Résolution numérique d'une équation non linéaire (notes de cours)

Jean-Paul Chehab
Université de Picardie Jules Vernes
LAMFA CNRS 6140

version du 6 mai 2009

Contents

1 Introduction **2**
1.1 Vitesse de convergence . . . 2
1.2 Conditionnement d'un problème . . . 2

2 Point fixe **3**
2.1 Rappels . . . 3
2.2 Mise en œuvre . . . 5

3 La recherche d'un zero **6**
3.1 La méthode de dichotomie . . . 6
3.1.1 Une preuve constructive du TVI . . . 6
3.1.2 Mise en œuvre . . . 7
3.2 De la corde à Newton . . . 8
3.2.1 La méthode de la corde . . . 8
3.2.2 Interprétation géométrique . . . 10
3.2.3 Un exemple illustre . . . 12
3.3 Méthode de la sécante . . . 13
3.3.1 Construction . . . 13
3.3.2 Illustration . . . 15
3.4 Méthode de la fausse position ou *regula falsi* . . . 15

4 Accelération de convergence **16**
4.1 Généralités . . . 16
4.2 Méthodes du Δ^2 d'Aitken et de Steffensen . . . 17
4.2.1 Constructions . . . 17
4.2.2 Illustration . . . 18
4.2.3 Méthode de Steffensen . . . 19

1 Introduction

On présente ici des méthodes itératives pour résoudre el problème

$$\text{Soit } f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \text{ trouver } \xi \in I \text{ tel que } f(\xi) = 0$$

Une méthode itérative consiste à construire une suite $x^{(k)}$ qui converge vers la solution du problème, ξ ici. Cette convergence se fera plus ou moins "rapidement".

1.1 Vitesse de convergence

Commençons par définir la vitesse de convergence

Définition 1 *Une suite $x^{(k)}$ converge vers ξ à l'ordre p si*

$$\exists C > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N} / \lim_{k \to +\infty} \frac{|x^{(k+1)} - \xi|}{|x^{(k)} - \xi|^p} \leq C, \ \forall k \geq k_0$$

C est le facteur de convergence.

Lorsque $\lim_{k \to +\infty} \dfrac{|x^{(k+1)} - \xi|}{|x^{(k)} - \xi|} = c < 1$, on parle de convergence géométrique et de converge super-linéairement quand $p > 1$. La suite $x^{(k)}$ converge *quadratiquement* pour $p = 2$ et *cubiquement* pour $p = 3$. Toutes ces suites convergent relativement raisonnablement, c'est à dire qu'on peut espérer obtenir numériquement une bonne approximation de la solution en itérant assez. Il existe pourtant des suites qui convergent tellement lentement, que le calcul numérique de leur limite est entâché des erreurs d'arrondis ou tout simplement ne converge pas. Ces suites correspondent au cas $p = 1$ et $c = 1$, elles sont dites *logarithmiques*, on pourra consulter [1].

Bien entendu, sauf cas exceptionnel, la solution n'est pas connue à l'avance et, les calculs ne pouvant être effectués indéfiniment, il est nécessaire de disposer d'un critère d'arrêt des itérations. Si *l'erreur à l'étape k* $e^{(k)} = x^{(k)} - \xi$ n'est pas connue (sinon la solution du problème le serait :!) le *résidu à l'étape* k, $r^{(k)} = f(x^{(k)})$, est accessible. La valeur courante $x^{(k)}$ sera considérée suffisamment proche de la solution ξ lorsque la valeur absolue du résidu $r^{(k)}$ sera plus petite qu'un $\epsilon > 0$ donné. Le nombre ϵ fixe *a priori* la précision avec laquelle on veut calculer la solution du problème et en général ce nombre est pris petit $\epsilon \simeq 10^{-5}, 10^{-10}$.

1.2 Conditionnement d'un problème

Les problèmes ne sont jamais résolus exactement ,tout d'abord parce qu'on ne peut pas attendre que $k \to \infty$ et ensuite que les calculs sont effectués sur ordinateur en précision finie et que les erreurs d'arrondis s'accumulent. Une question cruciale pour la fiabilité des résultats est de savoir si ces erreurs restent "confinées" durant les calculs où au contraire si elles peuvent se propager. La notion de *conditionnement d'un problème* permet de caractériser ce phénomène mais aussi de le quantifier.

Considérons l'équation

$$f(x) - a = 0$$

ici f sera supposée aussi régulière que nécessaire, par exemple $\mathcal{C}^1(I)$. Nous nous intéressons aux variations de la solution lors que la donnée a varie : dans un monde idéal la solution de l'équation change peu si a varie faiblement. Supposons que f admette une fonction réciproque sur I. On a alors

$$f^{-1}(a) = \xi \text{ et } (f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'(\xi)}$$

Soient $a' = a + h$ et ξ' la solution de $f(\xi') - a' = 0$. Nous avons

$$\xi' - \xi = f^{-1}(a') - f^{-1}(a) \simeq (a' - a)(f^{-1})'(a)$$

Ainsi

$$\xi' - \xi \simeq \frac{h}{f'(\xi)}$$

La quantité $\frac{1}{|f'(\xi)|}$ mesure donc la variation relative de la solution et des données. On se donne la

Définition 2 *Les conditionnements absolus et relatifs du problèmes sont respectivement les nombres*

$$K_{abs}(a) = \frac{1}{|f'(\xi)|}, \quad K_{rel} = \frac{a}{|\xi||f'(\xi)|}$$

Exemple (voir aussi [3])
Soit $f(x) = (x-1)^4$ et $f_\epsilon(x) = (x-1)^4 - \epsilon$. Les racines de f sont $\xi = 1$ avec multiplicité égale à 4, celles de f_ϵ sont

$$\xi = 1 + \sqrt[4]{\epsilon}$$

Si $\epsilon = 10^{-4}$, on trouve comme racines

$$\xi_1 = 1.1,\ \xi_2 = 1 + i0.1,\ \xi_2 = 1 - i0.1,\ \xi_4 = 0.9 \text{ où } i = \sqrt{-1}.$$

La recherche des racines d'un polynôme est un problème mal conditionné : lorsque la perturbation ϵ vaut 10^{-4} la variation relative du résultat vaut 10^{-1}, soit une erreur de 10% .

2 Point fixe

2.1 Rappels

Commençons directement par rappeler le

Théorème 3 *Soit $I \subset \mathbb{R}$, un ensemble fermé. soit f une fonction continue sur I. On suppose que*

- *Soit $f : I \to I$*
- *f est fortement contractante, i.e.*

$$\exists L \in]0,1[, |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|,\ \forall x, y \in I$$

Alors

- *Il existe un unique point fixe ξ de f dans I*
- *La suite*

$$\left\{ \begin{array}{ll} x^{(0)} \text{ donné dans } I & \\ \text{Pour } k = 0, \cdots & \\ \text{Poser} & x^{(k+1)} = f(x^{(k)}) \end{array} \right.$$

Preuve. Tout d'abord, supposons qu'un point fixe ξ existe et établissons son l'unicité. Soient ξ_1 et ξ_2 deux points fixes de f : $f(\xi_1) = \xi_1$ et $f(\xi_2) = \xi_2$. Nous avons alors

$$|\xi_1 - \xi_2| = |f(\xi_1) - f(\xi_2)| \leq L|\xi_1 - \xi_2|$$

donc

$$(1 - L)|\xi_1 - \xi_2| \leq 0$$

ce qui entraîne $\xi_1 = \xi_2$ car $1 - L > 0$.
L'existence de ξ s'établit de manière constructive, en montrant que $(x^{(k)})_k$ est une suite de Cauchy.

Soit $p \geq q$ deux entiers. Nous pouvons écrire

$$|x^{(p)} - x^{(q)}| \leq |x^{(p)} - x^{(p-1)}| + \cdots |x^{(q+1)} - x^{(q)}|$$

or

$$|x^{(p)} - x^{(p-1)}| = |f(x^{(p-1)}) - f(x^{(p-2)})| \leq L|x^{(p-1)} - x^{(q-1)}| \leq \cdots \leq L^{p-q-1}|x^{(q+1)} - x^{(q)}|$$

Ainsi

$$|x^{(p)} - x^{(q)}| \leq \sum_{k=0}^{p-q-1} L^k|x^{(q+1)} - x^{(q)}| \leq \frac{1}{1-L}|x^{(q+1)} - x^{(q)}| \leq \frac{1}{1-L}L^q|x^{(1)} - x^{(0)}|$$

La suite $(x^{(k)})_k$ est bien de Cauchy. Elle converge donc dans I, qui est fermé et donc complet dans $\mathbb{R}$. Soit ξ sa limite. Par continuité de f, nous avons forcément

$$\xi = f(\xi).$$

■ L'algorithme du point fixe s'énonce comme suit

`Algorithme du point fixe de Picard`

`Initialisation`	x_0 donné
`Pour` $k = 0, \cdots$	
`poser`	$x^{(k+1)} = f(x^{(k)})$

Nous donnons ci-dessous une illustration graphique de cette méthode pour le calcul du point fixe de la fonction $f(x) = e^x$ dans $[0, 1]$.

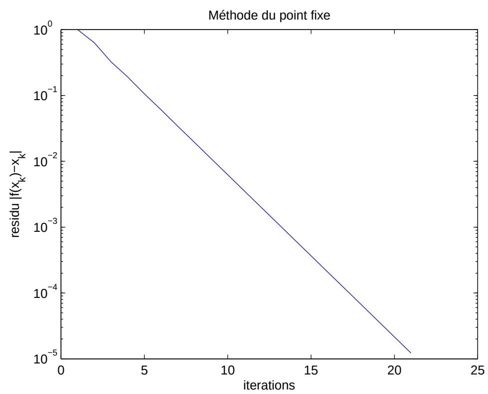
Nous avons un résultat plus précis si f est $\mathcal{C}^1$.

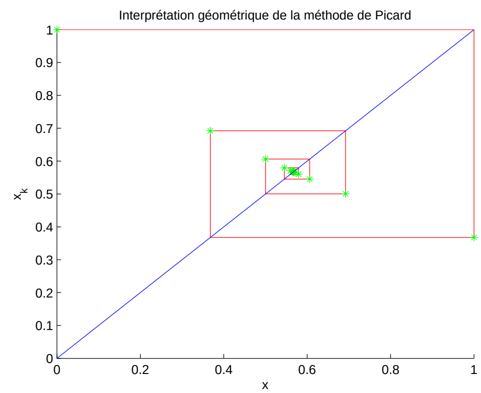
Théorème 4 *Soit $I = [a, b]$ un intervalle fermé et borné et f une fonction telle que*

i $\forall x \in [a, b], f(x) \in [a, b]$

ii $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$

iii $\exists \kappa \in]0, 1[/ |f'(x)| \leq \kappa, \; \forall x \in [a, b]$





Alors f a un unique point fixe x dans $[a, b]$ et la suite $x^{(k)}$ converge vers x^* pour tout $x^{(0)} \in [a, b]$. De plus, nous avons

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{x^{(k+1)} - x}{x^{(k)} - x} = f'(x^*)$$

Preuve. L'hyposthèse *iii* implique que f est fortement contractante, c'est une conséquence du théorème des accroissements finis. En effet, pour tout x, y de I, il existe un ξ de I tel que

$$f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y)$$

il en découle que

$$|f(x) - f(y)| \leq \kappa |x - y|$$

Les hypothèses du théorème précédent sont satisfaites, nous sommes assurés de l'existence et de l'unicité du point fixe x^* de f ainsi que de la convergence de la suite $x^{(k)}$.
Pour établir le résultat de vitesse de convergence, on écrit

$$x^{(k+1)} - x^* = f(x^{(k)}) - f(x^*) = f'(\xi^{(k)})(x^{(k)} - x^*)$$

Comme $x^{(k)}$ converge vers x^* et que $\xi^{(k)}$ est compris entre $x^{(k)}$ et x^*, $\xi^{(k)}$ converge vers x^* et, puis que f est $\mathcal{C}^1([a, b])$, $\lim_{k \to +\infty} f'(\xi^{(k)}) = f'(x^*)$, d'où le résultat. ■

2.2 Mise en œuvre

Les théorèmes précédents nous assurent la convergence de la suite $x^{(k)}$ vers x^*, c'est à dire que pour une précision donnée, il existe un rang à partir duquel l'approximation de x^* fournie par la suite est satisfaisante au regard e la précision demandée. En termes plus simples, comme il n'est pas possible d'un point de vue pratique de faire tendre k vers l'infini, on peut s'assurer d'une bonne approximation numérique de x^* pour k assez grand. On peut parfois calculer cette valeur de k, mais pas toujours. Un bon test pratique pour savoir si l'on est proche ou pas de x^* est de calculer la valeur absolue du résidu $r_k = |f(x^{(k)} - x^{(k)}|$. Ce dernier tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini. On arrêtera donc les itérations quand r_k sera plus petit qu'un ϵ positif donné. Un "garde fou" consiste à ajouter comme condition de ne pas faire plus d'un nombre maximum d'itérations. Ces critères permettant d'arrêter les itérations avec uneprécision voulue s'appelles critères d'arrêt. La méthode du point fixe se reformule d'un point de vue pratique (sur ordinateur) comme suit :

`Algorithme du point fixe de Picard (version pratique)`

`Initialisation`	x_0 donné
	$k = 0$, $r_0 = \|x^{(0)} - f(x^{(0)})\|$
`Tant que` $k \leq N_{max}$ `ET` $r_k > \epsilon$ `faire`	
`poser`	$x^{(k+1)} = f(x^{(k)})$
	$r_{k+1} = \|x^{(k+1)} - f(x^{(k+1)})\|$
	$k = k + 1$

3 La recherche d'un zero

3.1 La méthode de dichotomie

La méthode de Dichotomie ou de bissection, selon que l'on prenne l'origine grecque ou latine, s'adresse à la résolution numérique d'un zéro d'une fonction localisé dans un intervalle donné. Le processus itératif associé repose sur la construction de deux suites adjacentes convergeant vers la limite recherchée. Rappelons tout d'abord les définitions et résultats suivants

Définition 5 *On dit que deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes si*

i $a_n \leq b_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$

ii a_n *est croissante et* b_n *est décroissante*

iii $\lim_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = 0$.

Il est clair que *i* et *ii* nous assurent que les deux suites sont convergentes (a_n est croissante et majorée et b_n est décroissante et minorée). Enfin, par *iii* nous en déduisons que $\lim a_n = \lim b_n = c$.

3.1.1 Une preuve constructive du TVI

Nous énonçons maintenant puis démontrons de manière constructive le

Théorème 6 *(Théorème des valeurs intermédiaires) Soit $f(x)$ une fonction continue sur l'intervalle $I = [a, b]$. On suppose que $f(a)f(b) < 0$ alors il existe (au moins) un réel c dans $]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.*

Preuve. Nous allons établir ce résultat en construisant deux suites adjacentes :

`Algorithme de dichotomie`

`Initialisation`		$a_0 = a$, $b_0 = b$, $c_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$
`Pour` $k = 0, \cdots$		
	`si` $f(a_k)f(c_k) < 0$	alors
		$a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = c_k$
	`sinon`	
		$a_{k+1} = c_k$, $b_{k+1} = b_k$
`Poser`		$c_{k+1} = \dfrac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2}$

Montrons d'abord par récurrence que $a_k \leq b_k, \forall k$. Ceal est vrai pour $k = 0$. Supposons qu'il en soit ainsi au rang k. Si $f(a_k)f(c_k) < 0$ alors $b_{k+1} - a_{k+1} = \dfrac{a_k + b_k}{2} - a_k = \dfrac{b_k - a_k}{2} \geq 0$. Dans le cas inverse, $b_{k+1} - a_{k+1} = b_k - \dfrac{a_k + b_k}{2} = \dfrac{b_k - a_k}{2} \geq 0$. Cette propriété se transmet d'une étape à l'autre. Remarquons que dans tous les cas nous avons $b_{k+1} - a_{k+1} = \dfrac{b_k - a_k}{2}$.

Maintenant, montrons que a_k est croissante et que b_k est décroissante. Dans le premier cas, $a_{k+1} - a_k = 0$ et dans le second $a_{k+1} - a_k = \dfrac{b_k - a_k}{2} \geq 0$. Pour b_k, on procède de manière similaire.

Il s'ensuit que les suites a_k et b_k sont adjacentes. Plus précisément $b_k - a_k = \left(\dfrac{b-a}{2}\right)^k$. Soit c la limite commune de ces deux suites.

On conclut la démonstration du théorème en raisonnant par l'absurde. Supposons que $f(c) > 0$, alors par hypothèse de continuité de f, il existe un réel $\eta > 0$ tel que $f(x) > 0, \forall x \in]c - \eta, c + \eta[$. Or, pour k assez grand $|b_k - c| \leq \eta$ et $|a_k - c| < \eta$, ce qui impliquerait que $f(a_k)f(b_k) > 0$, ce qui n'est pas possible par construction. Le cas $f(c) < 0$ se traite similairement. Conclusion, $f(c) = 0$. ■

3.1.2 Mise en œuvre

Donnons-nous les critères d'arrêt. Il faudra arrêter les itérations lorsque la valeur courante de la suite c_k (a_k ou b_k) sera considérée assez proche de la solution c.
Cela suffit-il pour autant ? Pas toujours. Lorsque la fonction est très plate sur un intervalle non petit contenant le zéro de f, ce critère ne garantit pas que c_k soit proche de x^* alors que $f(c_k)$ est petit. Pour palier cette difficulté, on demande, en plus, que l'intervalle d'étude soit petit, ce qui est assuré dès que k est assez grand. Voici donc une mise en œuvre pratique de la méthode

`Algorithme de dichotomie (version pratique)`

Initialisation		$a_0 = a,\ b_0 = b,\ c_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$
$k = 0$	$r_0 = \|f(c_0)\|$	$I_0 = b_0 - a_0$ Tant que $k < N_{max}$ ET $I_k > \epsilon$ ET $r_k > \epsilon$
	si $f(a_k)f(c_k) < 0$	alors
		$a_{k+1} = a_k,\ b_{k+1} = c_k$
	sinon	
		$a_{k+1} = c_k,\ b_{k+1} = b_k$
Poser		$c_{k+1} = \dfrac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2}$
	$r_{k+1} = \|f(c_{k+1}\|$	$I_{k+1} = I_k/2$
	$k = k + 1$	

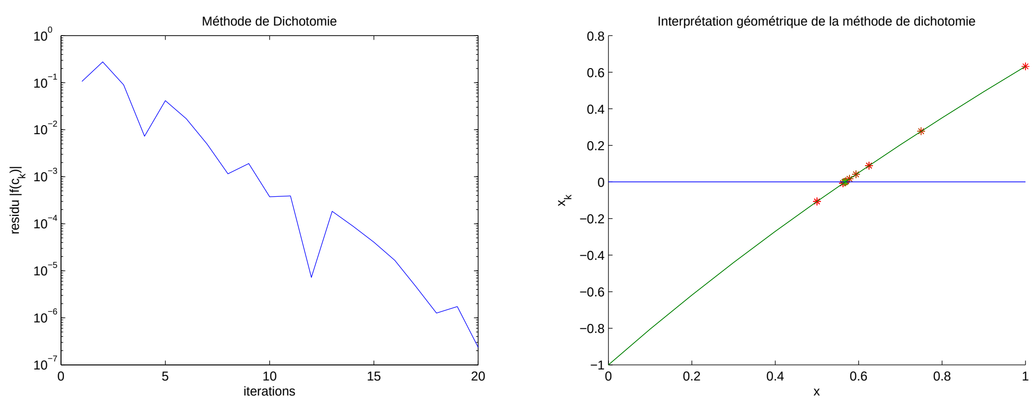


Figure 1: Historique de la convergence pour la méthode de Dichotomie : $f(x) = x - exp(-x),\ x \in [0, 1]$

3.2 De la corde à Newton

3.2.1 La méthode de la corde

Nous remarquons que résoudre

$$f(x) = 0$$

équivaut à résoudre

$$x = x + r(x) = g(x)$$

où $r(x) = 0$ si et seulement si $f(x) = 0$, ainsi les zéros de f sont les points fixes de g. Comment choisir g ? Le plus simple est de considérer

$$g(x) = \alpha f(x)$$

où α est un réel non nul donné. Le problème se formule ainsi dans ce cas comme

$$\begin{cases} \text{Trouver } \; x \in I \text{ tel que} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x = x + \alpha f(x) \end{cases}$$

Une idée naturelle pour résoudre numériquement ce problème est d'appliquer une méthode de point fixe de Picard. Pour s'assurer de la convergence, il faut que g soit fortement contractante. Nous avons

$$g(x) - g(y) = x - y + \alpha(f(x) - f(y))$$

Si f est assez régulière, nous pouvons appliquer le théorème des accroissements finis. Il existe donc un $c \in I$ tel que

$$f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$$

il en découle que

$$g(x) - g(y) = (1 + \alpha f'(c))(x - y)$$

L'application g est fortement contractante sur I dès $|1 - \alpha + \alpha f'(c)| < 1$, c'est à dire lorsque

$$-2 < \alpha f'(c) < 0 \; \forall c \in I.$$

Ce petit calcul montre que la méthode s'applique aux fonctions strictement monotonnes sur I et α assez petit ; si la dérivée de f change de signe la convergence n'est plus garantie.

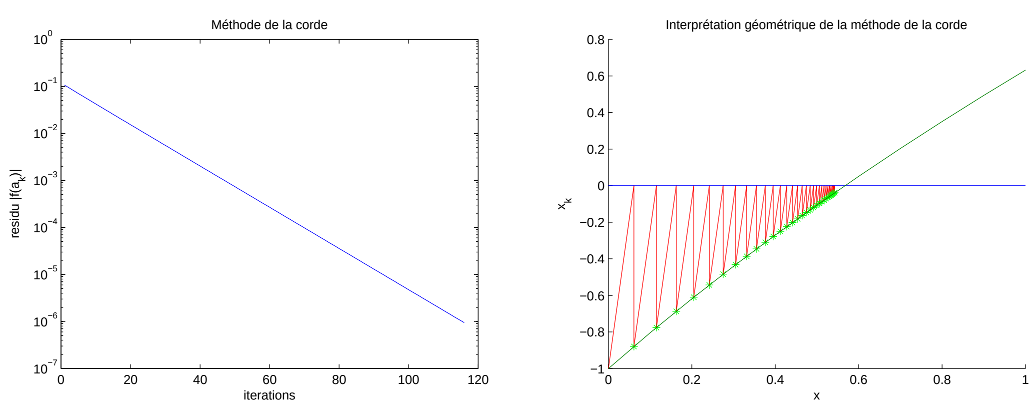


Figure 2: Historique de la convergence pour la méthode de la corde : $f(x) = x - exp(-x), \; x \in [0, 1]$, $\alpha = 0.0613$

3.2.2 Interprétation géométrique

LA méthode de la corde est proposée pour calculer numériquement un zéro de f, c'est à dire un point de coordonnées $(\xi, 0)$ dans le graphe de f. Partant d'un point du graphe $(x^{(k)}, f(x^{(k)}))$, on construit $x^{(k+1)}$ comme l'intersection de l'axe de abscisses et d'une droite de pente p donnée et passant par $(x^{(k)}, f(x^{(k)}))$. Soit p la pente. Nous avons

$$0 = p(x^{(k+1)} - x^{(k)}) + f(x^{(k)})$$

d'où

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{1}{p} f(x^{(k)}.$$

On retrouve bien la méthode de la corde avec $p = \frac{1}{\alpha}$.

Il est naturel de généraliser la méthode de la corde en permettant au coefficient α de varier au cours des itérations. Nous sommes donc amenés à considérer la famille de méthodes

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ donné dans } I \\ \text{Pour } k = 0, \cdots \\ \qquad\qquad\qquad x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k f(x^{(k)}) \end{cases}$$

Cette méthode est plus complexe que celle de la corde car il faut déterminer α_k pour chaque k. Nous allons voir maitenant comment.

Supposons que f soit assez régulière, disons de classe $\mathcal{C}^2(I)$ de sorte à pouvoir faire un développement de Taylor-Lagrange à l'ordre 2. On suppose également, pour simplifier que I contient une unique racine de f, notée ξ. Nous pouvons écrire

$$x^{(k+1)} - \xi = x^{(k)} - \xi - \alpha_k (f(x^{(k)}) - f(\xi))$$

car $f(\xi) = 0$. Or

$$f(\xi) = f(x^{(k)} + (\xi - x^{(k)}) f'(x^{(k)}) + \frac{(\xi - x^{(k)})^2}{2} f''(\zeta), \text{ pour un certain } \zeta \in I$$

Finalement, en posant $e^{(k)} = x^{(k)} - \xi$, l'erreur à la k-ième étape, nous obtenons

$$e^{(k+1)} = e^{(k)} - f'(x^{(k)}) \alpha_k e^{(k)} - \frac{(e^{(k)})^2}{2} f''(\zeta).$$

Autrement dit

$$e^{(k+1)} = (1 - f'(x^{(k)}) \alpha_k) e^{(k)} - \alpha_k \frac{(e^{(k)})^2}{2} f''(\zeta)$$

Si $f'(x^{(k)}) \neq 0$, alors en posant $\alpha_k = \frac{1}{f'(x^{(k)}))}$, le terme en $e^{(k)}$ disparait et nous avons

$$e^{(k+1)} = -\alpha_k \frac{(e^{(k)})^2}{2} f''(\zeta).$$

On le voit, l'erreur à l'étape $k+1$ se comporte comme le carré de l'erreur à l'étape k, la convergence sera donc quadratique.
La méthode de Newton se formule donc

`Méthode de Newton`

`Initialisation`	x_0 donné
`Pour` $k = 0, \cdots$	
`poser`	$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \dfrac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$

Il reste donc à rassembler les conditions qui permettent de s'assurer de la convergence (locale) de la méthode de Newton. Nous ennonçons le

Théorème 7 *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I. On suppose que f admet un unique zéro ξ dans I et que $f'(\xi) \neq 0$ alors il existe un réel $\eta > 0$ tel que si $x^{(0)} \in \Omega =]\xi - \eta, \xi + \eta[$*

- *La suite $x^{(k)}$ définie par $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \dfrac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$ reste dans Ω et converge vers ξ.*
- *La convergence est quadratique*

Avant de donner la preuve, établissons le lemme technique suivant :

Lemme 8 *Soit a_k une suite de réels positifs telle que*

$$a_{k+1} \leq a_k^2$$

Alors

$$a_k \leq a_0^{2^k}.$$

Preuve. Il suffit de procéder par recurrence. ■

Preuve. (du théorème)
Nous avons

$$|e^{(k+1)}| = \frac{(e^{(k)})^2}{2} \frac{|f''(\zeta)|}{|f'(x^{(k)})|}$$

Par continuité de f' pour η assez petit (à préciser), il existe un $\epsilon > 0$ tel que $|f'(x^{(k)})| > \epsilon \; \forall x^{(k)} \; in]\xi - \eta, \xi + \eta[$. D'autre part, f étant $\mathcal{C}^2(\Omega)$, il existe un réel $M > 0$ tel que $|f''(x^{(k)})| \leq M \; \forall x^{(k)} \; in]\xi - \eta, \xi + \eta[$. Ainsi, si $x^{(k)} \; in]\xi - \eta, \xi + \eta[$, alors

$$|e^{(k+1)}| \leq \frac{M}{2\epsilon} |e^{(k)}|^2$$

Or $|e^{(k)}| < \eta$, donc $|e^{(k+1)}| < \eta$ dès que $\frac{M}{2\epsilon}\eta^2 < \eta$.

D'autre part, posons $\frac{M}{2\epsilon}|e^{(k)}|^2 = \frac{M}{2\epsilon}|e^{(k)}|$. D'après ce qui précède, nous avons

$$r^{(k+1)} \leq (r^{(k)})^2$$

d'où

$$r^{(k)} \leq (r^{(0)})^{2^k}$$

si $|r^{(0)}| < 1$, c'est à dire si $x^{(0)} \in]\xi - \frac{2\epsilon}{M}, \xi + \frac{2\epsilon}{M}[$ alors la suite converge quadratiquement. ■

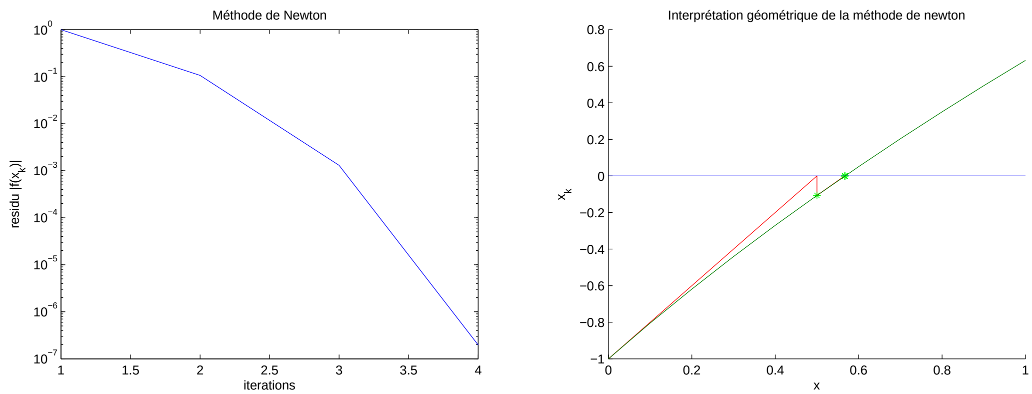


Figure 3: Historique de la convergence pour la méthode de Newton

3.2.3 Un exemple illustre

Dans l'Antiquité, la calcul approché de nombre algb́riques tels que $\sqrt{2}$ intéressait les mathématiciens et certains d'entre-eux avaient développé des méthodes de calcul. La suite d'Héron d'Alexandrie (3ième siècle avant JC) pour calculer une approximation de $\sqrt{a}$ se construit de la manière suivante : on remplace successivement la valeur courante x_k par la moyenne arithmétique $\frac{1}{2}\left(x_k + \frac{a}{x_k}\right)$, [2].

Comme Monsieur Jourdain, Héron ignorait qu'il appliquait la méthode de Newton au calcul de la racine de $f(x) = x^2 - a$. En effet

$$x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2 - a}{2x} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right).$$

Nous avons reporté ci-dessous dans le tableau 1 les premières valeurs des termes de la suite générée par la méthode de Newton pour le calcul de $\sqrt{2}$ en partant de $x_0 = 5$. On remarquera que le nombre de chiffres significatifs double chaque itération. Plus généralement et de la même fa çon, nous pouvons

k	x_k	$\lvert x_k - \sqrt{2}\rvert$
0	5.000000000000000e+000	3.585786437626905e+000
1	2.700000000000000e+000	1.285786437626905e+000
2	1.720370370370370e+000	3.061568079972752e-001
3	1.441455368177650e+000	2.724180580455493e-002
4	1.414470981367771e+000	2.574189946757954e-004
5	1.414213585796884e+000	2.342378846442728e-008

Table 1: Valeurs approchées de $\sqrt{2}$ par la méthode de Newton, $x_0 = 5$

calculer numériquement l racine n-*ième* d'un réel $a > 0$ en construisant la suite

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^n - a}{n x_k^{n-1}} = x_k \left(1 + \frac{1}{n}\left(\frac{a}{x_k^n} - 1\right)\right)$$

3.3 Méthode de la sécante

3.3.1 Construction

Si la méthode de Newton converge rapidement (quadratiquement) au voisinage de la solution, elle présente l'incovénient de devoir clculer à chaque itération $f'(x^{(k)})$ et ce calcul peut s'avérer compliqué et coûteux dans certains cas. Aussi, pour palier cette difficulté, il est naturel de vouloir remplacer $f'(x^{(k)})$ par une approximation de ce nombre, approximation obtenue à l'aide de valeurs précédemment calculées. Au voisinage de la solution les $x^{(k)}$ sont supposés assez proches si bien que la corde approche assez correctement la dérivée. En effectuant l'approximation

$$f'(x^{(k)}) \simeq \frac{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})}{x^{(k)} - x^{(k-1)}}$$

on définit la méthode de la sécante comme suit

`Méthode de la sécante`

`Initialisation`	x_0 et x_1 donnés
`Pour` $k = 0, \cdots$	
`poser`	$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \dfrac{x^{(k)} - x^{(k-1)}}{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})} f'(x^{(k)})$

Similairement à la méthode de Newton, on établit le résultat de convergence suivant :

Théorème 9 *Soit $f \in \mathcal{C}^2(I)$, I étant un voisinage de ξ, l'unique racine de f dans I. Alors, il existe un $\eta > 0$ tel que si $x^{(0)}$ $x^{(1)}$ sont choisis dans $]\xi - \eta, \xi + \eta[$ alors la suite $x^{(k)}$ convergeg vers ξ à l'ordre $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (le nombre d'or).*

Pour établir la preuve du théorème, nous aurons besoin du lemme suivant

Lemme 10 *Soit a_k une suite de réels positifs telle que*

$$a_{k+1} \leq a_k a_{k-1}$$

Alors il existe $c > 0$ tel que

$$a_k \leq c a_0^{\phi^k}.$$

où $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le nombre d'or.

Preuve. Posons $r_k = \ln(a_k)$. Nous avons

$$r_{k+1} \leq r_k + r_{k-1}$$

Il est facile de prouver que r_k est majorée par le terme général de la suite de Fibonacci $f_{k+1} = f_k + f_{k-1},\ f_0 = r_0,\ f_1 = r_1$, suite dont le terme général vaut

$$f_k = a\phi^k + b\frac{1}{\phi^k}$$

Le résultat en découle. ■ **Preuve.** (du théorème)
Nous avons

$$\begin{aligned}
x^{(k+1)} - \xi &= x^{(k)} - \xi - \frac{f(x^{(k)} - f(\xi)}{f[x^{(k)}, x^{(k-1)})]}, \\
&= (x^{(k)} - \xi)\left(1 - \frac{f(x^{(k)} - f(\xi)}{x^{(k)} - \xi} Fracx^{(k)} - x^{(k-1)} f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})\right), \\
&= (x^{(k)} - \xi)\left(1 - \frac{f[\xi, x^{(k)}]}{f[x^{(k)}, x^{(k-1)})]}, \right. \\
&= (x^{(k)} - \xi)\frac{f[x^{(k)}, x^{(k-1)})] - f[\xi, x^{(k)}]}{f[x^{(k)}, x^{(k-1)})]},
\end{aligned}$$

Or, $f[\xi, x^{(k)}, x^{(k-1)})] = \dfrac{f[x^{(k)}, x^{(k-1)})] - f[\xi, x^{(k)}]}{x^{(k-1)} - \xi}$, donc

$$x^{(k+1)} - \xi = (x^{(k)} - \xi)(x^{(k-1)} - \xi)\frac{f[x, x^{(k)}, x^{(k-1)})]}{f[x^{(k)}, x^{(k-1)})]}.$$

Plaçons-nous maintenant sur un intervalle $[\xi - \alpha, \xi + \alpha]$ dans lequel f' ne s'annule pas, elle garde mme un signe constant, par continuité de f' et il existe $M > 0$ telle que

$$|f'(x)| \geq M, \forall x \in [\xi - \alpha, \xi + \alpha].$$

Nous avons

$$f[x^{(k)}, x^{(k-1)})] = \frac{1}{x^{(k)} - x^{(k-1)})}\int_{x^{(k-1}}^{x^{(k)}} f'(\tau)d\tau$$

Si $x^{(k)}$ et $x^{(k-1)}$ sont dans $[\xi - \alpha, \xi + \alpha]$, alors

$$|f[x^{(k)}, x^{(k-1)})]| = \frac{1}{|x^{(k)} - x^{(k-1)})|}\int_{x^{(k-1}}^{x^{(k)}} |f'(\tau)|d\tau \geq M > 0.$$

Par ailleurs, puisque f est $\mathcal{C}^2$, le théorème sur l'expression de l'erreur d'interpolation s'applique et il existe η tel que

$$f[\xi, x^{(k)}, x^{(k-1)})] = \frac{1}{2}f''(\eta).$$

du coup,

$$|f[\xi, x^{(k)}, x^{(k-1)})]| \leq \frac{1}{2}\max_{x\in[\xi-\alpha,\xi+\alpha]} |f''(x)| = \frac{L}{2}.$$

En résumé, si $x^{(k)}, x^{(k-1)} \in [\xi - \alpha, \xi + \alpha]$,

$$|x^{(k+1)} - \xi| \leq \frac{L}{2M}|x^{(k)} - \xi)||x^{(k-1)} - \xi)|.$$

Le résultat en découle en posant $r_k = \frac{L}{2M}|x^{(k)} - \xi)|$, en appliquant le lemme précédant et en choisissant $x^{(0)}$ et $x^{(1)}$ assez proches de ξ. ■

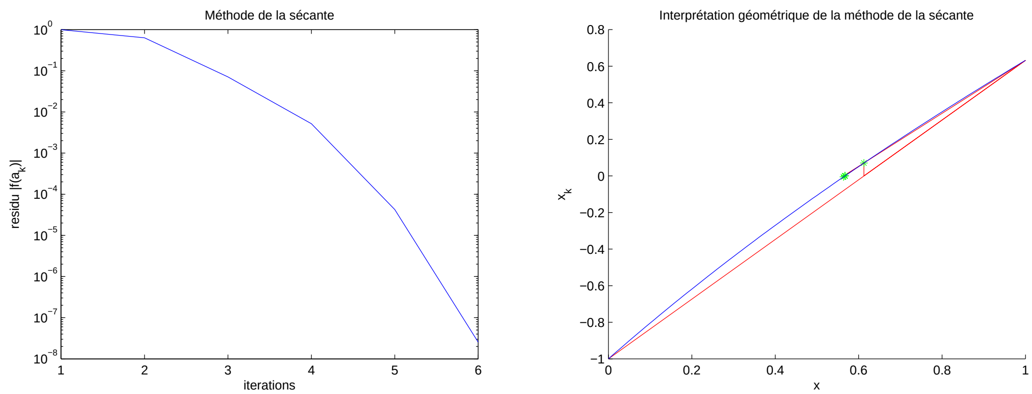


Figure 4: Historique de la convergence pour la méthode de la sécante

3.3.2 Illustration

Comparons maintenant les performances relatives des différentes méthodes

3.4 Méthode de la fausse position ou *regula falsi*

Elle peut être considérée comme une variante de la méthode de dichotomie. La différence réside dans la fait que l'intervalle de recherche n'est plus coupé en deux à chaque itération mais est déterminé en fonction de la valeur courante de l'approximation $x^{(k)}$. Si a_k est un nombre tel que $f(x^{(k)})f(a^{(k)} < 0$ alors on remplace le milieu $c_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$ par la racine du polynôme d'interpolation de f aux points $(x^{(k)}, f(x^{(k)}),\ (b^{(k)}, f(b^{(k)})$. On trouve

$$0 = (a_k - x_k)f(a_k) + (\mu_k - a_k)(f(a_k) - f(x_k))$$

soit

$$\mu_k = \frac{a_k f(x_k) - x_k f(a_k)}{f(x_k) - f(a_k)}$$

`Méthode du la fausse position`

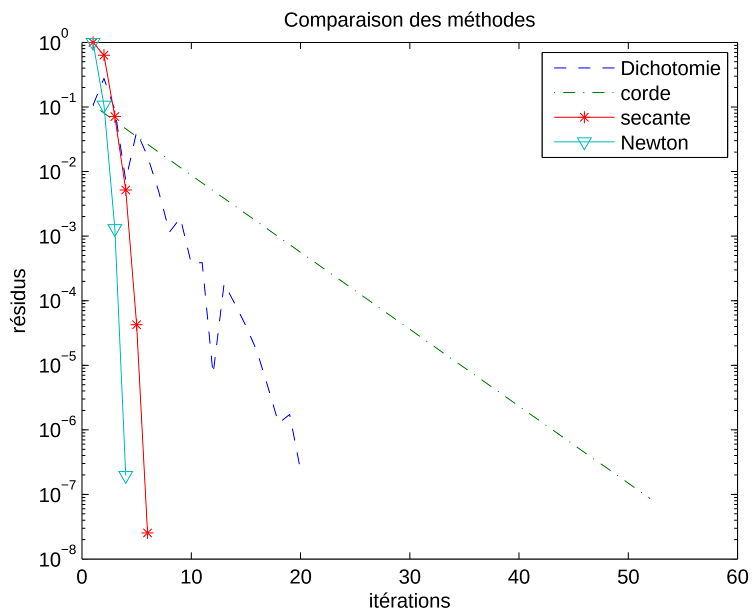


Figure 5: Comparaison des historiques de la convergence pour les méthode de dichotomie, de la corde ($\alpha = 1.531749591950705e-001$), de la sécante et de Newton

`Initialisation`		$a_0 = a,\ b_0 = b,\ x_0 = \dfrac{a_0 f(b_0) - b_0 f(a_k)}{f(b_0) - f(a_0)}$
`Pour` $k = 0, \cdots$		
	`si` $f(a_k)f(x_k) < 0$	alors
		$a_{k+1} = a_k,\ b_{k+1} = x_k$
	`sinon`	
		$a_{k+1} = x_k,\ b_{k+1} = b_k$
`Poser`		$x_{k+1} = \dfrac{a_{k+1} f(b_{k+1}) - b_{k+1} f(a_{k+1})}{f(b_{k+1}) - f(a_{k+1})}$

4 Accélération de convergence

4.1 Généralités

Nous l'avons vu précédemment, les suites construites pour déterminer numériquement le zéro d'une fonction convergence des ordres variables. Il n'est pas toujours possible de construire directement des méthodes rapides (telles que celle de Newton). Etant donnée une suite $x^{(k)}$ convergente vers ξ, l'accélération de convergence consiste à construire à partir de $x^{(k)}$ une suite $y^{(k)}$ congergente aussi vers ξ, mais à un ordre supérieur. Plus précisément, nous avons la

Définition 11 *Soit $(x^{(k)})_k$ une suite de réels convergente vers ξ. On dit que la suite $(y^{(k)})_k$ construire à partir de $(x^{(k)})_k$ accélère $(x^{(k)})_k$ si*

- $$\lim_{k\to+\infty} y^{(k)} = \xi$$

- $$\lim_{k\to+\infty} \frac{y^{(k)}-\xi}{x^{(k)}-\xi} = 0$$

Toute la difficulté consiste à trouver la transformation T définissant $y^{(k)}$, c'est à dire telle que $y^{(k)} = T(x^{(k)})$. Nous allons voir ci-après comment procéder dans un cas simple. Pour plus de détails, on pourra consulter [1].

Remarque 12 *Ce principe a déjà été rencontré à l'occasion de la présentation de la méthode de Romberg pour le calcul numérique d'une intégrale. Des approximations produites par la formule des trapèzes étaient combinées pour construire une approximation plus précise, qui convergent donc plus vite vers la solution.*

4.2 Méthodes du Δ^2 d'Aitken et de Steffensen

4.2.1 Constructions

Considérons une suite $x^{(k)}$ qui converge géométriquement vers ξ, c'est à dire que pour k assez grand, on peut écrire (avec une faible erreur)

$$x^{(k+1)} - \xi = \theta(x^{(k)} - \xi),\ \text{avec } \theta \in]-1,1[.$$

En écrivant cette relation à l'étape suivante, il vient

$$x^{(k+2)} - \xi = \theta(x^{(k+1)} - \xi)$$

si bien que θ peut être déterminé à partir des valeurs $x^{(k+j)},\ j = 0,1,2$

$$\theta = \frac{x^{(k+2)} - x^{(k+1)}}{x^{(k+1)} - x^{(k)}}$$

et, en remplaąnt θ par cette expression dans le première relation, nous trouvons

$$\xi = \frac{x^{(k)}x^{(k+2)} - (x^{(k+1)})^2}{x^{(k+2)} - 2x^{(k+1)} + x^{(k)}} = x^{(k)} - \frac{(\Delta x^{(k)})^2}{\Delta^2 x^{(k)}}$$

où Δ et Δ^2 sont les opérateurus aux différences

$$\Delta x^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)},\ \Delta^2 x^{(k)} = \Delta x^{(k+1)} - \Delta x^{(k)} = x^{(k+2)} - 2x^{(k+1)} + x^{(k)}$$

La méthode du Δ^2 d'Aitken consiste à construire la suite $y^{(k)}$ par

`Méthode du` Δ^2 `d'Aitken`

`Initialisation`	x_0 et x_1 donnés
`Pour` $k = 0, \cdots$	
`poser`	$\mathrm{y}^{(k)} = x^{(k)} - \dfrac{(\Delta x^{(k)})^2}{\Delta^2 x^{(k)}}$

Théorème 13 *On suppose qu'il existe $\theta \in]-1, 1[$ tel que la suite $(x^{(k)})_k$, $x^{(k)} \neq \xi$ vérifie*

$$x^{(k+1)} - \xi = (\theta + \delta_k)(x^{(k)} - \xi), \ \textit{avec} \ {}_{k\to+\infty}\delta_k = 0$$

alors la suite $(y^{(k)})$ est bien définie et

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{y^{(k)} - \xi}{x^{(k)} - \xi} = 0.$$

Preuve. Par hypothèse l'erreur $e^{(k)} = x^{(k)} - \xi$ vérifie

$$e^{(k+1)} = (\theta + \delta_k)e^{(k)}$$

il s'ensuit que, d'une part,

$$\begin{aligned} \Delta^2 x^{(k)} &= e^{(k+2)} - 2e^{(k+1)} + e^{(k)} \\ &= ((\theta + \delta_{k+1})(\theta + \delta_k) - 2(\theta + \delta_k) + 1)\, e^{(k)} \\ &= \big((1-\theta)^2 + \eta_k\big) \end{aligned}$$

où $\lim \eta_k = 0$. D'autre part

$$\begin{aligned} \Delta x^{(k)} &= e^{(k+1)} - e^{(k)} \\ &= ((\theta - 1) + \delta_k)\, e^{(k)} \end{aligned}$$

Nous en déduisons que $\Delta^2 x^{(k)} \neq 0$ pour k assez grand puisque $(1-\theta)^2 \neq 0$, $e^{(k)} \neq 0$ et $\eta_k \to 0$. Du coup, $y^{(k)}$ est bien définie et nous pouvons écrire

$$y^{(k)} - \xi = e^{(k)} - e^{(k)} \frac{((\theta - 1) + \delta_k)^2}{\big((1-\theta)^2 + \eta_k\big)}$$

il s'ensuit que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{y^{(k)} - \xi}{x^{(k)} - \xi} = \lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{((\theta - 1) + \delta_k)^2}{(1-\theta)^2 + \eta_k}\right) = 0$$

■

4.2.2 Illustration

Considérons une suite à convergence géométrique, générée par exemple par une méthode de point fixe

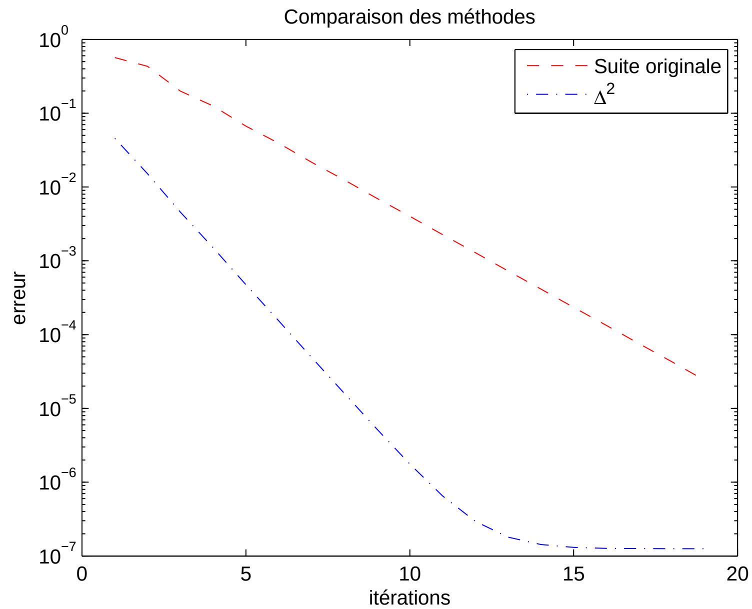


Figure 6: Comparaison des erreurs produite par la méthode de point fixe et par son accélérée par le Δ^2 d'Aitken

4.2.3 Méthode de Steffensen

La méthode de Steffensen consiste à réutiliser la suite $y^{(k)}$ dans le Δ^2 d'Aitken en remplaçant $x^{(k)}$ par $y^{(k)}$. Plus précisément soit F la fonction d'itération de la suite $x^{(k)}$, c'est à dire la fonction liant $x^{(k+1)}$ à $x^{(k)}$ par la relation

$$x^{(k+1)} = F(x^{(k)})$$

La méthode du Δ^2 s'écrit comme

$$\alpha_k = F(x^{(k)}),\ \ \beta_k = F(\alpha_k)$$
$$y^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{(\alpha_k - x^{(k)})^2}{\beta_k - 2\alpha_k + x^{(k)}}.$$

La méthode de Steffensen s'obtient prenant comme nouvelle fonction d'itération, celle du Δ^2, c'est à dire

$$G : x \mapsto x - \frac{(F(x) - x)^2}{F(F(x)) - 2F(x) + x}$$

`Méthode de Steffensen`

`Initialisation`	x_0 et x_1 donnés
`Pour` $k = 0, \cdots$	
`poser`	$\mathrm{x}^{(k+1)} = G(x^{(k)}) = \dfrac{x^{(k)} F(F(x^{(k)})) - F(x^{(k)})^2}{F(F(x^{(k)}) - 2F(x^{(k)}) + x^{(k)}}$

La méthode de Steffensen est donc une méthode de point fixe avec une nouvelle fonction d'itération. Pour autant, ces deux fonctions ont-elles toujours le même point fixe ? En général oui, c'est à dire sous une condition simple portant sur F'. Nous avons le

Théorème 14 *Si $G(\xi) = \xi$ alors $F(\xi) = \xi$. Inversement, si $F(\xi) = \xi$ et $F'(\xi) \neq 1$ alors $G(\xi) = \xi$.*

Preuve. Nous avons

$$(\xi - G(\xi))(F(F(\xi)) - 2F(\xi) + \xi) = (\xi - F(\xi))^2$$

Ainsi si $G(\xi) = \xi$ alors $F(\xi) = \xi$).

Réciproquement, supposons que $F(\xi) = \xi$) et $F'(\xi) \neq 1$. On peut appliquer la règle de l'Hôspital, il vient

$$G(\xi) = \frac{F(F(\xi)) +' (F(\xi))F'(\xi) - 2F(\xi)F'(\xi)}{F'(F(\xi))F'(\xi) - 2F'(\xi) + 1} = \frac{\xi +' (\xi)^2 - 2'(\xi)}{1 + F'(\xi)^2 - 2F'(\xi)} = \xi.$$

■

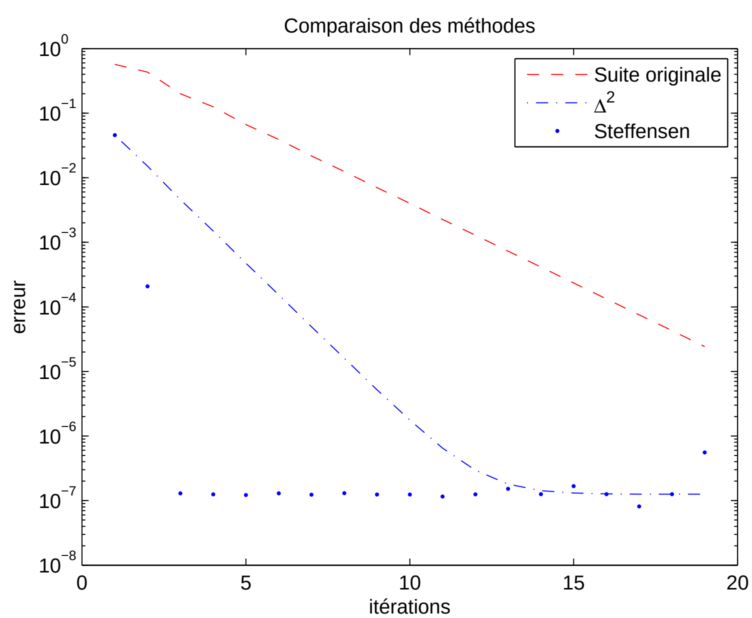


Figure 7: Comparaison des erreurs produite par la méthode de point fixe, Δ^2 d'Aitken et Steffensen

References

[1] C. Brezinski, *Algorithmes d'accélération de la convergence; Etude numérique*, Paris, Ed. Technip, 1978.

[2] J.-L. Chabert et al., Histoire d'Algorithmes, du caillou la puce, Belin collection Regards sur la Science, 592 p., 1994, rimpression 1995.

[3] A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri, *Méthodes numériques pour le calcul scientifique*, Springer Paris, 2000.

[4] M. Schatzman, *Analyse numérique pour la licence*, InterEdition, 1993.

[5] J. Stoer, R. Burlisch,*Introduction to Numerical Analysis*, text in Applied Mathematics, 12, Springer, 3rd Edition 2002