1. On considère l'algèbre de Lie gl_n des matrices complexes carrées de taille n, où le crochet est défini par $[A, B] = AB - BA$.

a) Montrer que le radical de gl_n est formé des matrices scalaires $\lambda\,\mathrm{Id}$ où $\lambda \in \mathbb{C}$.

b) Montrer que si $M \in \mathrm{gl}_n$ est un matrice nilpotente alors $\mathrm{ad}\,M$ est un endomorphisme nilpotent de l'algèbre de Lie gl_n.

c) Soit $\mathfrak{p}$ l'ensemble des matrices de gl_n triangulaires supérieures par blocs de tailles $n_1, n_2, \ldots, n_k$ où $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathfrak{p}$ dont tous les blocs diagonaux sont nuls est un idéal nilpotent I de $\mathfrak{p}$.

d) Montrer que $\mathfrak{p}/I$ est isomorphe à $\oplus_{i=1}^{i=k} \mathrm{gl}_{n_i}$. Quel est le radical de $\mathfrak{p}$?

2. Soit L une algèbre de Lie semi-simple complexe de type A_3. On fixe une sous-algèbre de Cartan et un ordre sur les racines. On note α_i $(i = 1, 2, 3)$ une base de racines simples. On note $(e_{\alpha_i}, f_{\alpha_i}, h_{\alpha_i})$ $(i = 1, 2, 3)$ un sl_2-triplet associé à la racine α_i. Soit σ l'automorphisme de L qui échange e_{α_1} et e_{α_3} et fixe e_{α_2} et qui est associé à l'automorphisme du système de racines qui échange α_1 et α_3 et fixe α_2. On rappelle que la matrice de Cartan de type B_2 est $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et que celle de type A_3 est $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Montrer que $e_{\alpha_1} + e_{\alpha_3}$, e_{α_2}, $f_{\alpha_1} + f_{\alpha_3}$ et f_{α_2} engendrent la sous-algèbre L^σ des éléments fixes par σ et que L^σ est un algèbre semi-simple de type B_2 (on pourra s'inspirer de la proposition 9.2 du cours, on admettra que les relations de Serre de type B_2 sont vérifiées par $e_{\alpha_1} + e_{\alpha_3}$, e_{α_2}, $f_{\alpha_1} + f_{\alpha_3}$ et f_{α_2}).

3. Soit L une algèbre de Lie semi-simple complexe. On fixe une sous-algèbre de Cartan H et un ordre sur les racines. On note $\Phi^+ = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_N\}$ l'ensemble des racines positives et (e_i, f_i, h_i) un sl_2-triplet correspondant à la racine α_i. Soit U l'algèbre enveloppante de L. On rappelle que U a comme base les monômes $f_1^{r_1} \ldots f_N^{r_N} h_1^{s_1} \ldots h_r^{s_r} e_1^{t_1} \ldots e_N^{t_N}$, où $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ sont les racines simples.

a) Montrer que U est un L-module pour l'action de $x \in L$ sur $u \in U$ donnée par $x.u = xu - ux$. Quel est le poids du monôme $f_1^{r_1} \ldots f_N^{r_N} h_1^{s_1} \ldots h_r^{s_r} e_1^{t_1} \ldots e_N^{t_N}$ pour cette action ?

b) Soit U_0 ls sous-espace de poids 0 de U vu comme L-module comme ci-dessus. Montrer que U_0 est une sous-algèbre de U contenant le centre de L et donner une base de U_0.

c) Soit L^+ la sous-algèbre de Lie de base $(e_1, \ldots, e_N)$ et L^- la sous-algèbre de Lie de base $(f_1, \ldots, f_N)$. On note UL^+ (resp. L^-U) le sous-espace vectoriel de U engendré par les éléments de la forme ul avec $u \in U$ et $l \in L^+$ (resp. lu avec $u \in U$ et $l \in L^-$). Montrer que $UL^+ \cap U_0 = L^-U \cap U_0$ et que ce sous-espace est un idéal bilatère I de U_0 supplémentaire de $U(H)$ (on pourra donner une base de I formée de monômes).