effets.

La date d'équivalence est unique : si deux effets de valeurs nominales différentes sont équivalents à une date donnée, l'équivalence ne peut avoir lieu qu'à cette date.

Si deux effets ont même valeur nominale, mais des échéances différentes, ils ne seront jamais équivalents.

Si deux effets ont même valeur nominale et même échéance, ils sont toujours équivalents.

c) Remarque

Si la date d'équivalence est postérieure à la date d'échéance d'un des effets, la valeur actuelle de celui-ci est calculée en utilisant la formule de calcul des intérêts simples : $V_a = V_n(1 + td)$.

2) Equivalence de deux groupes d'effets

a) Définition

Deux groupes d'effets sont équivalents à une date donnée si, escomptés au même taux et dans les mêmes conditions à cette date, la somme des valeurs actuelles commerciales des effets du premier groupe est égale à la somme des valeurs actuelles commerciales des effets du second groupe.

Par exemple : si à une date donnée (date d'équivalence), les deux effets de valeurs nominales V_1 et V_2 ayant respectivement n_1 et n_2 jours à courir sont équivalents aux trois effets de valeurs nominales V_3 , V_4 et V_5 ayant respectivement n_3 , n_4 et n_5 jours à courir, on a :

$$V_1 \left(1 - \frac{n_1 t}{360}\right) + V_2 \left(1 - \frac{n_2 t}{360}\right) = V_3 \left(1 - \frac{n_3 t}{360}\right) + V_4 \left(1 - \frac{n_4 t}{360}\right) + V_5 \left(1 - \frac{n_5 t}{360}\right)$$

où t est le taux annuel d'escompte.

b) Exemples

Aujourd'hui un effet de valeur nominale 500 €, ayant 36 jours à courir, est équivalent aux deux effets de valeurs nominales 300 € à 24 jours et 200 € à 54 jours si le taux d'escompte est de 10 %. En effet,

$$500 \times \left(1 - \frac{36 \times 0.10}{360}\right) = 495 \text{ €} \quad \text{et} \quad 300 \times \left(1 - \frac{24 \times 0.10}{360}\right) + 200 \times \left(1 - \frac{54 \times 0.10}{360}\right) = 495 \text{ €}.$$

Aujourd'hui les trois effets de valeurs nominales 302 € à 36 jours, 202 € à 55 jours et 400 € à 71 jours sont équivalents aux deux effets de valeurs nominales 500 € à 36 jours et 400 € à 45 jours si le taux d'escompte est de 10 %.

3) Echéance moyenne

a) Définition

Lorsqu'on remplace plusieurs effets par un effet unique dont la valeur nominale est la somme des valeurs nominales des effets remplacés, l'échéance de l'effet unique est appelée échéance moyenne des effets remplacés

b) Exemple

L'échéance moyenne des trois effets de valeurs nominales 300 € à 36 jours, 200 € à 54 jours et 400 € à 72 jours est 56 jours. En effet,

$$300 \times \left(1 - \frac{36 \times 0.10}{360}\right) + 200 \times \left(1 - \frac{54 \times 0.10}{360}\right) + 400 \times \left(1 - \frac{72 \times 0.10}{360}\right) = 886 \text{ €}$$

$$300 + 200 + 400 = 900 \quad \text{et} \quad 900 \times \left(1 - \frac{56 \times 0.10}{360}\right) = 886 \text{ €}$$

c) Propriété

L'échéance moyenne est indépendante du taux d'escompte et de la date d'équivalence. On peut donc simplifier les calculs en prenant la date d'échéance du premier effet comme date d'équivalence.

Par exemple, si on a $V_1 \left(1 - \frac{n_1 t}{360}\right) + V_2 \left(1 - \frac{n_2 t}{360}\right) = V_3 \left(1 - \frac{n_3 t}{360}\right)$, avec $V_3 = V_1 + V_2$, alors en développant, on obtient successivement :

$$V_1 - V_1 \frac{n_1 t}{360} + V_2 - V_2 \frac{n_2 t}{360} = V_3 - V_3 \frac{n_3 t}{360}, \quad V_1 \frac{n_1 t}{360} + V_2 \frac{n_2 t}{360} = V_3 \frac{n_3 t}{360}, \quad V_1 n_1 + V_2 n_2 = V_3 n_3, \quad \text{et}$$

donc $n_3 = \frac{V_1 n_1 + V_2 n_2}{V_3}$ ne dépend pas de t .

Si on avance la date d'échéance de n jours dans le temps, alors les nombres de jours d'échéance deviennent $n_1 - n$, $n_2 - n$ et $n_3 - n$, et l'équivalence des effets s'écrit $V_1(n_1 - n) + V_2(n_2 - n) = V_3(n_3 - n)$. En développant et en simplifiant grâce à l'égalité $V_3 = V_1 + V_2$, on retrouve $V_1 n_1 + V_2 n_2 = V_3 n_3$. Le changement de date d'équivalence n'a donc pas d'effet sur l'échéance moyenne.

III - Exercices

L'escompte utilisé est l'escompte commercial. Les années sont comptées pour 360 jours. Sauf indication contraire, la date d'équivalence est la date de remplacement.

Les exercices seront résolus en appliquant uniquement le taux d'escompte. Dans la pratique, il faudrait aussi tenir compte des conditions exactes d'escompte.

Exercice 1

Un débiteur a accepté une traite de 1 100 € ayant encore 35 jours à courir. Il demande à son créancier de la remplacer par une traite à 60 jours. Quelle doit être la valeur nominale de cette nouvelle traite ? Taux d'escompte : 12 %.

Exercice 2

Le 1er septembre, on remplace un effet de 2 250 € au 15 octobre par un effet au 30 novembre. Quelle est la valeur nominale du nouvel effet ? Taux d'escompte : 10,20 %.

Exercice 3

Le 12 mai, un débiteur qui a accepté trois traites : 880 € au 31 mai, 716 € au 30 juin et 1 280 € au 31 juillet, demande à son créancier de les remplacer par un effet unique payable le 15 juillet. D'un commun accord, créancier et débiteur fixent la date d'équivalence au 20 mai. Quelle sera la valeur nominale de l'effet unique ? Taux d'escompte : 12 %.

Exercice 4

Un créancier et son débiteur se mettent d'accord pour remplacer un effet à 26 jours de valeur nominale 909 € par un effet de 913 € à 42 jours. Calculer le taux d'escompte.

Exercice 5

Le 12 octobre, on remplace trois effets : 240 € échéant le 30 octobre, 360 € échéant le 23 novembre, 480 € échéant le 20 décembre par un effet unique de 1 075 € échéant le 14 novembre. Déterminer le taux d'escompte.

Exercice 6

Aujourd'hui (date retenue comme date d'équivalence), un débiteur a le choix entre deux modes de règlement d'une dette, en acceptant :

- soit trois traites : 180 € à 30 jours, 275 € à 60 jours et 420 € à 90 jours ;
- soit deux traites : 480 € à 46 jours et 392 € à 61 jours.

A quel taux d'escompte a été calculée cette équivalence ?

Exercice 7

Le 6 octobre, un débiteur se met d'accord avec son fournisseur pour remplacer trois traites de 180 € échéant le 3 novembre, 270 € échéant le 14 novembre, 240 € échéant le 29 novembre par deux traites de 300 € échéant le 20 novembre et 393 € échéant le 5 décembre. A quel taux a été calculé l'escompte pour que ces deux modalités de paiement soient équivalentes ?

Exercice 8

Un débiteur souhaite remplacer une traite de 378,90 € qu'il doit payer dans 75 jours par une traite de 375,30 €.

Quelle sera l'échéance de cette nouvelle traite ? Taux d'escompte : 9,8 %.

Exercice 9

Le 9 septembre, on remplace trois traites : 390 € échéant le 24 septembre, 240 € échéant le 14 novembre, 420 € échéant le 29 novembre par une traite de 1 060 €. Déterminer la date d'échéance de cette traite. Taux d'escompte : 10 %.

Exercice 10

Le 20 avril, un commerçant demande à son fournisseur de remplacer le paiement des factures suivantes : 210 € le 4 mai, 369 € le 12 mai, 207 € le 24 mai, 315 € le 1er juin, 198 € le 17 juin par deux versements de 657 € chacun.

Le fournisseur accepte à condition que le premier versement de 657 € soit effectué le 20 mai. A quelle date le second versement doit-il être prévu pour que les deux séries de paiement soient équivalentes le 20 avril au taux d'escompte de 9,60 % ?

Exercice 11

On remplace un effet de 1 500 € échéant le 20 juillet par un effet de 1 520 € échéant le 28 août. A quelle date, cette transformation a-t-elle eu lieu ? Taux d'escompte 12 %.

Exercice 12

Un commerçant propose, pour le règlement de la même commande, deux formules de paiement :

- versement de 150 € au moment de l'achat et acceptation de trois lettres de change d'une valeur nominale de 150 € chacune, respectivement à 30, 60 et 90 jours d'échéance ;
- versement de 84 € au moment de l'achat et acceptation de six lettres de change de même valeur nominale, respectivement à 15, 30, 45, 60, 75 et 90 jours d'échéance.

Si le taux d'escompte est de 8,50 %, quelle doit être la valeur nominale de chacune des traites de la seconde proposition pour que ces deux types de règlement soient équivalents le jour de l'achat ?

Exercice 13

Un matériel (livré deux mois après la commande) peut être payé de deux façons différentes :

- au comptant le jour de la livraison ;
- en cinq versements : 240 € à la commande, 480 € un mois après la commande, 480 € au moment la livraison, 600 € un mois après la livraison, 750 € deux mois après la livraison.

Quel est le montant du paiement au comptant si ces deux modes de règlement sont équivalents à la date de la livraison ? Taux d'escompte : 12 %.

Exercice 14

Deux effets peuvent-ils être à la fois équivalents dans l'escompte commercial et l'escompte rationnels ?

Exercice 15

Un commerçant qui doit payer trois lettres de change de même valeur nominale V , échéant la première dans 3 mois, la deuxième dans 6 mois, la troisième dans 9 mois, se met d'accord avec son créancier pour remplacer ces trois effets par douze lettres de change de même valeur nominale X échéant de mois en mois, la première dans un mois.

1) Calculer la valeur X en fonction de V et de t , le taux d'escompte, en prenant successivement comme date d'équivalence :

- a) le début du 1er mois,
- b) la fin du 6ème mois,
- c) la fin du 12ème mois.

2) Application numérique : $V = 5\,000$ €, $t = 6$ %. Calculer la valeur de X dans chacun des trois cas du 1).

Exercice 16

Le 17 juin, trois effets sont présentés à l'escompte. La banque remet au porteur, la même somme pour chacun d'eux. Sachant que le premier est de 425 € au 15 octobre, le deuxième de 420 € au 6 août et le troisième de 418 €, on demande de déterminer :

- 1) le taux d'escompte ;
- 2) l'échéance du troisième effet ;
- 3) la date à laquelle ils pourraient être remplacés par un paiement unique de 1 263 €.