

1.

- a) La somme de deux racines longues est une racine longue ou n'est pas une racine. Donc le commutateur $[L_\gamma, L_\delta]$ où γ et δ sont des racines longues non proportionnelles est inclus dans $\oplus_{\gamma \text{ longue}} L_\gamma$. D'autre part si γ et δ sont deux racines longues non colinéaires, $[L_\gamma, L_{-\gamma}]$ et $[L_\delta, L_{-\delta}]$ sont deux sous-espaces supplémentaires de H . Donc les L_γ avec γ longue engendrent la sous-algèbre de Lie $\oplus_{\gamma \text{ longue}} L_\gamma \oplus H$ qui est de dimension 8 et de rang 2. Les racines longues forment un sous-système de racines de type A_2 . Les relations de commutations montrent donc qu'un idéal contenant un L_γ les contient tous. Or un idéal doit être la somme directe de ses espaces de poids pour H . S'il contient un élément non nul de H il contient tous les L_γ puisque $[L_\gamma, H] = L_\gamma$; s'il contient un L_γ il les contient tous comme on l'a vu. Donc L_1 est simple.
- b) La propriété analogue pour les racines n'est pas vraie car la somme de deux racines courtes peut être une racine longue.
- c) L'action adjointe de L_1 contient en particulier l'action de H . Donc chaque facteur de la décomposition doit être une somme d'espaces de poids pour H . Comme L_1 est simple c'est un sous-module simple sur elle-même. Il reste à voir les L_γ avec γ racine courte. On vérifie que la somme d'une racine courte et d'une racine longue est une racine courte ou n'est pas une racine. On vérifie que par l'action des L_γ avec γ long on a une orbite formée de L_α , $L_{\alpha+\beta}$ et $L_{-2\alpha-\beta}$ et une orbite formée de $L_{-\alpha}$, $L_{-\alpha-\beta}$ et $L_{2\alpha+\beta}$. On a donc deux L_1 -sous-modules simples. La décomposition cherchée est donc $L = L_1 \oplus M_1 \oplus M_2$ où $M_1 = L_\alpha \oplus L_{\alpha+\beta} \oplus L_{-2\alpha-\beta}$ et $M_2 = L_{-\alpha} \oplus L_{-\alpha-\beta} \oplus L_{2\alpha+\beta}$.

2.

- a) On a $\langle \frac{\beta+2\alpha}{3}, \alpha \rangle = -1/3 + 4/3 = 1$ et $\langle \frac{\beta+2\alpha}{3}, \beta \rangle = -2/3 + 2/3 = 0$, et de même symétriquement pour ω_β . Ce sont donc bien les poids fondamentaux.
- b) v est de poids $\omega_\alpha(h_\alpha) = \langle \frac{\beta+2\alpha}{3}, \alpha \rangle$ car $\alpha^\vee = \alpha$. Donc le poids est 1 et la dimension du sl_α -module engendré est 2. De même le sl_β -module engendré par v est de dimension 1. Le $sl_{\alpha+\beta}$ module engendré par v est de dimension 2 car $\langle \omega_\alpha, \alpha + \beta \rangle = 1$.
- c) Comme v est de poids 0 pour sl_β on a $f_\beta.v = 0$. Par PBW une base de $S(\alpha)$ est constituée des vecteurs non nuls de la forme $f_{\alpha+\beta}^m f_\alpha^n f_\beta^p v$. Ceci est nul sauf si $p = 0$ et $n = 0$ ou 1 d'après le début de cette question. Si $n = 0$ il faut $m = 0$ ou 1. D'autre part $e_{\alpha+\beta} f_\alpha v = f_\alpha e_{\beta+\alpha} v + [e_{\alpha+\beta}, f_\alpha] v$. D'une part v est primitif et d'autre part le commutateur qui apparaît dans cette expression est dans L_β donc agit par 0 sur v . Donc $f_\alpha v$ est primitif pour $L_{\alpha+\beta}$, de poids $\langle \omega_\alpha - \alpha, \alpha + \beta \rangle = 0$. Donc si $n = 1$ il faut $m = 0$. On a donc une base de $S(\omega_\alpha)$ constituée de $v, f_\alpha v, f_{\alpha+\beta} v$.

3.

- a) Le quotient par le radical est semi-simple, donc L/ZL est semi-simple. L'action adjointe de L se factorise par L/ZL , donc comme L -module, L est complètement réductible. Comme ZL est un sous-module il existe un idéal supplémentaire.

- b) Comme ZL est le centre, le commutateur de deux éléments de L est égal au commutateur de leurs composantes dans M . Comme M est une algèbre semi-simple, car isomorphe à L/ZL , on a $M = [M, M]$. Donc $[L, L] = M$.
- c) Décomposons V en sous-espaces de poids pour ZL . Comme ZL commute à M , tout espace de poids pour ZL est stable par M , donc est complètement réductible comme M -module. Chaque composante simple est stable par ZL puisque c'est un espace de poids, donc est stable par L . Chaque composante est donc un L -module qui est simple puisque simple comme L_1 -module.