Coorigé de l'examen du 9 janvier

I

Pour obtenir n faces il suffit de prendre une pyramide de base un polygone à $n-1$ côtés.

II

1. Les centres de deux faces voisines et le milieu de l'arête commune à ces deux faces forment un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueur $1/2$. Par le théorème de Pythagore la distance cherchée vaut $\sqrt{1/4+1/4} = 1/\sqrt{2}$.
2. La base de cette pyramide est un carré de côté $1/\sqrt{2}$ d'après la question précédente. La hauteur de la pyramide est $1/2$. Le volume est donc $\frac{1}{3}\frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = \frac{1}{12}$.

   L'octaèdre est formé de deux pyramides identiques à celle que nous venons d'étudier. Son volume est donc $1/6$.
3. Le point M est aux $2/3$ de la médiane $[O, I]$ et le point N aux $2/3$ de la médiane $[O, J]$, donc l'homothétie de centre O et de rapport $2/3$ transforme IJ en MN, donc la longueur MN est $2/3$ de la longueur IJ. Comme IJ est la moitié de AC, la longueur MN vaut $1/3$.
4. Une des arêtes du cube considéré est MN, donc le volume du cube est $(1/3)^3 = 1/27$.
5. On a montré qu'en prenant les milieux des faces d'un cube puis à nouveau les milieux des faces de l'octaèdre on obtient un cube réduit de $1/3$, donc de volume 27 fois plus petit.

III

1. Si on compte les arêtes en ajoutant les nombres d'arêtes issues de chaque sommet, il faut diviser par 2 puisque chaque arête relie deux sommets. Comme chaque sommet a au moins 3 arêtes on obtiendra au minimum $3s/2$.
2. S'il y a 4 faces, la formule d'Euler donne $s = a - 2$. Comme $a \geq 3s/2$, on obtient $s \geq 3s/2 - 2$, donc $s/2 \leq 2$, c'est-à-dire $s \leq 4$. Un polyèdre ne peut pas avoir moins de 4 sommets, sinon il est dans un plan, donc on a exactement 4 sommets

3. Si un polyèdre convexe a 4 sommets, aucune face ne peut avoir 4 sommets car les 4 sommets seraient tous dans un plan. Donc les faces sont toutes des triangles. Si ABC est une face et D le quatrième sommet, alors l'autre face contenant AB ne peut être que ABD et de même BCD et CAD sont des faces. On a donc un tétraèdre.