

1. On considère l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_n$ des matrices complexes carrées de taille n et de trace nulle.

- a) Montrer que si $M \in \mathfrak{sl}_n$ est une matrice nilpotente alors $\text{ad } M$ est un endomorphisme nilpotent de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_n$.
- b) Soit $\mathfrak{p}$ l'ensemble des matrices de $\mathfrak{sl}_n$ triangulaires supérieures par blocs de tailles $n_1, n_2, \dots, n_k$ où $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Montrer que $\mathfrak{p}$ est une sous-algèbre. Quel est son radical ?
- c) On note I le radical de $\mathfrak{p}$. Quel est le type de l'algèbre semi-simple $\mathfrak{p}/I$?

2. Soit L une algèbre de Lie semi-simple complexe de dimension finie et H une sous-algèbre de Cartan de L ; soit V un L -module simple (on ne suppose rien sur la dimension de V).

- a) Montrer que s'il existe un vecteur non nul de V qui a un poids pour H alors V est la somme directe des espaces de poids V_λ où λ décrit les poids de H dans V .
- b) Pour $h \in H$ on note $U(h)$ la sous-algèbre (unitaire) de l'algèbre enveloppante de H engendrée par h . Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :
 - (i) Il existe un poids λ de H tel que $V_\lambda \neq 0$.
 - (ii) Le sous H -module engendré par v est de dimension finie pour tout $v \in V$.
 - (iii) Pour tout $h \in H$ et tout $v \in V$, le sous- $U(h)$ -module engendré par v est de dimension finie.

3. Soit L une algèbre de Lie simple complexe. On fixe une sous-algèbre de Cartan et on note Φ le système de racines et W le groupe de Weyl associés. On fixe un produit scalaire invariant par W sur l'espace vectoriel V engendré par les racines. On suppose qu'il existe des racines de deux longueurs différentes, donc des racines longues et des racines courtes. Montrer que les L_α où α décrit les racines longues engendrent une sous-algèbre L_1 semi-simple de L . Donner un exemple où L_1 n'est pas simple.