1. Soit L une algèbre de Lie. On rappelle qu'une dérivation de L est une application linéaire $D : L \to L$ telle que $D([x, y]) = [Dx, y] + [x, Dy]$ pour tout x et tout y de L. On note M l'ensemble des dérivations de L.

a) Montrer que M est une sous-algèbre de Lie de l'algèbre des endomorphismes de l'espace vectoriel L (c'est-à-dire pour le crochet $[D_1, D_2] = D_1 D_2 - D_2 D_1$) et que si $x \in L$ on a $\operatorname{ad} x \in M$. En déduire que M est un L-module, l'action de $x \in L$ envoyant D sur $[\operatorname{ad} x, D]$.

Dans la suite on note $\operatorname{ad} L$ l'ensemble des $\operatorname{ad} x$ pour $x \in L$.

b) Montrer que si $D \in M$ et $x \in L$ on a $[D, \operatorname{ad} x] = \operatorname{ad}(D(x))$. En déduire que $\operatorname{ad}(L)$ est un idéal de M.

c) On suppose maintenant que L est une algèbre de Lie semi-simple complexe de dimension finie. Montrer qu'il existe un L-sous-module P de M tel que $M = \operatorname{ad}(L) \oplus P$. Montrer que $[P, \operatorname{ad}(L)] = 0$. En déduire en utilisant la formule de la question b) que si $D \in P$ alors $D(x) = 0$ pour tout $x \in L$. Conclure que $M = \operatorname{ad} L$.

2. Soit L une algèbre de Lie semi-simple complexe de dimension finie et H une sous-algèbre de Cartan de L. On note Φ l'ensemble des racines.

a) Montrer que si L_1 est une sous-algèbre de Lie de L contenant H on a $L_1 = H \oplus (\oplus_{\{\alpha \in \Phi \mid L_\alpha \subset L_1\}} L_\alpha)$.

b) Soient L_1 et L_2 deux sous-algèbres de Lie de L telles que $L_1 \cap L_2 = H$ et que $L_1 + L_2 = L$ (comme somme de sous-espaces vectoriels). On suppose que pour toute racine α, si $L_\alpha \subset L_1$ alors $L_{-\alpha} \subset L_1$. On pose $R_i = \{\alpha \in \Phi \mid L_\alpha \subset L_i\}$ pour $i = 1, 2$. Montrer que si α et β sont dans R_1 et $\alpha + \beta \in \Phi$ alors $\alpha + \beta \in R_1$. Montrer que $R_1 \cap R_2 = \emptyset$. Montrer que si $\alpha \in R_1$ et $\beta \in R_2$ alors $\alpha + \beta$ n'est pas une racine. En déduire que toute racine de R_1 est orthogonale à toute racine de R_2.

c) Pour $i = 1, 2$ on note H_i le sous-espace de H engendré respectivement par les coracines correspondant à R_i. Montrer que $H = H_1 \oplus H_2$ et en déduire que L est la somme directe de deux sous-algèbres de Lie M_1 et M_2 telles que $M_1 \subset L_1$ et $M_2 \subset L_2$.

3. Soit L une algèbre de Lie semi-simple complexe de dimension finie. On fixe une sous-algèbre de Cartan H, on note Φ le système de racines et on fixe une base Π de Φ. Soit V un L-module simple de dimension finie.

a) Montre que si μ est un poids de H dans V alors $-\mu$ est un poids de H dans le module dual V^* (on pourra considérer une base dont le premier vecteur est de poids μ et la base duale).

b) Montrer que le module dual V^* est un L module simple (cette question est indépendante de la précédente).

c) Montrer que le plus haut poids de V^* est $-w_0(\lambda)$ où λ est le plus haut poids de V et w_0 est l'élément du groupe de Weyl qui envoie Π sur $-\Pi$.