

Licence mention Informatique parcours MIAGE - Semestre 5
Mathématiques Financières

LES INTERETS SIMPLES

I - Définitions

Capital ou **principal** : Somme d'argent mise à disposition d'un emprunteur ou placée par un épargnant.

Intérêt : Pour un emprunteur (consommateur, entreprise, ...), c'est le prix à payer au prêteur (banque, ...) pour utiliser un capital pendant un temps donné. Pour un épargnant, c'est le rapport d'un placement (récompense pour la remise à plus tard de l'utilisation d'un capital).

C'est donc le loyer de la somme prêtée ou placée, calculé en utilisant un **taux d'intérêt** appliqué au capital. Ce taux est une fonction du temps (croissante), du risque (il y a un risque de contrepartie : l'emprunteur peut faire défaut ; le taux d'intérêt sera une fonction croissante du risque : plus l'emprunteur fait prendre de risque, plus le taux est élevé), des conditions économiques en général (si le prêteur a possibilité de placer son argent à 4.5%, il n'acceptera pas de prêter à moins). Le taux dépend donc de nombreux paramètres économiques, financiers, politiques, de circonstances propres à l'opération considérée (durée, solvabilité de l'emprunteur, ...).

Valeur acquise par le capital : c'est le capital augmenté des intérêts acquis pendant le temps couru au-delà de la date choisie comme origine des temps. Elle est toujours associée à une date.

Valeur acquise = capital + intérêts.

II - Calcul de l'intérêt simple

L'intérêt simple est essentiellement utilisé pour des opérations à court terme (moins d'un an).

L'intérêt simple est directement proportionnel au montant du capital placé et à la durée du placement du capital. (L'intérêt simple obtenu sur une période donnée n'est pas incorporé au capital pour le calcul des intérêts de la période suivante.)

Le coefficient de proportionnalité est le taux de l'intérêt. C'est le loyer de l'argent pour une période (unité de temps), en général une année comptée pour 365 ou 360 jours, et pour une unité de capital.

Exemples : taux de 8 %, de 5 %, 10 %, ...

La durée du placement pour les opérations financières à court terme est exprimée en jours ou en mois.

La convention de calcul majoritairement adoptée consiste à retenir le nombre exact de jours, que l'on divise par **360**, durée en **jours** d'une **année** dite **commerciale** (on parle de calcul en base **exact/360**). Le nombre exact de jours entre deux dates se calcule en excluant une des deux dates.

On a les formules de calcul :

$$I = Ctn \quad \text{respectivement} \quad I = Ct \frac{n}{360}, \quad I = Ct \frac{n}{12}$$

où I est l'intérêt simple, t le taux annuel de l'intérêt et n le nombre d'années, respectivement de jours, de mois, de placement.

La valeur acquise par le capital est :

$$V = C + I = C(1 + tn) \quad \text{respectivement} \quad V = C(1 + t \frac{n}{360}), \quad V = C(1 + t \frac{n}{12}).$$

Exemples.

1. Placement de 150 € au taux annuel de 8 % pendant 3 ans. Au bout d'un an, l'intérêt est de 12 €; au bout de 3 ans, l'intérêt est de 36 € et la valeur acquise par le capital est de 186 €

2. Un placement de 150 € a généré un intérêt de 18 € au bout de 2 ans. Le taux annuel auquel ce placement a été fait est de 6 %.

3. Une entreprise emprunte 100 000 € entre le 22 mars et le 30 avril de l'année N, au taux d'intérêt annuel de 5%. La durée de l'opération est de 39 jours et l'intérêt d'emprunt est de 541,67 €

III - Calcul des intérêts composés

A la fin de chaque période, l'intérêt simple de la période est ajouté au capital pour produire un intérêt simple à son tour pendant la période suivante et ainsi de suite. Un chapitre leur sera consacré.

IV - Modes de paiement

Considérons une opération élémentaire à deux flux, F_0 et F_n , d'une durée n séparant le flux payé F_0 et le flux reçu F_n . Deux exemples classiques : un prêt suivi d'un remboursement, un placement suivi d'une récupération de capital.

Les **intérêts post-comptés IPE (Intérêt Payable à l'Echéance)** sont calculés à partir du flux initial (capital emprunté ou placé), et payés au moment du remboursement du prêt ou à l'issue d'un placement (si rien n'est précisé, l'intérêt simple est supposé s'acquérir jour par jour et être payable à **terme échu**). On parle d'**opération à taux post-compté**.

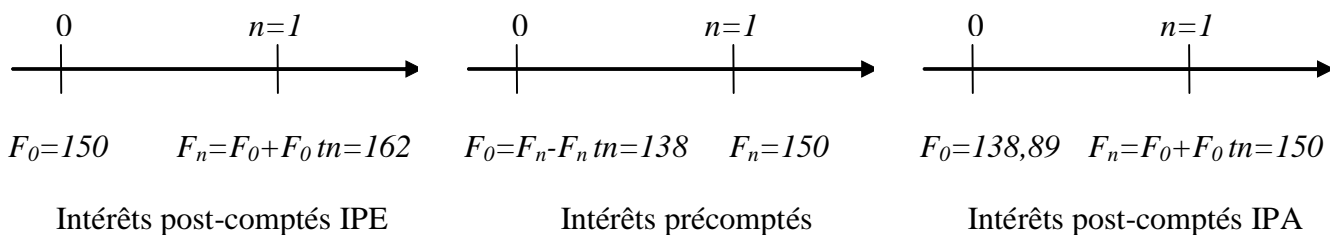
Exemple : Emprunt de 150 € au taux de 8 % pendant 1 an. L'emprunteur reçoit 150 € et rembourse un an plus tard $150 + 12 = 162$ €. Ces 162 € constituent la **valeur acquise** (ou valeur future) du capital 150 € en un an. A contrario, le capital initial de 150 € est appelée **valeur actuelle** (ou valeur actualisée) des 162 € au taux 5%. Il est ainsi équivalent de détenir 150 € à une date donnée et de détenir 162 € un an plus tard.

Les **intérêts précomptés** sont calculés à partir du flux final, et payés au moment de la remise de la somme prêtée ou à la date de placement (fréquent pour les opérations à court terme). On parle d'**opération à terme à échoir**, ou d'**opération à taux précompté**. A taux égal, les opérations à intérêt précompté sont moins avantageuses pour l'emprunteur que celles à intérêt post-compté.

Exemple : Emprunt de 150 € au taux de 8 % pendant 1 an. L'emprunteur reçoit $150 - 12 = 138$ €. La valeur actuelle est 138 € et la valeur acquise est 150 €.

Les **intérêts post-comptés IPA (Intérêt Payable d'Avance)** sont calculés à partir du flux initial, mais le capital est le flux final, si bien que le flux initial se déduit du flux final..

Exemple : Emprunt de 150 € au taux de 8 % pendant 1 an. L'emprunteur reçoit $F_0 = \frac{F_n}{1 + tn} = 138,89$ € et rembourse un an plus tard $F_n = 150$ €.



Les **intérêts périodiques** sont payés à la fin de chaque période (mois, trimestre, ...).

V - Taux proportionnels

Deux **taux** correspondants à des périodes de capitalisation différentes sont dits **proportionnels** lorsque leur rapport est égal au rapport de leurs périodes de capitalisation respectives.

Exemple. Un taux annuel de 6 % est proportionnel à un taux semestriel de 3 % ; à un taux trimestriel de 1,5 % ; à un taux mensuel de 0,5 %.

A intérêts simples, des taux proportionnels produisent des intérêts identiques sur une même durée. Il n'en est pas de même à intérêts composés où la valeur acquise augmente quand la période de capitalisation diminue.

VI – Exemple d'application : le découvert en compte courant – calcul des agios

Le **découvert en compte courant** constitue un moyen de financement des entreprises et des particuliers auprès des banques. Le découvert correspond à un solde de compte bancaire débiteur (dans les livres de la banque). Il s'analyse comme un prêt que l'établissement de crédit consent à son client et donne lieu à rémunération, appelée agios, généralement calculée et payée tous les trimestres. Celle-ci est composée d'intérêts proprement dits (post-comptés) et de commissions. Le montant du découvert variant chaque jour, le calcul des intérêts est facilité par l'établissement d'un document appelé **échelle d'intérêt**.

Le **ticket d'agios**. Le montant de la rémunération de la banque sur une opération de découvert est constitué de trois grands types d'éléments :

- les **intérêts débiteurs**, calculés sur les soldes débiteurs, au prorata du nombre de jours de découvert, selon la technique de l'intérêt simple post-compté. Le taux d'intérêt applicable est négociable auprès des établissements de crédit comme la majorité des autres conditions proposées par les banques aux entreprises. Il dépend du taux de base bancaire (TBB) ; il est de l'ordre de $TBB+1,5\%$ à $TBB+2,2\%$. (Le TBB est un taux de référence servant à une banque lorsqu'elle accorde des crédits ; il est fixé librement par chaque établissement de crédit en fonction du coût de ses ressources.)

- la **commission de plus fort découvert** (CPFD), calculée en appliquant un taux au plus fort découvert de chaque mois. Ce taux est d'environ $0,05\%$.

- la **commission de mouvement**, qui s'applique au total des mouvements débiteurs de la période (hors ceux effectués vers un compte tenu dans le même établissement). Le taux est de l'ordre de $0,025\%$.

Les commissions qui ne sont pas calculées prorata temporis ne sont pas considérées comme des intérêts, et font donc l'objet d'une facturation de TVA à $19,60\%$. C'est le cas de la CPFD, de la commission de mouvement, de la commission de tenue de compte (fixée forfaitairement), des commissions de dépassement (du découvert autorisé), ... Il existe des mouvements exonérés tels que les agios, les rectifications d'écritures, les virements entre comptes bancaires d'une même entreprise,

Pour une période donnée, on appelle échelle d'intérêts un tableau récapitulatif de l'ensemble des mouvements et soldes du compte courant. Les intérêts sont calculés à partir de ce document selon la **méthode des nombres**, sur la base d'une année commerciale de 360 jours. Le calcul se fait en nombre exact de jours de jours de découvert par solde. Ces soldes sont établis par la banque en date de valeur, dates qui sont différentes des dates d'opérations. Les banques ont pour pratique de retarder les encaissements et d'avancer les décaissements. Si, par exemple, une entreprise effectue une remise de chèque en date J (date d'opération), la banque enregistre l'opération le jour J, mais les fonds ne sont considérés comme disponibles sur le compte qu'en J+2 ouvrés, soit deux jours ouvrés après la date de remise des documents. On dit que l'établissement applique deux jours de banque.

Si le solde du compte est resté débiteur d'un montant M pendant n jours, les intérêts à payer s'élèvent à $I = Mt \frac{n}{360}$.

Si le solde du compte est resté débiteur d'un montant M_1 pendant n_1 jours, puis M_2 pendant n_2 jours, les intérêts s'élèvent à $I = M_1 t \frac{n_1}{360} + M_2 t \frac{n_2}{360} = \frac{t}{360} (M_1 n_1 + M_2 n_2)$.

De façon générale, $I = \frac{t}{360} \sum_{k=1}^p M_k n_k$.

On appelle **nombre débiteur** la quantité $M_k n_k$. Le calcul des intérêts s'obtient en appliquant un taux proportionnel journalier à la somme des nombres débiteurs.

Exemple d'échelle d'intérêt et ticket d'agios

Considérons une entreprise dont le compte bancaire est tenu en euros. Les intérêts du découvert sont facturés au taux $TBB+2\%$. La CPFD est de $0,05\%$ et la commission de mouvement de $0,025\%$. Le TBB est à 8% .

Le tableau ci-après présente, dans les cinq premières colonnes, l'évolution des mouvements de ce compte, sur les trois premiers mois d'une année N. Les deux dernières colonnes sont réservées au calcul des nombres débiteurs.

	Mouvements		Soldes		Nombres	
Date de valeur	Débit	Crédit	Débit	Crédit	Nb jours	Nb débiteurs
1 janv				65000	6	0
7 janv	130000	18000	47000		11	517000
18 janv	45000	105000		13000	9	0
27 janv	96000	15000	* 68000		14	952000
10 fév	25000	17000	76000		11	836000
21 fév	250000	166000	* 160000		7	1120000
28 fév	119000	255000	24000		1	24000
1 mars	34000	77000		19000	15	0
16 mars	3000	81000		97000	3	0
19 mars	368000	173000	* 98000		9	882000
28 mars	56000	185000		31000	3	0
31 mars	27000	79000		83000		
TOTAL	1153000					4331000

* Les nombres précédés par un astérisque correspondent au plus fort découvert du mois

Explications.

Le solde est créditeur au 1er janvier de 65000 €. Le compte passe en découvert le 7 janvier suite à des mouvements de 130000 € au débit et 18000 € au crédit. Le solde est donc

$$65000 - 130000 + 18000 = -47000 \text{ €} \quad \text{Les autres soldes sont calculés de façon identique.}$$

La colonne « nombre de jours » est calculé en incluant le premier jour et en excluant le dernier. Le produit du nombre de jours par le solde débiteur donne le nombre débiteur pour la période considérée. Le total s'établit à 4331000 €

Calcul du ticket d'agios.

$$\text{Les intérêts s'établissent à : } \frac{(0.08 + 0.02)}{360} \times 4331000 = 1203.66 \text{ €}$$

$$\text{La CPFD est : } (68000 + 160000 + 98000) \times 0.0005 = 163 \text{ €}$$

En l'absence de mouvements exonérés, la commission de mouvement est :

$$1153000 \times 0.00025 = 288.25 \text{ €}$$

Cette commission est assujettie à la TVA, soit : $288.25 \times 0.196 = 56.50 \text{ €}$

$$\text{Le montant TTC du ticket d'agios s'élève donc à : } 1203.66 + 163 + 288.25 + 56.50 = 1710.95 \text{ €}$$

VII – Exercices

Les années sont comptées pour 360 jours, les semestres pour 180 jours, les trimestres pour 90 jours et les mois pour 30 jours. Sauf indication contraire, les placements se font à intérêts simples.

Calcul de l'intérêt

Exercice 1

On place 150 € pendant 3 ans au taux annuel de 10 %.

- Déterminer la valeur acquise si le placement se fait à intérêts simples.
- Déterminer la valeur acquise si le placement se fait à intérêts composés.

Exercice 2

- On place 1 300 € au taux annuel de 8,75 % pendant 142 jours. Déterminer l'intérêt acquis.
- On place 1 350 € au taux annuel de 6,50 % pendant 267 jours. Déterminer la valeur acquise du capital.
- On place 3 750 € au taux semestriel de 4 % pendant 72 jours. Déterminer la valeur acquise du capital.
- On a placé 1 900 € au taux annuel de 7,25 % du 16 mars 1998 au 23 septembre 1998. Déterminer la valeur acquise du capital.
- On a placé 1 500 € au taux annuel de 2,50 % du 18 août 1997 au 27 décembre 1997 sur un livret d'épargne où les intérêts sont comptés par quinzaine civile. Déterminer la valeur acquise du capital.

Calcul du capital

Exercice 3

- Quel est le capital qui, placé au taux annuel de 6 % pendant 45 jours, rapporte 3,02 € d'intérêt ?
- Quel est le capital qui, placé au taux trimestriel de 2 % pendant 81 jours, acquiert une valeur de 509 € ?

Exercice 4

Au cours de la même année, une personne place : le 6 mars, 1 800 € et le 12 avril 1 200 €. Elle retire le 5 septembre 760 €, et le 22 novembre la totalité du solde de son compte.

Le taux varie pendant cette période de placement : taux annuel de 7,5 % du 1er janvier au 31 mars, de 6,5 % du 1er avril au 15 juillet et 7 % du 16 juillet au 31 décembre.

Calculer le montant du retrait final dans les deux cas suivants :

- Les intérêts ne sont jamais capitalisés.
- Les intérêts sont capitalisés le jour de chaque changement de taux.

Les opérations de versement et de retrait sont comptabilisées à leur date d'exécution.

Calcul du taux

Exercice 5

- A quel taux annuel a été placé un capital de 700 € qui a rapporté 9,60 € d'intérêt en 91 jours ?
- A quel taux annuel a été placé un capital de 1 200 € qui a acquis une valeur de 1 229,76 € en 146 jours ?
- A quel taux trimestriel a été placé un capital de 830 € qui a rapporté 18,92 € d'intérêt en 108 jours ?

Calcul de la durée de placement

Exercice 6

a) Au bout de combien de jours un capital de 4 180 € placé au taux annuel de 8,40 %, rapporte-t-il 121,92 € d'intérêt ?

b) Au bout de combien de jours un capital de 660 € placé au taux annuel de 5,75 %, acquiert-il une valeur de 691,31 € ?

Exercices d'approfondissement

Exercice 7

Compléter le tableau suivant, en calculant les éléments manquants dans chacune des hypothèses de placement.

Capital	Taux annuel	Durée de placement	Montant des intérêts	Valeur acquise
2 750 €	5 %	3 ans		
2 260 €	5,30 %	48 jours		
	6 %	3 ans	424,80 €	
	3,75 %	146 jours	14,27 €	
	4,30 %	25 jours		651,91 €
890 €		46 jours	5,33 €	
42 €		2 ans 124 jours	4,91 €	
3 285 €		225 jours		3410,55 €
4 180 €	4,75 %		50,05 €	

Exercice 8

Au cours de l'année 2001, une personne a fait les opérations suivantes sur son livret d'épargne.

Date	Opération	Montant	Date	Opération	Montant
31/12/00	avoir (intérêts 2000 compris)	5 580 €	15/04/01	Retrait	300 €
13/01/01	Versement	1 980 €	03/05/01	Versement	380 €
18/02/01	Retrait	900 €	08/06/01	Versement	380 €
08/03/01	Versement	1 050 €	05/09/01	Versement	760 €
31/03/01	Versement	1 500 €	13/09/01	Versement	230 €

Le taux d'intérêt est de 3,5 % et l'intérêt est servi aux déposants à partir du 1er ou du 16 de chaque mois après le jour du versement. Il cesse de courir à la fin de la quinzaine qui précède le remboursement.

Calculer les intérêts de l'année 2001 qui seront ajoutés à l'avoir le 31 décembre 2001.

Exercice 9

Les banques A, B et C appliquent respectivement les dates de valeur suivantes :

	Banque A	Banque B	Banque C
Versement d'espèces	lendemain de l'opération	jour de l'opération	lendemain ouvré
Retrait d'espèces au guichet de la banque	veille de l'opération	jour de l'opération	veille ouvrée
Remise de chèque			
• sur rayon	4 jours ouvrables	jour de l'opération	3 jours calendaires
• hors rayon	5 jours ouvrables	jour de l'opération	4 jours calendaires

Donner, pour chacune des trois banques, les dates de valeurs des opérations suivantes :

- un versement d'espèces le mardi 16 mars, le vendredi 14 mai ;
- un retrait d'espèces le jeudi 14 janvier, le mardi 9 février ;
- une remise de chèque le mercredi 3 mars, le vendredi 11 juin.

Exercice 10

Un capital de 2 030 € est placé au taux annuel de 6 %. Le même jour, un capital de 2 050 € est placé au taux annuel de 4,8 %. Au bout de combien de jours auront-ils acquis la même valeur ?

Exercice 11

Un capital est placé pendant 194 jours au taux annuel de 6,5 %. Si on prend pour base une année de 360 jours, puis une année de 365 jours, la différence entre les deux résultats est de 8,93 €. Déterminer le montant du capital.

Exercice 12

Une personne emprunte 10 000 €. Au bout d'un an, elle rembourse 6 000 € sur la somme totale due (capital et intérêts). La dette qui subsiste porte intérêts à un taux supérieur de 1 % au premier taux. Au bout d'un an, la dette totale est de 4 620 €. Retrouver le premier taux.

Exercice 13

La différence entre deux capitaux est de 12 000 €. Le plus grand est placé pendant 8 mois au taux annuel de 5 % et le second pendant 5 mois au taux annuel de 4 %. Le total des intérêts s'est élevé à 1 300 €. Déterminer les deux capitaux.

Exercice 14

Trois capitaux sont tels que le rapport du premier au deuxième est de $\frac{2}{5}$ et que le troisième est égal à la somme des deux premiers augmentée de 2 380 €. Ils sont placés pour le premier à 5 % pendant 91 jours, pour le deuxième à 4 % pendant 63 jours et pour le troisième à 3 % pendant 96 jours (taux annuels). Le total des intérêts s'est élevé à 269,37 €. Quels sont les trois capitaux ?

Exercice 15

On considère la situation décrite au paragraphe IV.

Par convention, le taux d'intérêt effectif d'une opération est le taux qui permet de passer d'un flux initial F_0 à un flux final F_n par la formule $F_n = F_0(1 + tn)$; il correspond au taux d'intérêt post-compté IPE.

Pour un taux d'intérêt t donné, déterminer en fonction de t le taux d'intérêt effectif t' de l'opération à taux d'intérêt précompté.

Exercice 16

Une banque vous propose deux prêts de 20 000 € pour 4 mois aux conditions suivantes :

- Prêt A : intérêts simple postcompté au taux de 8 %
- Prêt B : intérêts simple précompté au taux de 7.5 %

Quel prêt préférez-vous ?