1. On considère une algèbre de Lie L semi-simple complexe de type G_2. On fixe une décomposition de Cartan $L = \oplus_{\gamma\in\Phi} L_\gamma \oplus H$. On note le système de racines

$$\Phi = \{\pm\alpha, \pm\beta, \pm(\alpha+\beta), \pm(2\alpha+\beta), \pm(3\alpha+\beta) \pm (3\alpha+2\beta)\}.$$

a) Montrer que les L_γ où γ parcourt l'ensemble des racines longues engendrent une sous-algèbre de Lie L_1 de rang 2 et de dimension 8. Montrer que L_1 est simple et donner son type.

b) A-t-on un résultat analogue avec les racines courtes ?

c) Décomposer L en somme de L_1-modules simples pour l'action adjointe de L_1.

2. On considère l'algèbre de Lie $sl_3(\mathbb{C})$. On fixe une sous-algèbre de Cartan H et on note les racines $\{\pm\alpha, \pm\beta, \pm(\alpha+\beta)\}$. On identifie H et H^* au moyen du produit scalaire invariant tel que $<\alpha,\alpha>=<\beta,\beta>=2$ et $<\alpha,\beta>=-1$.

a) Montrer que $\omega_\alpha = \dfrac{\beta+2\alpha}{3}$ et $\omega_\beta = \dfrac{\alpha+2\beta}{3}$ sont les poids fondamentaux de L.

b) Soit $S(\omega_\alpha)$ le L-module simple de plus haut poids ω_α. Soit v un vecteur de plus haut poids de $S(\omega_\alpha)$. Quelle est la dimension du sl_α-module engendré par v. Même question pour le sl_β-module et le $sl_{\alpha+\beta}$-module engendrés par v.

c) Montrer que $S(\omega_\alpha)$ a une base de la forme $f^m_{\alpha+\beta} f^n_\alpha v$ où m et n sont des entiers positifs ou nuls. Quelle est la dimension de $S(\omega_\alpha)$ (on pourra montrer que $f_\alpha v$ est un vecteur primitif pour l'action de $sl_{\alpha+\beta}$) ?

3. Soit L une algèbre de Lie complexe telle que son radical soit égal à son centre ZL.

a) En utilisant l'action adjointe de L/ZL sur L, montrer qu'il existe un idéal M de L tel que $L = M \oplus ZL$.

b) Montrer que $[L, L] = [M, M]$. En déduire que $M = [L, L]$.

c) Soit V un L-module de dimension finie. On suppose que les éléments de ZL agissent par des endomorphismes diagonalisables. Montrer que V est complètement réductible (raisonner sur les sous-espaces propres de ZL).