

# Méthodes de relaxation pour les systèmes hyperboliques

**Vivien Desveaux**

15 juin 2016, Amiens  
Journée Mathématique du LAMFA

# Plan

- 1 Généralités sur les systèmes hyperboliques
- 2 Méthodes de relaxation
- 3 Systèmes avec terme source

- 1 Généralités sur les systèmes hyperboliques
  - Quelques définitions et propriétés
  - Exemple : équations d'Euler
  - Un peu de numérique
- 2 Méthodes de relaxation
- 3 Systèmes avec terme source

# Hyperbolicité

Système quasi-linéaire d'EDP

$$\partial_t w(x, t) + A(w) \partial_x w(x, t) = 0,$$

- $w : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^d$ , vecteur inconnu
- $A(w) : \Omega \rightarrow M_d(\mathbb{R})$

## Définition

Ce système est **hyperbolique** si  $A(w)$  est diagonalisable dans  $\mathbb{R}$ .

Le champ associé à la valeur propre  $\lambda_j(w)$  est

- **vraiment non linéaire** (VNL) si  $\lambda_j(w)$  est de multiplicité 1 et  $\forall w \in \Omega$ ,  $\nabla \lambda_j(w) \cdot r_j(w) \neq 0$  (avec  $r_j(w)$  vecteur propre associé) ;  
→ choc ou onde de raréfaction ;
- **linéairement dégénéré** (LD) si  $\forall r \in \ker(A(w) - \lambda_j(w)Id)$ ,  $\forall w \in \Omega$ ,  $\nabla \lambda_j(w) \cdot r(w) = 0$  ;  
→ discontinuité de contact.

# Invariants de Riemann

## Définition

Soit  $\lambda_j(w)$  une valeur propre de  $A(w)$ .

Un **invariant de Riemann** (IR) pour le champ associé à  $\lambda_j$  est une fonction régulière  $\varphi(w)$  vérifiant  $\forall r \in \ker(A(w) - \lambda_j(w)Id)$ ,  
 $\forall w \in \Omega, \quad \nabla\varphi(w) \cdot r(w) = 0$ .

Propriétés :

- Il y a au plus  $d - N$  IR indépendants associés au champ  $\lambda_j$ ,  $N$  étant la multiplicité de  $\lambda_j$ .
- Si le champ est LD, alors  $\lambda_j(w)$  est un IR.
- Si le champ est LD, alors tous les IR associés à ce champ sont constants au travers de la discontinuité de contact.

# Système de lois de conservation

$$\begin{cases} \partial_t w(x, t) + \partial_x f(w) = 0 \\ w(x, 0) = w_0(x) \end{cases}$$

- $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ , fonction flux
- $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  : ensemble convexe d'états physiquement admissibles
- Système quasi-linéaire avec  $A(w) = \nabla f(w)$

## Conservation

$$\int_{x_1}^{x_2} w(x, t_2) dx = \int_{x_1}^{x_2} w(x, t_1) dx + \int_{t_1}^{t_2} f(w(x_1, t)) dt - \int_{t_1}^{t_2} f(w(x_2, t)) dt$$

## Invariance de $\Omega$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad w_0(x) \in \Omega \quad \Rightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad w(x, t) \in \Omega$$

# Entropie

Présence de discontinuités  $\rightarrow$  solutions faibles

## Définition

- Une fonction convexe  $\eta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est une **entropie** s'il existe un **flux d'entropie**  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tel que

$$\nabla g = \nabla f \nabla \eta.$$

- Une solution faible  $w$  est dite **entropique** si elle vérifie faiblement

$$\partial_t \eta(w) + \partial_x g(w) \leq 0$$

pour tout couple d'entropie  $(\eta, g)$ .

- En scalaire : il existe une unique solution entropique.
- En système : permet d'écartier les solutions non-physiques.

# Équations d'Euler

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0 \\ \partial_t \rho u + \partial_x (\rho u^2 + p) = 0 \\ \partial_t E + \partial_x (E + p)u = 0 \end{cases}$$

- $\rho$  : densité
- $u$  : vitesse
- $E = \rho e + \rho u^2/2$  : énergie totale, avec  $e$  l'énergie interne
- Loi de pression (gaz parfaits) :  $p = (\gamma - 1)\rho e$
- Ensemble des états admissibles :

$$\Omega = \{w = (\rho, \rho u, E) \in \mathbb{R}^3, \quad \rho > 0, \quad E - \rho u^2/2 > 0\}$$

# Équations d'Euler

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0 \\ \partial_t \rho u + \partial_x (\rho u^2 + p) = 0 \\ \partial_t E + \partial_x (E + p)u = 0 \end{cases}$$

- Système hyperbolique sur  $\Omega$
- Vitesse du son  $c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$
- Valeurs propres :
  - ▶  $u \rightarrow$  onde matérielle, LD
  - ▶  $u \pm c \rightarrow$  ondes acoustiques, VNL
- Les couples entropie-flux d'entropie s'écrivent

$$(\rho \mathcal{F}(\ln(s)), \rho u \mathcal{F}(\ln(s))), \quad s = \frac{p}{\rho^\gamma}$$

avec  $\mathcal{F}'(y) < 0$  et  $\mathcal{F}'(y) < \gamma \mathcal{F}''(y)$ ..

# Méthodes de volumes finis - 1

- Discrétisation spatiale :  
cellules  $K_i = (x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$  de longueur constante  $\Delta x$
- Discrétisation temporelle :  $t^{n+1} = n\Delta t$
- Approximation de la solution :  $w_i^n \simeq \frac{1}{\Delta x} \int_{K_i} w(x) dx$ .
- Formulation intégrale de l'EDP :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} \int_{K_i} w(x, t^{n+1}) dx &= \frac{1}{\Delta x} \int_{K_i} w(x, t^n) dx \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(w(x_{i+1/2}, t)) dt - \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(w(x_{i-1/2}, t)) dt \right) \end{aligned}$$

- Flux numérique  $F_{i+1/2} \simeq \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(w(x_{i+1/2}, t)) dt$
- Schéma volumes finis :

$$w_i^{n+1} = w_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( F_{i+1/2} - F_{i-1/2} \right)$$

## Méthodes de volumes finis - 2

- Schéma naturellement conservatif
- On se limite aux flux de la forme  $F_{i+1/2} = F(w_i^n, w_{i+1}^n)$ .  
Schémas à 3 points :

$$w_i^{n+1} = w_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F(w_i^n, w_{i+1}^n) - F(w_{i-1}^n, w_i^n)) .$$

### Définition

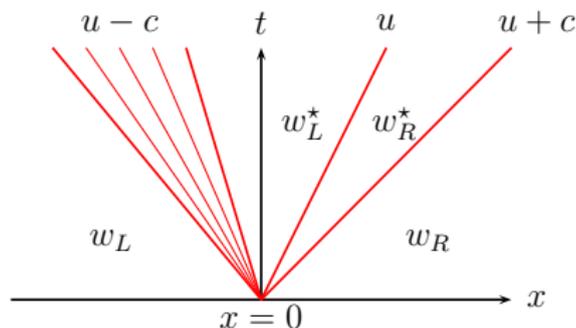
Le schéma est :

- **constant** si  $F(w, w) = f(w)$  ;
- **robuste** si  $\forall i \in \mathbb{N}, w_i^n \in \Omega \Rightarrow \forall i \in \mathbb{N}, w_i^{n+1} \in \Omega$  ;
- **entropique** si pour tout couple d'entropie  $(\eta, g)$ , il existe un flux numérique d'entropie  $G(w_L, w_R)$  consistant ( $G(w, w) = g(w)$ ), tel que

$$\eta(w_i^{n+1}) \leq \eta(w_i^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (G(w_i^n, w_{i+1}^n) - G(w_{i-1}^n, w_i^n)) .$$

# Problème de Riemann

$$\begin{cases} \partial_t w + \partial_x f(w) = 0 \\ w(x, 0) = \begin{cases} w_L & \text{si } x < 0 \\ w_R & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{cases}$$



- Solution autosimilaire (ne dépend que de  $\frac{x}{t}$ )
- Les ondes séparent des états constants.
- Notation pour la solution du problème de Riemann :

$$w_{\mathcal{R}} \left( \frac{x}{t}, w_L, w_R \right).$$

## Schéma de Godunov - 1 (1959)

- Au temps  $t^n$  : approximation constante par morceaux
- Localement, à l'interface  $x_{i+1/2}$  : problème de Riemann
- On sait résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t w + \partial_x f(w) = 0 \\ w(x, t^n) = w_i^n \mathbb{1}_{K_i}(x) \end{cases}$$

tant que les problèmes de Riemann n'interagissent pas

- On impose la condition CFL

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max |\lambda| \leq \frac{1}{2}$$

- La solution est alors la juxtaposition des problèmes de Riemann :

$$w_{\mathcal{C}}(x, t) = \sum_{i \in \mathbb{N}} w_{\mathcal{R}} \left( \frac{x - x_{i+1/2}}{t - t^n}, w_i^n, w_{i+1}^n \right) \mathbb{1}_{(x_i, x_{i+1})}(x), \quad t^n \leq t \leq t^{n+1}$$

## Schéma de Godunov - 2 (1959)

- On projette la solution exacte au temps  $t^{n+1}$  sur l'espace des fonctions constantes par morceaux :

$$w_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} w_{\mathcal{C}}(x, t^{n+1}) dx.$$

- Le schéma de Godunov peut s'écrire sous forme volumes finis, avec pour flux numérique  $F(w_L, w_R) = f(w_{\mathcal{R}}(0, w_L, w_R))$ .
- Le schéma de Godunov est consistant, robuste et entropique.
- Défauts :
  - ▶ Résolution exacte du problème de Riemann difficile, voire impossible ;
  - ▶ Coûteux en temps de calcul ;
  - ▶ La précision de la résolution exacte est gommée par l'étape de projection.

- 1 Généralités sur les systèmes hyperboliques
- 2 Méthodes de relaxation
  - Principe des méthodes de relaxation
  - Relaxation de Jin-Xin
  - Relaxation de Suliciu
- 3 Systèmes avec terme source

# Principe

Système initial

$$\partial_t w + \partial_x f(w) = 0$$

$$w \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$$

# Principe

Système initial

$$\partial_t w + \partial_x f(w) = 0$$

$$w \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$$

Système de relaxation

$$\partial_t W + \partial_x F(w) = \frac{1}{\varepsilon} R(W)$$

$$W \in \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N, \quad N > d$$

# Principe

 $Q$ 


Système initial

$$\partial_t w + \partial_x f(w) = 0$$

$$w \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$$

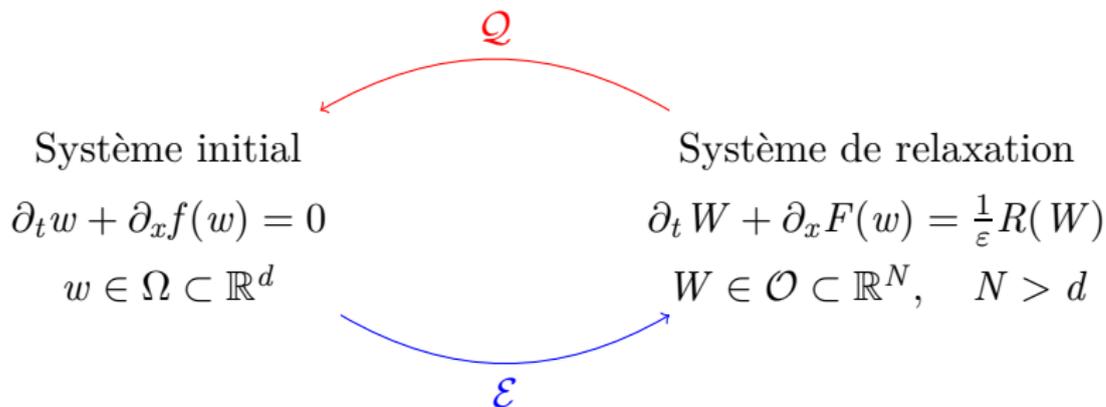
Système de relaxation

$$\partial_t W + \partial_x F(w) = \frac{1}{\varepsilon} R(W)$$

$$W \in \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N, \quad N > d$$

- Matrice  $Q \in M_{d,N}(\mathbb{R})$  t.q.  $Q\mathcal{O} = \Omega$  et  $QR(W) = 0, \quad \forall W \in \mathcal{O}$

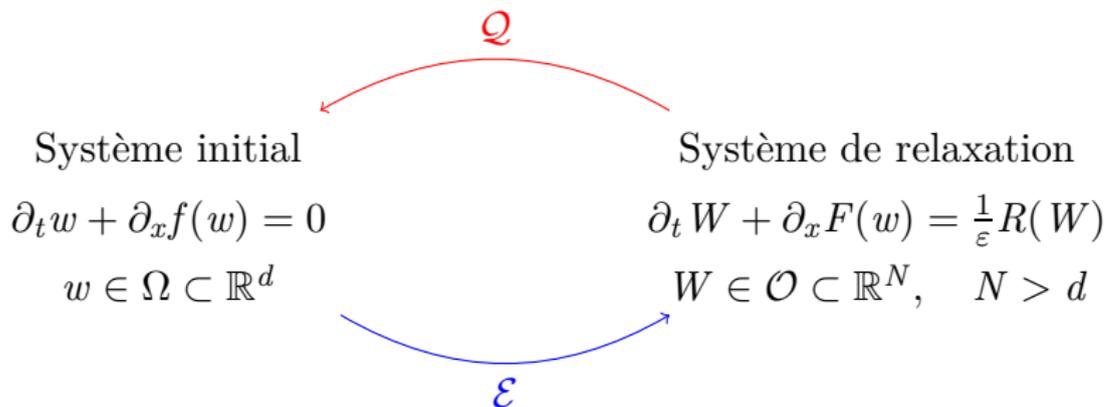
# Principe



- Matrice  $Q \in M_{d,N}(\mathbb{R})$  t.q.  $Q\mathcal{O} = \Omega$  et  $QR(W) = 0, \quad \forall W \in \mathcal{O}$
- Pour tout  $w \in \Omega$ , il existe un unique equilibre  $\mathcal{E}(w)$  t.q.

$$Q\mathcal{E}(w) = w, \quad R(\mathcal{E}(w)) = 0, \quad QF(\mathcal{E}(w)) = f(w)$$

# Principe



- Matrice  $Q \in M_{d,N}(\mathbb{R})$  t.q.  $Q\mathcal{O} = \Omega$  et  $QR(W) = 0, \quad \forall W \in \mathcal{O}$
- Pour tout  $w \in \Omega$ , il existe un unique équilibre  $\mathcal{E}(w)$  t.q.

$$Q\mathcal{E}(w) = w, \quad R(\mathcal{E}(w)) = 0, \quad QF(\mathcal{E}(w)) = f(w)$$

- Variété d'équilibre :  $\mathcal{M} \subset \mathcal{O} := \{\mathcal{E}(w), w \in \Omega\}$
- Le système de relaxation doit être plus simple : on a besoin de la solution exacte du problème de Riemann.

# Schéma de relaxation

Initialement : approximation  $w_i^n$  au temps  $t^n$  sur la cellule  $K_i$

- 1 **Passage au système de relaxation** sur la variété d'équilibre :

$$W_i^n = \mathcal{E}(w_i^n)$$

- 2 **Évolution** par le schéma de Godunov pour le système

$$\partial_t W + \partial_x F(W) = 0 \text{ (i.e. } \varepsilon = +\infty)$$

$$\rightarrow W_i^{n+1,-}$$

- 3 **Relaxation** : Résolution de  $\partial_t W = \frac{1}{\varepsilon} R(W)$  dans la limite  $\varepsilon = 0$

$$\rightarrow W_i^{n+1}$$

- 4 **Retour au système initial** par projection sur la variété d'équilibre :

$$w_i^{n+1} = \mathcal{Q} W_i^{n+1}$$

Remarque : en multipliant  $\partial_t W = \frac{1}{\varepsilon} R(W)$  par  $\mathcal{Q}$ , on obtient

$$\partial_t \mathcal{Q} W = 0, \text{ on a donc } w_i^{n+1} = \mathcal{Q} W_i^{n+1,-}$$

## Relaxation de Jin-Xin (1995)

- Loi de conservation scalaire :  $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$ .
- Système de relaxation de Jin-Xin :

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x v = 0 \\ \partial_t v + a^2 \partial_x u = \frac{1}{\varepsilon} (f(u) - v) \end{cases}$$

- Système linéaire + terme source de relaxation
- Quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on a formellement  $v = f(u)$ .
- Stable sous la condition de Whitham  $a > \sup |f'(u)|$ .

# Relaxation de Suliciu (1998)

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0 \\ \partial_t \rho u + \partial_x (\rho u^2 + p) = 0 \\ \partial_t E + \partial_x (E + p) u = 0 \end{cases}$$

- Idée : linéariser seulement les ondes acoustiques

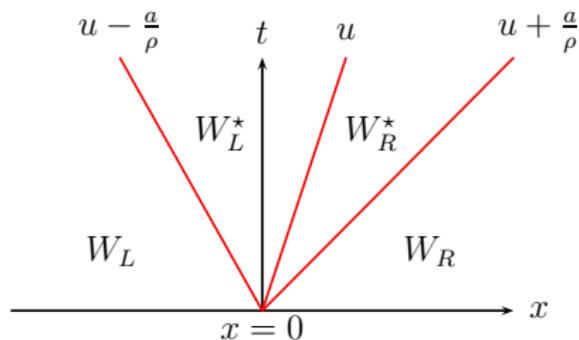
# Relaxation de Suliciu (1998)

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0 \\ \partial_t \rho u + \partial_x (\rho u^2 + \pi) = 0 \\ \partial_t E + \partial_x (E + \pi) u = 0 \\ \partial_t \rho \pi + \partial_x (\rho \pi + a^2) u = \frac{\rho}{\varepsilon} (p - \pi) \end{cases}$$

- Idée : linéariser seulement les ondes acoustiques
- Valeurs propres :  $u$ ,  $u \pm \frac{a}{\rho}$
- Tous les champs sont LD.

# Problème de Riemann

Valeurs propres	Invariants de Riemann
$u \pm \frac{a}{\rho}$	$u \pm \frac{a}{\rho}, \quad \pi \mp au, \quad a^2 e - \frac{\pi^2}{2}$
$u (\times 2)$	$u, \quad \pi$



$$u_L^* = u_R^* = \frac{u_L + u_R}{2} - \frac{\pi_R - \pi_L}{2a}$$

$$\pi_L^* = \pi_R^* = \frac{\pi_L + \pi_R}{2} - \frac{a}{2}(u_R - u_L)$$

$$\frac{1}{\rho_L^*} = \frac{1}{\rho_L} + \frac{1}{a}(u^* - u_L)$$

$$\frac{1}{\rho_R^*} = \frac{1}{\rho_R} + \frac{1}{a}(u_R - u^*)$$

$$e_{L,R}^* = e_{L,R} + \frac{\pi_{L,R}^2 - \pi^{*2}}{2a^2}$$

# Propriétés du schéma

## Théorème

- *Si  $a$  vérifie*

$$u_L - \frac{a}{\rho_L} < u^* < u_R + \frac{a}{\rho_R}, \quad e_{L,R} + \frac{\pi^{*2} - \pi_{L,R}^2}{2a^2} > 0$$

*et que le pas de temps vérifie la condition CFL*

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_i \in \mathbb{Z} \left| u_i^n \pm \frac{a}{\rho_i^n} \right| \leq \frac{1}{2},$$

*alors le schéma est robuste.*

- *Si le paramètre  $a$  vérifie en plus la condition de Whitham*

$$a^2 > \max_{i \in \mathbb{Z}} (\rho_i^{n2} c_i^{n2}),$$

*alors le schéma est entropique.*

- 1 Généralités sur les systèmes hyperboliques
- 2 Méthodes de relaxation
- 3 Systèmes avec terme source
  - Système de Ripa
  - Modèles de relaxation
  - Tests numériques

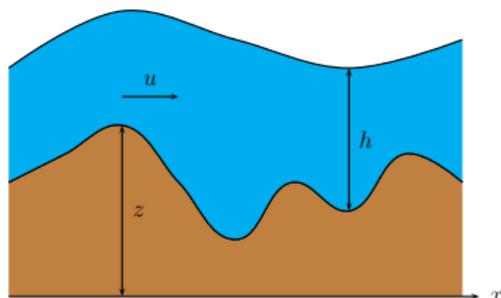
En collaboration avec

- Christophe Berthon (Nantes)
- Christian Klingenberg (Würzburg)
- Markus Zenk (Würzburg)

# Système de Ripa

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x hu = 0 \\ \partial_t hu + \partial_x (hu^2 + gh^2\theta/2) = -gh\theta\partial_x z \\ \partial_t h\theta + \partial_x h\theta u = 0 \end{cases}$$

- $h$  : hauteur d'eau
- $u$  : vitesse
- $z$  : topographie
- $\theta$  : température



- Ensemble des états admissibles :

$$\Omega = \{w = (h, hu) \in \mathbb{R}^2, \quad h > 0, \quad \theta > 0\}$$

# Système de Ripa

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x hu = 0 \\ \partial_t hu + \partial_x (hu^2 + gh^2\theta/2) = -gh\theta\partial_x z \\ \partial_t h\theta + \partial_x h\theta u = 0 \end{cases}$$

- Système quasi-linéaire (non-conservatif)
- Valeurs propres :
  - ▶  $0 \rightarrow$  onde stationnaire, LD
  - ▶  $u \rightarrow$  onde matérielle, LD
  - ▶  $u \pm \sqrt{gh\theta} \rightarrow$  ondes acoustiques, VNL
- Système hyperbolique sauf aux points où  $u = \pm\sqrt{gh\theta}$
- Couple entropie-flux d'entropie :

$$\left( h \frac{u^2}{2} + g\theta \frac{h^2}{2} + gh\theta z, \left( h \frac{u^2}{2} + g\theta h^2 + gh\theta z \right) u \right)$$

# Système de Ripa

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x hu = 0 \\ \partial_t hu + \partial_x (hu^2 + gh^2\theta/2) = -gh\theta\partial_x z \\ \partial_t h\theta + \partial_x h\theta u = 0 \end{cases}$$

## Remarque

Le cas  $\theta = \text{constante}$  redonne le système de **Saint-Venant**.

- États d'équilibre au repos pour Saint-Venant :

$$\begin{cases} u = 0, \\ \partial_x (gh^2/2) = -gh\partial_x z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0, \\ h + z = \text{constante} \end{cases}$$

- un schéma pour Saint-Venant est dit **well-balanced** si

$$\forall i \in \mathbb{Z}, \quad h_i^0 + z_i = C \quad \Rightarrow \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad h_i^n + z_i = C$$

# Système de Ripa

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x hu = 0 \\ \partial_t hu + \partial_x (hu^2 + gh^2\theta/2) = -gh\theta\partial_x z \\ \partial_t h\theta + \partial_x h\theta u = 0 \end{cases}$$

- États d'équilibre au repos :

$$\begin{cases} u = 0, \\ \partial_x (gh^2\theta/2) = -gh\theta\partial_x z \end{cases}$$

Pas d'expression explicite pour tous les états d'équilibre.

- États d'équilibre du type lac au repos :

$$\begin{cases} u = 0 \\ \theta = \text{cst} \\ h + z = \text{cst} \end{cases} \quad \begin{cases} u = 0 \\ z = \text{cst} \\ h^2\theta = \text{cst} \end{cases} \quad \begin{cases} u = 0 \\ h = \text{cst} \\ z + \frac{h}{2} \ln \theta = \text{cst} \end{cases}$$

# Relaxation de Suliciu

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t h + \partial_x hu = 0 \\ \partial_t hu + \partial_x (hu^2 + \pi) = -gh\theta \partial_x z \\ \partial_t h\theta + \partial_x h\theta u = 0 \\ \partial_t h\pi + \partial_x (h\pi + a^2)u = \frac{h}{\varepsilon}(gh^2\theta/2 - \pi) \\ \partial_t z = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Équilibre} \\ \pi = gh^2\theta/2 \end{array}$$

- Valeurs propres :  $u - \frac{a}{h}$ ,  $0$ ,  $u$  ( $\times 2$ ),  $u + \frac{a}{h}$
- Tous les champs sont LD
- **Difficultés :**
  - ▶ L'ordre des valeurs propres n'est pas fixé *a priori*
  - ▶ Les IR pour la valeur propre 0 sont fortement non-linéaires

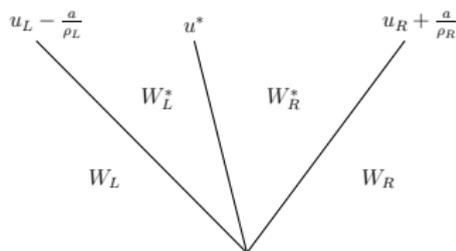
# Relaxation avec topographie transportée

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t h + \partial_x hu = 0 \\ \partial_t hu + \partial_x (hu^2 + \pi) = -gh\theta \partial_x Z \\ \partial_t h\theta + \partial_x h\theta u = 0 \\ \partial_t h\pi + \partial_x (h\pi + a^2)u = \frac{h}{\varepsilon}(gh^2\theta/2 - \pi) \\ \partial_t hZ + \partial_x hZu = \frac{h}{\varepsilon}(z - Z) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Équilibre} \\ \pi = gh^2\theta/2 \\ Z = z \end{array}$$

- Valeurs propres :  $u - \frac{a}{h}$ ,  $u$  ( $\times 3$ ),  $u + \frac{a}{h}$
- Ordre fixe des valeurs propres :  $u - \frac{a}{h} < u < u + \frac{a}{h}$
- Tous les champs sont LD
- Il manque un IR pour que le problème de Riemann ait une unique solution.  
 $\Rightarrow$  Besoin d'une relation de fermeture

# Relaxation avec topographie transportée

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t h + \partial_x h u = 0 \\ \partial_t h u + \partial_x (h u^2 + \pi) = -gh\theta \partial_x Z \\ \partial_t h \theta + \partial_x h \theta u = 0 \\ \partial_t h \pi + \partial_x (h \pi + a^2) u = \frac{h}{\varepsilon} (gh^2 \theta / 2 - \pi) \\ \partial_t h Z + \partial_x h Z u = \frac{h}{\varepsilon} (z - Z) \end{array} \right.$$



Pour approcher l'équation

$$\partial_x (h^2 \theta / 2) = -h \theta \partial_x z \quad \begin{array}{c} \iff \\ \text{équilibre} \\ \pi = gh^2 \theta / 2 \\ Z = z \end{array} \quad \partial_x \pi = -gh \theta \partial_x Z,$$

on prend la relation de fermeture :

$$\frac{\pi_R^* - \pi_L^*}{\Delta x} = -g \bar{h}(W_L, W_R) \bar{\theta}(W_L, W_R) \frac{Z_R - Z_L}{\Delta x},$$

où  $\bar{h}$  et  $\bar{\theta}$  sont des moyennes (définies plus tard)

## Système de relaxation complet

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t h + \partial_x h u = 0 \\ \partial_t h u + \partial_x (h u^2 + \pi) = -g \bar{h}(X^-, X^+) \bar{\theta}(X^-, X^+) \partial_x Z \\ \partial_t h \theta + \partial_x h \theta u = 0 \\ \partial_t h \pi + \partial_x (h \pi + a^2) u = \frac{h}{\varepsilon} (g h^2 \theta / 2 - \pi) \\ \partial_t h Z + \partial_x h Z u = \frac{h}{\varepsilon} (z - Z) \\ \partial_t X^- + (u - \delta) \partial_x X^- = \frac{1}{\varepsilon} (W - X^-) \\ \partial_t X^+ + (u + \delta) \partial_x X^+ = \frac{1}{\varepsilon} (W - X^+) \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{Équilibre} \\ \pi = g h^2 \theta / 2 \quad Z = z \quad X^\pm = W \end{array}$$

- Pour  $\delta > 0$  assez petit, le système est hyperbolique avec comme valeurs propres

$$u - \frac{a}{h} < u - \delta < u < u + \delta < u + \frac{a}{h}.$$

- Ensemble complet d'IR
- Mène au même schéma que le modèle précédent

# Propriétés du schéma

## Théorème

*Le schéma est :*

- *robuste sous la condition d'ordre des valeurs propres et la condition CFL ;*
- *entropique si la topographie est  $1 + \varepsilon$ -höldérienne et sous condition de Whitham.*

## Théorème

*Si la condition initiale discrète vérifie*

$$\begin{cases} u_i^0 = 0, \\ \frac{(h_{i+1}^0)^2 \theta_{i+1}^0 / 2 - (h_i^0)^2 \theta_i^0 / 2}{\Delta x} = -\bar{h}(w_i^0, w_{i+1}^0) \bar{\theta}(w_i^0, w_{i+1}^0) \frac{z_{i+1} - z_i}{\Delta x}, \end{cases}$$

*alors  $w_i^{n+1} = w_i^n$ ,  $\forall i \in \mathbb{Z}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .*

# Propriétés du schéma de relaxation

## Théorème

Supposons que les fonctions moyennes  $\bar{h}$  et  $\bar{\theta}$  sont définies par

$$\bar{h}(W_L, W_R) = \frac{1}{2}(h_L + h_R),$$

$$\bar{\theta}(W_L, W_R) = \begin{cases} \frac{\theta_R - \theta_L}{\ln(\theta_R) - \ln(\theta_L)} & \text{si } \theta_L \neq \theta_R, \\ \theta_L & \text{si } \theta_L = \theta_R, \end{cases}$$

alors le schéma de relaxation préserve exactement les états d'équilibre du type lac au repos :

si la donnée initiale vérifie

$$\begin{cases} u_i^0 = 0, \\ \theta_i^0 = cst, \\ h_i^0 + z_i = cst, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} u_i^0 = 0, \\ z_i = cst, \\ (h_i^0)^2 \theta_i^0 = cst, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} u_i^0 = 0, \\ h_i^0 = cst, \\ z_i + h_i^0 \ln(\theta_i^0)/2 = cst, \end{cases}$$

alors  $w_i^{n+1} = w_i^n, \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

# État d'équilibre « général »

- Topographie :  $z(x) = -2e^x$
- état d'équilibre :  $(h_s, u_s, \Theta_s)(x) = (e^x, 0, e^{2x})$

On vérifie facilement  $\partial_x(h_s^2 \Theta_s / 2) = -h_s \Theta_s \partial_x z$

- Erreur  $L^1$  :

$N$	Hauteur d'eau		Vitesse	
100	8.79E-05	–	2.13E-04	–
200	2.23E-05	1.98	5.41E-05	1.98
400	5.60E-06	1.99	1.36E-05	1.99
800	1.41E-06	1.99	3.42E-06	1.99
1600	3.52E-07	2.00	8.56E-07	2.00
3200	8.81E-08	2.00	2.14E-07	2.00

# Perturbation d'un état d'équilibre

- Topographie :

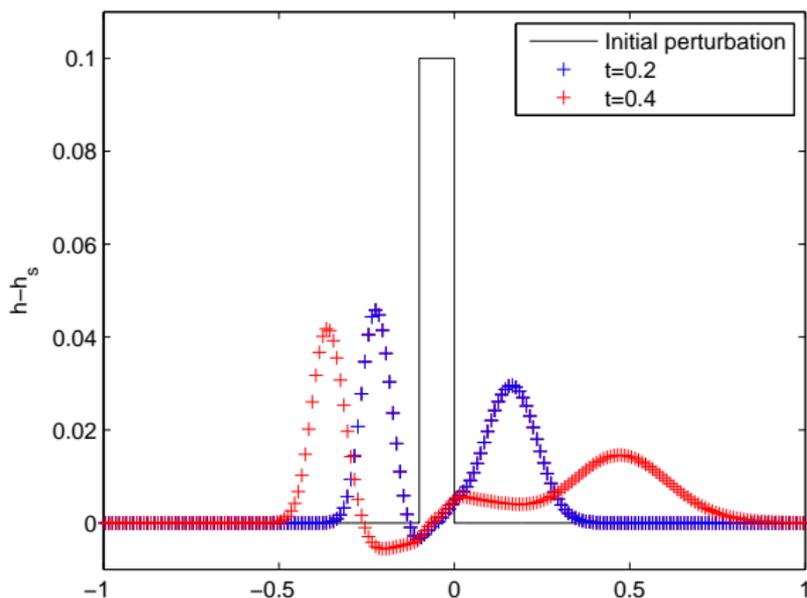
$$z(x) = -2e^x$$

- État d'équilibre :

$$(h_s, u_s, \Theta_s)(x) = (e^x, 0, e^{2x})$$

- Perturbation initiale :

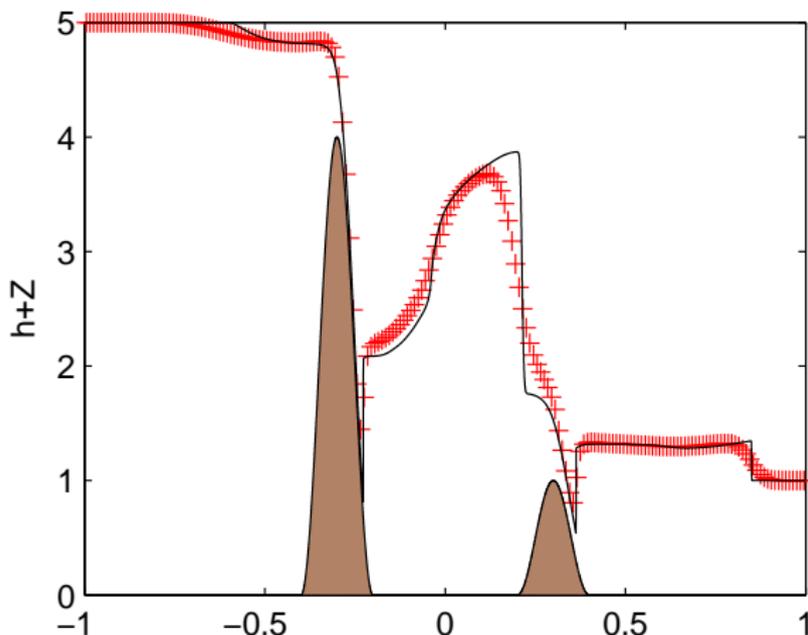
$$\delta h(x, 0) = 0.1 \chi_{[-0.1, 0]}(x)$$



# Rupture de barrage sur un sol non-plat

- Condition initiale :

$$(h+z, u, \theta)(x, 0) = \begin{cases} (5, 0, 1), & x < 0 \\ (1, 0, 5), & x > 0 \end{cases}$$



## Conclusions

- Schéma de relaxation pour le système de Ripa :
  - ▶ Robuste
  - ▶ Entropique (topographie régulière)
  - ▶ Préservation exacte des équilibres du type lac au repos et approchée de tous les équilibres
- Schéma de relaxation pour les équations d'Euler avec gravité :
  - ▶ Robuste
  - ▶ Entropique
  - ▶ Préservation exacte des équilibres isotherme, polytropique et incompressible et approchée de tous les équilibres

## Perspectives

- Entropie pour une topographie discontinue
- Préservation plus précise des états d'équilibre

Merci pour votre attention !