PRES LUNAM
École Doctorale STIM
Sciences et Technologies de l'Information et Mathématiques

L M J L
UMR 6629 - Nantes

UNIVERSITÉ DE NANTES

Spécialité : Mathématiques
Laboratoire : LMJL
Équipe : Probabilités/statistique et calcul scientifique

Approximation d'ordre 2 des systèmes hyperboliques 2D sur maillages non-structurés

Vivien Desveaux
vivien.desveaux@univ-nantes.fr
Directeurs de thèse : Christophe Berthon, Yves Coudière

1. Introduction

- **Système hyperbolique de lois de conservations en 2D** :

$$\partial_t w + \partial_x f(w) + \partial_y g(w) = 0, \quad t \geq 0,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \tag{1}$$

$w : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \to \Omega$: vecteur des inconnues
$f, g : \Omega \to \mathbb{R}^d$: fonctions flux respectivement dans la direction x et y
$\Omega \subset \mathbb{R}^d$: ensemble convexe d'états physiquement admissibles

- **Objectif** : construire un schéma numérique qui
  → est précis (ordre 2)
  → préserve l'ensemble Ω
  → fonctionne pour tous les types de maillages
  → optimise la restriction sur le pas de temps

2. Méthode MUSCL

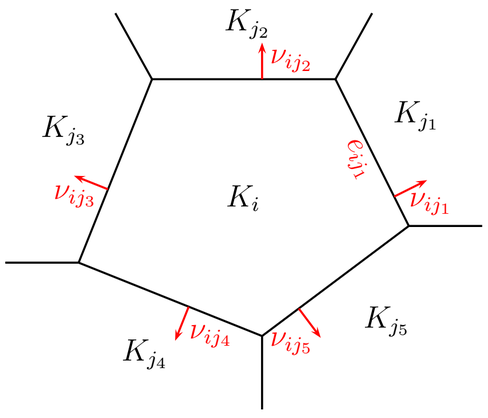

Fig. 1: *Géométrie et notations de la cellule K_i*

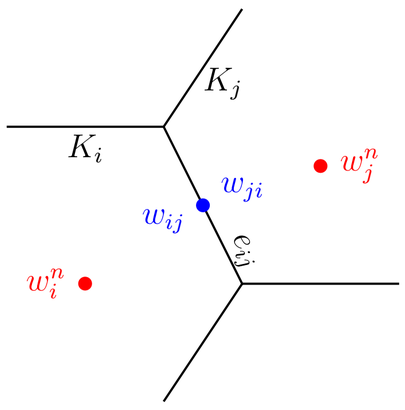

Fig. 2: *Localisation des états d'ordre un w_i^n et w_j^n et des états reconstruits w_{ij} et w_{ji}*

- **Schéma MUSCL sur la cellule K_i** (voir Fig. 1 et Fig. 2)

$$w_i^{n+1} = w_i^n - \frac{\Delta t}{|K_i|} \sum_{j \in \gamma(i)} |e_{ij}| \varphi\left(w_{ij}, w_{ji}, \nu_{ij}\right) \tag{2}$$

- **Hypothèse** : le schéma d'ordre un associé à (2) :

$$w_i^{n+1} = w_i^n - \frac{\Delta t}{|K_i|} \sum_{j \in \gamma(i)} |e_{ij}| \varphi\left(w_i^n, w_j^n, \nu_{ij}\right) \tag{3}$$

est de type Godunov.

- **Théorème 1 :** Si les états w_i^n sont dans Ω, $\forall i \in \mathbb{Z}$, et si la condition CFL (optimale)

$$\Delta t \frac{\mathcal{P}_i}{|K_i|} \max_{j \in \gamma(i)} \lambda_{ij} \leq 1, \quad \forall i \in \mathbb{Z}$$

est vérifiée, alors les états w_i^{n+1} donnés par (3) restent dans Ω.

- **Théorème 2 :** (voir Fig. 3) On suppose que les états w_i^n et les états reconstruits w_{ij} sont dans Ω, $\forall i \in \mathbb{Z}$, $\forall j \in \gamma(i)$, et que les états reconstruits vérifient la propriété de conservation

$$\sum_{j \in \gamma(i)} \frac{|T_{ij}|}{|K_i|} w_{ij} = w_i^n.$$

Si de plus, la condition CFL

$$\Delta t \max_{j \in \gamma(i)} \frac{\mathcal{P}_{ij}}{|T_{ij}|} \max_{k \in \gamma(i,j)} \left\{\lambda_{ij}, \lambda_{jk}^i\right\} \leq 1, \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

est vérifiée, alors les états w_i^{n+1} donnés par (2) restent dans Ω.

3. Schéma Dual Mesh Gradient Reconstruction

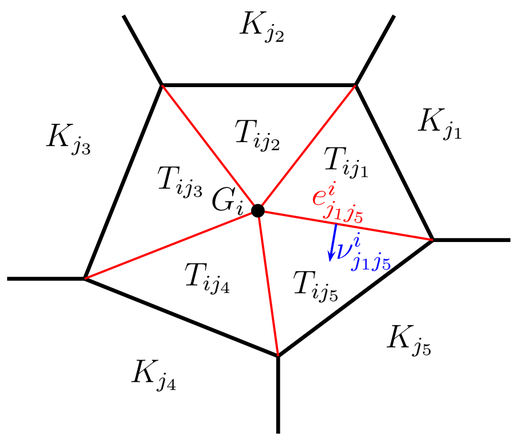

Fig. 3: *Décomposition de la cellule K_i en sous-cellules*

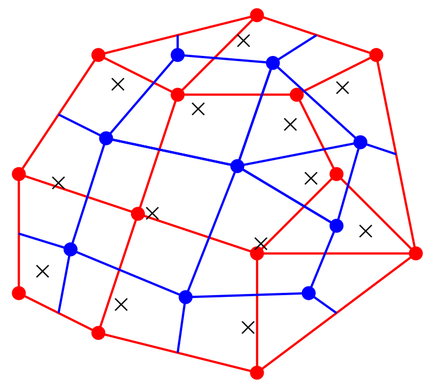

Fig. 4: *Maillage primal et maillage dual associé*

- On écrit un schéma MUSCL sur deux maillages : un maillage primal et son maillage dual associé (voir Fig. 4).

$$w_i^{p,n+1} = w_i^{p,n} - \frac{\Delta t}{|K_i^p|} \sum_{j \in \gamma^p(i)} |e_{ij}^p| \phi\left(w_{ij}^p, w_{ji}^p, \nu_{ij}^p\right)$$

$$w_i^{d,n+1} = w_i^{d,n} - \frac{\Delta t}{|K_i^d|} \sum_{j \in \gamma^d(i)} |e_{ij}^d| \phi\left(w_{ij}^d, w_{ji}^d, \nu_{ij}^d\right)$$

- **Procédure de reconstruction** (voir Fig. 3) :
  1. Reconstruction affine sur chaque sous-cellule T_{ij}
  2. Projection sur l'espace des fonctions affines sur la cellule K_i
  3. Limitation de la pente pour s'assurer que les états reconstruits restent dans Ω

4. Application : Réflexion d'un choc sur une rampe

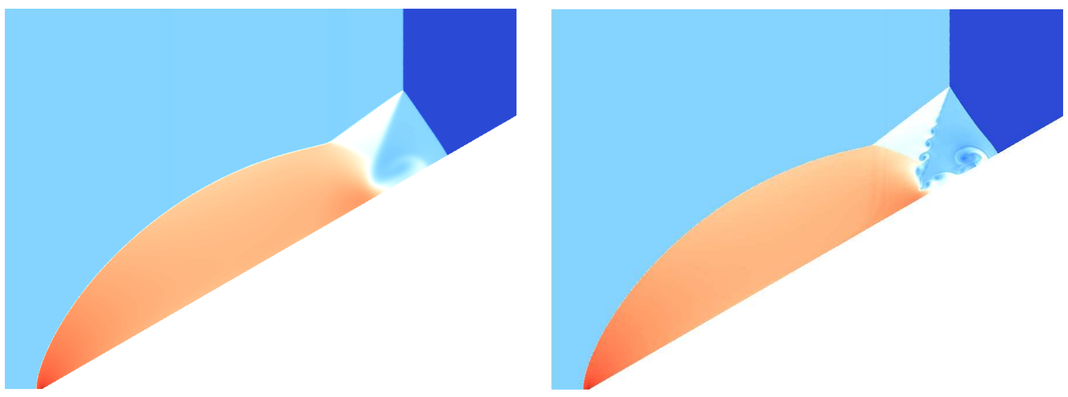

Fig. 5: *Gauche : schéma d'ordre 1 – Droite : Schéma DMGR*

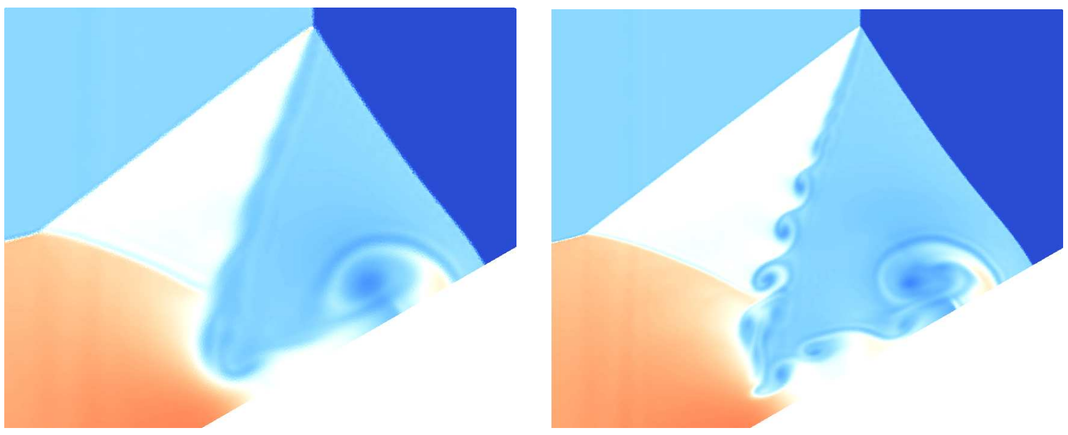

Fig. 6: *Zoom sur la structure complexe – Gauche : schéma d'ordre 1 – Droite : Schéma DMGR*