

INTRODUCTION AUX GROUPE ET ALGÈBRES DE LIE

COURS DE M2, ANNÉE 2010–2011

FRANÇOIS DIGNE

RÉFÉRENCES

- [Bbk] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, chapitre 1, Diff. CCLS (1971) ; chapitre 2 et 3, Diff. CCLS (1972) ; chapitres 4 à 6 Masson (1981) ; chapitres 7 et 8 Masson (1990).
- [Ca] R. Carter, Lie algebras of finite and affine type, Cambridge University Press (2005).
- [H] J. Humphreys, Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer (1972).
- [P] C. Procesi, Lie Groups, An Approach Through Invariants and Representations, Universitext, Springer (2007)
- [S1] J.P. Serre, Lie algebras and Lie groups, Benjamin (1965),
- [S2] J.P. Serre, Algèbres de Lie semi-simples complexes, Benjamin (1966), Springer (1992).

1. INTRODUCTION, EXEMPLES DE GROUPE ET D'ALGÈBRES DE LIE

Un groupe de Lie (sur $\mathbb{R}$ resp. $\mathbb{C}$) est un groupe qui est en même temps une variété différentielle (réelle, resp. complexe) telle que la multiplication et le passage à l'inverse soient des applications C^∞ . Un exemple élémentaire est le groupe additif $(\mathbb{C}, +)$ ou $(\mathbb{R}, +)$. Un exemple fondamental de groupe de Lie complexe est le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ des matrices $n \times n$ inversibles complexes. Si $n = 1$ c'est simplement le groupe multiplicatif de $\mathbb{C}$. À un groupe de Lie on associe une "algèbre de Lie" (voir définition plus bas) de la façon suivante : un groupe de Lie G est une variété donc admet un espace tangent T_1 en l'élément neutre. Cet espace tangent est muni d'une structure supplémentaire venant de la structure de groupe : un groupe, en particulier un groupe de Lie, opère sur lui-même par conjugaison : g opère par $h \mapsto ghg^{-1}$. On en déduit en différenciant une action linéaire de G sur T_1 c'est-à-dire une application C^∞ de G dans $\mathrm{End}(T_1)$ qu'on peut différencier à son tour pour obtenir une application linéaire $T_1 \mapsto \mathrm{End}(T_1)$, c'est-à-dire une application bilinéaire $T_1 \times T_1 \rightarrow T_1$ que nous noterons $[X, Y]$, appelée **crochet de Lie**.

Pour permettre de calculer $[X, Y]$ et d'en donner des propriétés on peut utiliser les champs de vecteurs : un groupe de Lie G opère sur lui-même par multiplication à gauche : un élément $g \in G$ agit par $m_g : x \mapsto gx$. La différentielle de m_g est un isomorphisme de T_1 sur l'espace tangent T_g en g . Donc à partir d'un vecteur $X \in T_1$ on peut définir un (unique) champ de vecteurs invariant par multiplication à gauche par $X_g = (dm_g)X$. Pour un tel champ on a existence et unicité d'une courbe $t \mapsto \gamma(t)$ (où $t \in \mathbb{R}$) telle que le vecteur tangent à la courbe en $\gamma(t)$ soit $X_{\gamma(t)}$ et $\gamma(0) = 1$ (théorème d'existence et d'unicité des solutions d'une équation différentielle ; la courbe est définie partout grâce à l'invariance du champ de vecteurs par multiplication à gauche). Cette courbe vérifie $\gamma(s + t) = \gamma(s)\gamma(t)$ (exercice). C'est ce qu'on appelle un **sous-groupe à un paramètre**.

Prenons l'exemple du groupe de Lie GL_n (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Son espace tangent en l'identité s'identifie à l'espace M_n de toutes les matrices carrées de taille n . Pour

$X \in M_n$ on a une courbe $t \mapsto e^{tX}$ dans GL_n et $\frac{de^{tX}}{dt}|_{t=0} = X$. Pour un sous-groupe de Lie G de GL_n , si X est dans l'espace tangent à G en l'identité, qui est donc un sous-espace de M_n , comme la courbe γ de G solution de l'équation différentielle est aussi une courbe de GL_n , l'unicité de γ montre que $\gamma(t) = e^{tX}$ et donc que l'espace tangent en l'identité à G est $\mathfrak{g} = \{X \in M_n \mid e^{tX} \in G, \forall t \in \mathbb{R}\}$.

Nous allons calculer $[X, Y]$ pour un sous-groupe de Lie G de GL_n . L'action de G sur un sous-groupe à un paramètre est donnée par $Ae^{tX}A^{-1} = e^{tAXA^{-1}}$. En dérivant cette action on obtient l'action de G sur $\mathfrak{g}$ qui est donc donnée par $X \mapsto AXA^{-1}$. En dérivant à nouveau, on obtient une action de $\mathfrak{g}$ sur elle-même :

$$\frac{d(e^{tX}Ye^{-tX})}{dt}|_{t=0} = XY - YX.$$

On a donc $[X, Y] = XY - YX$. Cette formule définit une loi interne bilinéaire sur $\mathfrak{g}$ qui possède les deux propriétés suivantes :

- (i) $[X, X] = 0$ pour tout X .
- (ii) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ pour tous X, Y, Z .

La deuxième identité ci-dessus s'appelle l'identité de Jacobi (vérifiez-là!). La première identité implique que $[X, Y] + [Y, X] = 0$ pour tout X et tout Y (elle est équivalente en caractéristique différente de 2).

On peut montrer que pour tout groupe de Lie l'application $(X, Y) \mapsto [X, Y]$ vérifie ces deux propriétés.

Une autre point de vue est de considérer les champs de vecteurs sur un groupe de Lie comme des opérateurs différentiels sur l'espace des fonctions sur ce groupe. On sait définir le crochet de deux opérateurs différentiels d'ordre 1 par $[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X$, qui est un opérateur différentiel d'ordre 1 (vérifier ceci, voir exercice 1.2). On voit facilement que le crochet de deux champs de vecteurs invariants donne un champ invariant, d'où le crochet sur l'espace T_1 . On montre que cette construction redonne le crochet défini précédemment.

Définition 1.1. Soit k un corps commutatif et V un k -espace vectoriel. Une loi bilinéaire alternée sur V vérifiant l'identité de Jacobi est appelée **crochet de Lie**. Si V est muni d'un crochet de Lie, on dit que V est une k -algèbre de Lie.

Exercice 1.2. Montrer que l'ensemble des dérivations d'une algèbre sur un corps k est une algèbre de Lie pour le crochet $[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$. On rappelle qu'une dérivation est une application linéaire de l'algèbre dans elle-même qui vérifie $D(ab) = D(a)b + aD(b)$.

Donnons quelques exemples. on a vu que groupe GL_n de toutes les matrices complexes, resp. réelles, inversibles de rang n est un groupe de Lie dont l'algèbre de Lie est l'ensemble M_n de toutes les matrices $n \times n$ complexes, resp. réelles, muni du crochet $[A, B] = AB - BA$. Plus généralement l'ensemble de toutes les matrices carrées $n \times n$ à coefficients dans un corps commutatif k muni du crochet $[A, B] = AB - BA$ est une algèbre de Lie que nous noterons $\mathfrak{gl}_n(k)$.

Tout sous-groupe fermé de GL_n est un groupe de Lie. Ceci permet de construire un certain nombre d'exemples. En voici deux :

- (i) Le groupe SL_n des matrices de GL_n de déterminant 1. Comme $\det(e^X) = e^{\text{trace } X}$, l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_n$ de SL_n est l'ensemble des matrices de trace nulle.

- (ii) Le groupe orthogonal, formé des matrices $A \in GL_n$ telles que ${}^tA = A^{-1}$.
 Un calcul analogue montre que son algèbre de Lie est l'ensemble des matrices $X \in M_n(\mathbb{C})$ telles que ${}^tX = -X$.

Exercice 1.3. Quelles sont les algèbres de Lie du groupe unitaire (sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ des matrices A vérifiant ${}^t\bar{A} = A^{-1}$) et du groupe symplectique (${}^tAJA = J$ où $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$) ?

Beaucoup de questions sur les groupes des Lie peuvent se ramener à des questions sur leurs algèbres de Lie. L'avantage des algèbres de Lie est leur structure linéaire : ce sont des espaces vectoriels et le crochet est bilinéaire.

2. ALGÈBRES DE LIE, ALGÈBRE ENVELOPPANTE, ALGÈBRES RÉSOLUBLES ET NILPOTENTES

2.1. Morphismes, idéaux, quotients. Nous allons développer la théorie abstraite des algèbres de Lie, sur un corps k commutatif quelconque dans un premier temps. On peut évidemment définir les notions de sous-algèbre de Lie et de morphismes d'algèbres de Lie. Un morphisme étant en particulier une application linéaire il a un noyau. Si $f : L \rightarrow L'$ est un morphisme d'algèbres de Lie de noyau $N \subset L$, pour tout $x \in N$ et tout $y \in L$ on a $f([x, y]) = [f(x), f(y)] = 0$, donc $[x, y] \in N$. On dit que N est un idéal de L . Précisément :

Définition 2.1. *Un idéal d'une algèbre de Lie L est un sous-espace vectoriel I de L tel que $[x, y] \in I$ pour tout $x \in L$ et tout $y \in I$.*

Un idéal est en particulier une sous-algèbre de Lie. Si I est un idéal de L alors l'espace vectoriel quotient L/I a une structure d'algèbre de Lie, le crochet étant défini par $[x + I, y + I] = [x, y] + I$ pour x et y dans L (exercice : vérifier que cette formule a un sens et définit une structure d'algèbre de Lie). Si $f : L \rightarrow L'$ est un morphisme d'algèbres de Lie, son image est une sous-algèbre de Lie de L' , isomorphe au quotient de L par le noyau de f .

On peut définir aussi la notion de **somme directe** d'algèbres de Lie, comme la somme directe des espaces vectoriels le crochet entre deux facteurs différents étant défini comme égal à 0.

Exercice 2.2. Soient I et J des idéaux d'une algèbre de Lie alors

- (i) l'espace vectoriel $[I, J]$ engendré par les crochets $[i, j]$ avec $i \in I$ et $j \in J$ est un idéal ;
- (ii) l'espace vectoriel somme $I + J$ est un idéal (plus généralement une somme quelconque d'idéaux est un idéal) ;
- (iii) l'espace vectoriel $I \cap J$ est un idéal ;

Un idéal particulier est le **centre** de L : c'est l'ensemble des x tels que $[x, y] = 0$ pour tout $y \in L$. Une algèbre de Lie est dite **abélienne** ou commutative si elle est égale à son centre, c'est-à-dire si $[x, y] = 0$ pour tout x et tout y . Un exemple d'algèbre de Lie commutative est la sous-algèbre de $\mathfrak{gl}_n(k)$ formée des matrices multiples scalaires de l'identité. C'est le centre de $\mathfrak{gl}_n(k)$. Remarquons qu'une algèbre de Lie de dimension 1 est toujours abélienne.

2.2. Algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie. Si A est une algèbre associative, on peut la munir d'une structure d'algèbre de Lie en posant $[x, y] = xy - yx$. On est alors amené, étant donnée une algèbre de Lie à trouver une algèbre associative "la plus petite possible" (propriété d'universalité, voir ci-dessous) la contenant telle que le crochet de Lie devienne le commutateur dans cette algèbre. Nous allons construire une telle algèbre et en démontrer l'unicité.

On commence par construire l'algèbre tensorielle $T(L)$ (construction valable pour un espace vectoriel quelconque). C'est l'espace vectoriel $T(L) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} L^{\otimes n}$ muni du produit bilinéaire donné par le produit tensoriel $L^{\otimes m} \times L^{\otimes n} \rightarrow L^{\otimes(m+n)}$. C'est une algèbre graduée : on note $T(L)_n = L^{\otimes n}$ le sous-espace des éléments de degré n . On a $T(L)_0 = k$ et $T(L)_1 = L$. Soit J l'idéal bilatère de $T(L)$ engendré par les éléments $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$ pour x et y dans $L = T(L)_1$. **L'algèbre enveloppante** de L est par définition le quotient $U(L) = T(L)/J$. C'est donc une algèbre associative munie d'un morphisme d'algèbres de Lie $j : L \rightarrow U(L)$ où le crochet sur $U(L)$ est donné par le commutateur $[a, b] = ab - ba$. Nous verrons plus bas que j est injectif. Montrons la propriété d'universalité de $U(L)$

Proposition 2.3. *Pour tout morphisme d'algèbres de Lie de $f : L \rightarrow A$ dans une algèbre associative A il existe un unique morphisme $f_U : U(L) \rightarrow A$ tel que $f = f_U \circ j$.*

Démonstration. Si $(x_i)_{i \in I}$ est une base de L , les monômes en les x_i forment une base de $T(L)$. On peut donc étendre le morphisme f en un morphisme d'algèbres associatives $T(L) \rightarrow A$ par $x_{i_1} \dots x_{i_k} \mapsto f(x_{i_1}) \dots f(x_{i_k})$. Ce morphisme s'annule sur J donc passe au quotient, d'où le résultat (l'unicité est claire). $\square$

Corollaire 2.4. *L'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie est unique à isomorphisme près*

La démonstration est laissée au lecteur.

Il reste à voir l'injectivité de j . C'est une conséquence du théorème fondamental suivant :

Théorème 2.5 (Théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt). *Si L est une algèbre de Lie de base $(x_i)_{i \in I}$ et si $<$ est un ordre total sur l'ensemble I des indices alors les images dans $U(L)$ des monômes $x_{i_1} \dots x_{i_k}$ avec $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k$ forment une base de $U(L)$.*

Démonstration. Pour $i \in I$ posons $y_i = j(x_i)$. Par définition les monômes en les y_i engendrent $U(L)$. D'autre part $y_{i_1} \dots y_{i_h} y_{i_{h+1}} \dots y_{i_k} = y_{i_1} \dots y_{i_{h+1}} y_{i_h} \dots y_{i_k} + y_{i_1} \dots [y_{i_h}, y_{i_{h+1}}] \dots y_{i_k}$. Or le crochet $[y_{i_h}, y_{i_{h+1}}]$ est dans $j(L)$, donc combinaison linéaire des y_i . on en déduit que le deuxième terme de la somme précédente est combinaison de monômes de degré au plus $k-1$ en les y_i . Par récurrence sur le degré on voit qu'on peut exprimer, en faisant des transposition successives, tout monôme comme combinaison des monômes où les indices sont dans l'ordre croissant.

Il reste à prouver que les y_i sont indépendants. Pour cette preuve, assez fastidieuse nous renvoyons par exemple à [Ca, theorem 9.4]. $\square$

Corollaire 2.6. *Le morphisme d'algèbres de Lie $L \rightarrow U(L)$ est injectif.*

2.3. Algèbres résolubles et nilpotentes. Étant donnée une algèbre de Lie on peut considérer la suite d'idéaux définie par récurrence par $L^{(0)} = L$ et $L^{(n+1)} = [L^{(n)}, L^{(n)}]$. L'algèbre de Lie L est commutative si et seulement si $L^{(1)} = 0$.

Définition 2.7. (i) On dit que $L^{(1)} = [L, L]$ est l'algèbre de Lie dérivée de L .

(ii) Une algèbre de Lie est dite résoluble si on a $L^{(n)} = 0$ pour n assez grand.

Un exemple d'algèbre de Lie résoluble est la sous-algèbre de $\mathfrak{gl}_n(k)$ formée des matrices triangulaires supérieures.

Exercices 2.8. (i) Démontrez l'assertion ci-dessus.

(ii) Montrer que $[L, L]$ est le plus petit idéal I tel que l'algèbre de Lie L/I soit commutative.

(iii) Montrer qu'une algèbre de Lie est résoluble si et seulement si il existe une suite d'idéaux emboîtés tels que les quotients successifs sont abéliens.

Introduisons une autre suite d'idéaux emboîtés définie par récurrence en posant $L^1 = L$ et $L^{n+1} = [L, L^n]$.

Définition 2.9. Une algèbre de Lie est dite nilpotente si on a $L^n = 0$ pour n assez grand.

Une algèbre de Lie commutative est nilpotente. Une algèbre de Lie nilpotente est résoluble (exercice : on pourra montrer que $L^{(n)} \subset L^{2^n}$). Un exemple d'algèbre de Lie nilpotente est l'algèbre des matrices triangulaires supérieures de taille donnée, avec des 0 sur la diagonale (exercice : démontrer cette propriété).

Les algèbres de Lie nilpotentes et résolubles joueront un rôle fondamental dans la suite.

Définition 2.10. (i) Une algèbre de Lie L est dite simple si elle est non nulle et n'a pas d'idéal autre que $\{0\}$ et L .

(ii) Une algèbre de Lie L est dite semi-simple si elle n'a aucun idéal résoluble non nul.

Nous verrons (3.15) qu'en caractéristique 0 toute algèbre de Lie semi-simple de dimension finie est une somme directe d'algèbres simples, ce qui est l'origine de la terminologie. Cette propriété est fausse en caractéristique quelconque.

Lemme 2.11. Si I est un idéal résoluble de L tel que L/I soit aussi résoluble alors L est résoluble.

Démonstration. On a $(L/I)^{(n)} = \{0\}$ pour un certain n , c'est-à-dire $L^{(n)} \subset I$. Or $I^{(m)} = \{0\}$ pour un certain m , d'où $L^{(n+m)} = \{0\}$. $\square$

On déduit de ce lemme (exercice) que si I et J sont deux idéaux résolubles alors $I + J$ est un idéal résoluble. Donc si I est un idéal résoluble maximal il contient tous les idéaux résolubles. On en déduit l'existence, si la dimension de L est finie, d'un plus grand idéal résoluble : le **radical** de l'algèbre. On a donc une définition équivalente de la semi-simplicité dans le cas de la dimension finie :

Proposition 2.12. Une algèbre de Lie de dimension finie est semi-simple si et seulement si son radical est réduit à $\{0\}$.

De plus on a

Proposition 2.13. Si J est le radical d'une algèbre de Lie L de dimension finie alors L/J est une algèbre de Lie semi-simple.

Démonstration. Les idéaux de L/J sont de la forme I/J où I est un idéal contenant J . Si I/J est un idéal résoluble de L/J , par 2.11 l'idéal I est résoluble, donc inclus dans J par définition de J . Le seul idéal résoluble de I/J est donc bien $J/J = \{0\}$. $\square$

Une algèbre de Lie de dimension 1 est à la fois simple et résoluble. Elle n'est donc pas semi-simple. Par contre

Proposition 2.14. *Une algèbre de Lie simple de dimension strictement supérieure à 1 est semi-simple.*

Démonstration. Soit L une algèbre de Lie simple et non semi-simple. Un idéal résoluble non nul de L est nécessairement égal à L tout entière, donc L est résoluble. Alors $L^{(n)}$ est une suite décroissante d'idéaux qui valent $\{0\}$ pour n grand et qui ne peuvent être égaux qu'à L ou à $\{0\}$. La seule possibilité est $L^{(1)} = 0$, donc L est commutative. Une algèbre commutative ne peut être simple que si elle est de dimension 1 car tout sous-espace vectoriel est un idéal. Donc L est de dimension 1. $\square$

3. REPRÉSENTATION ADJOINTE, FORME DE KILLING

Nous donnons dans cette section des outils permettant d'étudier plus en détail la structure des algèbres de Lie de dimension finie, en particulier nous donnerons des critères pour qu'une algèbre de Lie soit résoluble ou semi-simple. Un outil important pour l'étude des algèbres de Lie est la notion de représentation : si V est un espace vectoriel sur un corps k , l'ensemble des applications linéaires de V dans V est une algèbre de Lie pour le crochet $[u, v] = u \circ v - v \circ u$. On la note $\mathfrak{gl}(V)$ ou $\mathfrak{gl}_k(V)$ si on veut préciser le corps. On appelle **représentation** d'une k -algèbre de Lie L un morphisme d'algèbres de Lie $L \rightarrow \mathfrak{gl}_k(V)$ pour un certain espace vectoriel V . On dit aussi que V est un **L -module**. Remarquons que

Lemme 3.1. *Les L -modules sont en bijection avec les $U(L)$ -modules.*

Démonstration. Un L -module V est un k -espace vectoriel muni d'un morphisme d'algèbres de Lie $L \rightarrow \text{End}_k(V)$. Un tel morphisme se factorise donc par $U(L)$, autrement dit V est un $U(L)$ -module. La réciproque est immédiate. $\square$

Une représentation particulière est la **représentation adjointe** : si L est une algèbre de Lie, c'est en particulier un espace vectoriel ; considérons l'application $\text{ad} : L \rightarrow \text{End}_k(L)$ définie par $\text{ad}(x)(y) = [x, y]$; la relation de Jacobi exprime que ad est un morphisme d'algèbres de Lie (exercice : vérifiez ceci). On l'appelle la représentation adjointe. Autrement dit : la représentation adjointe d'une algèbre de Lie L est l'action de L sur elle-même où $x \in L$ opère par $y \mapsto [x, y]$. Le noyau de la représentation adjointe est le centre de L .

À partir d'ici, sauf mention du contraire, les algèbres de Lie considérées seront toujours de dimension finie sur le corps k .

Nous allons donner, en dimension finie, une caractérisation des algèbres de Lie nilpotentes utilisant la représentation adjointe. Remarquons que si une algèbre de Lie L est nilpotente on a $(\text{ad } x)^n = 0$ dès que $L^{n+1} = 0$, donc pour tout $x \in L$ l'opérateur $\text{ad } x$ est nilpotent. Nous allons prouver la réciproque, mais auparavant démontrons la propriété suivante :

Proposition 3.2. *Soit L une algèbre de Lie de dimension finie ; pour toute représentation de L dans un espace vectoriel V telle que l'image de L soit formée d'opérateurs nilpotents, il existe un vecteur v non nul de V tel que $x.v = 0$ pour tout $x \in L$.*

On a noté $v \mapsto x.v$ l'action de $x \in L$ sur $v \in V$.

Démonstration. La démonstration se fait par récurrence sur la dimension de L . Le résultat est vrai en dimension 1 car un opérateur nilpotent a toujours 0 comme valeur propre. Soit $L \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ une représentation vérifiant l'hypothèse. Quitte à remplacer L par son image on peut supposer que L est une sous-algèbre de $\mathfrak{gl}(V)$. Soit H une sous-algèbre de Lie de L distincte de L de dimension maximale ; une telle algèbre de Lie existe car un sous-espace vectoriel de dimension 1 est une sous-algèbre de Lie. On fait opérer H sur L par l'action adjointe. Comme cette opération envoie H dans H on en déduit une action de H sur l'espace vectoriel L/H . Utilisons le fait que si $f \in \mathfrak{gl}(V)$ est un opérateur nilpotent alors $\text{ad } f$ est nilpotent (exercice). On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à H agissant sur L/H . On obtient un $x \in L - H$ tel que $[h, x] \in H$ pour tout $h \in H$. Donc le sous-espace vectoriel engendré par H et x est une sous-algèbre de Lie de L contenant strictement H donc égale à L d'après l'hypothèse de maximalité de H . Considérons alors $V' = \{v \in V \mid \forall h \in H, h.v = 0\}$. C'est un sous-espace vectoriel de V non nul d'après l'hypothèse de récurrence et ce sous-espace est stable par l'action de x car $h.(x.v) = [h, x].v + x.(h.v) = 0$ si $v \in V'$, car $[h, x] \in H$. Comme x est nilpotent, il existe un vecteur $v \neq 0$ dans V' annulé par x , d'où la proposition. $\square$

Corollaire 3.3. *Si H est une sous-algèbre de Lie formée d'opérateurs nilpotents de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(V)$ où V est un espace vectoriel de dimension finie, il existe une base de V telle que les matrices des éléments de H soient toutes des matrices triangulaires supérieures de diagonale nulle.*

Démonstration. On raisonne par récurrence sur la dimension de V . La proposition précédente montre que il existe un vecteur propre commun à tous les éléments de H (pour la valeur propre 0) Prenons ce vecteur e_1 comme premier vecteur de base. Dans le quotient $V / \langle e_1 \rangle$ on peut appliquer l'hypothèse de récurrence, ce qui donne le résultat. $\square$

On peut maintenant prouver le théorème suivant :

Théorème 3.4 (Théorème d'Engel). *Une algèbre de Lie L de dimension finie est nilpotente si et seulement si pour tout $x \in L$ l'opérateur $\text{ad } x$ est nilpotent.*

Démonstration. Appliquons la proposition 3.2 à la représentation adjointe de L . On obtient que le centre ZL de L n'est pas nul. Par récurrence sur la dimension l'algèbre L/ZL est nilpotente. Ceci implique que L elle-même est nilpotente (exercice). $\square$

Un deuxième outil essentiel à l'étude de la structure des algèbres de Lie de dimension finie semi-simples est la forme de Killing.

Définition 3.5. *Soit L une algèbre de Lie (de dimension finie) ; la forme bilinéaire sur L définie par $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle = \text{trace}(\text{ad } x \circ \text{ad } y)$ s'appelle la forme de Killing de L .*

Proposition 3.6. *La forme de Killing est bilinéaire symétrique et invariante, c'est-à-dire vérifie $\langle [x, y], z \rangle = \langle x, [y, z] \rangle$ pour tout x , tout y et tout z .*

Démonstration. La bilinéarité et la symétrie proviennent des propriétés élémentaires de la trace. D'autre part, comme ad est une représentation on a $\langle [x, y], z \rangle = \text{trace}(\text{ad}([x, y]) \circ \text{ad } z) = \text{trace}(\text{ad } x \circ \text{ad } y \circ \text{ad } z) - \text{trace}(\text{ad } y \circ \text{ad } x \circ \text{ad } z) = \text{trace}(\text{ad } x \circ \text{ad } y \circ \text{ad } z) - \text{trace}(\text{ad } x \circ \text{ad } z \circ \text{ad } y) = \langle x, [y, z] \rangle$. $\square$

Exercice 3.7. Soit $B(L)$ l'espace vectoriel des formes bilinéaires sur une algèbre de Lie L . Montrer qu'on définit une représentation de L en faisant agir $x \in L$ sur $\varphi \in B(L)$ par $(x \cdot \varphi)(y, z) = \varphi([y, x], z) + \varphi(y, [z, x])$. De façon générale, pour une représentation d'une algèbre de Lie $L \rightarrow \mathfrak{gl}_k(V)$, un vecteur $v \in V$ est dit invariant si $x \cdot v = 0$ pour tout $x \in L$. Montrer que cette définition coïncide avec celle de la proposition 3.6 pour la représentation ci-dessus de L sur $B(L)$.

Les lemmes suivants seront utiles.

Lemme 3.8. *Si I est un idéal de L , l'orthogonal $I^\perp$ de I pour la forme de Killing est aussi un idéal.*

La démonstration est laissée au lecteur.

Lemme 3.9. *La restriction de la forme de Killing d'une algèbre de Lie L à un idéal I est la forme de Killing de I .*

Démonstration. Comme I est un idéal, pour $x, y \in I$ on a $(\text{ad } x \circ \text{ad } y)(L) \subset I$, donc la trace de $\text{ad } x \circ \text{ad } y$ sur L est égale à la trace de la restriction de $\text{ad } x \circ \text{ad } y$ à I . $\square$

En caractéristique 0, la forme de Killing donne des conditions pour qu'une algèbre de Lie de dimension finie soit résoluble ou semi-simple.

Théorème 3.10 (Critère de résolubilité de Cartan). *Supposons le corps de base k de caractéristique 0 et soit L une k -algèbre de Lie de dimension finie. Si L est orthogonal à $[L, L]$ pour la forme de Killing alors L est résoluble.*

Avant de prouver le théorème nous prouvons le résultat technique suivant :

Lemme 3.11. *Soient V un k -espace vectoriel de dimension finie et $A \subset B$ deux sous-espaces de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(V)$. Soit $T(B, A)$ le transporteur de B dans A c'est-à-dire $T(B, A) = \{X \in \mathfrak{gl}(V) \mid [X, B] \subset A\}$. Si un élément $X \in T(B, A)$ vérifie $\text{trace}(XY) = 0$ pour tout $Y \in T(B, A)$, alors X est nilpotent.*

Preuve du lemme. On peut étendre le corps pour qu'il devienne algébriquement clos. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de X . Nous devons montrer que ces valeurs propres sont toutes nulles. On peut écrire $X = S + N$ avec S diagonalisable, N nilpotent et $[S, N] = 0$ (décomposition de Jordan). Fixons une base (e_i) de V dans laquelle la matrice de S est diagonale et soit (E_{ij}) la base de $\mathfrak{gl}(V)$ telle que $E_{ij}(e_k) = \delta_{jk}e_i$. On a $\text{ad } S(E_{ij}) = (\lambda_i - \lambda_j)E_{ij}$. Considérons maintenant le $\mathbb{Q}$ -sous-espace vectoriel E de k engendré par les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et soit f une forme linéaire sur E . Il existe un polynôme P_f à une variable, à coefficients dans k , tel que $P_f(0) = 0$ et $P_f(\lambda_i - \lambda_j) = f(\lambda_i - \lambda_j)$ pour tout i et tout j (interpolation de Lagrange). Définissons $Y_f \in \mathfrak{gl}(V)$ par $Y_f(e_i) = f(\lambda_i)e_i$. On a $\text{ad } Y_f(E_{ij}) = f(\lambda_i - \lambda_j)E_{ij} = P_f(\lambda_i - \lambda_j)E_{ij}$, donc $\text{ad } Y_f = P_f(\text{ad } S)$. Or $\text{ad } S$ est lui-même un polynôme sans terme constant en $\text{ad } X$ car la décomposition de Jordan de $\text{ad } X$ est $\text{ad } X = \text{ad } S + \text{ad } N$ (exercice). On en déduit que $\text{ad } Y_f$ est un polynôme sans terme constant en $\text{ad } X$, donc $Y_f \in T(B, A)$. L'hypothèse du lemme implique

donc que $\text{trace}(XY_f) = 0$. Cette dernière trace vaut $\sum \lambda_i f(\lambda_i)$. Appliquons f à cet élément de E , on obtient $\sum_i f(\lambda_i)^2 = 0$ donc les rationnels $f(\lambda_i)$ sont tous nuls. Comme ceci est vrai pour toute forme linéaire f sur E , on en déduit que les λ_i eux-mêmes sont tous nuls, c'est-à-dire $S = 0$, donc $X = N$ est nilpotent. $\square$

Preuve du théorème 3.10. Nous pouvons maintenant prouver le théorème. Appliquons le lemme avec $V = L$, $B = \text{ad } L$ et $A = \text{ad}[L, L] = [\text{ad } L, \text{ad } L]$: prenons X_1 et X_2 dans L et $X = [X_1, X_2]$. On a $\text{ad } X = [\text{ad } X_1, \text{ad } X_2]$. Pour $Y \in T(B, A)$, on a

$$\text{trace}((\text{ad } X)Y) = \text{trace}([\text{ad } X_1, \text{ad } X_2]Y) = \text{trace}(\text{ad } X_1[\text{ad } X_2, Y])$$

par les propriétés de la trace. Cette dernière trace est nulle par hypothèse puisque $[\text{ad } X_2, Y] \in [\text{ad } L, \text{ad } L]$. Par linéarité on a $\text{trace}((\text{ad } X)Y) = 0$ pour tout $X \in [L, L]$ et tout $Y \in T(B, A)$. Donc, par le lemme, $\text{ad } X$ est nilpotent pour tout $X \in [L, L]$, ce qui implique que $[L, L]$ est une algèbre de Lie nilpotente par le théorème d'Engel. Donc L est résoluble. $\square$

On a immédiatement le cas particulier suivant :

Corollaire 3.12. *Si la forme de Killing de L (de dimension finie sur un corps de caractéristique 0) est identiquement nulle alors L est résoluble.*

Exercice 3.13. Montrer que si une algèbre de Lie est nilpotente sa forme de Killing est identiquement nulle.

Théorème 3.14 (Critère de semi-simplicité de Cartan). *Supposons le corps de base k de caractéristique 0 et soit L une k -algèbre de Lie de dimension finie ; la forme de Killing de L est non dégénérée si et seulement si L est semi-simple.*

Démonstration. Supposons la forme de Killing dégénérée et soit $L^\perp$ le noyau de cette forme. C'est un idéal non nul et la restriction de la forme de Killing à $L^\perp$, qui est la forme de Killing de $L^\perp$ par le lemme 3.9, est identiquement nulle. Par 3.12 $L^\perp$ est résoluble, donc L n'est pas semi-simple. Réciproquement, supposons L non semi-simple et soit R son radical. Soit n le plus grand entier tel que $R^{(n)} \neq 0$. Alors $R^{(n)}$ est un idéal et si $y \in R^{(n)}$ alors $\text{ad } y(L) \subset R^{(n)}$ et $\text{ad}(y)(R^{(n)}) = 0$. On en déduit en écrivant les matrices par blocs sur $R^{(n)}$ et sur un supplémentaire que pour tout $x \in L$ et tout $y \in R^{(n)}$ la diagonale de la matrice de $\text{ad } x \text{ ad } y$ est nulle, donc $\langle x, y \rangle = 0$, donc $0 \neq R^{(n)} \subset L^\perp$. $\square$

Théorème 3.15. *Une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps de caractéristique 0 est semi-simple si et seulement si elle est somme directe d'algèbres simples non abéliennes*

Démonstration. Soit L une algèbre de Lie semi-simple non nulle et soit I un idéal non nul. La restriction de la forme de Killing à $I \cap I^\perp$ est identiquement nulle et est la forme de Killing de cet idéal par 3.9. Donc $I \cap I^\perp$ est résoluble, donc nul puisque L est semi-simple. On a alors $L = I \oplus I^\perp$. La somme est une somme directe au sens des algèbres de Lie car I et $I^\perp$ sont des idéaux. Par récurrence sur la dimension de L on obtient le résultat. La réciproque est laissée au lecteur. $\square$

4. SOUS-ALGÈBRES DE CARTAN, RACINES

4.1. Sous-algèbres de Cartan. Rappelons que toutes les algèbres de Lie considérées sont de dimension finie. La notion suivante de sous-algèbre de Cartan est fondamentale dans l'étude de la structure des algèbres de Lie :

- Définition 4.1.** (i) Le normalisateur $N(H)$ (ou $N_L(H)$) d'une sous-algèbre H d'une algèbre de Lie L est défini par $N(H) = \{x \in L \mid \forall h \in H, [x, h] \in H\}$.
- (ii) On appelle sous-algèbre de Cartan d'une algèbre de Lie une sous-algèbre nilpotente égale à son propre normalisateur.

Remarquons (exercice) que le normalisateur d'une sous-algèbre de Lie H est une sous-algèbre de Lie et que c'est la plus grande sous-algèbre de Lie dans laquelle H est un idéal.

Exemple 4.2. La sous-algèbre H de $\mathfrak{gl}_n(k)$ formée des matrices diagonales est une sous-algèbre de Cartan. En effet elle est commutative, donc nilpotente et si $\sum_{i,j} a_{ij} E_{ij}$ est dans $N(H)$ alors le calcul (analogue au calcul du lemme 3.11, faites-le) montre que $a_{ij} = 0$ sauf si $i = j$.

Lemme 4.3. Une sous-algèbre de Cartan est une algèbre nilpotente maximale.

Démonstration. En effet si H est une sous-algèbre de Lie nilpotente d'une algèbre de Lie K nilpotente strictement plus grande et si n est le plus grand entier tel que K^n n'est pas inclus dans H alors $K^n \subset N(H)$. $\square$

Attention : une sous-algèbre nilpotente maximale n'est pas nécessairement une sous-algèbre de Cartan. Par exemple dans $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ l'algèbre des matrices $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente maximale (démontrez-le!) mais elle est normalisée par la sous-algèbre des matrices diagonales.

Nous allons étudier montrer l'existence des sous-algèbres de Cartan dans le cas où le corps de base est infini. Pour cela nous introduisons la notion d'élément régulier : un élément x d'une algèbre de Lie est régulier si le sous-espace propre généralisé de $\text{ad } x$ (noté $L_{0,x}$) pour la valeur propre 0 est de dimension minimum (rappelons que si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel, le sous-espace propre généralisé de f pour la valeur propre λ est $\cup_n \ker(f - \lambda)^n$). Il existe toujours des éléments réguliers dans une algèbre de Lie. .

Définition 4.4. On appelle rang d'une algèbre de Lie la dimension de $L_{0,x}$ pour x régulier.

Théorème 4.5. Si le corps k est infini et si x est un élément régulier d'une algèbre de Lie L , alors $L_{0,x}$ est une sous-algèbre de Cartan.

Démonstration. C'est un résultat général que pour x fixé quelconque (pas nécessairement régulier) $L_{0,x}$ est une sous-algèbre de Lie. Ceci se déduit de la formule générale $(\text{ad } x)^n([y, z]) = \sum_i \binom{n}{i} [(\text{ad } x)^i(y), (\text{ad } x)^{n-i}(z)]$.

Montrons maintenant que $H = L_{0,x}$ est nilpotente. Soit $P_y \in k[t]$ le polynôme caractéristique de $\text{ad } y$ où $y \in L$. C'est un polynôme de degré $\dim_k(L)$ en t qui est divisible par $t^{\dim L_{0,y}}$. Dire que x est régulier revient donc à dire que P_y est divisible par $t^{\dim H}$ pour tout $y \in L$. Si $y \in H$ on peut décomposer P_y en produit $P_y^H P_y^{L/H}$ car H est stable par $\text{ad } y$ (attention : ici L/H n'est pas une algèbre de Lie mais simplement un espace vectoriel quotient). Les coefficients de P_y^H et $P_y^{L/H}$ sont des fonctions polynomiales de y (c'est-à-dire des polynômes en les coefficients de y dans une base fixée de H). Comme $P_x^{L/H}$ n'a pas 0 comme racine le coefficient constant de $P_y^{L/H}$ est un polynôme en y non nul. Comme le coefficient de t^i de $P_y^H P_y^{L/H}$

est un polynôme en y identiquement nul pour tout $i < \dim H$, les coefficients de P_y^H ont cette propriété (par récurrence sur i). On a donc $P_y^H = t^{\dim H}$ pour tout y . Ceci implique que $\text{ad}(y) : H \rightarrow H$ est nilpotent pour tout $y \in H$, donc H est une algèbre de Lie nilpotente d'après le théorème d'Engel.

Il reste à voir que $N(H) = H$. Si $z \in N(H)$ on a $[x, z] \in H$, donc $\text{ad}(x)^{n+1}(z) = \text{ad}(x)^n([x, z]) = 0$ pour n assez grand, donc $z \in H = L_{0,x}$. $\square$

Nous admettrons le résultat suivant (voir par exemple [Bbk, Chapitre VII, §3 Théorème 2])

Théorème 4.6. *Si le corps est de caractéristique 0 toutes les sous-algèbres de Cartan d'une algèbre de Lie L ont même dimension égale au rang de L .*

Remarque 4.7. Si le corps est de plus algébriquement clos on démontre que les sous-algèbres de Cartan de L sont toutes conjuguées par le groupe des automorphismes "intérieurs" de L (voir par exemple [Bbk, Chapitre VII, §3 Théorème 1], [S2, III, §4] ou [Ca, section 3.4]).

4.2. Représentations des algèbres de Lie nilpotentes. En utilisant les propriétés des représentations des algèbres de Lie nilpotentes et l'existence de sous-algèbres de Cartan, nous pourrions détailler la structure des algèbres de Lie semi-simples. Commençons par l'étude des représentations des algèbres nilpotentes.

Définition 4.8. *Soient L est une algèbre de Lie, V un L -module et λ une application $L \rightarrow k$.*

- (i) *On note $V_\lambda = \{v \mid \forall x \in L, \exists n \in \mathbb{N}, (x - \lambda(x))^n v = 0\}$.*
- (ii) *Si $V_\lambda \neq 0$ on dit que λ est un poids de L dans V .*

Proposition 4.9. *Soit H une algèbre de Lie nilpotente et V un H -module de dimension finie sur k . Soit K une sous-algèbre de Lie de H . Si λ est un poids de K dans V , alors*

- (i) *V_λ est un sous H -module de V .*
- (ii) *Supposons k de caractéristique 0, alors λ est une forme linéaire et s'annule sur $[K, K]$.*

On peut exprimer (ii) en disant que λ est une représentation de dimension 1 de K . Évidemment, on peut appliquer cette proposition avec $K = H$.

Démonstration. Pour deux endomorphismes quelconques f et g d'un espace vectoriel et tout entier $n \geq 0$, on prouve par récurrence (laissée au lecteur) que $f^n \circ g = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (\text{ad } f)^k(g) \circ f^{n-1-k}$.

Notons ρ la représentation $H \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$. On veut voir que pour $v \in V_\lambda$ et $y \in H$ on a $\rho(y)(v) \in V_\lambda$, c'est-à-dire que pour tout $x \in K$ on a $(\rho(x) - \lambda(x))^n \circ \rho(y)(v) = 0$ pour n assez grand. Posons $f = \rho(x) - \lambda(x)$ et $g = \rho(y)$. Alors $(\text{ad } f)^n(g) = 0$ pour n assez grand, car $\text{ad } f = \text{ad } \rho(x)$ et H est nilpotente. De plus si $v \in V_\lambda$, on a $f^n(v) = 0$ pour n assez grand puisque x est dans K . Par la formule générale ci-dessus, pour n assez grand on a bien $f^n \circ g(v) = 0$.

Montrons (ii). Notons $\rho_\lambda(x)$ l'action de $x \in K$ sur V_λ . Comme $\rho_\lambda(x) - \lambda(x)$ est nilpotent, on a $\text{trace}(\rho_\lambda(x)) = \dim(V_\lambda)\lambda(x)$. Ceci montre la linéarité de λ car $\dim(V_\lambda)$ est non nul dans le corps k . De plus comme la trace d'un commutateur est toujours nulle λ s'annule sur $[K, K]$. $\square$

Corollaire 4.10. *Si H et V sont comme dans la proposition précédente et si k est de caractéristique 0, pour tout poids λ de H dans V , les opérateurs $\rho_\lambda(x)$ pour $x \in H$ sont simultanément trigonalisables; en particulier il existe un vecteur $v \in V_\lambda - \{0\}$ tel que $x.v = \lambda(x)v$ pour tout $x \in H$.*

Démonstration. Comme λ s'annule sur $[H, H]$, l'application $x \mapsto \rho_\lambda(x) - \lambda(x)$ est une représentation de H sur V_λ . L'image de cette représentation est formée d'opérateurs nilpotents, donc par 3.3 on obtient le résultat. $\square$

Théorème 4.11. *On suppose k algébriquement clos de caractéristique 0. Soit H une algèbre de Lie nilpotente et V un H -module de dimension finie sur k ; alors $V = \bigoplus_\lambda V_\lambda$ où la somme porte sur les poids de H dans V .*

Démonstration. Raisonnons par récurrence sur la dimension de V . Si chaque $x \in H$ a une seule valeur propre, on note cette valeur propre $\lambda(x)$ et $V = V_\lambda$. Sinon, il existe un $x \in H$ qui a plusieurs valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_r$. Appliquons la proposition 4.9(i) en prenant pour K la sous-algèbre de dimension 1 engendrée par x . Chaque sous-espace propre généralisé V_{λ_i} de x pour la valeur propre λ_i est un H -module, donc par hypothèse de récurrence se décompose en somme directe de sous-espaces correspondant à des poids de H . $\square$

4.3. Décomposition de Cartan. Dans cette section le corps k est algébriquement clos de caractéristique 0. On fixe une algèbre de Lie L et une sous-algèbre de Cartan H . On peut appliquer le théorème 4.11 à la représentation de H dans L restriction de la représentation adjointe. On obtient une décomposition $L = \bigoplus_\lambda L_\lambda$ où la somme porte sur les poids de H dans L .

Proposition 4.12. *On a $L_0 = H$.*

Démonstration. Puisque H est nilpotente on a $H \subset L_0$ par 3.4. Si $L_0 \neq H$, par 3.2 appliqué à l'action de H sur L_0/H , il existe $\bar{x} \in L_0/H$ non nul tel que H agisse par 0 sur $\bar{x}$, c'est-à-dire tel que $[H, x] \subset H$, où x a pour image $\bar{x}$. Donc x normalise H et, par définition des algèbres de Cartan, on a $x \in H$, ce qui est une contradiction, d'où le résultat. $\square$

Si $\lambda \neq 0$ et $L_\lambda \neq 0$ on dit que λ est une **racine** de H dans L . L'ensemble des racines de H dans L est noté Φ . On a donc $L = H \oplus (\bigoplus_{\lambda \in \Phi} L_\lambda)$.

Proposition 4.13. *Si λ et μ sont des représentations de dimension 1 de H on a $[L_\lambda, L_\mu] \subset L_{\lambda+\mu}$.*

La preuve est laissée au lecteur.

Corollaire 4.14. *Soient α et β deux racines de H dans L .*

- (i) *Si $\alpha + \beta \neq 0$ et $\alpha + \beta \notin \Phi$ alors $[L_\alpha, L_\beta] = 0$.*
- (ii) *Si $\beta = -\alpha$ alors $[L_\alpha, L_\beta] \subset H$.*

Nous allons appliquer ce qui précède dans le cas où L est semi-simple.

Les hypothèses dans la suite de cette section sont donc : L est une algèbre semi-simple de dimension finie sur un corps k algébriquement clos de caractéristique 0. On garde les notations précédentes : H est une sous-algèbre de Cartan de L et Φ l'ensemble de racines de H dans L . On note $\langle, \rangle$ la forme de Killing de L .

Proposition 4.15. (i) *Si $\alpha, \beta \in \Phi \cup \{0\}$ sont tels que $\alpha + \beta \neq 0$, on a $\langle L_\alpha, L_\beta \rangle = 0$.*

- (ii) La restriction à H de la forme de Killing de L est non dégénérée.
- (iii) Si α est une racine alors $-\alpha$ est une racine et la restriction de la forme de Killing à $L_\alpha \times L_{-\alpha}$ est une dualité parfaite.

Dualité parfaite signifie que chacun des deux espaces s'identifie via la forme de Killing au dual de l'autre.

Démonstration. Soit λ un poids de H dans L . Si $x \in L_\alpha$ et $y \in L_\beta$; par 4.13 on a $(\text{ad } x \circ \text{ad } y)(L_\lambda) \subset L_{\lambda+\alpha+\beta}$. Comme $\alpha + \beta + \lambda \neq \lambda$, et comme $L = \oplus L_\lambda$ où λ décrit les poids de H , dans une base adaptée à cette décomposition les coefficients diagonaux de $\text{ad } x \circ \text{ad } y$ sont nuls, d'où (i).

D'après (i) H est orthogonale pour la forme de Killing à L_α pour tout $\alpha \in \Phi$. Si $x \in H \cap H^\perp$ on a donc $x \in L^\perp$ et donc $x = 0$ car L est semi-simple (cf., 3.14). D'où (ii).

Le même raisonnement montre que pour $\alpha \in \Phi$, si $x \in L_\alpha$ est orthogonal à $L_{-\alpha}$ (en particulier si $L_{-\alpha} = \{0\}$) alors $x = 0$, d'où (iii). $\square$

Corollaire 4.16. *L'algèbre de Cartan H est abélienne.*

Démonstration. Soit $x \in [H, H]$ et $y \in H$ alors $\langle y, x \rangle = \text{trace ad } y \circ \text{ad } x$. Or $\text{ad}(x)$ et $\text{ad}(y)$ sont représentés dans la même base par des matrices triangulaires d'après 4.10, et les valeurs propres de x sont toutes nulles puisque tous les poids s'annulent sur $[H, H]$ (voir 4.9(ii)). Donc $\langle y, x \rangle = 0$ pour tout $y \in H$, d'où $x = 0$ par 4.15(ii). Donc H est abélienne. $\square$

Corollaire 4.17. *Les racines engendrent linéairement le k -sous-espace vectoriel dual H^* de H .*

Démonstration. Si le sous-espace engendré par les racines est strictement inclus dans H^* , il existe $h \in H - \{0\}$ tel que $\alpha(h) = 0$ pour toute racine α . Alors $\text{ad } h$ n'a que la valeur propre 0 sur L et par le même argument que dans 4.16 on obtient $h = 0$. $\square$

Théorème 4.18. *Pour toute racine $\alpha \in \Phi$ on a $\dim L_\alpha = 1$ et les seuls $n \in \mathbb{Z}$ tels que $n\alpha \in \Phi$ sont $n = \pm 1$.*

Démonstration. Fixons $\alpha \in \Phi$. Comme H est abélienne, elle agit dans toute représentation par des opérateurs qui commutent donc qui ont au moins un vecteur propre commun. En particulier, il existe $e_\alpha \in L_\alpha$ vecteur propre de h pour tout $h \in H$. Comme par définition $h \in H$ a une seule valeur propre sur L_α qui est $\alpha(h)$, on a $[h, e_\alpha] = \alpha(h)e_\alpha$ pour tout $h \in H$. Comme L_α et $L_{-\alpha}$ sont mis en dualité parfaite par la forme de Killing, il existe $f \in L_{-\alpha}$ tel que $\langle e_\alpha, f \rangle = 1$. Pour tout $h \in H$ on a alors $\langle h, [e_\alpha, f] \rangle = \langle [h, e_\alpha], f \rangle = \alpha(h) \langle e_\alpha, f \rangle = \alpha(h)$. Or $[e_\alpha, f] \in H$, donc $[e_\alpha, f]$ est égal à l'unique élément $h'_\alpha \in H$ qui vérifie $\langle h, h'_\alpha \rangle = \alpha(h)$ pour tout $h \in H$ (l'existence et l'unicité d'un tel h'_α vient du fait que la restriction de la forme de Killing à H est non dégénérée). Nous aurons besoin des deux résultats suivant :

- Lemme 4.19.**
- (i) Si h'_α est comme ci-dessus, on a $\alpha(h'_\alpha) \neq 0$
 - (ii) Pour tout $y \in L_{-\alpha}$ l'élément $[e_\alpha, y]$ est multiple de h'_α .

Preuve du lemme. Soit $\beta \in \Phi$ quelconque. Considérons le sous-espace vectoriel $F = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} L_{\beta+n\alpha}$. Alors F est stable par les actions de e_α et de f , donc la trace de h'_α sur F est nulle, ce qui s'écrit $\sum_{n \in \mathbb{Z}} (\beta + n\alpha)(h'_\alpha) \dim L_{\beta+n\alpha} = 0$. Si $\alpha(h'_\alpha) = 0$ on en déduit $\beta(h'_\alpha) = 0$ pour tout $\beta \in \Phi$ ce qui implique par 4.17 que $h'_\alpha = 0$, ce qui est faux.

Montrons maintenant (ii). On a $\langle h, [e_\alpha, y] \rangle = \langle [h, e_\alpha], y \rangle = \alpha(h) \langle e_\alpha, y \rangle$ pour tout $h \in H$ et $[e_\alpha, y]$ est un élément de H . La définition et l'unicité de h'_α impliquent que $[e_\alpha, y] = \langle e_\alpha, y \rangle h'_\alpha$. $\square$

Considérons maintenant le sous-espace vectoriel $E = ke_\alpha \oplus kh'_\alpha \oplus (\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}, n < 0} L_{n\alpha})$. D'après 4.19(ii) ce sous-espace est stable par $\text{ad } e_\alpha$; il est aussi stable par $\text{ad } f$. Comme $h'_\alpha = [e_\alpha, f]$, la trace de h'_α sur E est nulle. La seule valeur propre de h'_α sur $L_{n\alpha}$ étant $n\alpha(h'_\alpha)$, on obtient $\alpha(h'_\alpha)(1 + \sum_{n < 0} n \dim L_{n\alpha}) = 0$. On sait que $\dim L_{-\alpha} \neq 0$ et, par 4.19(i), que $\alpha(h'_\alpha) \neq 0$. On en déduit que $\dim L_{-\alpha} = 1$ et $\dim L_{n\alpha} = 0$ pour n entier négatif strictement plus petit que -1 . En appliquant le résultat avec la racine $-\alpha$ au lieu de α on obtient le théorème. $\square$

Le théorème précédent montre en particulier que pour tout α et tout $h \in H$, le sous-espace L_α est un espace propre de h , donc les éléments de H sont simultanément diagonalisable dans leur action sur L .

Exercice 4.20. Montrer que pour $h, h' \in H$ on a $\langle h, h' \rangle = \sum_{\alpha \in \Phi} \alpha(h)\alpha(h')$ (utiliser la définition de la forme de Killing et la décomposition de Cartan de L).

4.4. L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_n$. Nous allons illustrer ce qui précède sur l'exemple de $\mathfrak{sl}_n(k)$ où k est de caractéristique 0 (le lecteur pourra étudier ce qui reste vrai pour un corps quelconque). C'est l'algèbre de Lie des matrices $n \times n$ de trace nulle. Sa dimension est $n^2 - 1$. Soit E_{ij} la matrice dont le coefficient d'indices (i, j) vaut $\delta_{ih}\delta_{jk}$. L'algèbre $\mathfrak{sl}_n$ a une base formée des matrices E_{ij} pour $i \neq j$ et $E_{ii} - E_{jj}$ pour $i > j$.

Proposition 4.21. *Le centre de $\mathfrak{sl}_n$ est réduit à $\{0\}$.*

Démonstration. Soit $M = (m_{ij})$ une matrice quelconque. Pour $i \neq j$ on a $[M, E_{ij}] = \sum_r m_{ri} E_{rj} - \sum_s m_{js} E_{is}$. Donc la matrice M commute avec la matrice E_{ij} si et seulement si $m_{rj} = 0$ pour $r \neq j$, $m_{js} = 0$ pour $s \neq j$ et $m_{ii} = m_{jj}$. Une matrice est du centre de $\mathfrak{sl}_n$ est donc de la forme $M = \text{diag}(a, a, \dots, a)$. Comme la trace de M est nulle on a $a = 0$. $\square$

Proposition 4.22. (i) *La sous-algèbre des matrices diagonales est une algèbre de Cartan de $\mathfrak{sl}_n$.*

(ii) *La décomposition de Cartan de $\mathfrak{sl}_n$ relativement à la sous-algèbre H des matrices diagonales est $\mathfrak{sl}_n = H \oplus (\bigoplus_{i \neq j} k E_{ij})$.*

(iii) *Les racines de H dans $\mathfrak{sl}_n$ sont les α_{ij} pour $i \neq j$, où $\alpha_{ij}(\text{diag}(a_1, \dots, a_n)) = a_i - a_j$.*

Démonstration. La sous-algèbre H est commutative. D'autre part, prenons $h = \text{diag}(a_1, \dots, a_n) \in H$ et $x = \sum_{i,j} b_{ij} E_{ij} \in \mathfrak{sl}_n$; on a $[h, x] = \sum_{i,j} (a_i - a_j) b_{ij} E_{ij}$. En particulier $[h, x] \in H$ pour tout $h \in H$ si et seulement si $b_{ij} = 0$ pour $i \neq j$. Ceci montre que $N(H) = H$, donc H est une sous-algèbre de Cartan. Le calcul que nous venons de faire prouve aussi les assertions (ii) et (iii). $\square$

Proposition 4.23. *L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_n$ est simple*

Indication de démonstration. Il s'agit de montrer que tout idéal non nul contient tous les éléments de la base ci-dessus. On peut le faire par une suite de calculs de commutateurs bien choisis. Ces calculs sont laissés au lecteur. Voir par exemple [Ca, 4.25]. $\square$

Nous regardons maintenant le cas de $\mathfrak{sl}_2$. Posons $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, et $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a $[E, F] = H$ où $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On a $\mathfrak{sl}_2 = kF \oplus kH \oplus kE$ et la structure d'algèbre de Lie est déterminée par les relations $[E, F] = H$, $[H, E] = 2E$, $[H, F] = -2F$.

Considérons maintenant une algèbre de Lie semi-simple L , une sous-algèbre de Cartan et une racine α . Fixons $e_\alpha \in L_\alpha - \{0\}$ et soit $h_\alpha = 2 \frac{h'_\alpha}{\alpha(h'_\alpha)} = 2 \frac{h'_\alpha}{\langle h'_\alpha, h'_\alpha \rangle}$ où h'_α est comme dans 4.19(i). Il existe $f_\alpha \in L_{-\alpha}$ tel que $[e_\alpha, f_\alpha] = h_\alpha$. On a $[h_\alpha, e_\alpha] = 2e_\alpha$ et $[h_\alpha, f_\alpha] = -2f_\alpha$. Ceci montre

Proposition 4.24. *Avec les notations précédentes, pour toute racine α , le sous-espace $ke_\alpha \oplus kh_\alpha \oplus kf_\alpha$ est une sous-algèbre de Lie de L isomorphe à $\mathfrak{sl}_2$ par l'application qui envoie e_α , h et f_α respectivement sur E , H et F .*

Exercice 4.25. Calculer la restriction à la sous-algèbre H des matrices diagonales de la forme de Killing de $\mathfrak{sl}_n$. En déduire la valeur de $h_{\alpha_{ij}}$ pour toute racine α_{ij} . Quelle est la sous-algèbre isomorphe à $\mathfrak{sl}_2$ correspondant à une racine α_{ij} comme dans 4.24?

5. SYSTÈME DE RACINES D'UNE ALGÈBRE DE LIE SEMI-SIMPLE, GROUPE DE WEYL, CLASSIFICATION

5.1. Propriétés des racines d'une algèbre de Lie semi-simple. Ici le corps k est toujours algébriquement clos de caractéristique 0. On considère une algèbre de Lie semi-simple de dimension finie L sur k , une sous-algèbre de Cartan H et l'ensemble Φ des racines de H dans L . Nous allons prouver d'autres propriétés de Φ et aboutir à une classification. Pour chaque racine $\alpha \in \Phi$ on a comme dans 4.24 un triplet $(e_\alpha, f_\alpha, h_\alpha)$ qui engendre une sous-algèbre isomorphe à $\mathfrak{sl}_2$. Notons que l'isomorphisme entre H et H^* déduit de la forme de Killing fait correspondre α à $\frac{2h_\alpha}{\langle h_\alpha, h_\alpha \rangle}$ (exercice : vérifiez ceci, c'est-à-dire que $h'_\alpha = \frac{2h_\alpha}{\langle h_\alpha, h_\alpha \rangle}$ où h'_α est comme dans la section précédente). Notons aussi que l'on peut transporter la forme de Killing par cet isomorphisme en une forme bilinéaire non dégénérée sur H^* que nous noterons de la même façon. Avec ces notations $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle h'_\alpha, h'_\beta \rangle$ et h_α correspond par l'isomorphisme à $\frac{2\alpha}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$.

Proposition 5.1. *Si α et β sont deux racines proportionnelles alors $\beta = \pm\alpha$.*

Démonstration. Supposons $\beta \neq \pm\alpha$. On sait par 4.18 que β n'est pas un multiple entier de α . Il existe donc deux entiers positifs ou nuls p et q tels que $\beta + i\alpha$ soit une racine pour $-p \leq i \leq q$ et ne soit pas une racine pour $i = q+1$ ou $i = -p-1$. Le sous-espace vectoriel $E = \bigoplus_{-p \leq i \leq q} L_{\beta+i\alpha}$ est stable par $\text{ad } e_\alpha$ et par $\text{ad } f_\alpha$, donc aussi par h_α . La trace de h_α sur E est nulle puisque $h_\alpha = [e_\alpha, f_\alpha]$. Or chaque $L_{\beta+i\alpha}$ est de dimension 1 et $\text{ad } h_\alpha$ y agit par $(\beta + i\alpha)(h_\alpha) = \beta(h_\alpha) + 2i$. Donc la trace de $\text{ad } h_\alpha$ sur E vaut $0 = \sum_{i=-p}^q (\beta(h_\alpha) + 2i)$. Donc $(p+q+1)\beta(h_\alpha) + (p+q+1)(q-p) = 0$

c'est-à-dire $\beta(h_\alpha) = p - q$. Or $\alpha(h_\alpha) = 2$, donc si $\beta = r\alpha$, on a $r = (p - q)/2$. Si $p - q$ est impair et $\beta = \frac{(p - q)}{2}\alpha$, alors $\beta + i\alpha = \alpha/2$ pour $i = \frac{q - p + 1}{2}$ ce qui est impossible par 4.18. Donc $p - q$ est pair, on a $r \in \mathbb{Z}$, donc $r = \pm 1$ par 4.18. $\square$

On a vu au cours de la démonstration précédente les résultats suivants :

Proposition 5.2 (Propriétés d'intégralité). *Si α et β sont deux racines avec $\beta \neq \pm\alpha$ alors $\beta(h_\alpha) = p - q$ où p et q sont des entiers positifs ou nuls tels que $\beta + i\alpha$ soit une racine pour $-p \leq i \leq q$ et ne soit pas une racine pour $i = q + 1$ ou $i = -p - 1$. En particulier, si α et β sont deux racines on a $\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$ et $\beta - \beta(h_\alpha)\alpha \in \Phi$.*

Démonstration. Toutes les assertions ont été vues au cours de la preuve précédente, sauf la dernière propriété dans le cas où $\beta = \pm\alpha$. Dans ce cas on obtient le résultat car $\alpha(h_\alpha) = 2$. $\square$

Introduisons le sous-espace vectoriel rationnel $H_{\mathbb{Q}}$ de H engendré par les h_α et le sous-espace vectoriel rationnel $H_{\mathbb{Q}}^*$ du dual H^* engendré par les racines. On sait (4.17) que H^* est engendré linéairement sur k par $\langle \Phi \rangle$, donc que H est engendré linéairement sur k par $\{h_\alpha \mid \alpha \in \Phi\}$.

Proposition 5.3. (i) *On a $\dim_{\mathbb{Q}}(H_{\mathbb{Q}}) = \dim_k(H)$ et $\dim_{\mathbb{Q}}(H_{\mathbb{Q}}^*) = \dim_k(H^*)$*
(ii) *$H_{\mathbb{Q}}^*$ est le dual (sur $\mathbb{Q}$) de $H_{\mathbb{Q}}$.*

Démonstration. Fixons une base $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ sur k de H^* formée de racines. Alors $(h_{\alpha_1}, \dots, h_{\alpha_r})$ est une base sur k de H puisque h_α correspond à un scalaire près à α par l'isomorphisme entre H et H^* . Le (i) signifie que toute racine est dans le sous-espace réel engendré par $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ et que tout élément h_α est combinaison linéaire réelle de $(h_{\alpha_1}, \dots, h_{\alpha_r})$. Soit $\alpha \in \Phi$; on a $h_\alpha = \sum_i \lambda_i h_{\alpha_i}$ où les coefficients λ_i sont a priori dans k . Nous allons montrer que ces coefficients sont dans $\mathbb{Q}$. On a $\alpha_j(h_\alpha) = \sum_i \lambda_i \alpha_j(h_{\alpha_i})$ pour tout $j \in \{1, 2, \dots, r\}$. Par 5.2 $\alpha_j(h_\alpha)$ et $\alpha_j(h_{\alpha_i})$ sont des entiers. Donc les coefficients λ_i sont les solutions d'un système linéaire à coefficients entiers. Le déterminant de ce système est non nul; en effet $\alpha_j(h_{\alpha_i}) = \frac{2}{\langle h_{\alpha_j}, h_{\alpha_i} \rangle} < h_{\alpha_i}, h_{\alpha_j} \rangle$, donc le déterminant du système est multiple par le facteur $\frac{2^r}{\prod_j \langle h_{\alpha_j}, h_{\alpha_j} \rangle}$ du déterminant de la forme de Killing restreinte à H qui est non dégénérée. On en déduit la première assertion de (i). Un raisonnement analogue laissé au lecteur prouve la deuxième assertion.

La partie (ii) est une conséquence de (i). En effet $H_{\mathbb{Q}}^*$ est un sous-espace du dual réel de $H_{\mathbb{Q}}$ et est de même dimension que ce dual. $\square$

Corollaire 5.4. *Avec les notations de 4.19(i), l'élément h'_α est dans $H_{\mathbb{Q}}$.*

Démonstration. On a vu au début de la section 5.1 que $h'_\alpha = \frac{2h_\alpha}{\langle h_\alpha, h_\alpha \rangle}$ donc est un multiple rationnel de h_α , puisque $\langle h_\alpha, h_\alpha \rangle$ est égal à $\sum_{\beta \in \Phi} \beta(h_\alpha)^2$ d'après 4.20, donc est entier. $\square$

Dans la suite nous notons $H_{\mathbb{R}} = H_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ et $H_{\mathbb{R}}^* = H_{\mathbb{Q}}^* \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$. Les propriétés analogues à celles de 5.3, obtenues en remplaçant $\mathbb{Q}$ par $\mathbb{R}$ sont clairement vraies. La forme de Killing s'étend de façon unique à $H_{\mathbb{R}}$. Si le corps k de départ contient $\mathbb{R}$, l'algèbre $H_{\mathbb{R}}$ est le sous- $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de H engendré linéairement par les h_α et la forme de Killing sur $H_{\mathbb{R}}$ est la restriction de la forme de Killing sur H .

Proposition 5.5. *La forme de Killing sur $H_{\mathbb{R}}$ est positive non dégénérée.*

Démonstration. On sait que cette forme est non dégénérée. D'autre part pour h et h' dans H on a $\langle h, h' \rangle = \sum_{\alpha \in \Phi} \alpha(h)\alpha(h')$ (voir 4.20). Ceci montre que $\langle h, h \rangle \geq 0$ pour $h \in H_{\mathbb{R}}$. $\square$

Définition 5.6. Pour $\alpha \in \Phi$, on appelle *réflexion de vecteur α* l'application linéaire de $s_{\alpha} : H_{\mathbb{R}}^* \rightarrow H_{\mathbb{R}}^*$ définie par $s_{\alpha}(\lambda) = \lambda - \lambda(h_{\alpha})\alpha$.

Remarque 5.7. C'est un cas particulier de la définition générale d'une réflexion de vecteur donné, par rapport à un hyperplan donné dans un espace vectoriel V sur un corps quelconque de caractéristique différente de 2 : on donne un vecteur $\alpha \in V$ et une forme linéaire non nulle $\alpha^{\vee} \in V^*$ telle que $\alpha^{\vee}(\alpha) = 2$; la réflexion correspondante est $x \mapsto x - \alpha^{\vee}(x)\alpha$. C'est une involution dont l'ensemble des points fixes est l'hyperplan noyau de $\alpha^{\vee}$ et qui envoie α sur $-\alpha$.

On a vu que $H_{\mathbb{R}}$ est un espace euclidien pour la forme de Killing. L'espace $H_{\mathbb{R}}^*$ est isomorphe à $H_{\mathbb{R}}$ par l'application qui fait correspondre α à h'_{α} . Nous noterons aussi $\langle, \rangle$ la forme euclidienne sur $H_{\mathbb{R}}^*$ transportée de la forme de Killing par cet isomorphisme. Comme $h_{\alpha} = 2 \frac{h'_{\alpha}}{\langle h'_{\alpha}, h'_{\alpha} \rangle}$, on a $\beta(h_{\alpha}) = 2 \frac{\langle h'_{\beta}, h'_{\alpha} \rangle}{\langle h'_{\alpha}, h'_{\alpha} \rangle} = 2 \frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ pour toute racine β . Donc par linéarité on a $\lambda(h_{\alpha}) = 2 \frac{\langle \lambda, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ pour tout $\lambda \in H_{\mathbb{R}}^*$.

La réflexion s_{α} de vecteur α peut donc s'écrire $\lambda \mapsto \lambda - 2 \frac{\langle \lambda, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha$. C'est une réflexion orthogonale de l'espace euclidien $H_{\mathbb{R}}^*$.

Proposition 5.8. Soit α une racine ; alors la réflexion s_{α} de vecteur α conserve l'ensemble Φ des racines.

Démonstration. La proposition est une conséquence de la deuxième assertion de la proposition 5.2. $\square$

Les propriétés

- (i) Φ est fini, ne contient pas 0 et engendre $H_{\mathbb{R}}^*$.
- (ii) $\alpha(h_{\alpha}) = 2$.
- (iii) $\alpha(h_{\beta}) \in \mathbb{Z}$ pour tout α et tout β .

constituent les axiomes des **systèmes de racines** (voir section suivante). Un système de racines qui a la propriété 5.1 est dit **réduit**.

L'intérêt de cette notion est que ces propriétés sont suffisamment fortes pour qu'on puisse classer les systèmes de racines et cette classification mène à une classification des algèbres de Lie semi-simples complexes.

5.2. Systèmes de racines, Groupe de Weyl. Considérons un espace vectoriel réel de dimension finie V , son dual V^* et des ensembles $\Phi \subset V$ et $\Phi^{\vee} \subset V^*$ en bijection $\alpha \mapsto \alpha^{\vee}$ vérifiant les axiomes des systèmes de racines réduits :

- (i) Φ est fini, ne contient pas 0 et engendre V .
- (ii) Pour tout $\alpha \in \Phi$ on a $\alpha^{\vee}(\alpha) = 2$ et $s_{\alpha}(\Phi) = \Phi$.
- (iii) $\alpha^{\vee}(\Phi) \subset \mathbb{Z}$ pour tout $\alpha \in \Phi$.
- (iv) Soit $a \in \mathbb{R}$; si α et $a\alpha$ sont des racines alors $a = \pm 1$.

Dans cette définition s_α est la réflexion par rapport à la racine α définie comme dans la remarque 5.7. On dit que $\alpha^\vee$ est la **coracine** associée à α . Le **rang** d'un système de racine est la dimension de V .

Définition 5.9. *Le groupe de Weyl d'un système de racines est le groupe engendré par les réflexions par rapport aux racines.*

Proposition 5.10. *Le groupe W est fini.*

Démonstration. Le groupe W permute Φ et si un élément de W fixe toutes les racines alors il fixe tout élément de V puisque Φ engendrent V . Donc W s'injecte dans le groupe fini des permutations de Φ . $\square$

Lemme 5.11. *L'ensemble $\Phi^\vee$ engendrent V^* et est un système de racines dans V^* pour lequel $(\alpha^\vee)^\vee = \alpha$.*

Indication sur la démonstration. Il existe un produit scalaire, noté $\langle, \rangle$ sur V invariant par W : il suffit de faire la moyenne des transformés par W d'un produit scalaire quelconque sur V et on obtient un produit scalaire invariant. Ce produit scalaire fournit un isomorphisme entre V et V^* qui fait correspondre $\alpha^\vee$ à $2\frac{\alpha}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ pour tout $\alpha \in \Phi$, d'où la première assertion. On peut identifier V et V^* par cet isomorphisme. On a $\alpha = 2\frac{\alpha^\vee}{\langle \alpha^\vee, \alpha^\vee \rangle}$, d'où les autres assertions. $\square$

Dans la suite on identifie V et V^* grâce à un produit scalaire invariant par W comme dans la preuve ci-dessus.

Lemme 5.12. *Si V_1 est un sous-espace de V engendré par une partie de Φ , alors $\Phi_1 = \Phi \cap V_1$ est un système de racines.*

Démonstration. Si α et β sont dans Φ_1 alors $s_\alpha(\beta) = \beta - \alpha^\vee(\beta)\alpha \in \Phi \cap V_1 = \Phi_1$. Les autres propriétés sont immédiates. $\square$

Avant de classifier les systèmes de racines on étudie les positions possibles pour deux racines. Si α et β sont deux racines non proportionnelles et non orthogonales alors $0 < \frac{\langle \alpha, \beta \rangle^2}{\langle \alpha, \alpha \rangle \langle \beta, \beta \rangle} < 1$. Or $\alpha^\vee(\beta) = 2\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ et $\beta^\vee(\alpha) = 2\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle}$ sont des entiers. Les seules possibilités sont donc (en supposant $\langle \alpha, \beta \rangle < 0$ et $\langle \alpha, \alpha \rangle < \langle \beta, \beta \rangle$, quitte à changer α en $-\alpha$ et à échanger α et β) :

- (i) $\alpha^\vee(\beta) = \beta^\vee(\alpha) = -1$. Dans ce cas $\langle \alpha, \alpha \rangle = \langle \beta, \beta \rangle$ et l'angle non orienté de α et β vaut $2\pi/3$.
- (ii) $\alpha^\vee(\beta) = -2$ et $\beta^\vee(\alpha) = -1$. Dans ce cas $\langle \beta, \beta \rangle = 2\langle \alpha, \alpha \rangle$ et l'angle non orienté de α et β vaut $3\pi/4$.
- (iii) $\alpha^\vee(\beta) = -3$ et $\beta^\vee(\alpha) = -1$. Dans ce cas $\langle \beta, \beta \rangle = 3\langle \alpha, \alpha \rangle$ et l'angle non orienté de α et β vaut $5\pi/6$.

Corollaire 5.13. *Soient α et β deux racines telles que $\alpha \neq \pm\beta$.*

- (i) *Si $\langle \alpha, \beta \rangle > 0$ alors $\alpha - \beta$ est une racine.*
- (ii) *Si $\langle \alpha, \beta \rangle < 0$ alors $\alpha + \beta$ est une racine.*

Démonstration. Il suffit de démontrer la deuxième assertion. On vérifie alors que dans chacun des cas possibles pour $\langle \alpha, \beta \rangle$, en supposant $\langle \alpha, \alpha \rangle \leq \langle \beta, \beta \rangle$ on a $s_\beta(\alpha) = \alpha + \beta$. $\square$

Nous introduisons maintenant la notion d'ordre sur les racines. Un ordre sur un espace vectoriel réel est une relation d'ordre (total) stable par translation et multiplication par un scalaire positif. Un ordre est complètement défini par l'ensemble des éléments supérieurs à 0.

Exercice 5.14. Montrer qu'une partie V^+ d'un espace vectoriel réel V est l'ensemble des éléments supérieurs à 0 pour un ordre sur V si et seulement si elle vérifie

- (i) $V^+ \cup (-V^+) = V$
- (ii) $V^+ \cap (-V^+) = \{0\}$
- (iii) $\lambda V^+ \subset V^+$ pour tout λ réel positif.
- (iv) La somme de deux éléments de V^+ est dans V^+ .

On obtient facilement un tel ordre en ordonnant une base fixée et en prenant ensuite l'ordre lexicographique ($x > 0$ si la première coordonnées non nulle de x est positive). Étant donné un système de racines Φ dans l'espace V et un ordre sur V on note Φ^+ l'ensemble des racines positives et $\Phi^- = -\Phi^+$. On a $\Phi = \Phi^+ \cup \Phi^-$. On définit l'ensemble Π des **racines simples** comme l'ensemble des racines positives qui ne sont pas somme de racines positives.

Définition 5.15. L'ensemble des racines simples pour un ordre donné sur V s'appelle une **base du système de racines**.

Cette définition est justifiée par le résultat suivant et par 5.19 plus bas.

Proposition 5.16. Toute racine positive est somme de racines de Π .

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. Soit $\alpha \in \Phi^+$ minimale pour l'ordre (possible car Φ est fini) qui n'est pas somme de racines de Π . Alors α n'est pas dans Π donc α est somme de racines positives qui sont strictement plus petites que α pour l'ordre donc sont sommes de racines de Π par minimalité de α , d'où une contradiction. $\square$

Précisons ce résultat :

Proposition 5.17. Soit Π une base du système de racines. Pour toute racine positive β non simple il existe $\alpha \in \Pi$ tel que $\beta - \alpha \in \Phi^+$.

Démonstration. On a $\beta = \sum_{\alpha \in \Pi} a_\alpha \alpha$ où les coefficients a_α sont tous positifs ou nuls. Si $\langle \beta, \alpha \rangle \leq 0$ pour toute racine simple α , alors $\langle \beta, \beta \rangle = \sum_{\alpha} a_\alpha \langle \beta, \alpha \rangle \leq 0$, ce qui est contradictoire. Si α est une racine simple telle que $\langle \beta, \alpha \rangle > 0$, on sait par 5.13 que $\beta - \alpha$ est une racine (nécessairement positive). $\square$

Lemme 5.18. Si α et β sont deux racines simples distinctes alors $\langle \alpha, \beta \rangle \leq 0$.

Démonstration. Si $\langle \alpha, \beta \rangle > 0$, alors par 5.13, $\beta - \alpha$ est une racine qu'on peut supposer positive, quitte à échanger α et β . Alors $\beta = \alpha + (\beta - \alpha)$ ce qui signifie que $\beta \notin \Pi$. $\square$

Théorème 5.19. Pour tout ordre sur V , l'ensemble des racines simples est une base de V .

Démonstration. Il est clair que Π engendre V puisque Φ engendre V et que $\Phi = \Phi^+ \cup -\Phi^+$. Une relation linéaire entre les éléments de Π peut toujours s'écrire $\sum_{i=1}^h a_i \alpha_i = \sum_{i=h+1}^{i=k} a_i \alpha_i$ avec a_i réel positif et $\alpha_i \in \Pi$ pour tout i . Posons $v =$

$\sum_{i=1}^{i=h} a_i \alpha_i$. En faisant le produit scalaire des deux membres, on obtient $\langle v, v \rangle \leq 0$ par 5.18. Donc $v = 0$ et tous les coefficients a_i sont nuls car une somme à coefficients strictement positifs de vecteurs non nuls de V^+ ne peut pas être nulle. $\square$

Comme Π est une base de V et que par 5.16, les racines positives sont sommes de racines simples on en déduit

Corollaire 5.20. *Soit Π une base d'un système de racines alors une racine est positive si et seulement si elle est combinaison linéaire des éléments de Π avec au moins un coefficient strictement positif.*

Théorème 5.21. *Les bases d'un système de racines forment une orbite sous l'action du groupe de Weyl.*

Démonstration.

Lemme 5.22. *Soit Π une base et Φ^+ l'ensemble des racines positives. Si $\alpha \in \Pi$ et $\beta \in \Phi^+ - \{\alpha\}$ alors $s_\alpha(\beta) \in \Phi^+$.*

Preuve du lemme. On a $s_\alpha(\beta) = \beta - \alpha^\vee(\beta)\alpha$. Donc s_α ne change que le coefficient de α dans l'expression de β comme combinaison de la base. Les autres coefficients restent positifs et l'un d'eux au moins n'est pas nul, d'où le résultat, par 5.20 $\square$

Prouvons alors le théorème. L'image d'un ordre sur V par n'importe quel automorphisme linéaire est un ordre sur V . Donc un élément de W envoie une base du système de racines sur une autre base. Réciproquement, soient Π_1 et Π_2 deux bases d'un système de racines Φ et Φ_1^+ et Φ_2^+ les ensembles de racines positives correspondants. Il suffit de démontrer qu'il existe un élément de W envoyant Φ_1^+ sur Φ_2^+ . Raisonnons par récurrence sur $|\Phi_1^+ \cap \Phi_2^-|$. Si ce cardinal est nul alors $\Phi_1^+ = \Phi_2^+$. Sinon $\Phi_1^+ \cap \Phi_2^-$ n'est pas vide, donc $\Pi_1 \cap \Phi_2^-$ n'est pas vide non plus. Soit $\alpha \in \Pi_1 \cap \Phi_2^-$; alors par le lemme 5.22 $s_\alpha(\Phi_1^+) = \Phi_1^+ - \{\alpha\} \cup \{-\alpha\}$. Donc $|s_\alpha(\Phi_1^+) \cap \Phi_2^-| = |\Phi_1^+ \cap \Phi_2^-| - 1$. Par hypothèse de récurrence il existe w dans le groupe de Weyl qui envoie $s_\alpha(\Phi_1^+)$ sur Φ_2^+ donc ws_α envoie Φ_1^+ sur Φ_2^+ . $\square$

Définition 5.23. *Un réflexion de vecteur une racine simple est appelée réflexion simple.*

Proposition 5.24. *Toute racine est l'image par un élément de W d'une racine simple.*

Démonstration. Le lemme suivant donne un résultat plus précis, ce qui prouve la proposition.

Lemme 5.25. *Toute racine est l'image d'une racine simple par un produit de réflexions simples.*

Démonstration. Il suffit de le montrer pour une racine positive β car $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$. Écrivons $\beta = \sum_{\alpha \in \Pi} a_\alpha \alpha$ et raisonnons par récurrence sur la somme $\sum_{\alpha} a_\alpha$. Si cette somme vaut 1, la racine β est simple. Sinon, comme $\langle \beta, \beta \rangle = \sum_{\alpha} a_\alpha \langle \beta, \alpha \rangle > 0$, il existe une racine simple α_0 telle que $\langle \beta, \alpha_0 \rangle > 0$ et $a_{\alpha_0} \neq 0$. Soit $\gamma = s_{\alpha_0}(\beta)$. On a $\gamma = \beta - 2 \frac{\langle \alpha_0, \beta \rangle}{\langle \alpha_0, \alpha_0 \rangle} \alpha_0$. Les coefficients de γ sur les racines simples autres que α_0 sont les mêmes que ceux de β , donc positifs et non tous nuls. Ceci montre que γ est une racine positive par 5.20. La somme des coefficients de γ est strictement inférieure à la somme des coefficients de β . Donc par hypothèse de récurrence il existe $w \in W$ produit de réflexions simples tel que $w(\gamma) = ws_{\alpha_0}(\beta)$ soit une racine simple. $\square$

□

Corollaire 5.26. *Le groupe de Weyl est engendré par les réflexions simples.*

Démonstration. Si β est une racine quelconque, le lemme 5.25 montre que $\beta = w(\alpha)$ avec $\alpha \in \Pi$ et w produit de réflexions simples. On a alors $s_\beta = ws_\alpha w^{-1}$, donc s_β est un produit de réflexions simples. Comme W est engendré $\{s_\beta \mid \beta \in \Phi\}$, on obtient le résultat. □

Ce dernier corollaire va nous permettre de prouver que l'action du groupe de Weyl est en fait simplement transitive sur les bases :

Théorème 5.27. *Si $w(\Phi^+) = \Phi^+$ alors $w = 1$.*

Démonstration. Nous utilisons le lemme suivant

Lemme 5.28. *Si $w = s_1 \dots s_r$ est une écriture de longueur minimale de $w \in W$ comme produit de réflexions simples correspondant aux racines simples $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, on a $w(\alpha_r) \in \Phi^-$.*

Preuve du lemme. Supposons par l'absurde que $w(\alpha_r) \in \Phi^+$ et soit i maximum tel que $s_i s_{i+1} \dots s_r(\alpha_r) \in \Phi^+$. Comme $s_r(\alpha_r) = -\alpha_r$, on a $i \leq r-1$. Posons $\beta = s_{i+1} s_{i+2} \dots s_{r-1}(\alpha_r)$. C'est une racine positive qui devient négative par s_i . Donc $\beta = \alpha_i$ par 5.22. Or la réflexion de vecteur $\beta = \alpha_i$ est le conjugué de s_{α_r} par $s_{i+1} s_{i+2} \dots s_{r-1}$. Ceci s'écrit $s_i s_{i+1} s_{i+2} \dots s_{r-1} = s_{i+1} s_{i+2} \dots s_{r-1} s_r$, d'où $w = s_1 \dots s_{i-1} s_{i+1} \dots s_{r-1}$, ce qui est une écriture de w plus courte que l'écriture donnée, donc impossible. □

On en déduit immédiatement théorème. □

Exercice 5.29. Montrer par une méthode analogue que si $w \in W$ envoie une racine simple α sur une racine négative et si $w = s_1 \dots s_r$ est une expression minimale de w comme produit de réflexions par rapport à des racines simples, il existe i tel que $s_i \dots s_r = s_{i+1} \dots s_r s_\alpha$. En particulier il existe une écriture de longueur minimale de w comme précédemment, qui se termine par s_α . (ceci est la propriété dite **d'échange**, qui prouve que W est un groupe de Coxeter ; voir [Bbk][IV §1 no 6 théorème 1]).

Étant donné une base d'un système de racines Φ on peut ordonner partiellement Φ par $\alpha < \beta$ si $\beta - \alpha$ est combinaison linéaire de Π avec des coefficients positifs ; ce n'est pas un ordre total sur Φ , par exemple deux racines simples ne sont pas comparables (l'ordre sur V considéré plus haut est un ordre total qui raffine celui-ci). La propriété suivante peut être utile :

Proposition 5.30. *Soit Φ un système de racines ; on suppose donnée une base Π de Φ et on suppose que Π n'est pas la réunion disjointe de deux parties mutuellement orthogonales. Alors il existe une unique racine (positive) maximale pour l'ordre ci-dessus.*

Nous verrons plus bas que l'hypothèse sur Π signifie que Φ est un système de racines dit "irréductible".

Démonstration. Remarquons qu'une racine maximale est nécessairement positive. Soit β une racine maximale ; on l'écrit $\beta = \sum_{\alpha \in \Pi} a_\alpha \alpha$ Soit $\Pi_1 = \{\alpha \in \Pi \mid a_\alpha > 0\}$ et $\Pi_2 = \{\alpha \in \Pi \mid a_\alpha = 0\}$; par hypothèse les racines de Π_1 ne sont pas toutes

orthogonales à toutes les racines de Π_2 . Or si $\alpha \in \Pi_2$ n'est pas orthogonale à Π_1 on a $\langle \beta, \alpha \rangle < 0$ par 5.18. Ceci implique $\alpha + \beta \in \Phi$ par 5.13, ce qui est contraire à l'hypothèse de maximalité. Donc $a_i > 0$ pour tout i . Soit γ une racine maximale distincte de β ; calculons $\langle \beta, \gamma \rangle = \sum_{\alpha} a_{\alpha} \langle \alpha, \gamma \rangle$. Par maximalité de γ et par 5.13, chaque terme de cette somme est positif et comme les racines simples forment une base de V , certains termes de cette somme ne sont pas nuls. On a donc $\langle \beta, \gamma \rangle > 0$, donc $\beta - \gamma$ est une racine par 5.13. Soit $\beta - \gamma$, soit $\gamma - \beta$ est positive, ce qui contredit la maximalité de β et de γ . $\square$

Exercice 5.31. On fixe un ordre sur Φ ; montrer qu'il existe un unique élément $w_0 \in W$ tel que $w_0(\Phi^+) = \Phi^-$. Montrer que w_0 est un élément d'ordre 2.

5.3. Classification des systèmes de racines. Pour classer les systèmes de racines on commence remarque d'abord que si $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ où les racines de Φ_1 sont orthogonales aux racines de Φ_2 alors $V = V_1 \oplus V_2$ où V_1 et V_2 sont respectivement engendrés par Φ_1 et Φ_2 et chacun des ensembles Φ_i est un système de racines dans V_i . On dit qu'un système de racines est **irréductible** si une telle décomposition n'est pas possible. Il suffit de classer les systèmes de racines irréductibles. Si Φ n'est pas irréductible, il est clair que Φ a une base (donc toute base) qui est l'union de deux sous-ensembles orthogonaux l'un à l'autre. La proposition suivante donne une réciproque de cette propriété.

Proposition 5.32. *Si la base Π d'un système de racines est union disjointe de deux parties Π_1 et Π_2 mutuellement orthogonales alors Φ est la réunion disjointe de deux systèmes de racines orthogonaux de bases respectives Π_1 et Π_2 .*

Démonstration. Si $\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2$ avec $\Pi_1 \perp \Pi_2$, alors les réflexions s_{α} avec $\alpha \in \Pi_1$ commutent avec les réflexions s_{α} avec $\alpha \in \Pi_2$. L'espace V est la somme directe orthogonale des sous-espaces V_1 et V_2 de bases respectives Π_1 et Π_2 . Si W_1 et W_2 sont les sous-groupes de W engendrés par les réflexions simples correspondant respectivement à Π_1 et Π_2 , les éléments de W_1 commutent avec les éléments de W_2 . Tout élément de W est produit d'un élément de W_1 et d'un élément de W_2 . Les éléments de W_1 (resp. W_2) agissent par l'identité sur V_2 (resp. V_1). Donc un élément de $W_1 \cap W_2$ agit trivialement sur V . Autrement dit W est le produit direct $W_1 \times W_2$. On sait (5.25) que toute racine est l'image par un élément de W d'une racine simple. Si $w = w_1 w_2$ avec $w_1 \in W_1$ et $w_2 \in W_2$, et si $\alpha \in \Pi_1$, on a $w(\alpha) = w_1(\alpha)$ et de même pour les racines de Π_2 . Donc Φ est l'union disjointe $\Phi_1 \cup \Phi_2$ avec $\Phi_1 = W_1(\Pi_1) \subset V_1$ et $\Phi_2 = W_2(\Pi_2) \subset V_2$. Par le lemme 5.12 Φ_1 et Φ_2 sont des systèmes de racines dans V_1 et V_2 respectivement. Les ensembles Π_1 et Π_2 sont des bases respectives de ces deux systèmes, puisque leur union est une base de Φ . $\square$

Introduisons la **matrice de Cartan** d'un système de racines Φ . C'est la matrice indexée par les éléments d'une base Π de Φ dont le coefficient dans la ligne α et la colonne β vaut $\alpha^{\vee}(\beta)$. Par 5.21 cette matrice est indépendante du choix de la base. Introduisons la matrice symétrique indexée par les racines simples dont les coefficients diagonaux valent 2 et le coefficient d'indice (α, β) vaut $-\sqrt{\alpha^{\vee}(\beta)\beta^{\vee}(\alpha)}$. C'est la matrice d'une forme quadratique Q . Le coefficient ci-dessus peut s'écrire $2 \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle \langle \beta, \beta \rangle}}$ si $\langle, \rangle$ est un produit scalaire invariant par W .

Proposition 5.33. *La matrice de Cartan d'un système de racines vérifie les conditions suivantes*

- (i) Les coefficients diagonaux valent 2 et les autres coefficients valent 0, -1 , -2 ou -3 .
- (ii) Si un coefficient est nul, le coefficient de mêmes indices dans la matrice transposée est aussi nul.
- (iii) La forme quadratique Q est définie positive.

De plus le système de racines est irréductible si et seulement si la matrice ne peut pas s'écrire comme une matrice diagonale par blocs de façon non triviale.

Démonstration. Nous avons déjà vu la propriété (i). La dernière assertion provient de la proposition 5.32. La propriété (ii) provient de la symétrie de $<, >$. La propriété (iii) se prouve en remarquant que si $x = \sum_{\alpha \in \Pi} c_\alpha \alpha$, on a $Q(x) = 2 < y, y >$ où $y = \sum_{\alpha \in \Pi} \frac{c_\alpha \alpha}{\sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle}}$. $\square$

Nous allons montrer que ces conditions sont suffisamment restrictives pour donner toutes les matrices de Cartan possibles et fournir une classification. Remarquons d'abord

Lemme 5.34. *Si $C = (c_{ij})$ est une matrice vérifiant les conditions de 5.33 et si $C' = (c'_{ij})$ est une matrice de même taille vérifiant la condition 5.33(ii), telle que $c'_{ii} = 2$ et $c_{ij} \leq c'_{ij} \leq 0$ pour $i \neq j$ alors C' vérifie aussi les conditions (i) et (iii) de 5.33.*

Démonstration. Seule la relation (iii) nécessite une preuve. Soit Q' la forme quadratique associée à C' comme précédemment. Soit x un vecteur de coordonnées (x_i) et soit y le vecteur de coordonnées $(|x_i|)$; on a $Q'(x) = \sum_i c'_{ii} x_i^2 - 2 \sum_{i \neq j} \sqrt{c'_{ij} c'_{ji}} x_i x_j \geq \sum_i c'_{ii} x_i^2 - 2 \sum_{i \neq j} \sqrt{c'_{ij} c'_{ji}} |x_i x_j| \geq Q(y) \geq 0$, d'où la positivité de Q' et aussi le fait que $Q'(x) = 0$ implique $x = 0$. $\square$

On prouve facilement :

Lemme 5.35. *Si C vérifie les conditions de 5.33, toute matrice extraite de C correspondant à un sous-ensemble des indices vérifie aussi ces conditions.*

Pour classifier les matrices de Cartan, à toute matrice $C = (c_{ij})_{i,j \in I}$ (où I est un ensemble fini) vérifiant les conditions 5.33 on associe son **graphe (ou diagramme) de Dynkin**. Remarquons d'abord que le fait que Q est définie positive impose que pour tout couple (i, j) avec $i \neq j$, l'un des deux entiers c_{ij} ou c_{ji} vaut -1 , ou bien ils valent tous deux 0 (regarder la forme sur le sous-espace de dimension 2 correspondant à i et j). On considère le graphe qui a comme ensemble de sommets l'ensemble I et où deux sommets i et j distincts sont reliés par une arête si $c_{ij} = c_{ji} = -1$, deux arêtes si $c_{ij} = -1$ et $c_{ji} = -2$, trois arêtes si $c_{ij} = -1$ et $c_{ji} = -3$. Ces arêtes sont orientées de i vers j si $|c_{ji}| > |c_{ij}|$; dans le cas de la matrice de Cartan d'un système de racines, cela revient à orienter les flèches de la racine la plus longue vers la racine la plus courte pour $<, >$.

Le graphe de Dynkin d'une matrice de Cartan est connexe (on dit aussi **irréductible**) si et seulement le système de racines est irréductible. Une matrice vérifiant les conditions 5.33 est déterminée par son graphe de Dynkin. Voici une liste de graphes de Dynkin connexes dont nous verrons que les matrices vérifient les condition de 5.33.

L'indice dans le nom du graphe représente le nombre de sommets.

$$\begin{aligned}
 A_n \ (n \geq 1) : & \bullet \text{---} \bullet \cdots \bullet \text{---} \bullet \\
 B_n \ (n \geq 2) : & \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \cdots \bullet \text{---} \bullet \\
 C_n \ (n \geq 2) : & \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \cdots \bullet \text{---} \bullet \\
 D_n \ (n \geq 3) : & \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \text{---} \bullet \cdots \bullet \text{---} \bullet \end{array} \\
 E_n \ (n = 6, 7, 8) : & \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \text{---} \bullet \cdots \bullet \text{---} \bullet \end{array} \\
 F_4 : & \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \\
 G_2 : & \bullet \text{---} \bullet
 \end{aligned}
 \tag{5.36}$$

Exercice 5.37. Écrire les matrices de Cartan correspondant à chacun de ces diagrammes.

Remarque 5.38. Les diagrammes B_2 et C_2 sont identiques, de même que A_3 et D_3 . En dehors de cette coïncidence les systèmes de racines correspondants à ces diagrammes sont deux à deux non isomorphes d'après le théorème suivant.

Théorème 5.39. (i) Une matrice vérifie les conditions de 5.33 si et seulement si chaque composante connexe de son graphe de Dynkin est l'un des graphes ci-dessus.
(ii) Chacun des diagrammes ci-dessus est le diagramme d'un système de racines. Ces systèmes sont deux à deux non isomorphes à l'exception de $B_2 = C_2$ et $A_3 = D_3$.

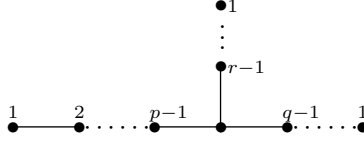
Démonstration. Remarquons que les conditions 5.33 ne dépendent pas de l'orientation des arêtes du graphe de Dynkin. Pour prouver (i) nous montrons que certains diagrammes sont impossibles et nous utilisons les lemmes 5.34 et 5.35.

Lemme 5.40. Pour les diagrammes suivants la forme Q de 5.33 est dégénérée quelle que soit l'orientation des flèches :

$$\begin{aligned}
 A : & \begin{array}{c} \bullet \\ / \quad \backslash \\ \bullet \text{---} \bullet \cdots \bullet \end{array} \\
 B : & \begin{array}{c} 2 \\ | \\ \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \cdots \bullet \text{---} \bullet \\ 1 \quad 3 \end{array} \\
 C : & \begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \cdots \bullet \text{---} \bullet \end{array} \\
 D : & \begin{array}{c} 2 \\ | \\ \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \cdots \bullet \text{---} \bullet \\ 1 \quad 3 \quad n-1 \quad n \end{array} \\
 F : & \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \\
 G : & \bullet \text{---} \bullet
 \end{aligned}$$

Démonstration. Pour chacun de ces diagrammes nous donnons un vecteur dans le noyau de Q : $A : (1, 1, \dots, 1)$, $B : (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, \dots, \sqrt{2}, 1)$, $C : (1, \sqrt{2}, \dots, \sqrt{2}, 1)$, $D : (1, 1, 2, 2, \dots, 2, 1, 1)$, $F : (1, 2, 3, 2\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $G : (\sqrt{3}, 2, 1)$, où ces vecteurs sont représentés dans la base numérotée comme indiqué sur le diagramme. $\square$

Démontrons maintenant le (i) du théorème. Pour le cas d'un diagramme ayant trois branches, de longueurs p , q et r avec un sommet commun et toutes les arêtes simples (voir figure), nous donnons une formule pour la forme Q .



Si on note respectivement $x_1, \dots, x_{p-1}$, $y_1, \dots, y_{q-1}$, $z_1, \dots, z_{r-1}$ les coordonnées d'un vecteur x sur les éléments de base correspondant à chaque branche et u la coordonnée sur le vecteur de base correspondant au sommet commun aux trois branches, le lecteur vérifiera que

$$Q(x) = C_p(x_1, \dots, x_{p-1}, u) + C_q(y_1, \dots, y_{q-1}, u) + C_r(z_1, \dots, z_{r-1}, u) + \frac{u^2}{2} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - 1 \right),$$

où $C_n(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{2(i+1)} (a_{i+1} - \frac{i+1}{i} a_i)^2$. Ceci montre que Q est définie positive si et seulement si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$, ce qui montre qu'une des branches doit être de longueur 2 et que si la deuxième est de longueur 3 la dernière ne peut être que de longueur 3, 4, ou 5. Si on a deux branches de longueur 2 la troisième peut être de longueur arbitraire.

D'autre part, remarquons que le diagramme de Dynkin de C' dans le lemme 5.34 s'obtient à partir de celui de C en diminuant le nombre d'arêtes entre deux sommets donnés. Donc par les lemmes 5.34 et 5.35, pour tous les graphes contenant les graphes du lemme précédent comme sous-graphes, éventuellement après avoir diminué le nombre d'arêtes entre deux sommets, la forme Q est dégénérée. Il ne reste alors comme possibles que les diagrammes de l'énoncé.

La preuve de (ii) consiste à construire explicitement un système de racines pour chacun des diagrammes. Nous donnons ci-dessous les cas A_n , B_n , C_n , D_n , F_4 et G_2 . Pour les types E_6 , E_7 et E_8 nous renvoyons à Bourbaki, [Bbk, Chapitre VI, §4] Pour vérifier que ce sont bien des systèmes de racines on utilise le lemme suivant :

Lemme 5.41. *Soit V un espace vectoriel euclidien de dimension n ; on note $\langle, \rangle$ le produit scalaire. Soit L un sous-groupe discret de V , soit Λ un ensemble fini de réels strictement positifs ne contenant pas à la fois deux nombres de la forme λ et 4λ et soit R l'ensemble des $\alpha \in L$ tels que $\langle \alpha, \alpha \rangle \in \Lambda$. Si R engendre V et si $2 \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ est entier pour tout α et tout β dans R alors R est un système de racines dans V .*

Preuve du lemme. L'ensemble R est fini car Λ est fini et L discret. L'axiome (i) des systèmes de racines est donc vérifié. L'hypothèse faite sur Λ assure aussi l'axiome (iv) des systèmes de racines : en effet $\frac{2\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ et $\frac{2\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle}$ sont des entiers, donc si $\beta = r\alpha$ avec $r \in \mathbb{R}$, $|r| > 1$ alors $2|r|$ et $2/|r|$ sont des entiers différents de 2 donc $r = \pm 2$, ce qui contredit l'hypothèse sur Λ .

Si on pose $\alpha^\vee = 2 \frac{\alpha}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ l'axiome (iii) est bien vérifié. On a $s_\alpha(\beta) = \beta - 2 \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha$, donc $s_\alpha(\beta) \in L$ puisque $2 \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ est entier. Comme de plus $s_\alpha(\beta)$ et β ont même carré scalaire, on a bien $s_\alpha(\beta) \in R$, d'où l'axiome (ii) des systèmes de racines. $\square$

Nous laissons le lecteur trouver pour les exemples (i), (ii), (iv), (v) et (vi) ci-dessous un sous-groupe discret L et un ensemble Λ comme dans le lemme et vérifier les hypothèses du lemme. Le type C_n s'obtient en considérant le système des racines d'un système de type B_n .

Montrons que ces systèmes de racines sont deux à deux non isomorphes, sauf pour les exceptions du théorème. Deux systèmes de rang différents ne peuvent pas être isomorphes. Si les matrices de Cartan sont différentes, les systèmes ne sont pas non plus isomorphes, en particulier si l'un des systèmes n'a qu'une longueur de racines et l'autre deux longueurs de racines. Ces arguments suffisent à prouver le résultat. $\square$

Exemples 5.42. (i) Considérons l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$. On a vu dans 4.22 que l'algèbre des matrices diagonales est une sous-algèbre de Cartan H et que le système de racines est l'ensemble des vecteurs $e_i - e_j$ dans un espace vectoriel de dimension n de base e_i où e_i est la forme linéaire sur $H : \text{diag}(a_i) \mapsto a_i$. Les racines sont dans un hyperplan de cet espace. Une base Π est formée des racines $\alpha_i = e_i - e_{i+1}$ pour $i = 1, \dots, n-1$. Le diagramme de Dynkin est de type A_{n-1} . On a $\Phi^+ = \{\alpha_i + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_j \mid 1 \leq i \leq j \leq n-1\}$.

- (ii) Considérons dans un espace euclidien de dimension n de base orthonormée (e_i) l'ensemble constitués des vecteurs $\pm e_i \pm e_j$ et des vecteurs $\pm e_i$. On obtient un système de racines de type B_n . Une base est constituée des vecteurs $e_{i+1} - e_i$ et e_1 .
- (iii) Considérons dans un espace euclidien de dimension n de base orthonormée (e_i) l'ensemble constitués des vecteurs $\pm e_i \pm e_j$ et des vecteurs $\pm 2e_i$. On obtient un système de racines de type C_n . Une base est constituée des vecteurs $e_{i+1} - e_i$ et $2e_1$.
- (iv) Considérons dans un espace euclidien de dimension n de base orthonormée (e_i) l'ensemble constitués des vecteurs $\pm e_i \pm e_j$. On obtient un système de racines de type D_n . Une base est constituée des vecteurs $(e_1 - e_2, e_1 + e_2, e_3 - e_1, e_4 - e_3, \dots, e_n - e_{n-1})$.
- (v) Le système de type F_4 s'obtient en considérant dans un espace euclidien de base orthonormée (e_1, e_2, e_3, e_4) les vecteurs $\pm e_i \pm e_j$, $\pm e_i$ et $\frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)$. Une base est donnée par $(e_2 - e_3, e_3 - e_4, e_4, \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4))$.
- (vi) Considérons dans le plan euclidien muni d'une base orthonormée (e_1, e_2) les vecteurs $\alpha_1 = e_1$ et $\alpha_2 = \frac{1}{2}(-3e_1 + \sqrt{3}e_2)$. Ces deux vecteurs forment la base d'un système de racines de type G_2 . Les racines positives sont $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + 2\alpha_1, \alpha_2 + 3\alpha_1, 2\alpha_2 + 3\alpha_1\}$.

Exercices 5.43. (i) Montrer que dans un système de racines de type A_n , D_n ou E_n toutes les racines ont même longueur. Montrer que dans un système de racines de type B_n , C_n , F_4 ou G_2 il y a deux longueurs possibles pour les racines. Montrer que dans un système de racines de type B_n les racines longues forment un système de racines de type D_n (en considérant que $D_2 = A_1 \times A_1$). Étudier de façon analogue les racines longues dans les systèmes de racines de type C_n , F_4 et G_2 . Répondre à la même question pour les racines courtes.

- (ii) Quel est le type du système des coracines pour chacun des systèmes irréductibles ?

6. CLASSIFICATION DES ALGÈBRES DE LIE SEMI-SIMPLES COMPLEXES, AUTOMORPHISMES

6.1. Représentations de $\mathfrak{sl}_2$. La proposition 4.24 montre qu'une algèbre de Lie L semi-simple contient des sous-algèbres isomorphes à $\mathfrak{sl}_2$, ce qui fait de L un $\mathfrak{sl}_2$ -module. La théorie des représentations de $\mathfrak{sl}_2$ va nous permettre d'étudier la structure des algèbres de Lie semi-simples. On suppose dans cette section le corps de base k de caractéristique 0 et il sera supposé algébriquement clos à partir de 6.7. On considère l'anneau de polynômes $k[X, Y]$ et on note ∂_X et ∂_Y les dérivations par rapport à X et à Y respectivement. On note A_2 la sous-algèbre de $\text{End}(k[X, Y])$ engendrée par $X, Y, \partial_X, \partial_Y$ où X (resp. Y) dans $\text{End}(k[X, Y])$ désigne la multiplication par X (resp. par Y).

Remarque 6.1. L'algèbre A_2 s'appelle l'**algèbre de Weyl** de rang 2. On peut évidemment faire la même construction avec n variables et obtenir l'algèbre de Weyl A_n de rang n .

- Exercice 6.2.*
- (i) Montrer que l'ensemble des opérateurs différentiels de degré 1 en les ∂_{X_i} est un $k[X_1, \dots, X_n]$ -module libre de base $(\partial_{X_1}, \dots, \partial_{X_n})$.
 - (ii) Montrer que si on appelle **dérivation** de $k[X_1, \dots, X_n]$ une application linéaire $D : k[X_1, \dots, X_n] \rightarrow k[X_1, \dots, X_n]$ telle que $D(PQ) = D(P)Q + PD(Q)$, alors le module libre de la question précédente est exactement l'ensemble de toutes les dérivations de $k[X_1, \dots, X_n]$.
 - (iii) Plus généralement on appelle **dérivation** d'un espace vectoriel A muni d'une application bilinéaire $\varphi : A \times A \rightarrow A$ (par exemple une algèbre associative ou une algèbre de Lie) une application linéaire $D : A \rightarrow A$ qui vérifie $D(\varphi(x, y)) = \varphi(x, D(y)) + \varphi(y, D(x))$. Montrer que si L est une algèbre de Lie, pour tout $x \in L$, $\text{ad}(x)$ est une dérivation de L . Montrer que de même si A est une algèbre associative alors pour tout $x \in A$, $\text{ad}(x)$ est une dérivation de A .

Lemme 6.3. *Les relations suivantes sont vérifiées dans A_2 :*

- (i) $[\partial_X, \partial_Y] = [X, Y] = [\partial_X, Y] = [\partial_Y, X] = 0$.
- (ii) $[\partial_X, X] = [\partial_Y, Y] = 1$

Proposition 6.4. *L'application $\mathfrak{sl}_2(k) \rightarrow A_2$ qui envoie E, F, H respectivement sur $Y\partial_X, X\partial_Y$ et $Y\partial_Y - X\partial_X$ définit une représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2$.*

Démonstration. Il faut vérifier les trois relations

$$\begin{aligned} [Y\partial_X, X\partial_Y] &= Y\partial_Y - X\partial_X, \\ [Y\partial_Y - X\partial_X, Y\partial_X] &= 2Y\partial_X, \\ [Y\partial_Y - X\partial_X, X\partial_Y] &= -2X\partial_Y. \end{aligned}$$

Utilisons 6.2(iii). On obtient

$$\begin{aligned} [Y\partial_X, X\partial_Y] &= [Y\partial_X, X]\partial_Y + X[Y\partial_X, \partial_Y] = \\ &= Y[\partial_X, X]\partial_Y + [Y, X]\partial_X\partial_Y + [X, Y]\partial_X\partial_Y + X[Y, \partial_Y]\partial_X. \end{aligned}$$

Par le lemme 6.3 cette dernière expression vaut $Y\partial_Y - X\partial_X$, d'où la première relation. Les autres se vérifient de façon analogue. $\square$

Notons $k[X, Y]_n$ la composante de $k[X, Y]$ formée des polynômes homogènes de degré total n . Les actions de E , F et H conservent le degré total, donc chaque $k[X, Y]_n$ est un sous- $\mathfrak{sl}_2(k)$ -module de $k[X, Y]$.

Proposition 6.5. *Le $\mathfrak{sl}_2(k)$ -module $k[X, Y]_n$ est simple. Quand n varie ces modules sont deux à deux non isomorphes.*

Rappelons qu'un module simple est un module non nul qui n'a pas de sous-module autre que lui-même et $\{0\}$.

Démonstration. Le monôme $X^i Y^{n-i}$ est un vecteur propre de H pour la valeur propre $n - 2i$ car $(Y\partial_Y - X\partial_X)(X^i Y^{n-i}) = (n - i)X^i Y^{n-i} - iX^i Y^{n-i}$. Comme les $X^i Y^{n-i}$ forment une base de $k[X, Y]_n$ on a ainsi toutes les valeurs propres de H , qui sont donc toutes dans k . Si V est un sous-module non nul de $k[X, Y]_n$. Il est stable par H et comme toutes les valeurs propres de H sont dans k , le sous-espace V doit contenir au moins un vecteur propre de H , donc un des monômes $X^i Y^{n-i}$. Or par l'action itérée de E , ce monôme donne à des constantes près tous les monômes $X^j Y^{n-j}$ avec $j < i$ et par l'action de F il donne tous les monômes $X^j Y^{n-j}$ avec $j > i$. On a donc $V = k[X, Y]_n$.

Ces modules étant de dimensions toutes différentes, ils sont deux à deux non isomorphes. $\square$

Notation 6.6. Par abus de notation nous désignerons dans la suite les poids de la sous-algèbre de Cartan kH de $\mathfrak{sl}_2$ par leur valeur sur H .

Avec cette notation, les poids de $\mathfrak{sl}_2$ dans $k[X, Y]_n$ sont les entiers $-n, -n + 2, -n + 4, \dots, n - 2, n$.

Dans la suite de cette section le corps est de plus supposé algébriquement clos.

Théorème 6.7. *Tout $\mathfrak{sl}_2$ -module simple de dimension finie est isomorphe à un des modules $k[X, Y]_n$ (pour un unique n).*

Démonstration. Soit V un $\mathfrak{sl}_2$ -module simple de dimension finie. Par 4.11 on a $V = \bigoplus_{\lambda} V_{\lambda}$ où λ parcourt les poids de l'algèbre commutative kH . Par 4.10 chaque V_{λ} contient un vecteur propre pour H . Si v est un vecteur propre de H pour λ , alors $H(E.v) = EH.v + [H, E].v = \lambda E.v + 2E.v = (\lambda + 2)Ev$, et de même $H(Fv) = (\lambda - 2)Fv$. Donc si $E^i V_{\lambda} \neq 0$ (resp. $F^i V_{\lambda} \neq 0$), $\lambda + 2i$ (resp. $\lambda - 2i$) est un poids. Comme la dimension est finie, il n'y a qu'un nombre fini de poids. Fixons un poids λ tel que $V_{\lambda+2} = 0$ et soit $v \in V_{\lambda}$ un vecteur propre de H . On pose $v_i = F^i v$; c'est un vecteur propre de H pour la valeur propre $\lambda - 2i$. Les v_i non nuls sont indépendants puisque ce sont des vecteurs propres de H pour des valeurs propres distinctes. Le sous-espace engendré par les v_i est stable par F et H . Il est aussi stable par E car

Lemme 6.8. $Ev_i = i(\lambda - i + 1)v_{i-1}$.

Preuve du lemme. $Ev_i = EFv_{i-1} = FEv_{i-1} + [E, F]v_{i-1} = FEv_{i-1} + Hv_{i-1} = (i - 1)(\lambda - i + 2)v_{i-1} + (\lambda - 2(i - 1))v_{i-1} = i(\lambda - i + 1)v_{i-1}$, l'avant-dernière égalité par récurrence. $\square$

Soit m le plus grand entier tel que $v_m \neq 0$; le sous-espace de base $(v_0, v_1, \dots, v_m)$ est donc un sous- $\mathfrak{sl}_2$ -module non nul de V donc est égal à V car V est un module simple. De plus le lemme appliqué avec $i = m + 1$ donne $0 = (m + 1)(\lambda - m)$, ce qui prouve que $\lambda = m$ est entier positif. On a donc $V = \bigoplus_{i=-m}^{i=m} V_{m-2i}$, chaque

V_{m-2i} est de dimension 1, et l'action de E , H et F sur les v_i montre que ce module est isomorphe à $k[X, Y]_m$, l'isomorphisme envoyant v_i sur $m(m-1)\dots(m-i+1)X^iY^{m-i}$. $\square$

Corollaire 6.9. (i) *Les poids d'un $\mathfrak{sl}_2$ -module simple de dimension finie ont tous même parité et le sous-espace de poids 0 ou 1, suivant la parité, d'un tel module est toujours de dimension 1.*

(ii) *Soit V un $\mathfrak{sl}_2$ -module de dimension finie non nul; notons $V_{0,1}$ la somme directe du sous-espace de poids 0 et du sous-espace de poids 1 de V ; alors $V_{0,1}$ est non nul et V est simple si et seulement si $V_{0,1}$ est de dimension 1.*

Démonstration. La propriété (i) se déduit de la description des $\mathfrak{sl}_2$ modules simples de dimension finie. Comme tout module de dimension finie contient un module simple on obtient la première assertion de (ii). D'autre part, si V est un $\mathfrak{sl}_2$ -module, on peut le décomposer en somme directe d'espaces de poids pour H . Si V' est un sous-module il est aussi la somme directe d'espaces de poids. On a donc $V = \bigoplus_{\lambda} V_{\lambda}$ et $V' = \bigoplus_{\lambda} V'_{\lambda}$ où V'_{λ} est un sous-espace vectoriel de V_{λ} . Donc $V/V' = \bigoplus_{\lambda} V_{\lambda}/V'_{\lambda}$ et V_{λ}/V'_{λ} est de poids λ pour H . Si l'espace de poids 0 ou 1 est de dimension 1 il est nécessairement dans V' , donc il n'y en a pas dans le quotient, qui est donc nul d'après la première assertion. $\square$

6.2. Relations de Serre, théorèmes d'existence, d'unicité et d'isomorphisme. Il s'agit de trouver un système de générateurs et de relations pour toute algèbre de Lie semi-simple complexe, le but étant de montrer qu'il existe telle algèbre de Lie, unique à isomorphisme près, pour chaque système de racines. Soit L une algèbre de Lie semi-simple complexe, H une sous-algèbre de Cartan, Φ le système de racines et Π une base de Φ . On sait que pour toute racine α on peut trouver un triplet d'éléments non nuls $(e_{\alpha}, f_{\alpha}, h_{\alpha}) \in L_{\alpha} \times L_{-\alpha} \times H$ tels que

- $[e_{\alpha}, f_{\alpha}] = h_{\alpha}$,
- $[h_{\alpha}, e_{\alpha}] = 2e_{\alpha}$
- $[h_{\alpha}, f_{\alpha}] = -2f_{\alpha}$

La sous-algèbre de base $(e_{\alpha}, f_{\alpha}, h_{\alpha})$ est isomorphe à $\mathfrak{sl}_2$; nous la noterons $\mathfrak{sl}_{\alpha}$. On dira que $(e_{\alpha}, f_{\alpha}, h_{\alpha})$ est un **$\mathfrak{sl}_2$ -triplet**.

Proposition 6.10. *Si α , β et $\alpha + \beta$ sont des racines, on a $[L_{\alpha}, L_{\beta}] = L_{\alpha+\beta}$.*

Démonstration. Rappelons que l'on sait que $[L_{\alpha}, L_{\beta}] \subset L_{\alpha+\beta}$. Considérons le sous-espace $V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} L_{\beta+n\alpha}$. Comme $\beta \neq \pm\alpha$, chaque terme de la somme directe est de dimension 0 ou 1. L'espace V est stable par les actions adjointes de e_{α} , f_{α} et h_{α} . C'est donc un $\mathfrak{sl}_{\alpha}$ -module. Le poids de h_{α} sur $L_{\beta+n\alpha}$ est $\beta(h_{\alpha}) + 2n$. Les espaces de poids pour h_{α} dans V sont donc tous de dimension 1, ce qui montre que V est simple par 6.9(ii). Donc V est isomorphe à $\mathbb{C}[X, Y]_{\beta(h_{\alpha})+2m}$ pour un certain m . En particulier comme $\alpha + \beta$ est une racine, l'action de $\mathfrak{sl}_{\alpha}$ sur $V \simeq \mathbb{C}[X, Y]_{\beta(h_{\alpha})+2m}$ montre que $[e_{\alpha}, L_{\beta}] = L_{\alpha+\beta}$. $\square$

Corollaire 6.11. *L'algèbre de Lie L est engendrée par les e_{α} et les f_{α} pour $\alpha \in \Pi$.*

Démonstration. On sait que les h_{α} forment une base de H et par définition $[e_{\alpha}, f_{\alpha}] = h_{\alpha}$. D'autre part pour toute racine non simple positive β il existe une racine simple

α telle que $\beta - \alpha$ soit une racine. Par récurrence sur l'ordre, en utilisant la proposition précédente on voit que les e_α pour $\alpha \in \Pi$ engendrent la sous-algèbre $\oplus_{\beta \in \Phi^+} L_\beta$. De même les f_α pour $\alpha \in \Pi$ engendrent la sous-algèbre $\oplus_{\beta \in \Phi^-} L_\beta$. $\square$

Proposition 6.12 (Relations de Serre). *Soient α et β deux racines simples distinctes. On a*

- (i) $\text{ad}(e_\alpha)^{-\beta(h_\alpha)+1}(L_\beta) = 0$.
- (ii) $\text{ad}(f_\alpha)^{-\beta(h_\alpha)+1}(L_{-\beta}) = 0$.

Démonstration. Le sous-espace $\text{ad}(e_\alpha)^{-\beta(h_\alpha)+1}(L_\beta)$ est de poids $\beta - \beta(h_\alpha)\alpha + \alpha$ pour H . Or $\beta - \beta(h_\alpha)\alpha + \alpha = s_\alpha(\beta - \alpha)$. Comme α et β sont des racines simples, $\beta - \alpha$ n'est pas une racine, donc $s_\alpha(\beta - \alpha)$ n'est pas non plus une racine. Donc il n'y a pas de sous-espace correspondant au poids $\beta - \beta(h_\alpha)\alpha + \alpha$ dans L , d'où (i). La relation (ii) se démontre de la même manière. $\square$

Théorème 6.13 (Théorème d'unicité et d'existence). (i) *Une algèbre de Lie semi-simple complexe de système de racines Φ de base Π , de matrice de Cartan $(C_{\alpha,\beta})$ est engendrée par les $\{e_\alpha \mid \alpha \in \Pi\} \cup \{f_\alpha \mid \alpha \in \Pi\} \cup \{h_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$ avec comme seules relations*

- $[h_\alpha, h_\beta] = 0$
- $[e_\alpha, f_\beta] = h_\alpha \delta_{\alpha,\beta}$
- $[h_\alpha, e_\beta] = C_{\alpha,\beta} e_\beta$
- $[h_\alpha, f_\beta] = -C_{\alpha,\beta} f_\beta$
- $\text{ad}(e_\alpha)^{-C_{\alpha,\beta}+1}(e_\beta) = 0$.
- $\text{ad}(f_\alpha)^{-C_{\alpha,\beta}+1}(f_\beta) = 0$.

- (ii) *Pour toute matrice C vérifiant les conditions (i) à (iii) de 5.33 il existe une algèbre de Lie semi-simple complexe ayant C comme matrice de Cartan.*

Une conséquence de ce théorème est que les algèbres de Lie simples complexes sont en bijection avec les diagrammes de Dynkin de la liste 5.36. Nous ne démontrons pas ce théorème. Le lecteur peut se reporter à [S2, Chapitre 6], [H, §18] ou [Ca, Chapitre 7]. On a déjà vu que l'algèbre de Lie simple de type A_n est $\mathfrak{sl}_n$. On peut montrer que les algèbres de Lie simples de type respectifs B_n , C_n et D_n sont les algèbres de Lie des groupes de Lie SO_{2n+1} , Sp_{2n} et SO_{2n} (voir section 1).

Corollaire 6.14. *Soient L et L' deux algèbres de Lie semi-simples complexes. Fixons des sous-algèbres de Cartan respectives H et H' et notons Φ et Φ' les systèmes de racines correspondants. Supposons qu'il existe un isomorphisme φ de Φ sur Φ' ; notons encore φ l'isomorphisme induit de H sur H' . Soit Π une base de Φ et $\Pi' = \varphi(\Pi)$. Choisissons des éléments non nuls $e_\alpha \in L_\alpha$ pour tout $\alpha \in \Pi$ et des éléments non nuls $e_{\alpha'} \in L_{\alpha'}$ pour tout $\alpha' \in \Pi'$. Alors il existe un unique isomorphisme $f : L \simeq L'$ tel que $f(e_\alpha) = e_{\varphi(\alpha)}$ pour tout $\alpha \in \Pi$ et f coïncide avec φ sur H .*

Les algèbres étant semi-simples, les sous-algèbres de Cartan sont engendrées par les coracines donc un isomorphisme de systèmes de racines induit bien un isomorphisme sur les sous-algèbres de Cartan.

Démonstration. Les h_α étant donnés, il existe pour tout $\alpha \in \Pi$ un unique $f_\alpha \in L_{-\alpha}$ tel que $[e_\alpha, f_\alpha] = h_\alpha$, et de même dans L' . Alors les e_α et les f_α engendrent L par 6.11, d'où l'unicité.

Les systèmes de racines étant isomorphes, les matrices de Cartan sont égales, donc les relations de 6.11 sont les mêmes dans les deux algèbres. Comme ces relations constituent une présentation de L et de L' il existe un morphisme comme annoncé et c'est un isomorphisme car le même raisonnement en échangeant les rôles de L et L' fournit un morphisme inverse. $\square$

Application : L et H étant données, pour tout automorphisme π du diagramme de Dynkin et choix des e_α pour α simple, il existe un automorphisme de l'algèbre de Lie qui envoie e_α sur $e_{\pi(\alpha)}$. On voit sur la liste des diagrammes de Dynkin irréductibles que seuls les diagrammes de type A_n , D_n et E_6 ont des automorphismes non triviaux, qui sont d'ordre 2 sauf dans le cas D_4 où le diagramme a des automorphismes d'ordre 3.

Autre application : Partons de l'automorphisme de Φ qui envoie α sur $-\alpha$ pour toute racine. Cet automorphisme agit par -1 sur H . L'image de Π est $-\Pi$. Choisissons $-f_\alpha$ comme $e_{-\alpha}$. Donc il existe un automorphisme qui envoie e_α sur $-f_\alpha$ pour tout α simple. Cet automorphisme est une involution car il doit envoyer f_α sur $-e_\alpha$. Dans le cas de $\mathfrak{sl}_n$ cet automorphisme est $A \mapsto -^t A$. (vérifier que ceci est bien un automorphisme d'algèbres de Lie).

7. REPRÉSENTATIONS DES ALGÈBRES DE LIE SEMI-SIMPLES

7.1. Modules de plus haut poids, modules de Verma. Nous allons étudier plus en détail les représentations de dimension finie des algèbres de Lie semi-simples complexes. On fixe une sous-algèbre de Cartan H d'une algèbre de Lie semi-simple L et on choisit un ordre sur le système de racines Φ . On note Π la base correspondante de Φ . On choisit aussi un $\mathfrak{sl}_2$ -triplet $(e_\alpha, f_\alpha, h_\alpha)$ pour chaque racine α . On sait déjà par 4.11 que si V est un L -module de dimension finie on a $V = \bigoplus_\lambda V_\lambda$ où λ parcourt les poids de H dans V . Soit λ un poids de H dans V . On dit que $v \in V - \{0\}$ est un **vecteur primitif de poids λ** si $h.v = \lambda(h)v$ pour tout $h \in H$ et si $L_\alpha(v) = 0$ pour tout $\alpha \in \Phi^+$ ou, ce qui revient au même, pour tout $\alpha \in \Pi$. Comme l'ensemble des poids de H dans V est fini il existe dans V des poids maximaux. Comme $L_\alpha(V_\lambda) \subset V_{\lambda+\alpha}$ pour toute racine α , si λ est un poids maximal on a $L_\alpha(V_\lambda) = \{0\}$ pour tout $\alpha \in \Phi^+$. Donc, par 4.10 il existe des vecteurs primitifs dans tout L -module de dimension finie (par contre il existe des modules de dimension infinie qui n'ont pas d'élément primitif).

Proposition 7.1. *Si v est un vecteur primitif de poids λ dans un L -module V (pas nécessairement de dimension finie) alors*

- (i) *Le L -sous-module E engendré par v est un module indécomposable.*
- (ii) *Le L -module E est engendré linéairement par les $f_{\alpha_1}^{m_1} \circ f_{\alpha_2}^{m_2} \circ \dots \circ f_{\alpha_r}^{m_r}(v)$, où $\Phi^+ = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ et $m_i \in \mathbb{N}$ pour tout i .*
- (iii) *On a $E = \bigoplus_\mu E_\mu$ où la somme porte sur les poids de H dans E .*
- (iv) *Les poids de H dans E sont tous de la forme $\lambda - \sum_{\alpha \in \Pi} n_\alpha \alpha$ où les coefficients n_α sont entiers positifs ou nuls et $\dim(E_\lambda) = 1$.*
- (v) *Pour tout poids μ de H on a $E_\mu = \{x \in E \mid h.x = \mu(h)x \text{ pour tout } h \in H\}$ et la dimension de E_μ est finie.*

Un module est dit indécomposable s'il n'est pas la somme directe de deux sous-modules non nuls.

Démonstration. Décomposons l'algèbre $L = L^- \oplus H \oplus L^+$ où L^+ (resp. L^-) est la somme des L_α pour α positif (resp. négatif). Par le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt, l'algèbre enveloppante $U(L)$ de L est linéairement engendrée par les éléments $f_{\alpha_1}^{m_1} f_{\alpha_2}^{m_2} \dots f_{\alpha_r}^{m_r} h e$ où h parcourt l'algèbre enveloppante de H et e l'algèbre enveloppante de L^+ . Comme $L^+v = 0$ et $Hv = kv$, on en déduit que le module E est linéairement engendré par les $f_{\alpha_1}^{m_1} f_{\alpha_2}^{m_2} \dots f_{\alpha_r}^{m_r} v$, ce qui est l'assertion (ii). On en déduit aussi (iii) et (iv) car $f_{\alpha_1}^{m_1} \circ f_{\alpha_2}^{m_2} \circ \dots \circ f_{\alpha_r}^{m_r}(v)$ est un vecteur de poids $\lambda - \sum_i m_i \alpha_i$ et chaque α_i est une somme de racines simples; de plus $\lambda - \sum_i m_i \alpha_i$ n'est égal à λ que si tous les m_i sont nuls donc E_λ ne contient que les vecteurs colinéaires à v . On a (v) car $f_{\alpha_1}^{m_1} \circ f_{\alpha_2}^{m_2} \circ \dots \circ f_{\alpha_r}^{m_r}(v)$ est un vecteur propre pour tous les éléments de H . La dimension de E_μ est finie car E_μ est engendré par les $f_{\alpha_1}^{m_1} \circ f_{\alpha_2}^{m_2} \circ \dots \circ f_{\alpha_r}^{m_r}(v)$ tels que $\mu = \lambda - \sum_{i=1}^r m_i \alpha_i$ qui sont en nombre fini.

Il reste à prouver (i). Si E est la somme directe de deux sous-modules E_1 et E_2 alors $E_\lambda = (E_1)_\lambda \oplus (E_2)_\lambda$, et comme $\dim E_\lambda = 1$ on a par exemple $E_\lambda \subset E_1$. Or E_λ engendre E par définition. Donc $E = E_1$. $\square$

Définition 7.2. *Un module (indécomposable) engendré par un vecteur primitif de poids λ est appelé module de plus haut poids λ .*

Pour tout poids λ de H , on peut construire un L -module de plus haut poids λ de la façon suivante : on considère le quotient de l'algèbre enveloppante $U(L)$ par l'idéal à gauche engendré par L^+ et les éléments $h - \lambda(h)$ pour $h \in H$. C'est un L -module. Soit v_λ l'image de $1 \in U(L)$ dans ce quotient. C'est par construction un vecteur primitif de poids λ .

Définition 7.3. *Le module construit ci-dessus s'appelle le module de Verma de poids λ . Nous le noterons $M(\lambda)$.*

Par construction tout L -module de plus haut poids λ est un quotient de $M(\lambda)$.

- Remarques 7.4.*
- (i) Le module $M(\lambda)$ n'est pas de dimension finie. Plus précisément, on a $M(\lambda) = U(L^-).v_\lambda$ et par le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt $M(\lambda)$ a donc une base formée des $f_{\alpha_1}^{m_1} f_{\alpha_2}^{m_2} \dots f_{\alpha_r}^{m_r}(v_\lambda)$ comme dans 7.1(ii). Remarquons aussi que, si on note B la sous-algèbre de Lie $H \oplus L^+$, on peut voir $M(\lambda)$ comme le produit tensoriel $U(L) \otimes_{U(B)} \mathbb{C}_\lambda$, où $\mathbb{C}_\lambda$ est le B -module de dimension 1 où L^+ agit par 0 et H agit par λ .
 - (ii) La preuve du théorème 6.7 montre que si un $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ -module V de plus haut poids λ est de dimension finie, alors λ est un entier positif.

Nous pouvons maintenant décrire tous les L -module simples ayant un élément primitif. C'est l'objet du théorème suivant.

- Théorème 7.5.**
- (i) *Si un L -module simple V contient un élément primitif, cet élément est unique, à un scalaire près. Le poids de cet élément sera appelé plus haut poids de V .*
 - (ii) *Deux L -modules simples possédant des éléments primitifs sont isomorphes si et seulement si ils ont le même plus haut poids.*
 - (iii) *Pour tout $\lambda \in H^*$ il existe un (unique à isomorphisme près) L -module simple de plus haut poids λ .*

Les assertions (i) et (ii) de ce théorème s'appliquent en particulier aux modules simples de dimension finie puisqu'ils possèdent toujours des éléments primitifs.

Démonstration. Soit v un vecteur primitif de poids λ . Le sous-module engendré par v doit être égal à V tout entier, puisque V est simple. La proposition 7.1 montre que si v' est un élément primitif de poids λ' alors $\lambda' - \lambda$ et $\lambda - \lambda'$ sont tous deux sommes de racines positives ce qui n'est possible que si $\lambda = \lambda'$. On sait aussi par 7.1 que V_λ est de dimension 1, d'où l'assertion (i).

Montrons (ii). Soient V_1 et V_2 deux L -modules simples, et v_1 et v_2 des éléments primitifs respectifs de V_1 et V_2 de même poids λ . Posons $V = V_1 \oplus V_2$. C'est un L -module dont le vecteur $v = v_1 + v_2$ est primitif de poids λ . Soit E le sous-module engendré par v . Considérons p_1 et p_2 , les restrictions à E des deux projections de V dans V_1 et V_2 . Les images de p_1 et p_2 sont des sous-modules et ne sont pas nulles car $p_i(v) = v_i$; donc la simplicité de V_1 et V_2 impliquent que ces projections sont surjectives. D'autre part le noyau $E \cap V_2$ de p_1 est un sous-module de V_2 qui ne contient pas v_2 puisque les vecteurs primitifs de poids λ de E sont tous proportionnels à $v_1 + v_2$. Ce noyau est donc nul et de même pour le noyau de p_2 . Donc p_1 et p_2 sont des isomorphismes, d'où le résultat.

Soit $M(\lambda)^-$ la somme des sous-modules stricts du module de Verma $M(\lambda)$. Les poids d'un sous-module strict de $M(\lambda)$ sont tous différents de λ puisque les vecteurs de poids λ sont tous colinéaires et engendrent $M(\lambda)$ comme L -module. On a donc $M(\lambda)^- \subset \bigoplus_{\mu \neq \lambda} M(\lambda)_\mu \neq M(\lambda)$. Par construction le quotient $M(\lambda)/M(\lambda)^-$ est simple de plus haut poids λ d'où (iii). $\square$

Remarquons que la preuve de (iii) montre que $M(\lambda)$ possède un unique sous-module maximal, donc aussi un unique quotient simple.

Notation 7.6. Le L -module simple de poids λ sera noté $S(\lambda)$.

Nous aurons besoin aussi du résultat suivant sur les $\mathfrak{sl}_2$ -modules de dimension finie :

Proposition 7.7. *Si V est un $\mathfrak{sl}_2$ -module de dimension finie et si $v \in V$ est un vecteur propre de poids $m \in \mathbb{Z}$ alors $F^m v \neq 0$ (resp. $E^{-m} v \neq 0$) si $m > 0$ (resp. $m < 0$).*

Démonstration. Raisonnons par récurrence sur la dimension de V . Remarquons que la description des $\mathfrak{sl}_2$ -modules simples donnée dans 6.5 et 6.7 montre que le résultat est vrai pour un module simple. C'est le départ de la récurrence. Soit V_1 un sous-module maximal de V . Le quotient V/V_1 est simple donc isomorphe à $k[X, Y]_n$ pour un certain n . Soit v est un vecteur comme dans l'énoncé, si $v \in V_1$, on obtient le résultat par récurrence. Sinon son image dans le quotient est non nulle, et on obtient le résultat car $F^m v$ (resp. $E^{-m} v$) a une image non nulle dans V/V_1 donc est non nul. $\square$

Théorème 7.8. *Un module simple de plus haut poids λ est de dimension finie si et seulement si $\lambda(h_\alpha) \in \mathbb{N}$ pour toute racine simple $\alpha \in \Pi$.*

Démonstration. Si V est un module de dimension finie de plus haut poids λ et v un vecteur primitif de poids λ , alors v engendre un $\mathfrak{sl}_\alpha$ -module de plus haut poids $\lambda(h_\alpha)$, de dimension finie pour toute racine $\alpha \in \Phi^+$, donc, par 7.4(ii) on a bien $\lambda(h_\alpha) \in \mathbb{N}$ pour toute racine $\alpha \in \Phi^+$.

Réciproquement, soit v un vecteur de plus haut poids λ d'un module simple V tel que $\lambda(h_\alpha)$ soit entier positif pour tout $\alpha \in \Pi$. Soit α une racine simple ; posons $v_\alpha = f_\alpha^{\lambda(h_\alpha)+1}.v$. Le lemme 6.8, qui est applicable à tout vecteur primitif d'un $\mathfrak{sl}_2$ -module, montre que $e_\alpha v_\alpha = 0$. D'autre part pour β racine simple différente de α , comme f_α et e_β commutent on a $e_\beta v_\alpha = f_\alpha^{\lambda(h_\alpha)+1} e_\beta v = 0$, puisque v est primitif. Si v_α est non nul, c'est donc aussi un vecteur primitif. Mais son poids est $\lambda - \lambda(h_\alpha)\alpha$ ce qui est en contradiction avec l'unicité de l'élément primitif de V énoncée dans 7.5(i). Donc v_α est nul et le sous espace vectoriel engendré par les $f_\alpha^i v$, pour $i = 0, \dots, \lambda(h_\alpha)$, est un $\mathfrak{sl}_\alpha$ -module de dimension finie d'après les formules de 6.8.

Soit V_1 la somme de tous les sous $\mathfrak{sl}_\alpha$ -modules de dimension finie de V . D'après ce qui précède V_1 n'est pas nul. Remarquons que si V' est un sous $\mathfrak{sl}_\alpha$ -module de V alors $\sum_{x \in L} x.V'$ est un $\mathfrak{sl}_\alpha$ -module. De plus on obtient la même somme en faisant parcourir à x une base de L . Si V' est de dimension finie on a donc $\sum_{x \in L} x.V' \subset V_1$. Ceci montre que V_1 est un L -module, donc $V_1 = V$ puisque V est un module simple. Donc V est somme de $\mathfrak{sl}_\alpha$ -modules de dimension finie, ce qui signifie que tout élément de V est dans un $\mathfrak{sl}_\alpha$ -modules de dimension finie. Nous allons montrer que l'ensemble des poids de V est stable par s_α . Soit $x \in V$ un vecteur de poids μ . On sait par 7.1(iv) que $\mu(h_\alpha)$ est un entier m . Posons $y = f_\alpha^m x$ si $m > 0$, resp. $y = e_\alpha^{-m} x$ si $m < 0$. La proposition 7.7, applicable puisque y est dans un $\mathfrak{sl}_\alpha$ -module de dimension finie montre que $y \neq 0$. Or le poids de y est $\mu - m\alpha = \mu - \mu(h_\alpha)\alpha = s_\alpha(\mu)$, d'où l'assertion.

En utilisant la propriété précédente nous montrons que l'ensemble des poids de V est fini. Comme l'ensemble de ces poids est stable par toutes les réflexions simples, il est stable par le groupe de Weyl donc par l'élément w_0 qui envoie Π sur $-\Pi$ (voir exercice 5.31). Si μ est un poids de V on a $\mu = \lambda - \sum_{\alpha \in \Pi} n_\alpha \alpha$, où les n_α sont des entiers positifs par 7.1(iv). On a $w_0(\mu) = w_0(\lambda) + \sum_{\alpha \in \Pi} p_\alpha \alpha$ où les p_α sont égaux aux n_α à l'ordre près. Comme $w_0(\lambda)$ est un poids on a $w_0(\lambda) = \lambda - \sum_{\alpha \in \Pi} a_\alpha \alpha$ avec a_α entiers positifs. On a donc $w_0(\mu) = \lambda - \sum_{\alpha \in \Pi} (a_\alpha - p_\alpha) \alpha$, ce qui montre que pour $p_\alpha \leq a_\alpha$ pour tout $\alpha \in \Pi$. Donc les n_α sont bornés, donc en nombre fini.

Ceci prouve la réciproque cherchée puisque chaque espace V_μ est de dimension finie par 7.1(v). $\square$

Notons ω_α les éléments de la base duale de h_α , c'est-à-dire définis par $\omega_\alpha(h_\beta) = \delta_{\alpha,\beta}$ pour toutes racines simples α et β . Le théorème précédent montre que les L -modules simples de dimension finie sont en bijection avec les poids de la forme $\sum_{\alpha \in \Pi} m_\alpha \omega_\alpha$, où les m_α sont des entiers positifs ou nuls. Un tel poids sera dit **poids dominant**. Les ω_α sont appelés les **poids fondamentaux**.

Le module simple $S(0)$ de poids 0 est l'espace vectoriel de dimension 1 sur lequel L agit par 0. Un module sur lequel L agit par 0 est appelé **module trivial**, en particulier $S(0)$ est le **module simple trivial**. Remarquons que comme L est engendrée linéairement par des commutateurs (les e_α , f_α et h_α sont tous des commutateurs), on a $L = [L, L]$ et en particulier sur un module de dimension 1 l'action de L est nécessairement nulle car tout commutateur est nul en dimension 1. Donc tout L -module de dimension 1 est le module simple trivial.

Exercice 7.9. Montrer qu'en caractéristique 0 pour toute algèbre de Lie L semi-simple de dimension finie on a $L = [L, L]$ par un raisonnement direct utilisant seulement la forme de Killing (montrer que $[L, L]^\perp$ est commutative).

Exercice 7.10. Soit L une algèbre de Lie semi-simple complexe de dimension finie. Soit H une sous-algèbre de Cartan et W le groupe de Weyl.

- a) Montrer que pour tout $w \in W$ il existe un automorphisme θ de L tel que $\theta(h) = w(h)$ pour tout $h \in H$.
- b) On fixe w et θ comme dans la question précédente. Soit λ un poids dominant et $S(\lambda)$ un L -module simple de poids λ . On fait agir L sur le même espace vectoriel $S(\lambda)$ par $x \star v = \theta(x)v$. Montrer qu'on définit ainsi un L -module simple S' . Quels sont les poids de H dans S' ?
- c) Montrer que les L -modules S' et $S(\lambda)$ sont isomorphes (utiliser que l'ensemble des poids d'un module simple de dimension finie est invariant par W). En déduire que pour tout $w \in W$ et tout poids μ on a $\dim S(\lambda)_\mu = \dim S(\lambda)_{w(\mu)}$.

7.2. Élément de Casimir, complète réductibilité. Le but de cette section est de montrer que si L est une algèbre de Lie semi-simple, tout L -module de dimension finie est somme directe de modules simples. Pour cela nous allons faire intervenir le centre de l'algèbre enveloppante. Dans cette section on garde les notations précédentes, en particulier L désigne une algèbre de Lie semi-simple de dimension finie et Φ le système de racines d'une sous-algèbre de Cartan H .

Proposition 7.11. *Si z est dans le centre de $U(L)$ alors z agit par un scalaire sur le module de Verma $M(\lambda)$ pour tout poids λ .*

Démonstration. Si v est un vecteur de plus haut poids de $M(\lambda)$ on a $hzv = zhv = \lambda(h)zv$, donc zv est aussi un vecteur de poids λ (ou est nul), donc est colinéaire à v . On a donc $zv = av$ avec $a \in \mathbb{C}$. Comme $M(\lambda) = U(L)v$ et que z commute à $U(L)$, on voit que z agit par a sur tout $M(\lambda)$. $\square$

Nous allons définir un élément particulier du centre qui nous servira à décomposer les L -modules en somme de modules simples.

Pour cela commençons par quelques rappels d'algèbre linéaire (ici et dans 7.12 et 7.13 le corps de base peut être un corps commutatif k quelconque). Remarquons tout d'abord que si V et W sont deux L -modules alors leur produit tensoriel est un L -module pour l'action définie par $x : v \otimes w \mapsto x.v \otimes w + v \otimes x.w$. De même l'espace vectoriel $\text{Hom}_k(V, W)$ est un L -module pour l'action définie par $(x.\varphi)(v) = x.(\varphi(v)) - \varphi(x.v)$ pour $v \in V$. Ceci s'applique en particulier à $V^* = \text{Hom}(V, k)$, où k est le L -module où L agit par 0 (les vérifications sont laissées au lecteur).

Proposition 7.12. *Si V et W sont des espaces vectoriels de dimension finie sur un corps k commutatif quelconque et V^* le dual de V , alors $V^* \otimes_k W \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_k(V, W)$ par l'application qui envoie $f \otimes w$ sur l'endomorphisme $v \mapsto f(v)w$. Si de plus V et W sont des L -modules alors l'isomorphisme ci-dessus est un isomorphisme de L -modules.*

Démonstration. Les deux espaces ont même dimension égale à $(\dim V) \cdot (\dim W)$. Il suffit donc de montrer la surjectivité. Soit e_i une base de V et e_i^* la base duale. L'homomorphisme qui envoie e_i sur un vecteur $w \in W$ et les autres vecteurs de base sur 0 est l'image par l'application de l'énoncé de $e_i^* \otimes w$. Par combinaison linéaire de ce type d'homomorphismes on obtient tous les homomorphismes de V dans W , d'où la première assertion. La deuxième est un calcul laissé au lecteur. $\square$

On en déduit :

Corollaire 7.13. *Si V est muni d'une forme bilinéaire non dégénérée $\langle, \rangle$ on a $V \otimes_k W \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_k(V, W)$ par l'application qui envoie $v' \otimes w$ sur l'endomorphisme $v \mapsto \langle v', v \rangle w$. Si de plus V et W sont des L -modules, cet isomorphisme est un isomorphisme de L -modules si et seulement si la forme bilinéaire est L -invariante (c'est-à-dire vérifie $\langle x.v, v' \rangle + \langle v, x.v' \rangle = 0$ pour tout $x \in L$ et tous $v, v' \in V$)*

Démonstration. La première assertion est immédiate. Pour la deuxième il suffit de voir que dire la forme est invariante revient à dire que l'isomorphisme qu'elle définit de V sur V^* est un isomorphisme de L -modules. Soit $v \in V$, son image est la forme linéaire $\langle v, . \rangle$. L'action de $x \in L$ envoie cette forme sur la forme $v' \mapsto -\langle v, xv' \rangle$. La forme bilinéaire $\langle, \rangle$ est invariante si et seulement si $-\langle v, xv' \rangle = \langle xv, v' \rangle$, et $\langle xv, . \rangle$ est bien la forme linéaire correspondant à xv par $V \simeq V^*$. $\square$

Sous les hypothèses du corollaire, appliqué avec $W = V$, il existe donc un élément unique de $V \otimes V$ qui correspond à l'identité de V . Cet élément s'écrit $\sum_i e'_i \otimes e_i$ si (e_i) et (e'_i) sont deux bases duales de V pour la forme $\langle, \rangle$. En particulier l'élément $\sum_i e'_i \otimes e_i$ ne dépend pas des bases duales choisies. De plus, dans le cas où V est un L -module et où la forme bilinéaire est invariante l'isomorphisme $V \otimes V \simeq \text{Hom}_k(V, V)$ est un isomorphisme de L -modules. Comme l'identité est un élément invariant de $\text{Hom}_k(V, V)$, son image dans $V \otimes V$ est invariante, c'est-à-dire qu'on a $\sum_i x.e'_i \otimes e_i + \sum_i e'_i \otimes x.e_i = 0$ pour tout $x \in L$. Appliquons ceci en prenant $V = L$ où L est une algèbre de Lie semi-simple complexe agissant sur elle-même par l'action adjointe.

Proposition 7.14. *Soit L une algèbre de Lie semi-simple ; l'élément $c = \sum_i x'_i x_i \in U(L)$, où (x'_i) et (x_i) sont deux bases duales pour la forme de Killing de L est indépendant du choix des bases. De plus c est central dans l'algèbre enveloppante.*

Démonstration. L'élément c est l'image dans $U(L)$ par le produit $L \otimes L \rightarrow U(L)$ de l'élément $\sum_i x'_i \otimes x_i \in L \otimes L$. Par le corollaire 7.13 et les remarques qui suivent, appliqués à L comme L -module par l'action adjointe, l'élément $\sum_i x'_i \otimes x_i$ est indépendant des bases duales choisies. De plus, comme la forme de Killing est invariante, on a $\sum_i [x, x'_i] \otimes x_i + \sum_i x'_i \otimes [x, x_i] = 0$. Prenons les images des deux membres dans $U(L)$. On obtient $\sum_i (xx'_i - x'_i x)x_i + \sum_i x'_i (xx_i - x_i x) = 0$ ce qui donne $xc = cx$ pour tout $x \in L$, donc c est bien central puisqu'il commute à tout élément de L et que L engendre $U(L)$. $\square$

L'élément c s'appelle l'**élément de Casimir** de L .

Proposition 7.15. *Sur tout L -module de plus haut poids λ l'élément de Casimir agit par le scalaire $\langle \lambda, \lambda \rangle + \langle \lambda, \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha \rangle$.*

Démonstration. Soit V un L -module engendré par un vecteur primitif v_λ de poids λ . Considérons la base de L formée des e_α pour $\alpha \in \Phi^+$ et d'une base (h_i) de H et des éléments $f'_\alpha \in L_{-\alpha}$ pour $\alpha \in \Phi^+$, tels que $\langle f'_\alpha, e_\alpha \rangle = 1$ (qui existent d'après 4.15(iii)). D'après 4.15(i) la base duale est formée des éléments f'_α, e_α et d'une base (h'_i) de H duale de (h_i) . D'après 4.18, on a $[e_\alpha, f'_\alpha] = h'_\alpha$, où h'_α est l'élément de H qui correspond à α par l'isomorphisme $H \simeq H^*$, c'est-à-dire qui vérifie $\langle h'_\alpha, h \rangle = \alpha(h)$ pour tout $h \in H$. Dans la suite nous identifions H et H^* à l'aide de la forme de Killing. L'élément de Casimir s'écrit $c = \sum_{\alpha \in \Phi^+} f'_\alpha e_\alpha + \sum_i h'_i h_i + \sum_{\alpha \in \Phi^+} e_\alpha f'_\alpha$. On

a $e_\alpha v_\lambda = 0$ pour tout $\alpha \in \Phi^+$ et $e_\alpha f'_\alpha v_\lambda = f'_\alpha e_\alpha v_\lambda + h'_\alpha v_\lambda = \lambda(h'_\alpha) v_\lambda = \langle \lambda, \alpha \rangle v_\lambda$. Donc $c.v_\lambda = \sum_i \lambda(h'_i) \lambda(h_i) v_\lambda + \langle \lambda, \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha \rangle v_\lambda$. Comme (h'_i) et (h_i) sont deux bases duales de H , on a $\lambda = \sum_i \lambda(h_i) h'_i$, donc $\sum_i \lambda(h'_i) \lambda(h_i) = \langle \lambda, \lambda \rangle$. Donc c agit sur v_λ par le scalaire annoncé. Comme c est central et que $V = U(L)v_\lambda$, on obtient la proposition. $\square$

La proposition précédente s'applique en particulier aux modules $M(\lambda)$ et $S(\lambda)$. Remarquons que si λ est un poids dominant non nul, on a $\langle \lambda, \lambda \rangle + \langle \lambda, \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha \rangle > 0$, donc c agit par un scalaire strictement positif sur un module de plus haut poids $\lambda \neq 0$. En particulier c agit par un scalaire strictement positif sur tout L -module simple de dimension finie non trivial. Nous arrivons au résultat le plus important de cette section :

Théorème 7.16. *Tout L -module de dimension finie est somme directe de sous-modules simples.*

On dit aussi que tout L -module est complètement réductible.

Démonstration. Par récurrence sur la dimension il suffit de montrer que pour tout sous-module W d'un module V , il existe un sous-module supplémentaire. La démonstration se fait en plusieurs étapes. Rappelons d'abord que tout L module de dimension 1 est trivial (voir à la fin de la section précédente).

Étape 1 : Supposons W de codimension 1. Donc V/W est un L -module trivial. Par récurrence sur la dimension de V on se ramène à W simple de la façon suivante : si $W' \subsetneq W$ est un sous-module maximal propre de W , alors W/W' est simple de codimension 1 dans V/W' ; supposons qu'il a un supplémentaire W_1/W' où W_1 est un sous-module de V contenant W' ; on a $W \cap W_1 = W'$ et W_1/W' est de dimension 1; par récurrence W' a un supplémentaire W'' dans W_1 . On a $W'' \cap W = W'' \cap W \cap W_1 = W'' \cap W' = \{0\}$; donc $V = W \oplus W''$.

Supposons donc W simple. Alors l'élément de Casimir c agit par un scalaire a sur W . Si $a \neq 0$, le noyau de c est un L -module de dimension 1, car c agit par 0 sur le quotient V/W donc son noyau dans V est non nul. Ce noyau est supplémentaire de W . Si $a = 0$ alors W est le module trivial (voir remarque au-dessus de 7.16). Or si W et V/W sont des modules triviaux, tout élément de L envoie V dans W , donc la composition de deux éléments de L envoie V sur 0, en particulier tout élément de $[L, L]$ agit par 0. Comme $L = [L, L]$, le module V est lui-même trivial. Et tout supplémentaire de W est un L sous-module.

Étape 2 : W est de codimension quelconque. On se ramène à la situation de l'étape 1 en considérant le sous-espace $\mathcal{V}$ de $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$ formé des homomorphismes de V dans W dont la restriction à W est un scalaire, et le sous-espace $\mathcal{U}$ de codimension 1 de $\mathcal{V}$ formé des homomorphismes de V dans W nuls sur W . Si on fait de $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$ un L -module comme précédemment, alors $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deviennent des L sous-modules de $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$ (faites le calcul!). On peut appliquer le résultat de l'étape 1 à $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$. Soit $f \in \mathcal{V}$ tel que $\mathbb{C}f$ soit un supplémentaire de $\mathcal{U}$ on peut prendre f tel que sa restriction à W soit l'identité. Comme $\mathbb{C}f$ est un L -module de dimension 1 on a $xf = 0$ pour tout $x \in L$, c'est-à-dire $xf(v) - f(xv) = 0$ pour tout $x \in L$ et tout $v \in V$. Autrement dit f est un morphisme de L -modules de V dans W . Comme sa restriction à W est l'identité, c'est un projecteur sur W et son noyau est un supplémentaire de W qui est un L sous-module puisque f est un morphisme de L -modules. $\square$

Remarque 7.17. Le théorème de complète réductibilité montre en particulier que tout L -module indécomposable de dimension finie est simple.

8. BASE DE CHEVALLEY D'UNE ALGÈBRE DE LIE. GROUPES DE CHEVALLEY

8.1. Bases de Chevalley. Dans cette section nous allons montrer qu'on peut faire des choix de façon que les constantes de structure d'une algèbre de Lie semi-simple complexe soient entières, ce qui permet de construire des analogues sur tout corps. Rappelons d'abord certains résultats sur les produits scalaires entre racines. Si α et β sont deux racines non proportionnelles on appellera **α -chaîne passant par β** une suite de longueur maximale contenant β de racines de la forme $\beta + i\alpha$ avec $i \in \mathbb{Z}$. Nous gardons les notations des sections précédentes.

Proposition 8.1. *Si α et β sont deux racines non proportionnelles alors*

- (i) $\beta(h_\alpha) = p - q$, où la α -chaîne passant par β va de $-\rho\alpha + \beta$ à $q\alpha + \beta$ avec $p, q \geq 0$.
- (ii) Si $\alpha + \beta$ est une racine alors $\frac{\langle \alpha + \beta, \alpha + \beta \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle} = \frac{p+1}{q}$.

Démonstration. La première assertion a été vue dans 5.2. La deuxième peut se vérifier cas par cas sur les systèmes de racines de rang 2. $\square$

Lemme 8.2. *Avec les notations de la proposition précédente, on a $[f_\alpha, [e_\alpha, e_\beta]] = q(p+1)e_\beta$, où e_α et f_α sont comme dans les sections précédentes.*

Démonstration. On peut considérer le $\mathfrak{sl}_\alpha$ -module $\bigoplus_{i=-p}^{i=q} L_{\beta+i\alpha}$. C'est un module engendré par le vecteur primitif $(\text{ad } e_\alpha)^q(e_\beta)$, c'est donc un $\mathfrak{sl}_\alpha$ -module simple, par le théorème de complète réductibilité, de dimension $p+q+1$, donc de plus haut poids $p+q$. L'élément e_β peut être pris comme vecteur v_q de 6.8, et $[f_\alpha, e_\beta]$ est alors v_{q+1} . Donc par 6.8 on a $[f_\alpha, [e_\alpha, e_\beta]] = [e_\alpha, [f_\alpha, e_\beta]] - [h_\alpha, e_\beta] = (q+1)(p+q-q)e_\beta - (p-q)e_\beta = q(p+1)e_\beta$. $\square$

Proposition 8.3. *Il existe un choix de $(e_\alpha)_{\alpha \in \Phi}$ tel que*

- (i) $[e_\alpha, e_{-\alpha}] = h_\alpha$ pour tout $\alpha \in \Phi$.
- (ii) Si α, β et $\alpha+\beta$ sont des racines et si on définit $c_{\alpha,\beta}$ par $[e_\alpha, e_\beta] = c_{\alpha,\beta}e_{\alpha+\beta}$, on a $c_{-\alpha,-\beta} = -c_{\alpha,\beta}$.
- (iii) Avec les notations précédentes on a $c_{\alpha,\beta} = \pm(p+1)$ où p est comme dans 8.1(i).

Démonstration. Par le corollaire 6.14, une fois choisis des e_α et des $e_{-\alpha}$ pour $\alpha \in \Pi$, l'automorphisme du système de racines qui envoie chaque racine (et chaque coracine) sur son opposée définit un automorphisme σ de L qui échange L_α et $L_{-\alpha}$ pour tout $\alpha \in \Phi$ et envoie e_α sur $-e_{-\alpha}$ pour tout $\alpha \in \Pi$. Cet automorphisme agit par -1 sur H , puisque H est engendré par les coracines. Comme $[e_\alpha, e_{-\alpha}] \in H$, on en déduit $[e_{-\alpha}, \sigma(e_{-\alpha})] = -[\sigma(e_\alpha), \sigma(e_{-\alpha})] = -\sigma([e_\alpha, e_{-\alpha}]) = [e_\alpha, e_{-\alpha}]$, donc $\sigma(e_{-\alpha}) = -e_\alpha$. Ceci prouve que σ est une involution. Comme σ est une involution on peut choisir e_α pour toutes les racines $\alpha \in \Phi$ de façon que $e_{-\alpha} = -\sigma(e_\alpha)$. Pour chaque $\alpha \in \Phi$, on modifie e_α et $e_{-\alpha}$ en les multipliant par la même constante pour avoir (i), ce qui est possible puisque le corps est algébriquement clos. Avec les notations habituelles, avec ces choix, on a $e_{-\alpha} = f_\alpha$ pour tout $\alpha \in \Phi$.

En appliquant σ à l'égalité qui définit $c_{\alpha,\beta}$ on obtient (ii).

$$[[e_{-\alpha}, e_{-\beta}], [e_{\alpha}, e_{\beta}]] = -c_{\alpha, \beta}^2 [e_{-\alpha-\beta}, e_{\alpha+\beta}] = c_{\alpha, \beta}^2 h_{\alpha+\beta}.$$
$$[[e_{-\alpha}, e_{-\beta}], [e_{\alpha}, e_{\beta}]] = [e_{-\alpha}, [e_{-\beta}, [e_{\alpha}, e_{\beta}]]] - [e_{-\beta}, [e_{-\alpha}, [e_{\alpha}, e_{\beta}]]] = \\ - [e_{-\alpha}, [e_{-\beta}, [e_{\beta}, e_{\alpha}]]] + [e_{-\beta}, [e_{-\alpha}, [e_{\alpha}, e_{\beta}]]].$$

D'après le lemme 8.2, ceci est égal à $-q'(p'+1)[e_{-\alpha}, e_{\alpha}] + q(p+1)[e_{-\beta}, e_{\beta}] = q(p+1)h_{\beta} - q'(p'+1)h_{\alpha}$. Or $h_{\alpha+\beta} = \frac{\langle \alpha, \alpha \rangle}{\langle \alpha + \beta, \alpha + \beta \rangle} h_{\alpha} + \frac{\langle \beta, \beta \rangle}{\langle \alpha + \beta, \alpha + \beta \rangle} h_{\beta}$. Comme h_{α} et h_{β} sont linéairement indépendant on en déduit $c_{\alpha, \beta}^2 \frac{\langle \beta, \beta \rangle}{\langle \alpha + \beta, \alpha + \beta \rangle} = q(p+1)$, ce qui donne $c_{\alpha, \beta}^2 = (p+1)^2$ car $\frac{\langle \beta, \beta \rangle}{\langle \alpha + \beta, \alpha + \beta \rangle} = \frac{q}{p+1}$ par 8.1(ii). $\square$

Définition 8.4. Une base de Chevalley d'une algèbre de Lie semi-simple complexe est une base $(e_\alpha, \alpha \in \Phi) \cup (h_\alpha, \alpha \in \Pi)$ vérifiant les propriétés (i) et (ii) de 8.3 (donc aussi la propriété (iii)).

Théorème 8.5. *Les constantes de structures relatives à une base de Chevalley sont entières, plus précisément,*

- (i) Pour tout $\beta \in \Phi$ on a $[e_\beta, e_{-\beta}] = \sum_{\alpha \in \Pi} m_\alpha h_\alpha$ avec $m_\alpha \in \mathbb{Z}$.
- (ii) Pour tout $\alpha \in \Pi$ et tout $\beta \in \Phi$ on a $[h_\alpha, e_\beta] = \alpha^\vee(\beta) e_\beta$.
- (iii) Pour toutes racines α et β telles que $\alpha + \beta$ soit une racine on a $[e_\alpha, e_\beta] = \pm(p+1)e_{\alpha+\beta}$ où p est comme dans 8.1(i).

Démonstration. La première propriété vient du fait que h_β est une coracine donc s'exprime avec des coefficients entiers sur les coracines simples. La deuxième propriété est vraie par définition. La troisième propriété est 8.3(iii). $\square$

8.2. Réduction modulo p ; groupes de Chevalley. Soit L une algèbre de Lie semi-simple complexe. Si on fixe une base de Chevalley, les relations sont toutes à coefficients entiers, donc combinaisons linéaires entières de la base forment un $\mathbb{Z}$ -module stable par le crochet de Lie. On peut dire qu'on a une structure de $\mathbb{Z}$ -algèbre de Lie. Nous noterons cette algèbre $L(\mathbb{Z})$. On peut réduire modulo p ce $\mathbb{Z}$ -module et on obtient une algèbre de Lie sur le corps à p éléments. Par extension des scalaires on peut donc construire une algèbre de Lie $L(k)$ sur tout corps k de caractéristique p . Nous appellerons ces algèbres de algèbres de Chevalley. On peut montrer qu'une algèbre de Chevalley ne dépend que du type de L et du corps k , donc pas du choix de la base.

Nous allons maintenant construire un groupe associé à une algèbre de Lie et à un corps quelconque.

Proposition 8.6. *Soit L une algèbre de Lie semi-simple complexe munie d'une base de Chevalley et soit $L(\mathbb{Z})$ définie comme ci-dessus. Pour toute racine α et tout entier $m \geq 0$, l'opérateur $\frac{(\text{ad } e_\alpha)^m}{m!}$ sur L stabilise $L(\mathbb{Z})$.*

Démonstration. Calculons l'action de cet opérateur sur la base de Chevalley. On a

$$\frac{(\text{ad } e_\alpha)^m}{m!}(h_\beta) = \begin{cases} -\beta^\vee(\alpha)e_\alpha & \text{si } m = 1, \\ 0 & \text{si } m > 1 \end{cases}.$$

Si α et β sont deux racines non proportionnelles, on a

$$\frac{(\text{ad } e_\alpha)^m}{m!}(e_\beta) = \frac{(\text{ad } e_\alpha)^{m-1}}{m!}[e_\alpha, e_\beta] = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha + \beta \notin \Phi, \\ c_{\alpha, \beta} \frac{(\text{ad } e_\alpha)^{m-1}}{m!} e_{\alpha+\beta} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par récurrence on obtient donc 0 si $m > q$ où la α -chaîne passant par β se termine par $\beta + q\alpha$ et sinon $\frac{1}{m!} c_{\alpha, \beta+\alpha} c_{\alpha, \beta+2\alpha} \cdots c_{\alpha, \beta+(m-1)\alpha} e_{\beta+m\alpha}$, ce qui, par 8.5(iii), vaut

$$\pm \frac{(p+1)(p+2) \cdots (p+m)}{m!} e_{\beta+m\alpha} = \pm \binom{p+m}{m} e_{\beta+m\alpha}.$$

Enfin

$$\frac{(\text{ad } e_\alpha)^m}{m!}(e_{-\alpha}) = \frac{(\text{ad } e_\alpha)^{m-1}}{m!}(h_\alpha) = \begin{cases} h_\alpha & \text{si } m = 1 \\ -e_\alpha & \text{si } m = 2 \\ 0 & \text{si } m \geq 3. \end{cases}$$

□

On en déduit que le groupe engendré par les $\exp(a \text{ad } e_\alpha)$ avec $a \in \mathbb{Z}$ laisse $L(\mathbb{Z})$ invariant. Si on réduit modulo p on obtient un groupe d'automorphismes de $L(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. On peut aussi considérer le groupe engendré par les $\exp(X \text{ad } e_\alpha)$, où X est une indéterminée, où ces opérateurs sont vus comme agissant sur l'algèbre de Lie $L(\mathbb{Z}[X])$. Si on réduit modulo un idéal maximal contenant p on obtient un groupe d'automorphismes de $L(k)$ où k est un corps fini de caractéristique p . Tous ces groupes forment la famille des groupes de Chevalley de type adjoint (c'est-à-dire que leur centre est trivial). Cette construction sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ redonne les groupes de Lie réels ou complexes adjoints.

9. QUELQUES EXEMPLES

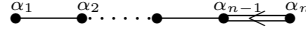
Dans cette section nous donnons les algèbres semi-simples complexes de type B_n , C_n et D_n . Nous admettrons que les algèbres construites sont semi-simples. Une démonstration simple de ce résultat peut être trouvée dans [H, 19.1]. Nous indiquons aussi une méthode pour obtenir une algèbre de Lie de type G_2 .

9.1. L'algèbre de Lie $\mathfrak{sp}_{2n}$. Prenons comme forme alternée sur un espace vectoriel complexe de dimension $2n$ la forme de matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$, où I est la matrice identité de taille n . L'algèbre de Lie $\mathfrak{sp}_{2n}$ est la sous-algèbre de $\mathfrak{gl}_{2n}$ formée des matrices M telles que ${}^t M J = -J M$. Une matrice de $\mathfrak{sp}_{2n}$ s'écrit par blocs carrés de taille n sous la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ C & -{}^t A \end{pmatrix}$, où B et C sont des matrices symétriques. Les matrices diagonales forment une sous-algèbre abélienne H . Ce sont les matrices

de la forme $h = \text{diag}(a_1, \dots, a_n, -a_1, \dots, -a_n)$. L'action adjointe de h multiplie le coefficient a_{ij} d'une matrice de $\mathfrak{sp}_{2n}$ par $a_i - a_j$ si i et j sont compris entre 1 et n , par $a_{i-n} - a_{j-n}$ si i et j sont entre $n+1$ et $2n$, par $a_i + a_{j-n}$ si $1 \leq i \leq n$ et $n+1 \leq j \leq 2n$ et par $-a_{i-n} - a_j$ si $n+1 \leq i \leq 2n$ et $1 \leq j \leq n$. Ceci montre que $N(H) = H$, donc H est une sous-algèbre de Cartan. On a montré en même temps que, si on note e_i , pour $i = 1, \dots, n$, la forme linéaire sur H qui envoie $h = \text{diag}(a_1, \dots, a_n, -a_1, \dots, -a_n)$ sur a_i , les racines sont $\pm e_i + \pm e_j$ avec $i \neq j$ et $\pm 2e_i$. Il y a n^2 racines. Les vecteurs de poids $2e_i$ (resp. $-2e_i$) sont les matrices dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient d'indices $(i, n+i)$ (resp. $(n+i, i)$). Les vecteurs de poids $e_i - e_j$ sont les matrices dont tous les coefficients sont nuls sauf les coefficients d'indices (i, j) et $(n+j, n+i)$ qui sont opposés. Les vecteurs de poids $e_i + e_j$ (resp. $-e_i - e_j$) sont les matrices dont tous les coefficients sont nuls sauf les coefficients d'indices $(i, n+j)$ et $(j, n+i)$ (resp. $(n+i, j)$ et $(n+j, i)$) qui sont égaux.

Les racines $\alpha_1 = e_1 - e_2, \alpha_2 = e_2 - e_3, \dots, \alpha_{n-1} = e_{n-1} - e_n, \alpha_n = 2e_n$ forment une base du système de racines. Les racines positives sont $e_i - e_j = \alpha_i + \dots + \alpha_{j-1}$ avec $1 \leq i < j \leq n$, $e_i + e_j = \alpha_i + \dots + \alpha_j + 2\alpha_{j+1} + \dots + 2\alpha_{n-1} + \alpha_n$ pour $1 \leq i < j \leq n$ et $2e_i = 2\alpha_i + \dots + 2\alpha_{n-1} + \alpha_n$ pour $i = 1, \dots, n$.

Donnons h_α pour chaque racine simple. Cet élément est déterminé comme le seul élément de $[L_\alpha, L_{-\alpha}]$ tel que $\alpha(h_\alpha) = 2$. Pour $i = 1, \dots, n-1$, on a $h_{\alpha_i} = \text{diag}(0, \dots, 0, 1, -1, 0, \dots, 0, -1, 1, 0, \dots, 0)$, où les coefficients non nuls sont aux places d'indices $i, i+1$ et $n+i, n+i+1$ et où $h_{\alpha_n} = \text{diag}(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, -1)$ où les coefficients non nuls sont aux places d'indices n et $2n$. On peut alors calculer la matrice de Cartan : le système de racines est de type C_n . Son diagramme est



Les poids fondamentaux, c'est à dire la base duale de la base (h_{α_i}) sont $\omega_i = e_1 + \dots + e_i$ pour $i = 1, \dots, n$ (exercice : écrivez les poids fondamentaux en termes de racines).

Considérons le module "naturel" de $\mathfrak{sp}_{2n}$ c'est à dire l'espace vectoriel de dimension $2n$ sur lequel l'algèbre de Lie agit en tant qu'algèbre de matrices. Les poids sont $e_1, \dots, e_n, -e_1, -e_2, \dots, -e_n$ et e_1 est le plus haut poids. Ce module est simple car $\mathfrak{sp}_{2n}$ agit transitivement sur les vecteurs (la première colonne d'une matrice de $\mathfrak{sp}_{2n}$ est arbitraire). On a donc un module simple de dimension finie, de plus haut poids $e_1 = \omega_1$.

9.2. L'algèbre de Lie $\mathfrak{so}_{2n}$. Considérons la forme quadratique sur un espace vectoriel complexe de dimension $2n$ donnée par la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$, où I est la matrice identité de taille n . L'algèbre de Lie $\mathfrak{so}_{2n}$ est la sous-algèbre de $\mathfrak{gl}_{2n}$ formée des matrices M telles que ${}^t M J = -J M$. Une matrice de $\mathfrak{so}_{2n}$ s'écrit par blocs carrés de taille n sous la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ C & -{}^t A \end{pmatrix}$, où B et C sont des matrices antisymétriques.

Comme pour $\mathfrak{sp}_{2n}$ les matrices diagonales $h = \text{diag}(a_1, \dots, a_n, -a_1, \dots, -a_n)$ forment une sous-algèbre de Cartan H . Le calcul des racines est analogue au cas $\mathfrak{sp}_{2n}$, sauf que, les matrices B et C étant antisymétriques les coefficients d'indices $(i, n+i)$ et $(n+i, i)$ des matrices de $\mathfrak{so}_{2n}$ sont nuls. Les racines sont donc seulement $\pm e_i \pm e_j$ avec $i \neq j$. Une base du système de racines est $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n, e_{n-1} + e_n)$. Les racines positives sont $e_i - e_j = \alpha_i + \dots + \alpha_{j-1}$ avec $i < j$ et

$e_i + e_j = \alpha_i + \dots + \alpha_{j-1} + 2\alpha_j + 2\alpha_{j+1} + \dots + 2\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} + \alpha_n$ avec $i < j$. C'est un système de racines de type D_n . Les poids fondamentaux sont $\omega_i = e_1 + \dots + e_i$ pour $i = 1, \dots, n-2$, $\omega_{n-1} = 1/2(e_1 + \dots + e_{n-1} - e_n)$ et $\omega_n = 1/2(e_1 + \dots + e_n)$. Comme pour $\mathfrak{sp}_{2n}$ le module naturel est le module simple fondamental de poids ω_1 .

9.3. L'algèbre de Lie $\mathfrak{so}_{2n+1}$. Prenons comme forme quadratique sur un espace

vectorel complexe de dimension $2n+1$ la forme de matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I \\ 0 & 1 & 0 \\ I & 0 & 0 \end{pmatrix}$, où

I est la matrice identité de taille n . L'algèbre de Lie $\mathfrak{so}_{2n+1}$ est la sous-algèbre de $\mathfrak{gl}_{2n+1}$ formée des matrices M telles que ${}^tMJ = -JM$. Une matrice de $\mathfrak{so}_{2n+1}$

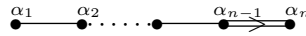
s'écrit par blocs sous la forme $\begin{pmatrix} A & v & B \\ -{}^tw & 0 & -{}^tv \\ C & w & -{}^tA \end{pmatrix}$, où B et C sont des matrices

antisymétriques de taille n , où A est une matrice carrée de taille n et v et w sont des vecteurs colonnes de taille n . Les matrices diagonales forment une sous-algèbre abélienne H . Ce sont les matrices de la forme $h = \text{diag}(a_1, \dots, a_n, 0, -a_1, \dots, -a_n)$. L'action adjointe de h multiplie le coefficient a_{ij} d'une matrice de $\mathfrak{so}_{2n+1}$ par $a_i - a_j$ si i et j sont compris entre 1 et n , par $a_{i-n-1} - a_{j-n-1}$ si i et j sont entre $n+2$ et $2n+1$, par $a_i + a_{j-n-1}$ si $1 \leq i \leq n$ et $n+2 \leq j \leq 2n+1$ et par $-a_{i-n-1} - a_j$ si $n+1 \leq i \leq 2n+1$ et $1 \leq j \leq n$. Ceci montre que $N(H) = H$, donc H est une sous-algèbre de Cartan. On a montré en même temps que si on note e_i la forme linéaire sur H qui envoie $h = \text{diag}(a_1, \dots, a_n, 0, -a_1, \dots, -a_n)$ sur a_i , les racines sont $\pm e_i + \pm e_j$ avec $i \neq j$ et $\pm e_i$. Il y a n^2 racines. Les vecteurs de poids $e_i - e_j$ sont les matrices dont tous les coefficients sont nuls sauf les coefficients d'indices (i, j) et $(n+1-j, n+1-i)$ qui sont opposés. Les vecteurs de poids $e_i + e_j$ (resp. $-e_i - e_j$) sont les matrices dont tous les coefficients sont nuls sauf les coefficients d'indices $(i, n+1-j)$ et $(j, n+1-i)$ (resp. $(n+1-i, j)$ et $(n+1-j, i)$) qui sont égaux. Les vecteurs de poids e_i (resp. $-e_i$) sont les matrices dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient d'indices $(i, n+i)$ (resp. $(n+i, i)$).

Les racines $\alpha_1 = e_1 - e_2, \alpha_2 = e_2 - e_3, \dots, \alpha_{n-1} = e_{n-1} - e_n, \alpha_n = e_n$ forment une base. Les racines positives sont $e_i - e_j = \alpha_i + \dots + \alpha_{j-1}$ avec $1 \leq i < j \leq n$, $e_i + e_j = \alpha_i + \dots + \alpha_j + 2\alpha_{j+1} + \dots + 2\alpha_{n-1} + 2\alpha_n$ pour $1 \leq i < j \leq n$ et $e_i = \alpha_i + \dots + \alpha_{n-1} + \alpha_n$ pour $i = 1, \dots, n$.

Pour $i = 1, \dots, n-1$, on a $h_{\alpha_i} = \text{diag}(0, \dots, 0, 1, -1, 0, \dots, 0, -1, 1, 0, \dots, 0)$, où les coefficients non nuls sont aux places d'indices $i, i+1$ et $n+i+1, n+i+2$ et on a $h_{\alpha_n} = \text{diag}(0, \dots, 0, 2, 0, \dots, -2)$ où les coefficients non nuls sont aux places d'indices n et $2n+1$.

Le système de racines est de type B_n . Son diagramme est



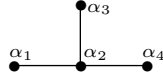
Les poids fondamentaux sont $\omega_i = e_1 + \dots + e_i$ pour $i = 1, \dots, n-1$ et $\omega_n = \frac{1}{2}(e_1 + \dots + e_n)$.

Le module "naturel" de $\mathfrak{so}_{2n}$ est un module simple de plus haut poids e_1 .

Exercice 9.1. Faire le même type de calculs pour l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_n$ (voir 4.22).

Pour une construction des autres modules simples fondamentaux et des modules simples fondamentaux pour les autres types d'algèbres de Lie simples, nous renvoyons à [Ca, Chapitre 13].

9.4. L'algèbre de Lie de type G_2 . Nous allons construire l'algèbre de Lie simple de type G_2 à partir de l'algèbre de Lie simple de type D_4 . L'algèbre de Lie L de type D_4 a un automorphisme σ d'ordre 3 qui fixe α_2 et permute les autres racines par la permutation $\alpha_1 \mapsto \alpha_3 \mapsto \alpha_4 \mapsto \alpha_1$, où le diagramme de D_4 est étiqueté



On obtient un tel isomorphisme en fixant des e_{α_i} pour $i = 1, 2, 3, 4$ et en imposant que σ fixe e_{α_2} et permute les autres par $e_{\alpha_1} \mapsto e_{\alpha_3} \mapsto e_{\alpha_4} \mapsto e_{\alpha_1}$.

Considérons la sous-algèbre L^σ des points fixes de σ . Écrivons e_i , f_i et h_i respectivement pour e_{α_i} , f_{α_i} et h_{α_i} .

Proposition 9.2. *Les éléments $e_1 + e_3 + e_4$, e_2 , $f_1 + f_3 + f_4$, f_2 , $h_1 + h_3 + h_4$, h_2 engendrent L^σ qui est une algèbre de Lie de type G_2 .*

Démonstration. Les éléments de l'énoncé sont fixes par σ . Un calcul montre qu'ils vérifient les relations de la présentation 6.13(i) de type G_2 . Ils engendrent donc un quotient de l'algèbre de Lie simple de type G_2 qui n'est pas nul donc qui est isomorphe à l'algèbre de type G_2 . Cette algèbre est incluse dans L^σ . Elle est de dimension 14. Calculons d'autre part la dimension de L^σ . On a $L = H \oplus (\oplus_{\Omega} \oplus_{\alpha \in \Omega} L_\alpha)$, où la deuxième somme porte sur les orbites Ω de σ dans Φ . Chaque somme correspondant à une orbite est stable par σ . La dimension de H^σ est 2. La dimension de L_α^σ vaut 1 si α est fixe. La dimension de $L_\alpha \oplus L_{\sigma(\alpha)} \oplus L_{\sigma^2(\alpha)}$ vaut 1 quand α n'est pas fixe. On a donc $\dim L^\sigma = 14$, donc il y a égalité et L^σ est bien de type G_2 . $\square$

TABLE DES MATIÈRES

Références	1
1. Introduction, exemples de groupes et d'algèbres de Lie	1
2. Algèbres de Lie, algèbre enveloppante, algèbres résolubles et nilpotentes	3
2.1. Morphismes, idéaux, quotients	3
2.2. Algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie	4
2.3. Algèbres résolubles et nilpotentes	4
3. Représentation adjointe, forme de Killing	6
4. Sous-algèbres de Cartan, racines	9
4.1. Sous-algèbres de Cartan	9
4.2. Représentations des algèbres de Lie nilpotentes	11
4.3. Décomposition de Cartan	12
4.4. L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_n$	14
5. Système de racines d'une algèbre de Lie semi-simple, groupe de Weyl, classification	15
5.1. Propriétés des racines d'une algèbre de Lie semi-simple	15
5.2. Systèmes de racines, Groupe de Weyl	17
5.3. Classification des systèmes de racines	22
6. Classification des algèbres de Lie semi-simples complexes, automorphismes	27
6.1. Représentations de $\mathfrak{sl}_2$	27
6.2. Relations de Serre, théorèmes d'existence, d'unicité et d'isomorphisme	29

7. Représentations des algèbres de Lie semi-simples	31
7.1. Modules de plus haut poids, modules de Verma	31
7.2. Élément de Casimir, complète réductibilité	35
8. Base de Chevalley d'une algèbre de Lie. Groupes de Chevalley	38
8.1. Bases de Chevalley	38
8.2. Réduction modulo p ; groupes de Chevalley	39
9. Quelques exemples	40
9.1. L'algèbre de Lie $\mathfrak{sp}_{2n}$	40
9.2. L'algèbre de Lie $\mathfrak{so}_{2n}$	41
9.3. L'algèbre de Lie $\mathfrak{so}_{2n+1}$	42
9.4. L'algèbre de Lie de type G_2	43