INDICATIONS SUR LA CORRECTION DE L'EXAMEN D'OCTOBRE 2009

1.

a) Si une telle algèbre L existe, comme L est résoluble et non commutative on a $L \supsetneq [L, L] \supsetneq 0$. Soit y un élément de L qui n'est pas dans $[L, L]$ et soit z un élément non nul de $[L, L]$; y et z sont indépendants donc forment une base de L. En particulier $[L, L]$ est liéairement engendré par z. On a donc $[y, z] = az$ avec a scalaire non nul. Remplaçons y par y/a, on obtient une base de L que nous noterons encore (y, z) telle que $[y, z] = z$. D'où l'unicité de L. Réciproquement, si on définit sur un espace vectoriel de dimension 2 de base (y, z) un crochet par $[y, z] = z$, on définit bien une structure d'algèbre de Lie ; en effet, en utilisant la linéarité, on voit qu'il y a deux formules à vérifier pour vérifier l'identité de Jacobi : $[y, [y, z]] + [y, [z, y]] + [z, [y, y]] = 0$ et $[y, [z, z]] + [z, [z, y]] + [z, [y, z]] = 0$ qui sont clairement vraies. Par ailleurs L n'est pas nilpotente puisque $\mathrm{ad}(y)^n(z) = z$ pour tout n, donc une algèbre de Lie nilpotente de dimension 2 est nécessairement commutative.

b) L'algèbre T est résoluble de dimension 2 et n'est pas commutative sauf si $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ commute avec $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ceci ne se produit qu'en caractéristique 2. Donc T est isomorphe à L sauf en caratéristique 2.

c) On sait que $[x, y]$ et $[x, z]$ sont dans L, donc $[x, y] = ay+bz$ et $[x, z] = cy+dz$ avec a, b, c, d dans k. D'où $0 = [[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = az - cy - dz + dz$, ce qui implique $a = c = 0$. On a donc $[L_1, L_1] = kz \subsetneq L$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse. L'algèbre dérivée d'une algèbre de Lie résoluble de dimension 3 ne peut pas être une algèbre non commutative de dimension 2, donc est commutative (de dimension 0, 1 ou 2).

2.

a) En développant on obtient la formule annoncée. Par récurrence on en déduit que pour tout n on a

$$(\sigma - \lambda\mu \,\mathrm{Id})^n[x, y] = \sum_i \binom{n}{i} [\lambda^i(\sigma - \lambda \,\mathrm{Id})^{n-i}(x), \sigma^{n-i}(\sigma - \mu \,\mathrm{Id})^i(y)].$$

Donc si $x \in L_\lambda$ et $y \in L_\mu$, on obtient 0 pour n assez grand, c'est-à-dire que $[x, y] \in L_{\lambda\mu}$.

b) Comme L est de dimension finie, σ n'a qu'un nombre fini de valeurs propres. Or si x et y sont comme dans la question précédente, $(\mathrm{ad}\, x)^n(y)$ est nul ou est dans l'espace propre généralisé pour la valeur propre $\lambda^n\mu$. Si λ n'est pas une racine de l'unité ces valeurs sont toutes distinctes. Donc $\mathrm{ad}(x)^n(y) = 0$ pour n assez grand. Ceci est vrai pour tout μ. Comme le corps est algébriquement clos $L = \oplus_\mu L_\mu$, donc $\mathrm{ad}(x)^n = 0$ pour n assez grand. Si cette propriété est vraie pour tout λ, alors $\mathrm{ad}(x_\lambda)$ est nilpotent pour tout λ, où x_λ est la composante de x dans L_λ. On peut en déduire (difficile : voir par exemple Bourbaki "Groupes et Algèbres de Lie", chapitre 1 §4, exercice 11 ou Jacobson "Lie Algebgras", chapitre II §2, théorème 1) que $\mathrm{ad}(x) = \sum_\lambda \mathrm{ad}(x_\lambda)$ est nilpotent pour tout $x \in L$. Le théorème d'Engel permet alors de conclure *(La fin de cette question vue sa difficulté n'a pas été prise en compte dans le barème de correction).*

3.

a) On sait que tout automorphisme du système de racines se prolonge en un automorphisme de L. Ceci s'applique en particulier à $w \in W$ et l'action de θ sur H est donnée par l'action de w sur les coracines donc par w.

b) Si on applique la même construction en partant de w^{-1} on transforme S' en S. Donc si S'_1 est un sous-module de S', il provient d'un sous-module de $S(\lambda)$ par l'opération $\star$, donc est nul ou égal à S' puisque S n'a pas de sous-module autre que 0 et S. Si v est un vecteur de poids μ de $S(\lambda)$ alors pour $h \in H$ on a $h \star v = \theta(h)v = w(h)v = \lambda(w(h))v$. Le poids est donc $w^{-1}(\lambda)$. Donc les poids de S' sont les images par w^{-1} des poids de $S(\lambda)$.

c) On sait que l'ensemble des poids de $S(\lambda)$ est invariant par l'action de W. Donc les poids de $S(\lambda)$ et de S' sont les mêmes. L'unicité du module simple de plus haut poids λ montre que S' est isomorphe à $S(\lambda)$. Comme l'espace de poids μ de S est égal à l'espace de poids $w^{-1}(\mu)$ de S' on obtient l'égalité de dimensions demandée.