Université de Picardie Jules Verne **Année 2010-2011**
UFR des Sciences

Licence mention Informatique parcours MIAGE - Semestre 5
Mathématiques Financières

LES TAUX EFFECTIFS

Dans les chapitres précédents, différents types de taux ont été utilisés : taux d'intérêt simple (précomptés ou post-comptés), taux d'intérêt composé, taux annuels ou infra-annuels (proportionnels ou équivalents). Ces taux étaient des **taux nominaux**, c'est-à-dire des taux qui, appliqués à un capital, permettent de définir l'intérêt. Différentes modalités de calcul ont été également utilisées pour la détermination de la période de référence. Par exemple, un mois peut être égal à 1/12$^{\text{ème}}$ d'année, ou exprimé en nombre de jours exact rapporté au nombre de jours que comporte l'année ; selon les cas, 28, 29, 30 ou 31 jours, rapportés à 360 jours (année commerciale), 365 ou 366 jours (année civile).

Cette diversité de méthodes de calcul rend difficile la comparaison des opérations d'emprunt ou de placement à partir des seuls taux nominaux. Par ailleurs, d'autres modes de rémunération du préteur peuvent être à prendre en compte (commissions, prestations de service, ...). Du point de vue de l'emprunteur, les commissions (d'endos, de plus fort découvert), les jours de banque, les frais d'émission, les assurances, les frais de courtage, ..., sont aussi des sources de difficulté dans l'évaluation du coût effectif d'une opération.

Afin de faciliter les comparaisons et les arbitrages, il faut intégrer tous ces éléments et construire des indicateurs de rendement (pour les placements) ou de coût (pour les emprunts) selon des règles de calcul homogènes. Ces indicateurs sont exprimés en pourcentage et présentent les mêmes propriétés qu'un taux d'intérêt : on parle de **taux effectifs**. Leur détermination est un préalable à toute décision financière pour un emprunteur ou un investisseur devant choisir entre différentes propositions.

I - Définition et calcul d'un taux effectif

1) La notion de rendement ou de rentabilité

Le taux effectif est, du point de vue du prêteur, un taux de rendement.

Un rendement, comme un taux d'intérêt, se définit par rapport à une période. Si on achète des actions à un prix P_0 et qu'on revend ses titres un an après au prix P_1, alors le rendement sur un an est donné par

$$r = \frac{P_1 - P_0}{P_0} = \frac{\text{plus ou moins value en fin de période}}{\text{prix en début de période}}$$

On a ainsi $P_1 = P_0 + P_0 r = P_0(1 + r)$: le rendement a donc les mêmes caractéristiques qu'un taux d'intérêt. La différence réside dans le fait qu'un taux d'intérêt permet de calculer l'intérêt, alors qu'un taux de rendement ne fait que constater une variation du capital dont les causes peuvent être diverses. A cette différence près, toutes les formules obtenues précédemment sur les taux d'intérêt s'applique à la notion de rendement.

Le rendement effectif est calcule *ex post*, c'est-à-dire à la fin de l'opération (il faut connaître les prix d'achat et de vente pour son calcul). Dans le cas d'opérations où toutes les conditions sont connues dès l'origine, le rendement peut être calculé *ex ante*.

Lorque le calcul se fait sur un an, on parle de rendement annuel. Sinon, on peut l'annualiser en utilisant une méthode à taux proportionnel ou équivalent.

Exemple

Rendement d'une opération d'achat d'une action à 100 € revendue au bout d'un an à 165, 105, 85 ou 40 €. Le rendement est $r = \frac{165 - 100}{100} = 0.65$ soit 65 %, puis repectivement 5 %, −15 % et −60 %. Plus-value dans les deux premiers cas, moins-value dans les deux derniers.

Remarquons sur cet exemple que le rendement d'un placement peut être positif ou négatif. Il n'est normalement jamais inférieur à −1 (soit −100 %), rendement d'un placement où la capital investi a totalement disparu à l'échéance.

On peut aussi calculer des rendements sur plusieurs périodes lorsque les revenus de placement s'étalent sur plusieurs dates, par exemple pour un emprunt obligataire. C'est aussi le cas pour l'achat d'une action au prix P_0 en date 0, pour laquelle on touche un dividende D en date 1, et que l'on revend au prix P_2 en date 2. Ces trois dates définissent deux périodes, que nous supposons de même durée. On souhaite caractériser cette opération par un seul taux pour une période, noté r, supposé constant sur les deux périodes. En capitalisant le dividende en date 2 au taux r, on obtient $D(1+r)$. Le taux équivalent sur l'ensemble des deux périodes étant $(1+r)^2 - 1$, on en déduit l'égalité

$$(1+r)^2 - 1 = \frac{P_2 + D(1+r) - P_0}{P_0}$$

ce qui donne $P_0(1+r)^2 = D(1+r) + P_2$, égalité des valeurs capitalisées en date 2 du décaissement et des encaissements.

Le rendement apparaît donc comme le taux actuariel qui égalise les valeurs actuelles du décaissement et des encaissements. On écrit aussi : $P_0 = \frac{D}{(1+r)} + \frac{P_2}{(1+r)^2}$.

2) Taux effectifs de rendement et de revient

Un taux effectif peut être un taux de rendement (cas d'un placement) ou de revient (cas d'un emprunt). Le passage de l'un à l'autre est aisé puisqu'il s'agit de deux points de vue se rapportant à une même opération.

On appelle **taux effectif** le taux actuariel annualisé qui, à une date donnée, égalise la valeur actuelle des encaissements et des décaissements liés à une opération financière. On parle de **taux effectif de rendement** ou de **taux de rendement actuariel** dans le cas d'un placement, et de **taux effectif de revient**, de **coût effectif** ou de **coût actuariel** dans le cas d'une opération de financement.

Pour une opération financière d'emprunt portant sur un montant M, encaissé par l'emprunteur en date 0 (M représentant le nominal de l'emprunt après déduction des différents frais) et donnant lieu à n décaissements annuels R_1, R_2, ..., R_n en date 1, ..., n, le taux effectif x de cet emprunt est tel que :

$$M = \frac{R_1}{(1+x)} + \frac{R_2}{(1+x)^2} + \cdots + \frac{R_n}{(1+x)^n}, \text{ c'est-à-dire } M = R_1(1+x)^{-1} + R_2(1+x)^{-2} + \cdots + R_n(1+x)^{-n}$$

formule appelée **équation du taux effectif**.

Elle s'applique aussi à un placement d'un montant M procurant les encaissements R_1, ..., R_n.

Exemple

Un ami souhaite vous emprunter 1000 € et vous propose de vous rembourser en deux versements de 500 € dans un an et de 600 € dans deux ans. Le taux effectif de rendement x de cette opération vérifie l'équation :

$$1000 = \frac{500}{(1+x)} + \frac{600}{(1+x)^2}, \text{ c'est-à-dire } 1000 = 500(1+x)^{-1} + 600(1+x)^{-2}$$

En posant $X = \frac{1}{(1+x)} = (1+x)^{-1}$, l'équation devient $600X^2 + 500X - 1000 = 0$. Cette équation du second degré admet deux solutions $X_1 = -1.7732$ et $X_2 = 0.9399$, ce qui donne deux solutions $x_1 = -1.5639$ (soit -156.39 %) et $x_2 = 0.0639$ (soit 6.39 %). On ne retient que la solution réaliste x_2, soit un taux effectif de rendement de 6,39 %.

3) Quelques remarques utiles.

Le taux effectif est obtenu à partir des décaissements et encaissements, sans que soit préciser leur nature : ils intègrent flux de capital, intérêt, commisssions, frais, ... Il est possible de tenir compte de la **fiscalité** : dans ce cas, on parle de **taux net** ; sinon, on parle de **taux brut**.

Les flux doivent être datés avec précision. En pratique, les taux actuariels sont calculés en se référant à une **année civile** (365 ou 366 jours), les durées étant exprimées en **nombre exact de jours** pour les périodes inférieures à l'année. On adapte alors l'équation du taux effectif.

Le plus souvent, les taux effectifs sont calculés *ex ante*. Il est donc difficile de les déterminer lorsqu'on ne connaît pas toutes les conditions futures, par exemple pour un emprunt à taux variable. Dans ce cas, le calcul repose sur des anticipations de taux futurs, à utiliser avec précaution.

Repartant de la formule précédente, on a

$$M = \frac{1}{(1+x)^n}\left[R_1(1+x)^{n-1} + R_2(1+x)^{n-2} + \cdots + R_n(1+x)^0\right]$$

le terme entre crochets représentant la valeur capitalisée au taux x de tous les flux futurs en date n. On fait ainsi apparaître une **hypothèse implicite à tout calcul de taux actuariel** selon laquelle **tous les flux sont réinvestis au taux** x jusqu'à l'échéance de l'opération. Ceci a des conséquence importantes en matière de gestion obligataire et plus généralement dans le domaine de l'évaluation des investissements réels et financiers.

S'il existe, le taux effectif est **solution unique** de l'équation actuarielle. En effet, le calcul d'un taux effectif consiste à résoudre l'équation polynomiale de degré n

$$-M + R_1X + R_2X^2 + \cdots + R_nX^n = 0, \text{ avec } X = \frac{1}{(1+x)} = (1+x)^{-1}$$

On a considéré $x > -1$ et donc $X > 0$. On cherche donc des solutions X positives. Or la règle des signes de Descartes assure qu'un polynôme ne peut avoir plus de racines positives que de changements de signe dans la suite de ses coefficients. Or ici (cas des opérations financières les plus courantes), il n'y a qu'un changement de signe, donc au plus une solution positive. Pour autant, la résolution directe de l'équation n'est en général pas simple : des calculatrices ou logiciels permettent d'obtenir aisément la solution.

Les réglementations nationale et européenne imposent certaines informations aux établissements de crédits, et plus précisément à tous les organismes offrant des produits de placement ou des prêts aux particuliers : taux effectifs exprimés en pourcentage avec deux décimales, calcul du **taux effectif global** (TEG) intégrant tous les frais, ...

II - Exemples de détermination de taux effectifs

1) Opérations de moyen et long terme

Coût actuariel net d'un emprunt indivis pour une entreprise

Les entreprises se doivent de déterminer avec précision le coût de leur différentes sources de financement, que ce soit pour arbitrer entre des solutions de financement alternatives, pour suivre l'évolution du coût de leurs ressources, ou pour réaliser des opérations d'évaluation. Le coût réellement supporté doit tenir compte de la fiscalité. Retenons le cas des entreprises soumis à l'impôt sur les sociétés (IS). Ce statut fiscal permet de déduire du résultat comptable les charges d'intérêt des emprunts. Ainsi, plus l'entreprise constate de charges d'intérêt, moins elle paie d'impôts.

Par exemple, une entreprise réalise un chiffre d'affaire de 1000 et présente des charges, hors intérêts des emprunts, de 400. Supposons que le taux de l'IS est égal à 1/3 (33+1/3) %, soit $\tau = 0.3333333$. Etudions ce qui se passe suivant que l'entreprise est endettée ou pas :

	Sans charge d'intérêt	Avec charge d'intérêt
(1) Chiffre d'affaire	1 000	1 000
(2) Charges diverses	400	400
(3) Charges d'intérêts	0	300
(4) Résultat avant impôt : (1)-(2)-(3)	600	300
(5) Montant de l'IS payé : (4)×τ	200	100
(6) Résultat après impôt : (4)-(5)	400	200

La charge d'intérêts de 300 entraine une baisse du résultat après l'impôt (6) mais produisent une économie d'impôt de $300 \times \tau = 100$. La charge d'intérêt réellement supportée par l'entreprise est donc $300 - 300 \times \tau = 300(1-\tau) = 200$.

Cet impact de la fiscalité n'est pas limité aux intérêts. Il s'applique à toutes les charges déductibles des impôts, en particulier, à tous les frais et commissions connexes aux opérations financières. Il faut donc en tenir compte pour calculer le coût effectif d'un emprunt. La démarche de détermination d'un coût net au moment de l'initiation d'un emprunt est la suivante (voir exercice 1) : construire le tableau d'amortissement de l'emprunt, puis en déduire l'échéancier des encaissements et des décaissements nets, et enfin écrire puis résoudre l'équation du taux effectif.

Remarquons que le coût actuariel net d'un emprunt contracté sans autres frais que les intérêts est : $x = t(1-\tau)$.

Coût actuariel net d'une opération de crédit-bail

Le crédit-bail est considéré comme un substitut à l'emprunt. Il s'analyse comme un moyen de financement associant la location d'un bien à usage professionnel et une promesse unilatérale de vente en fin de contrat. Le bien est choisi par le preneur, acheté par la société de crédit-bail, puis loué. Concrètement, le preneur reçoit le bien en date 0 ; il paie ensuite des loyers pendant la durée du contrat, puis peut opter pour l'achat du bien à l'échéance. S'il ne lève pas cette option, le bien est repris par la société de crédit.

Il est utile de pouvoir comparer le coût d'un emprunt au coût d'une opération de crédit-bail. Pour cela, ces deux opérations sont traitées de façon homogène. D'un point de vue fiscal, les loyers de crédit-bails sont déductibles et créent donc pour les entreprises, comme les intérêts, des économies d'impôts sur les sociétés. Néanmoins, le bien n'étant pas propriété de l'entreprise, elle ne peut pas l'amortir et perd donc des économies d'impôt sur les dotations aux amortissements.

Le coût actuariel net du crédit-bail est le taux acturiel annuel égalisant la valeur actuelle des encaissements et des décaissements nets des économies d'impôt créées par les loyers et réintégrant les pertes d'économies d'impôt issues de l'interdiction d'amortir le bien. Voir exercice 2.

Taux effectif global d'un emprunt à périodicité infra-annuelle. Voir exercice 3.

Taux actuariel des obligations à taux fixe. Voir exercice 4.

2) Opérations à court terme. On a déjà calculé des taux effectifs dans le cas d'opérations d'escompte d'effets de commerce : taux de revient. Voir exercice 5.

III - Exercices

Exercice 1

Une entreprise souhaite calculer le coût effectif d'un emprunt bancaire dont les modalités sont les suivantes : le montant est de 150 000 €, amortissable par 5 annuités constantes sur 5 ans au taux nominal de 6%, première annuité payable un an après la remise des fonds. Pour le calcul du coût, nous devons tenir compte des frais de dossier de 300 € prélevés sur le principal, et de frais de prélèvement de 15 € par annuités. Le taux de l'IS est de (36+2/3) %, supposé constant sur la durée de l'emprunt.

1) Construire le tableau d'amortissement de l'emprunt.

2) A partir du tableau d'amortissement, réaliser l'échéancier des encaissements et décaissements en prenant en compte les intérêts nets et les frais nets (déduction fiscale effectuée).

3) Ecrire l'équation du taux effectif ; en déduire le taux effectif.

Exercice 2

Considérons une entreprise réalisant une opération de crédit-bail portant sur un bien d'une valeur de 150 000 €. le contrat prévoit le paiement en date 0 de frais de dossier de 150 € et le versement de 5 loyers annuels de 34 000 €, premier loyer payable un an après la mise à disposition du bien. En fin de cinquième année, le locataire peut acheter le bien pour un montant égal à 5 % de la valeur d'origine.

1) Calculer le coût net de cette opération, en supposant que l'option d'achat est levée et compte tenu d'un taux de l'IS égal à (36+2/3) %. Pour ce faire, on construira l'échéancier des encaissements et décaissements.

2) Comparer ce coût avec le coût de l'emprunt bancaire proposé dans l'exercice 1.

Exercice 3

Un particulier étudie une proposition de crédit à la consommation sur deux ans d'un montant de 10 000 €, remboursables par mesualités constantes. Le taux annuel est de 9,6 %, les frais de dossier de 25 €, le coût de l'assurance est de 0,6 %. Il faut également ajouter des frais de virement de 0,5 € par mensualité.

Calculer le taux annuel effectif global (TAEG) avec ou sans assurance.

Remarque : le TEG est souvent annoncé hors assurance. Celle-ci n'est pas toujours obligatoire, les organisme de crédit ne l'intègre pas au coût, contrairement aux autres frais.

Exercice 4

Considérons un emprunt obligataire constitué de titres de 1 000 € de nominal, remboursable au pair par séries égales sur 5 ans. le taux nominal est de 5 %. Le souscripteur bénéficie d'une prime d'émission de 25 €. Déterminer le taux de rendement actuariel si le titre est tiré au sort : a) la dernière année ; b) la première année.

Exercice 5

Une entreprise remet le 12 mars 2006 à sa banque un effet d'échéance 30 avril 2006 d'un montant égal à 6 500 €. La banque applique un taux d'escompte de 8,75 %, applique deux jours de banque supplémentaires. La commission d'endos est de 0,6 %. Le total HT des commissions fixes se monte à 10 €.

Calculer les coût effectifs bruts et nets de cette remise à l'escompte.