Non uniforme hyperbolicité à travers un exemple

Clément Lefevre

Laboratoire Amiénois de Mathématique Fondamentale et Appliquée
Université de Picardie Jules Verne

Séminaire doctorant

Introduction

- Premier modèle d'évolution d'une population animale :

$$u_{n+1} = ru_n.$$

$\rightarrow$ Évolution pas assez réaliste.

Introduction

- Premier modèle d'évolution d'une population animale :

$$u_{n+1} = ru_n.$$

$\rightarrow$ Évolution pas assez réaliste.

- Second modèle, ajout de contraintes extérieures :

$$u_{n+1} = ru_n(P - u_n).$$

$\rightarrow$ Observation de comportements très différents selon les paramètres.

Introduction

- Étude de la fonction $f_\lambda(x) = 4\lambda x(1-x)$ avec x et λ dans $[0,1]$ et ses itérées.

Introduction

- Étude de la fonction $f_\lambda(x) = 4\lambda x(1-x)$ avec x et λ dans $[0,1]$ et ses itérées.
- Années 1970 : premiers aperçus du diagramme de bifurcation.

Introduction

- Étude de la fonction $f_\lambda(x) = 4\lambda x(1-x)$ avec x et λ dans $[0,1]$ et ses itérées.
- Années 1970 : premiers aperçus du diagramme de bifurcation.
- Étude des distances entre deux changements de comportement : existence de la constante de Feigenbaum.

Introduction

- Étude de la fonction $f_\lambda(x) = 4\lambda x(1-x)$ avec x et λ dans $[0,1]$ et ses itérées.
- Années 1970 : premiers aperçus du diagramme de bifurcation.
- Étude des distances entre deux changements de comportement : existence de la constante de Feigenbaum.
- Années 1980 : présence en hydrodynamique, acoustique, électronique.

Introduction

- Étude de la fonction $f_\lambda(x) = 4\lambda x(1-x)$ avec x et λ dans $[0,1]$ et ses itérées.
- Années 1970 : premiers aperçus du diagramme de bifurcation.
- Étude des distances entre deux changements de comportement : existence de la constante de Feigenbaum.
- Années 1980 : présence en hydrodynamique, acoustique, électronique.

$\rightarrow$ Comprendre $(f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ où x_0 est donné et $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$.

Introduction

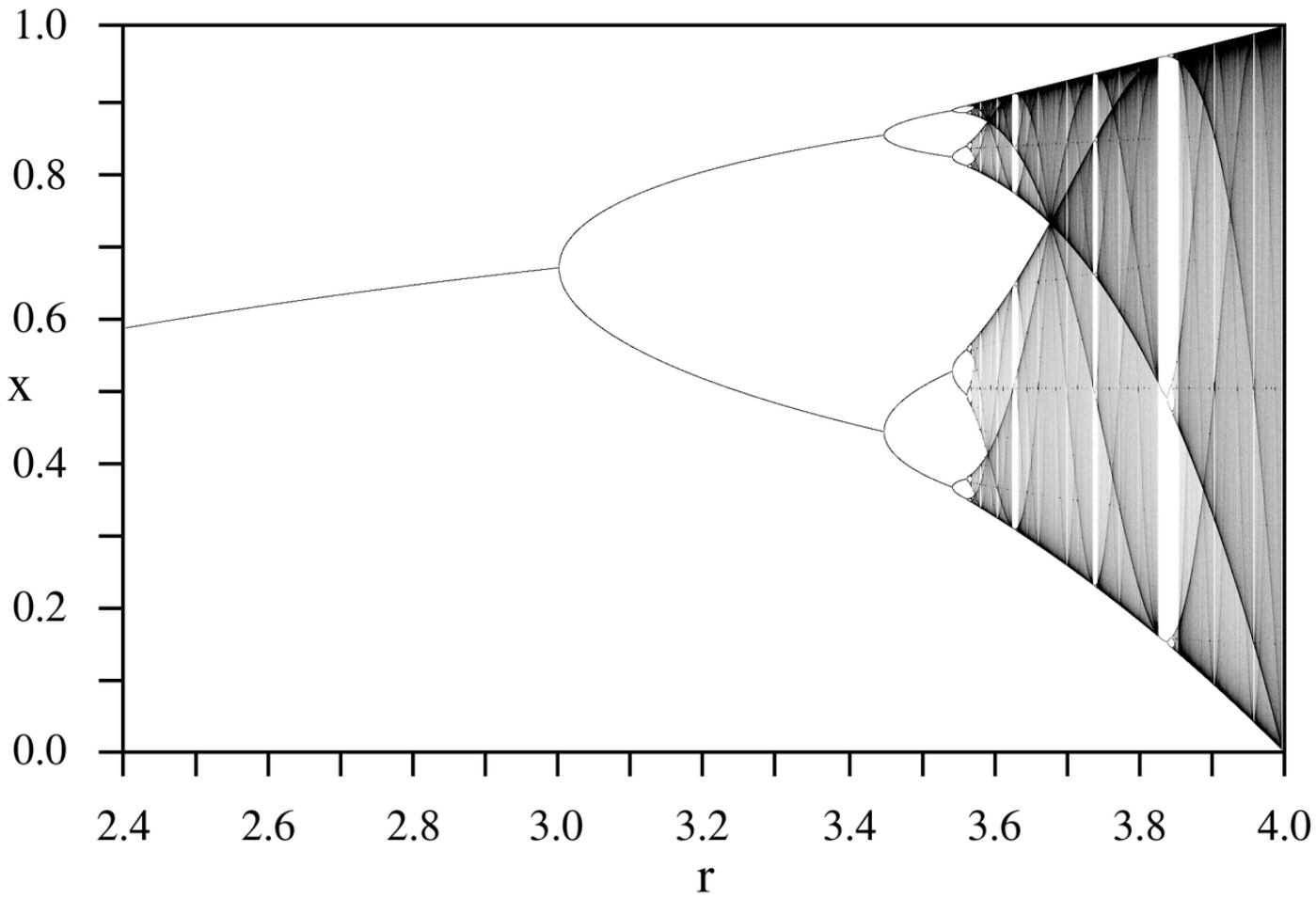

Figure – Diagramme de bifurcation pour une fonction logistique

Notions de systèmes dynamiques

Définition

Un *point fixe* d'une application f est un point p tel que $f(p) = p$.
Un point fixe pour une itérée de f est dit *périodique* et le plus petit n tel que $f^n(p) = p$ est sa *période*.

Notions de systèmes dynamiques

Définition

Un *point fixe* d'une application f est un point p tel que $f(p) = p$.
Un point fixe pour une itérée de f est dit *périodique* et le plus petit n tel que $f^n(p) = p$ est sa *période*.

Définition

Soient I un intervalle et $f : I \to I$ de classe C^1 admettant un point fixe p. p est *attractif* (ou stable) si de manière équivalente :

- il existe un voisinage V de p tel que pour tout $x_0 \in V$, $f^n(x_0) \to p$ quand $n \to +\infty$,
- $|f'(p)| < 1$.

Notions de systèmes dynamiques

Définition

Un point fixe p est dit *répulsif* (ou instable) si de manière équivalente :

- il existe un voisinage V de p tel que pour tout $x_0 \in V \setminus \{p\}$, $(f^n(x_0))_n$ sorte de V.
- $|f'(p)| > 1$.

Notions de systèmes dynamiques

Définition

Un point fixe p est dit *répulsif* (ou instable) si de manière équivalente :

- il existe un voisinage V de p tel que pour tout $x_0 \in V \setminus \{p\}$, $(f^n(x_0))_n$ sorte de V.
- $|f'(p)| > 1$.

Remarque

Ces définitions s'appliquent aux orbites périodiques.

Notions de systèmes dynamiques

Définition

Deux applications $f : I \to I$ et $g : J \to J$ continues sont *conjuguées* s'il existe un homéomorphisme $\phi : J \to I$ tel que $f \circ \phi = \phi \circ g$.

Notions de systèmes dynamiques

Définition

Deux applications $f : I \to I$ et $g : J \to J$ continues sont *conjuguées* s'il existe un homéomorphisme $\phi : J \to I$ tel que $f \circ \phi = \phi \circ g$.

Remarque

f et g possèdent alors le même nombre de points fixes et ces derniers sont de même nature.

Notions de systèmes dynamiques

Définition

Deux applications $f : I \to I$ et $g : J \to J$ continues sont *conjuguées* s'il existe un homéomorphisme $\phi : J \to I$ tel que $f \circ \phi = \phi \circ g$.

Remarque

f et g possèdent alors le même nombre de points fixes et ces derniers sont de même nature.

Définition

Une famille d'applications $F_c : I \to I$ dépendant d'un paramètre c admet une *bifurcation* en c_0 si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $c \in]c_0 - \varepsilon, c_0 + \varepsilon[$ tel que F_c et F_{c_0} ne soient pas conjuguées.

$0 < \lambda < 1/4$

Proposition

L'application $f_\lambda : x \mapsto 4\lambda x(1-x)$ a une bifurcation en λ_0 ssi il existe un point fixe p de f_{λ_0} tel que $f'_{\lambda_0}(p) = \pm 1$.

$0 < \lambda < 1/4$

Proposition

L'application $f_\lambda : x \mapsto 4\lambda x(1-x)$ a une bifurcation en λ_0 ssi il existe un point fixe p de f_{λ_0} tel que $f'_{\lambda_0}(p) = \pm 1$.

- x et λ appartiennent à [0,1].
- 0 est fixe pour f_λ.

$0 < \lambda < 1/4$

Proposition

L'application $f_\lambda : x \mapsto 4\lambda x(1-x)$ a une bifurcation en λ_0 ssi il existe un point fixe p de f_{λ_0} tel que $f'_{\lambda_0}(p) = \pm 1$.

- x et λ appartiennent à [0,1].
- 0 est fixe pour f_λ.
- Comme $f'_\lambda(x) = 4\lambda(1-2x)$, 0 est attractif lorsque $4\lambda < 1$.

$0 < \lambda < 1/4$

Proposition

L'application $f_\lambda : x \mapsto 4\lambda x(1-x)$ a une bifurcation en λ_0 ssi il existe un point fixe p de f_{λ_0} tel que $f'_{\lambda_0}(p) = \pm 1$.

- x et λ appartiennent à [0,1].
- 0 est fixe pour f_λ.
- Comme $f'_\lambda(x) = 4\lambda(1-2x)$, 0 est attractif lorsque $4\lambda < 1$.

$\rightarrow$ Un seul point fixe attractif 0.

$1/4 < \lambda < 3/4$

- 0 devient répulsif.
- Autre point fixe ?

$1/4 < \lambda < 3/4$

- 0 devient répulsif.
- Autre point fixe ?

$$f_\lambda(x) = x \Leftrightarrow x\left(x + \frac{1}{4\lambda} - 1\right) = 0.$$

- $x_* = 1 - \frac{1}{4\lambda}$ est bien dans $[0, 1]$.

$1/4 < \lambda < 3/4$

- 0 devient répulsif.
- Autre point fixe ?

$$f_\lambda(x) = x \Leftrightarrow x\left(x + \frac{1}{4\lambda} - 1\right) = 0.$$

- $x_* = 1 - \frac{1}{4\lambda}$ est bien dans $[0, 1]$.
- $f'_\lambda(x_*) = 2 - 4\lambda$ donc x_* est attractif lorsque $\frac{1}{4} < \lambda < \frac{3}{4}$.

$1/4 < \lambda < 3/4$

- 0 devient répulsif.
- Autre point fixe ?

$$f_\lambda(x) = x \Leftrightarrow x\left(x + \frac{1}{4\lambda} - 1\right) = 0.$$

- $x_* = 1 - \frac{1}{4\lambda}$ est bien dans $[0, 1]$.
- $f'_\lambda(x_*) = 2 - 4\lambda$ donc x_* est attractif lorsque $\frac{1}{4} < \lambda < \frac{3}{4}$.

$\rightarrow$ Deux points fixes : 0 (répulsif) et $1 - \frac{1}{4\lambda}$ (attractif).

$3/4 < \lambda < \lambda_2 \approx 0.862$

- $x_* = 1 - \frac{1}{4\lambda}$ devient répulsif.
- Cycle périodique de période 2 ?

$3/4 < \lambda < \lambda_2 \approx 0.862$

- $x_* = 1 - \frac{1}{4\lambda}$ devient répulsif.
- Cycle périodique de période 2 ?

$$f_\lambda^2(x) = x$$
$$\Leftrightarrow (4\lambda)^3 x \left(x - 1 + \tfrac{1}{4\lambda}\right)\left(x^2 - \left(1 + \tfrac{1}{4\lambda}\right)x + \tfrac{1}{4\lambda}\left(1 + \tfrac{1}{4\lambda}\right)\right) = 0.$$

$3/4 < \lambda < \lambda_2 \approx 0.862$

- $x_* = 1 - \frac{1}{4\lambda}$ devient répulsif.
- Cycle périodique de période 2 ?

$$f_\lambda^2(x) = x$$
$$\Leftrightarrow (4\lambda)^3 x \left(x - 1 + \tfrac{1}{4\lambda}\right)\left(x^2 - \left(1 + \tfrac{1}{4\lambda}\right)x + \tfrac{1}{4\lambda}\left(1 + \tfrac{1}{4\lambda}\right)\right) = 0.$$

- Apparition de deux racines réelles lorsque $4\lambda > 3$.
- $(f_\lambda^2)'(x) = (4\lambda)^2(1-2x)(1-8\lambda x(1-x))$: le 2-cycle est attractif jusqu'à $\lambda_2 \approx 0.862$.

$3/4 < \lambda < \lambda_2 \approx 0.862$

- $x_* = 1 - \frac{1}{4\lambda}$ devient répulsif.
- Cycle périodique de période 2 ?

$$f_\lambda^2(x) = x$$
$$\Leftrightarrow (4\lambda)^3 x \left(x - 1 + \tfrac{1}{4\lambda}\right)\left(x^2 - \left(1 + \tfrac{1}{4\lambda}\right)x + \tfrac{1}{4\lambda}\left(1 + \tfrac{1}{4\lambda}\right)\right) = 0.$$

- Apparition de deux racines réelles lorsque $4\lambda > 3$.
- $(f_\lambda^2)'(x) = (4\lambda)^2(1-2x)(1-8\lambda x(1-x))$: le 2-cycle est attractif jusqu'à $\lambda_2 \approx 0.862$.

$\rightarrow$ Deux points fixes répulsifs et un 2-cycle attractif.

Et après λ_2 ?

- Juste après $\lambda_2 \approx 0.862$, le 2-cycle devient répulsif et un 4-cycle attractif apparaît.

Et après λ_2 ?

- Juste après $\lambda_2 \approx 0.862$, le 2-cycle devient répulsif et un 4-cycle attractif apparaît.
- Succession de bifurcations en doublant la période du cycle attractif jusqu'à un paramètre limite $\lambda_* \approx 0.892$.

Et après λ_2 ?

- Juste après $\lambda_2 \approx 0.862$, le 2-cycle devient répulsif et un 4-cycle attractif apparaît.
- Succession de bifurcations en doublant la période du cycle attractif jusqu'à un paramètre limite $\lambda_* \approx 0.892$.
- Après λ_* : dynamique chaotique ou périodique.

Et après λ_* ?

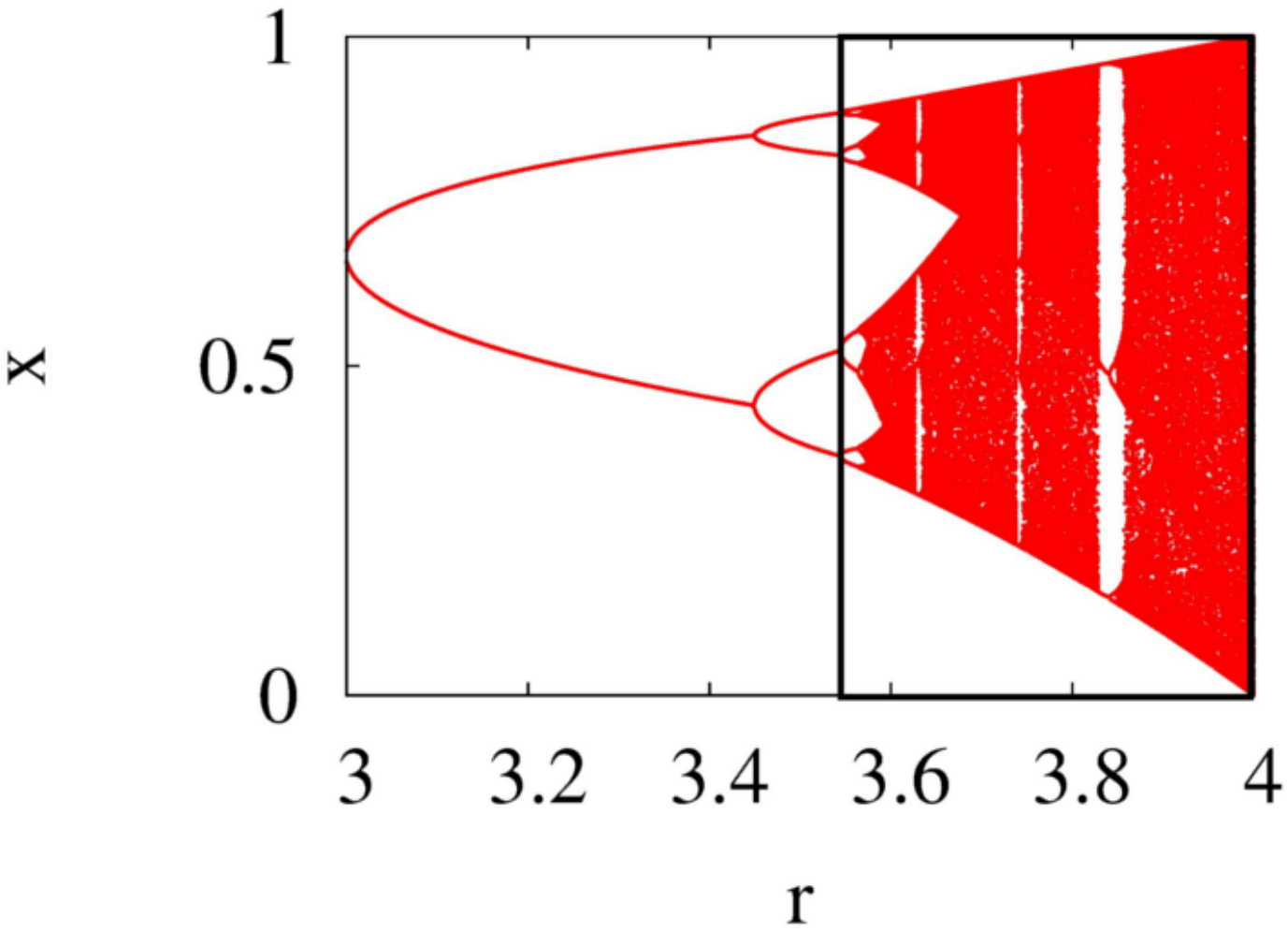

Figure – Après le paramètre de Feigenbaum λ_*

Lien avec le Mandelbrot

f_λ est conjuguée à $P_c : x \mapsto x^2 + c$ où $c = 2\lambda(1 - 2\lambda)$.

Lien avec le Mandelbrot

f_λ est conjuguée à $P_c : x \mapsto x^2 + c$ où $c = 2\lambda(1 - 2\lambda)$.

Définition

L'*ensemble de Mandelbrot* est l'ensemble des paramètres c pour lesquels $(P_c^n(0))_n$ reste bornée.

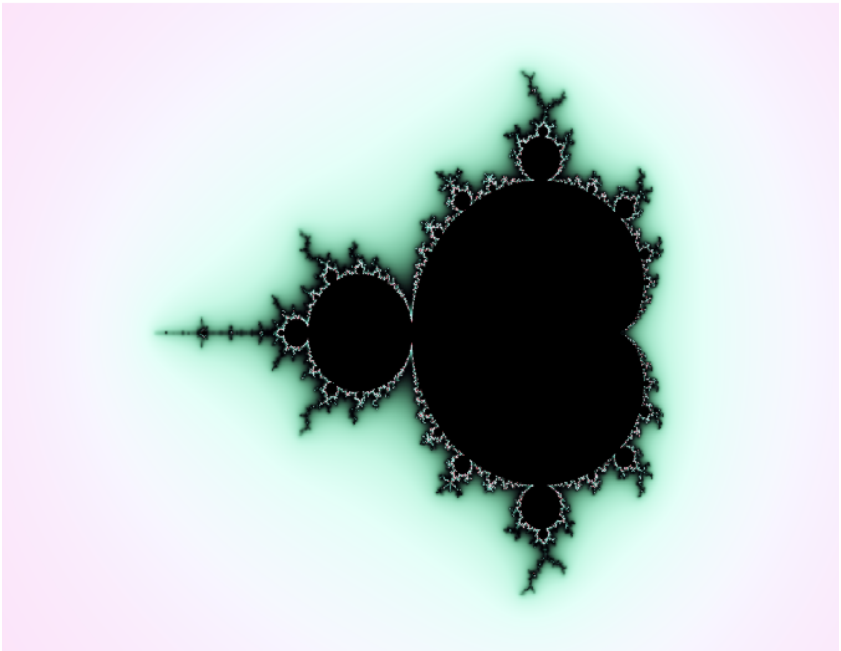

Figure – Ensemble de Mandelbrot

Lien avec le Mandelbrot

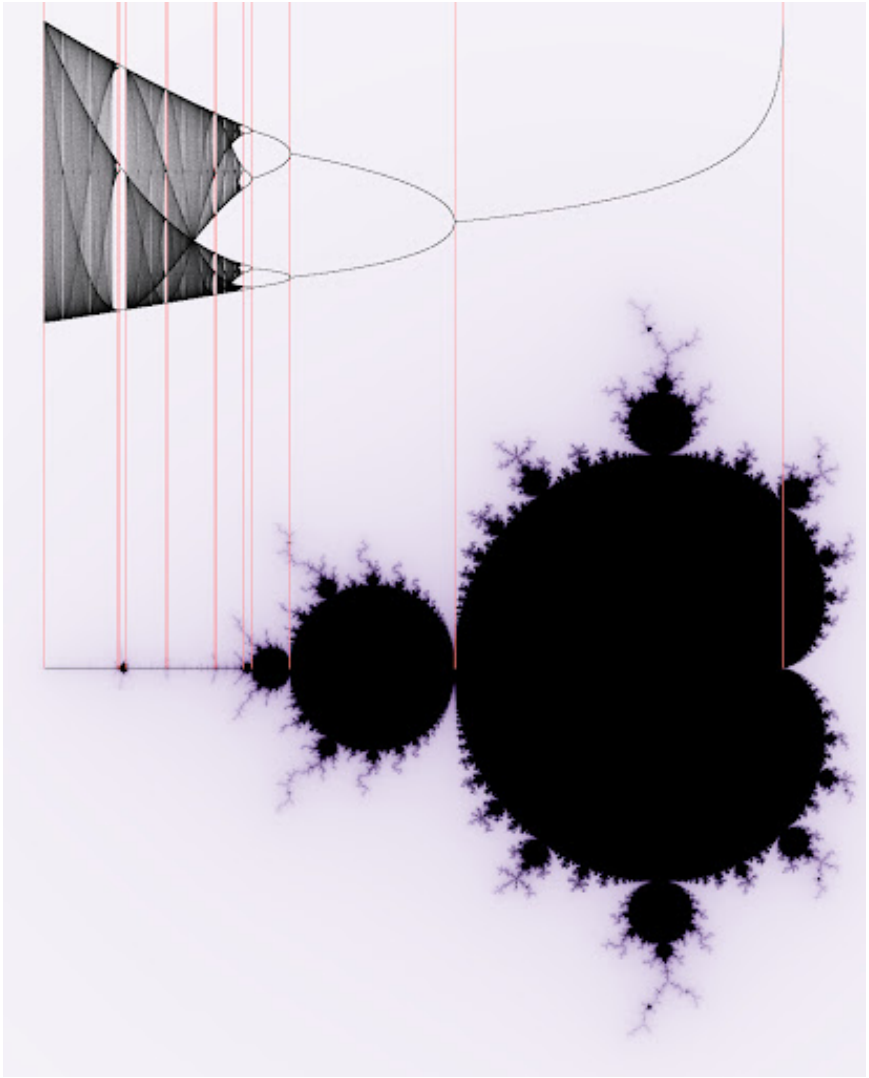

Figure – Diagramme de bifurcation et ensemble de Mandelbrot

Hyperbolicité

- Fraction rationnelle $f(z) = \frac{a_0+a_1z+\cdots+a_dz^d}{b_0+b_1z+\cdots+b_dz^d}$.

Définition

Une fraction rationnelle est dite *(uniformément) hyperbolique* si tous ses points critiques sont attirés vers un cycle attractif.

Hyperbolicité

- Fraction rationnelle $f(z) = \frac{a_0+a_1z+\cdots+a_dz^d}{b_0+b_1z+\cdots+b_dz^d}$.

Définition

Une fraction rationnelle est dite *(uniformément) hyperbolique* si tous ses points critiques sont attirés vers un cycle attractif.

- Bonne compréhension de la dynamique.
- Pour $0 \leq \lambda \leq \lambda_*$, f_λ est hyperbolique.

Hyperbolicité

- Fraction rationnelle $f(z) = \frac{a_0+a_1z+\cdots+a_dz^d}{b_0+b_1z+\cdots+b_dz^d}$.

Définition

Une fraction rationnelle est dite *(uniformément) hyperbolique* si tous ses points critiques sont attirés vers un cycle attractif.

- Bonne compréhension de la dynamique.
- Pour $0 \leq \lambda \leq \lambda_*$, f_λ est hyperbolique.

Résultat de Jakobson

Il existe un ensemble $E \subset [0,1]$ de mesure de Lebesgue strictement positive tel que, pour tout $\lambda \in E$, f_λ n'est pas uniformément hyperbolique.

Hyperbolicité

Conjecture

L'ensemble des fractions rationnelles hyperboliques forme un ouvert dense dans l'ensemble des fractions rationnelles.

Hyperbolicité

Conjecture

L'ensemble des fractions rationnelles hyperboliques forme un ouvert dense dans l'ensemble des fractions rationnelles.

Définition

Une fraction rationnelle f est dite *Collet-Eckmann* s'il existe deux constantes $C > 0$ et $\gamma > 0$ telles que pour tout point critique c de f et tout $n \geq 0$, on a

$$|(f^n)'(f(c))| \geq Ce^{\gamma n}. \qquad \text{(CE)}$$

Hyperbolicité

Conjecture

L'ensemble des fractions rationnelles hyperboliques forme un ouvert dense dans l'ensemble des fractions rationnelles.

Définition

Une fraction rationnelle f est dite *Collet-Eckmann* s'il existe deux constantes $C > 0$ et $\gamma > 0$ telles que pour tout point critique c de f et tout $n \geq 0$, on a

$$|(f^n)'(f(c))| \geq Ce^{\gamma n}. \qquad \text{(CE)}$$

- Une fraction rationnelle (CE) n'est pas hyperbolique.
- f_1 est (CE) : $\frac{1}{2} \mapsto 1 \mapsto 0$ et $f_1'(0) = 4$.

Hyperbolicité

- Aspenberg et Rees : adaptation de la théorie de Benedicks-Carleson au cas complexe.
  $\rightarrow$ Existence d'un ensemble de mesure de Lebesgue positive de fractions rationnelles Collet-Eckmann.

Hyperbolicité

- Aspenberg et Rees : adaptation de la théorie de Benedicks-Carleson au cas complexe.
  $\rightarrow$ Existence d'un ensemble de mesure de Lebesgue positive de fractions rationnelles Collet-Eckmann.
- Astorg, Gauthier, Mihalache et Vigny : théorie du pluripotentiel et mesure de bifurcation.
  $\rightarrow$ Existence d'un ensemble de mesure de Lebesgue positive de fractions rationnelles Collet-Eckmann approchées par des fractions rationnelles hyperboliques.

Mon travail de thèse

- Étude d'une famille holomorphe $(f_t)_t$ de fractions rationnelles de même degré $d > 1$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ avec $t \in \mathbb{D}(0,1)$.

Définition

Une fraction rationnelle f est dite *sommable* si pour tout point critique c de f, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{|(f^n)'(f(c))|} < \infty. \qquad \text{(SC)}$$

Mon travail de thèse

- Étude d'une famille holomorphe $(f_t)_t$ de fractions rationnelles de même degré $d > 1$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ avec $t \in \mathbb{D}(0,1)$.

Définition

Une fraction rationnelle f est dite *sommable* si pour tout point critique c de f, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{|(f^n)'(f(c))|} < \infty. \qquad \text{(SC)}$$

- But : approcher une application (SC) par des fractions rationnelles Collet-Eckmann.

Mon travail de thèse

- Adaptation du travail de Gao et Shen dans le cadre complexe.

Mon travail de thèse

- Adaptation du travail de Gao et Shen dans le cadre complexe.
- Obtention de bonnes estimées pour le paramètre central.
  $\rightarrow$ Estimées des dérivées le long de certaines orbites.

Mon travail de thèse

- Adaptation du travail de Gao et Shen dans le cadre complexe.
- Obtention de bonnes estimées pour le paramètre central.
  $\rightarrow$ Estimées des dérivées le long de certaines orbites.
- Propagation aux f_t proches via des périodes liantes.
  $\rightarrow$ Sommabilité partielle, estimées des dérivées pour des temps de retour particuliers.

Mon travail de thèse

- Adaptation du travail de Gao et Shen dans le cadre complexe.
- Obtention de bonnes estimées pour le paramètre central.
  $\rightarrow$ Estimées des dérivées le long de certaines orbites.
- Propagation aux f_t proches via des périodes liantes.
  $\rightarrow$ Sommabilité partielle, estimées des dérivées pour des temps de retour particuliers.
- Conséquences dans l'espace des paramètres.
  $\rightarrow$ Construction d'une famille spéciale de boîtes de paramètres, estimées des profondeurs de temps de retour.

Merci pour votre attention !