

Interpolation polynomiale

(notes de cours)

Jean-Paul Chehab
Université de Picardie Jules Vernes
LAMFA CNRS 6140

version du 2 février 2014

Contents

1	Introduction	2
1.1	Une motivation pratique	2
1.2	Approximation polynômiale	2
2	Interpolation polynomiale - position du problème et premiers résultats	3
2.1	Représenter et évaluer un polynôme en un point	3
2.2	Position du problème	4
2.3	Bases de Lagrange et de Newton	6
3	Les différences divisées	8
3.1	Propriétés des différences divisées	8
3.2	Différences divisées et polynôme d'interpolation	10
3.3	Calcul effectif du polynôme d'interpolation	11
4	Etude de l'erreur d'interpolation	12
4.1	Une expression de l'erreur	12
4.2	Choix optimal des points d'interpolation - polynômes de Tchebycheff	14
4.3	Défauts de l'interpolation polynômiale - phénomène de Runge	16
4.4	Extention au cas bi-dimensionnel	17
5	Polynômes d'interpolation Hermite (polynôme osculateur)	18
5.1	Motivation	18
5.2	Construction directe	19
5.3	De Lagrange à Hermite	21
6	Interpolation par morceaux (cas affine)	22
6.1	Construction	22
6.2	Estimation d'erreur	23

1 Introduction

1.1 Une motivation pratique

Considérons le relevé expérimental de la température d'une solution chimique au cours du temps : à des temps discrets, notés $t_1, t_2, \dots, t_N$ on mesure les températures T_i et on reporte les résultats sur un graphe en prenant le temps en abscisse et la température en ordonnée, comme ci-dessous

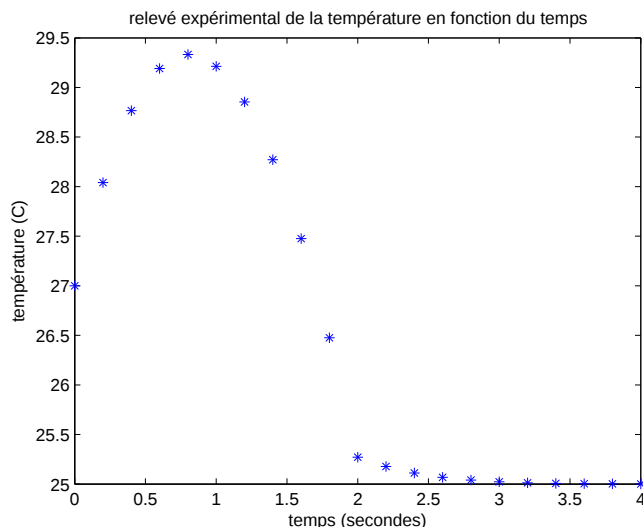


Figure 1: Relevé expérimental de la température en fonction du temps

La théorie chimique prévoit que la température T dépend du temps suivant la loi

$$T = f(t)$$

Pour savoir si l'expérience a été effectuée dans de bonnes conditions, il faut pouvoir comparer T_i à $f(t_i)$. Parfois f n'est pas connue explicitement mais seulement tabulée et il est important de disposer de valeurs intermédiaires. L'approximation de f , vue comme une fonction, en utilisant les données expérimentales (t_i, T_i) s'impose naturellement.

Comment approcher le plus simplement possible une fonction ? Par un polynôme.

1.2 Approximation polynômiale

L'approximation d'une fonction f (connue ou non) par un polynôme est une démarche naturelle que l'on rencontre dans divers contextes en analyse : lorsque f est assez régulière, elle permet d'analyser le comportement local (développements de Taylor) mais aussi dans certains cas de décrire globalement la fonction comme somme infinie de monômes (fonctions analytiques). Dans ces deux situations la précision avec laquelle on peut approcher f par un polynôme dépend de la régularité de la fonction. À l'inverse, avec une hypothèse de régularité relativement faible, le théorème de Stone-Weierstrass nous assure que l'on peut approcher uniformément toute fonction continue sur un intervalle compact, d'autant plus près que l'on veut, par un polynôme.

Théorème 1 Soit f une fonction de $\mathcal{C}([a, b])$. Alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un polynôme P tel que

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - P(x)| < \epsilon.$$

Preuve. Nous donnons ici une ébauche de la preuve, le lecteur est invité à consulter [4]. On ne perd rien en généralité à se ramener à l'ensemble $\{f \in \mathcal{C}([0, 1]), f(0) = f(1) = 0\}$ et on démontre de manière constructive le théorème de Stone-Weierstrass à l'aide des polynômes de Bernstein

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n C_k^n x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

La fonction f étant continue sur un compact, elle admet un module de continuité w . On établit l'estimation

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - P(x)| < cw\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

où w désigne un module de continuité de f et $c > 0$. En conclusion

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \max_{x \in [a, b]} |f(x) - B_n(f)(x)| = 0.$$

■

2 Interpolation polynomiale - position du problème et premiers résultats

2.1 Représenter et évaluer un polynôme en un point

Les polynômes sont les fonctions les plus simples que l'on puisse construire à l'aide des 3 opérations $+$, $-$, $*$. La façon la plus simple de représenter un polynôme p de degré inférieur ou égal à n est de l'exprimer dans la base canonique $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ comme

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k.$$

Pour autant cette écriture ne suggère pas la méthode la plus efficace pour calculer (évaluer, donner une valeur) $p(x)$ pour x donné. Faisons le décompte des opérations.

Pour calculer $a_j x^j$, on doit effectuer j multiplications. Le nombre totale de multiplications est donc

$$N_{mult} = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Il faut ajouter à cela n additions. Si une addition a le même coût qu'une multiplication, alors le nombre totale d'opérations est de $N_{tot} = n + \frac{n(n+1)}{2} \simeq \frac{n^2}{2}$ quand n est grand. Il est à noter que ce calcul est intimement lié à la forme de l'expression de p . Pour changer de mode de calcul, réarrangeons les termes. Nous pouvons écrire

$$p(x) = a_0 + x(a_1 + a_2 x + \dots + a_n x^{n-1})$$

et en appliquant une fois cette factorisation partielle à l'intérieur de la parenthèse, nous avons

$$p(x) = a_0 + x \left(a_1 + x \left(a_2 + \cdots + a_n x^{n-2} \right) \right).$$

Bien sûr ce procédé peut être appliqué récursivement jusqu'à obtenir

$$p(x) = a_0 + x \left(a_1 + x \left(a_2 + (a_3 + \cdots (a_{n-1} + a_n x)) \cdots \right) \right).$$

Cette écriture suggère de calculer $p(x)$ de proche en proche en commençant par le terme le plus à l'intérieur de cette expression. L'algorithme de Horner peut se résumer ainsi

Algorithme de Horner

Initialisation	$b_0 = a_n$
Pour $k = 1, \dots, n$	
poser	$b_k = x b_{k-1} + a_{k-1}$
poser	$p(x) = b_n$

Faisons maintenant le décompte des opérations. A chaque ligne on effectue exactement une addition et une multiplication. Avec n lignes, nous obtenons

$$N_{tot}^{Horner} = 2n$$

ce qui est asymptotiquement une réduction très importante du nombre d'opérations. En effet si $n = 1000$, avec la méthode classique nous devrions effectuer environ 500000 opérations tandis que celle d'Horner n'en requiert que 2000. Les opérations sont réduites, le calcul est plus rapide mais aussi plus sûr car sur ordinateur, en précision finie, chaque opération génère des erreurs, d'arrondis notamment.

2.2 Position du problème

Une première condition naturelle à imposer au polynôme est qu'il coïncide avec la fonction en des points prescrits (les points d'interpolation) : c'est la démarche que l'on emprunte naturellement lorsque l'on effectue un relevé de valeurs (par exemple, température au cours du temps) et que l'on veut faire passer une "courbe régulière" par les points expérimentaux, comme illustré ci-dessous.

De manière générale, le problème de l'interpolation peut se formuler mathématiquement comme suit :

Problème 1 *Etant donnés une suite de N nombres réels y_i et un ensemble de N formes linéaires continues ϕ_i sur un espace vectoriel V , construire un élément p de V tel que*

$$\phi_i(p) = y_i, i = 1, \dots, N.$$

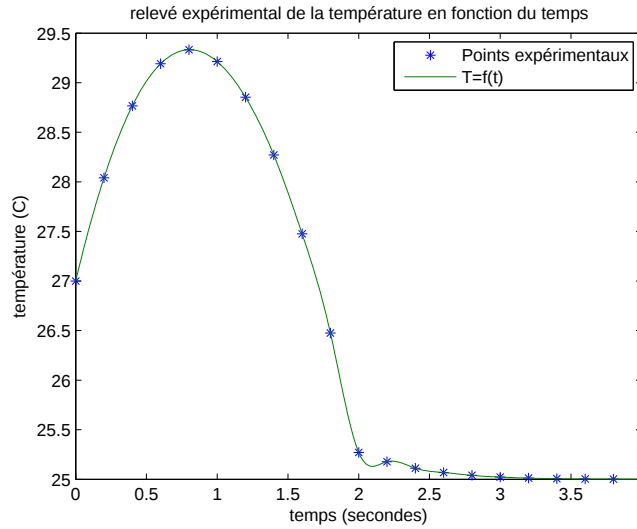


Figure 2: Relevé expérimental de la température en fonction du temps

Ce problème équivaut à déterminer les réels $(a_i)_{i=0}^n$ tels que

$$p(x_i) = y_i, \quad i = 1..n + 1, \quad \text{avec } p = \sum_{i=0}^n a_i x^i.$$

Dès lors, il est naturel de considérer les questions points suivants :

- se donner des critères d'existence et d'unicité pour p
- disposer d'un procédé systématique (un algorithme) permettant de construire p dans la pratique
- étudier l'erreur comise en remplaçant f par p . En particulier, que peut-on dire de $|f - p|$ lorsque le nombre de points augmente indéfiniment (voir figure (2.2) ci-dessous,) ?

Dans la suite de ce cours, nous répondrons totalement ou partiellement à ces questions.

Nous avons le

Théorème 2 *Le problème $(\mathcal{P})$ admet une solution unique si et seulement si les réels $(x_i)_{i=1}^{n+1}$ sont distincts deux à deux.*

Preuve. Le problème $(\mathcal{P})$ admet une solution unique si et seulement si le système linéaire

$$y_i(= p(x_i)) = \sum_{j=0}^n a_j x_i^j, \quad i = 1, \dots, n + 1,$$

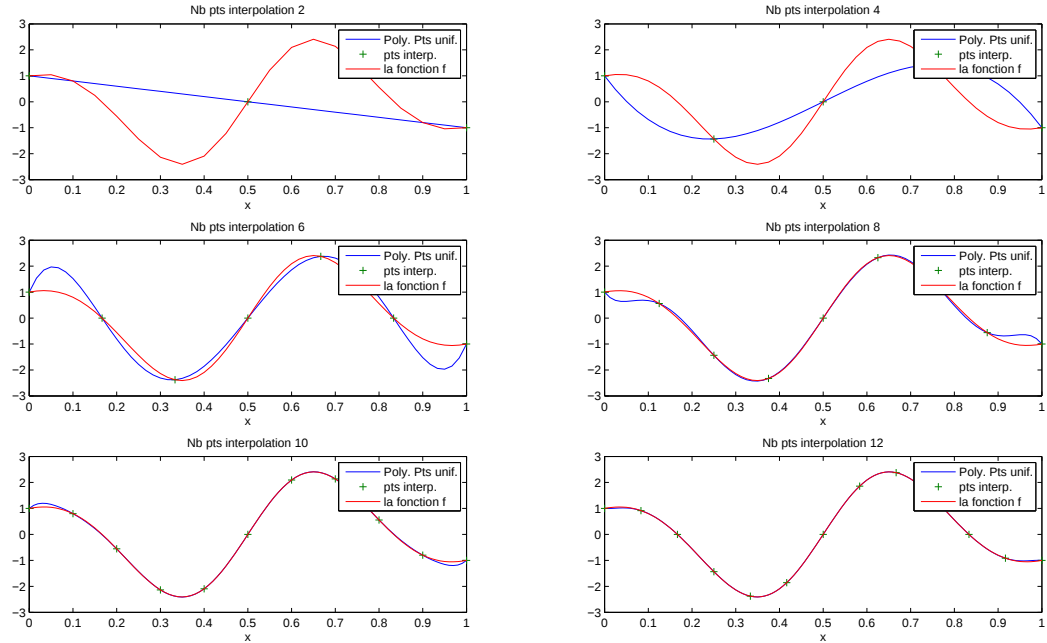


Figure 3: Comparaison de f et de ses polynômes d'interpolation de degré inférieur ou égal à n , pour différentes valeurs de n

admet une unique solution $(a_i)_{i=0}^n$. Le déterminant de la matrice sous-jacente

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_k & x_k^2 & \cdots & x_k^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^n \end{pmatrix},$$

vaut

$$\det(V) = \prod_{i,j=1, i \neq j}^{n+1} (x_i - x_j).$$

D'où le résultat. ■

Ce résultat n'a qu'un caractère théorique : s'il enonce une condition nécessaire et suffisante simple pour que $(\mathcal{P})$ admette une solution unique, il est pratiquement inutilisable en pratique si l'on veut calculer de manière effective le polynôme d'interpolation p ; il faut en effet résoudre un système linéaire plein.

2.3 Bases de Lagrange et de Newton

Une première amélioration du calcul de p consiste à exprimer ce polynôme dans une autre base : la base de Lagrange. Plus précisément, on se donne la

Définition 1 Soient $(x_i)_{i=1}^{n+1}$, $n+1$ points deux à deux distincts. On appelle base de lagrange relative aux points x_i les polynômes

$$L_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^{n+1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

De cette définition, on déduit immédiatement le

Lemme 1

$$L_i(x_j) = \delta_{i,j}$$

Preuve. La preuve est triviale. ■

Il s'ensuit la

Proposition 1 La famille $(L_i(x))$ forme une base de $\mathbf{P}_n$ et le polynôme qui interpole les valeurs y_i aux points x_i s'écrit

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n+1} y_i L_i(x)$$

Preuve. La famille $(L_i(x))$ est composée de $n+1$ éléments. Pour montrer qu'elle forme une base de $\mathbf{P}_n$, qui est de dimension $n+1$, il faut et il suffit d'établir que les $L_i(x)$ sont linéairement indépendants, c'est à dire que

$$\sum_{i=1}^{n+1} b_i L_i(x) \forall x \implies b_i = 0, \quad i = 1, \dots, n+1.$$

Ceci découle immédiatement du lemme précédent en prenant successivement $x = x_i$, $i = 1, \dots, n+1$. En usant du même argument, on obtient $p(x_i) = y_i = b_i$, $\forall i$, $1 \leq i \leq n+1$. ■

Remarque 1 Si les coefficients du polynôme d'interpolation dans la base de Lagrange sont accessibles, contrairement au cas de la base canonique, cette approche comporte encore des inconvénients pratiques importants. Il est notamment nécessaire de recalculer tous les éléments de la base si l'on rajoute un point d'interpolation.

Une base de polynômes particulièrement adaptée au calcul effectif de p est la base de Newton. Plus précisément, on se donne la

Définition 2 La base de Newton relative aux points x_i , $i = 1, \dots, n+1$ est définie par les $n+1$ polynômes $\nu_i(x)$:

$$\nu_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0, \\ \prod_{j=1}^i (x - x_j) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme auparavant, on établit directement que les $\nu_i(x)$, $i = 0, \dots, n$ forment une base de $\mathbf{P}_n$ en vérifiant que

$$\sum_{i=0}^n c_i \nu_i(x) \forall x \implies c_i = 0, \quad i = 1, \dots, n+1,$$

ce qui s'obtient en prenant successivement $x = x_i$, $1 \leq i \leq n+1$.

Avant de présenter une technique permettant de calculer les coefficients c_i du polynôme d'interpolation dans la base de Newton, mettons en évidence une relation relativement simple entre les c_i et les y_i .

Des deux écritures du polynôme d'interpolation, nous tirons

$$y_k(=p(x_k)) = \sum_{i=0}^n c_i \nu_i(x_k).$$

Or $\nu_i(x_k) = 0$ si $k \leq i$. Les c_i sont donc solution du système linéaire (triangulaire inférieur)

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y_1 & = & c_0, \\ y_2 & = & c_0 + c_1 \nu_1(x_2) = c_0 + c_1(x_2 - x_1), \\ \vdots & & \vdots \\ y_k & = & c_0 + \sum_{i=1}^{k-1} c_i \nu_i(x_k), \\ \vdots & & \vdots \\ y_{n+1} & = & c_0 + \sum_{i=1}^n c_i \nu_i(x_k). \end{array} \right.$$

La résolution de ce système triangulaire est simple en apparence puisqu'il suffit de calculer les c_i de proche en proche, en commençant par c_0 . Les expressions des c_i deviennent de plus en plus complexes et "encombrantes". Les différences divisées présentées ci-après offrent cadre permettant d'exprimer les c_i de manière "compacte".

3 Les différences divisées

Définition 3 Soit f une fonction définie aux points x_i , supposés deux à deux distincts. On définit les différences divisées par récurrence comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} f[x_i] = f(x_i), i = 1, \dots, n \\ f[x_i \dots x_{i+k+1}] = \frac{f[x_{i+1} \dots x_{i+k+1}] - f[x_i \dots x_{i+k}]}{x_{i+k+1} - x_i}, \text{ pour } k = 1, \dots \end{array} \right.$$

3.1 Propriétés des différences divisées

Proposition 2

$$f[x_1, \dots, x_n] = \sum_{i=1}^n \frac{f(x_i)}{\prod_{j=1, j \neq i}^n (x_i - x_j)}$$

Preuve. On procède par récurrence. La formule est facilement vérifiable pour $n = 1$ et $n = 2$. Supposons-la vraie jusqu'au rang $n - 1$. Nous avons

$$\begin{aligned}
f[x_1, \dots, x_n] &= \frac{f[x_2 \cdots x_n] - f[x_1 \cdots x_{n-1}]}{x_n - x_1} \\
&= \frac{1}{x_n - x_1} \left(\sum_{i=2}^n \frac{f(x_i)}{\prod_{j=2, j \neq i}^n (x_i - x_j)} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{f(x_i)}{\prod_{j=1, j \neq i}^{n-1} (x_i - x_j)} \right) \\
&= \frac{1}{x_n - x_1} \left(- \frac{f(x_1)}{\prod_{j=2, j \neq 1}^{n-1} (x_1 - x_j)} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=2}^{n-1} f(x_i) \left(\frac{1}{\prod_{j=2, j \neq i}^n (x_i - x_j)} - \frac{1}{\prod_{j=1, j \neq i}^{n-1} (x_i - x_j)} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{f(x_n)}{\prod_{j=1, j \neq n}^{n-1} (x_n - x_j)} \right)
\end{aligned}$$

■

Corollaire 1 *Nous avons les propriétés suivantes*

- les différences divisées ne dépendent pas de l'ordre dans lequel les arguments sont pris.
- si $f = \alpha g + \beta h$ alors

$$f[x_1 \cdots x_n] = \alpha f[x_1 \cdots x_n] + \beta h[x_1 \cdots x_n]$$

- si $f = gh$ (Liebnitz)

$$f[x_1 \cdots x_n] = \sum_{j=1}^n g[x_1 \cdots x_j] h[x_j \cdots x_n]$$

Preuve. Le premier point découle directement du théoème précédent.

S'agissant de la formule de Liebnitz, considérons les polynômes

$$p_1 = \sum_{m=i}^{i+k} g[x_i \cdots x_m] (x - x_i) \cdots (x - x_{m-1})$$

et

$$p_2 = \sum_{m=i}^{i+k} h[x_m \cdots x_{i+k}] (x - x_{m+1}) \cdots (x - x_{i+k})$$

p_1 et p_2 interpolent g et h aux points $x_i \cdots x_{i+k}$. Ainsi

$$F(x) = p_1 p_2$$

interpole gh en ces mêmes points. ■

Proposition 3 Soit $w(x) = \prod_{i=1}^{n+1} (x - x_i)$. Alors

$$w'(x_i) = \prod_{j=1, j \neq i}^{n+1} (x_i - x_j)$$

Preuve. On écrit

$$w(x) = (x - x_i) \prod_{j=1, j \neq i}^{n+1} (x - x_j) = (x - x_i)q(x)$$

si bien que

$$w'(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^{n+1} (x - x_j) + (x - x_i)q'(x).$$

Le résultat s'obtient en posant $x = x_i$ dans cette dernière expression. ■

3.2 Différences divisées et polynôme d'interpolation

Théorème 3 (Formule de Newton 1669)

Le polynôme d'interpolation de f degré $\leq n$ aux points $x_1, \dots, x_{n+1}$ s'exprime dans la base de Newton comme

$$p(x) = f[x_1] + (x - x_1)f[x_1x_2] + (x - x_1)(x - x_2)f[x_1x_2x_3] + \dots + \prod_{i=1}^n (x - x_i)f[x_1 \dots x_{n+1}]$$

Preuve. La formule proposée est vraie pour $n = 1, 2$. Pour l'établir dans le cas général nous procédons par récurrence. Soit p_1 le polynôme d'interpolation de f aux points $x_1 \dots x_n$. Par hypothèse de récurrence au rang n nous pouvons écrire

$$p_1(x) = f[x_1] + (x - x_1)f[x_1x_2] + (x - x_1)(x - x_2)f[x_1x_2x_3] + \dots + \prod_{i=1}^{n-1} (x - x_i)f[x_1 \dots x_n]$$

Soit alors $q(x)$ le polynôme de P_n défini par

$$p(x) = p_1(x) + q(x)$$

Comme $p(x_i) = p_1(x_i)$ pour $i = 1, \dots, n$ il est clair que les x_i sont les n racines de q et donc que $q = a(x - x_1) \dots (x - x_n)$. Il reste à déterminer a , par exemple par la valeur en x_{n+1} . Soit p_2 le polynôme de degré $\leq n - 1$ défini par

$$p_2(x) = f[x_2] + (x - x_2)f[x_2x_3] + (x - x_2)(x - x_3)f[x_2x_3x_4] + \dots + \prod_{i=2}^n (x - x_i)f[x_2 \dots x_{n+1}]$$

On remarque que

$$p(x) = \frac{1}{x_{n+1} - x_1} ((x_{n+1} - x)p_1(x) + (x - x_1)p_2(x))$$

En effet, ces deux polynômes de degré $\leq n$ coïncident en les $n + 1$ points distincts x_i , le terme de droite est donc le polynôme d'interpolation p par unicité de ce dernier. EN remplaçant p par cette expression, on trouve

$$\frac{1}{x_{n+1} - x_1} ((x_{n+1} - x)p_1(x) + (x - x_1)p_2(x)) = p_1(x) + a(x - x_1) \cdots (x - x_n)$$

En considérant le coefficient de plus haut degré, on trouve

$$a = \frac{1}{x_{n+1} - x_1} (f[x_2 \cdots x_{n+1}] - (f[x_1 \cdots x_n]) = f[x_1 \cdots x_{n+1}].$$

■

Théorème 4 Soit f continue sur $I = [a, b]$ et $(x_i)_{i=1}^{n+1}$ $n + 1$ points deux à deux distincts. Nous avons alors la relation

$$\begin{aligned} f(x) &= f[x_1] + (x - x_1)f[x_1x_2] + (x - x_1)(x - x_2)f[x_1x_2x_3] + \cdots \\ &+ \prod_{i=1}^n (x - x_i)f[x_1 \cdots x_{n+1}] + \prod_{i=1}^{n+1} (x - x_i)f[xx_1 \cdots x_{n+1}]. \end{aligned}$$

Preuve. On procède par récurrence. Nous avons

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1)f[xx_1]$$

Supposons que cette relation soit vraie à l'ordre n , i.e.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1) + (x - x_1)f[x_1x_2] + (x - x_1)(x - x_2)f[x_1x_2x_3] + \cdots \\ &+ \prod_{i=1}^{n-1} (x - x_i)f[x_1 \cdots x_n] + \prod_{i=1}^n (x - x_i)f[xx_1 \cdots x_n]. \end{aligned}$$

Nous pouvons écrire

$$f[xx_1 \cdots x_{n+1}] = \frac{f[x_1 \cdots x_{n+1}] - f[xx_1 \cdots x_n]}{x_{n+1} - x}$$

soit

$$f[xx_1 \cdots x_n] = f[x_1x_2 \cdots x_{n+1}] - (x_{n+1} - x)f[xx_1 \cdots x_{n+1}]$$

Le résultat en découle. ■

3.3 Calcul effectif du polynôme d'interpolation

Dressons la table des différences divisées :

x_1	$\boxed{f[x_1]}$				
x_2	$f[x_2]$	$\boxed{f[x_1x_2]}$			
x_3	$f[x_3]$	$f[x_2x_3]$	$\boxed{f[x_1x_2x_3]}$		
$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$	$\ddots$
x_{n+1}	$f[x_{n+1}]$	$f[x_nx_{n+1}]$	$f[x_{n-1}x_nx_{n+1}]$	$\cdots$	$\boxed{f[x_1 \cdots x_{n+1}]}$

Seules les valeurs encadrés, sur la diagonale, interviennent dans l'expression du polynôme d'interpolation :

$$p_n(x) =$$

Le tableau des différences divisées associé est :

2	3			
		-1		
3	2		-1	
		-3		0
4	-1		-1	
		-5		
5	-6			

Le polynôme d'interpolation est donc

$$p(x) = \mathbf{3} + \mathbf{-1}(x - 2) + \mathbf{-1}(x - 2)(x - 3) + \mathbf{0}(x - 2)(x - 3)(x - 4) = -x^2 + 4x - 1.$$

Voici un algorithme pour le calcul effectif des différences divisées, il peut se programmer pratiquement tel quel en Maple

```

pour i=1 à n faire
  t[i] = f[i]
  pour j=i-1 à 1 par pas de -1 faire
    t[j] = (t[j+1] - t[j]) / (x[i] - x[j])
  a[i] = t[1]
fin

```

4 Etude de l'erreur d'interpolation

4.1 Une expression de l'erreur

On a le

Proposition 4 Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I contenant les points deux à deux distincts $x_i, i = 0, \dots, N$, rangés dans l'ordre croissant. Alors pour tout $x \in [x_0, x_N]$ il existe (au moins) un réel ξ_x dans ce même intervalle tel que

$$f[x_0 x_1 \dots x_N] = \frac{f^{(N+1)}(\xi_x)}{(N+1)!}.$$

Preuve. La preuve est assez jolie et repose sur l'utilisation successive du théorème de Rolle. Soit P_N le polynôme d'interpolation de f aux points x_i . On a

$$P_N(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0 x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0 x_1 x_2] + \dots + \prod_{i=0}^{N-1} (x - x_i)f[x_0 x_1 \dots x_N]$$

et

$$f(x) = P_N(x) + \prod_{i=0}^N (x - x_i)f[x_0 x_1 \dots x_N].$$

Soit $x \in [x_0, x_N]$ fixé, $x \neq x_i$, $i = 0, \dots, N$. On introduit maintenant la fonction

$$F(t) = f(t) - p(t) - \prod_{i=0}^N (t - x_i) f[xx_0x_1 \cdots x_N].$$

La fonction F est de classe $\mathcal{C}^{N+1}$ et admet au moins $N+2$ racines distinctes : x et les x_i , $i = 0, \dots, N$. On peut donc appliquer $N+1$ fois le théorème de Rolle comme suit : puisque F s'annule en chacune de ses $N+2$ racines, le théorème de Rolle nous assure qu'il existe au moins un réel $\xi_i^{(1)}$ strictement compris entre la i -ième et la $i+1$ ème racine de F tel que $F'(\xi_i^{(1)}) = 0$. La fonction F' vérifie les hypothèses du théorème de Rolle et nous pouvons l'appliquer à nouveau sur chaque intervalle $[\xi_i^{(1)}, \xi_{i+1}^{(1)}]$, $i = 1, \dots, N$. Il existe donc (au moins) N réels $\xi_i^{(2)}$, $i = 1, \dots, N$ tels que $F''(\xi_i^{(2)}) = 0$, $i = 1, \dots, N$. On applique successivement ce procédé jusqu'à obtenir l'existence d'un réel $\xi^{N+1} = \xi$ tel que $F^{(N+1)}(\xi) = 0$. Calculons cette dérivée. Nous avons

$$F^{(N+1)}(t) = f^{(N+1)}(t) - p^{(N+1)}(t) - ((N+1)!)f[xx_0x_1 \cdots x_N]$$

Pour $t = \xi$, $F^{(N+1)}(\xi) = 0$, nous en déduisons alors que

$$\frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} = f[xx_0x_1 \cdots x_N].$$

■

Théorème 5 *Sous les mêmes hypothèses l'erreur d'interpolation au point x s'exprime comme*

$$e(x) = f(x) - p(x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

On en déduit le

Corollaire 2

$$|e(x)| \leq \max_{x \in [x_0, x_N]} \left(\prod_{i=0}^N (x - x_i) \right) \max_{x \in [x_0, x_N]} \frac{|f^{(N+1)}(x)|}{(n+1)!}$$

À présent, nous pouvons exhiber certaines familles de fonctions pour lesquelles le polynôme d'interpolation converge uniformément vers f lorsque n tend vers l'infini.

Proposition 5 *Soit $I = [a, b]$ un intervalle fermé, borné et $f \in \mathcal{C}^\infty[a, b]$. Soit $x^{(n)} = (x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)})$ une suite de points deux deux distincts. On suppose qu'il existe une constante $M > 0$ telle que*

$$\max_{x \in [a, b]} |f^{(N+1)}(x)| \leq M, \forall N \in \mathbb{N}.$$

Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \max_{x \in [a, b]} |f(x) - p_n(x)| = 0$$

Preuve. Nous avons directement

$$\max_{x \in [a, b]} |e(x)| \leq \frac{(b-a)^n}{n!} M, \forall n \in \mathbb{N}$$

Comme $\frac{(b-a)^n}{n!}$ est le terme général d'une série convergente (vers e^{b-a}), cette quantité tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. ■

4.2 Choix optimal des points d'interpolation - polynômes de Tchebycheff

Problème 2 *L'erreur d'interpolation est le produit de deux expressions :*

*l'une ne dépendant que de f , de sa dérivée $n + 1$ -ième en fait,
l'autre qui ne dépend que de la subdivision choisie.*

Il est donc naturel de chercher pour quels points x_{1n+1} la la quantité

$$\max_{x \in [a,b]} |(x - x_1) \cdots (x - x_{n+1})|$$

est minimale.

Les polynômes de Tchebycheff (ou Chebyshev) permettent de résoudre ce problème

Définition 4 *On définit le polynôme de Tchebycheff de degré n , $n = 0, 1, \dots$ par*

$$T_n(x) = \cos(ncos(x)), \quad x \in [-1, 1].$$

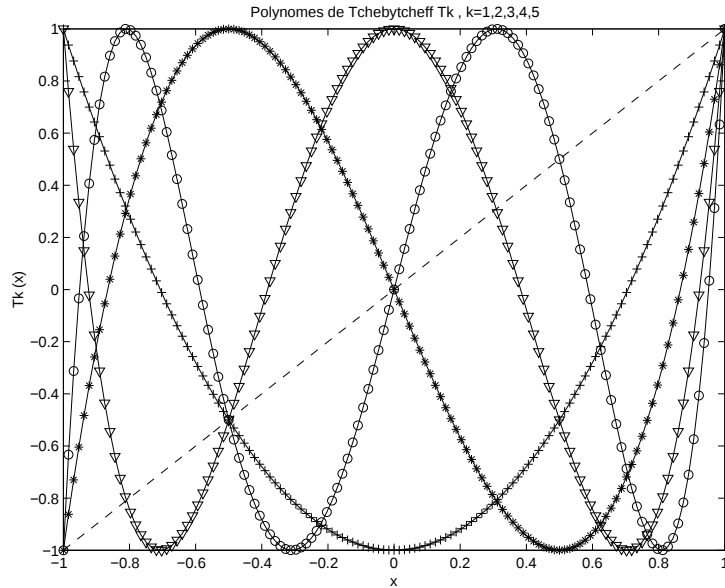


Figure 4: Les premiers polynômes de Tchebycheff

Nous pouvons immédiatement établir les propriétés suivantes

Proposition 6 *i Les T_n satisfont la relation de récurrence à trois termes*

$$\begin{aligned} T_0 &= 1, \quad T_1 = x \\ T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n = 1, \dots \end{aligned}$$

ii $T_n(x)$ est un polynôme de degré n dont le coefficient de x^n est 2^{n-1} ; T_n est pair si n est pair et impair sinon.

iii $|T_n(x)| \leq 1, \forall x \in [-1, 1]$

iv $T_n(\cos(\frac{k\pi}{n})) = (-1)^k, \quad k = 0, 1, \dots, n$

v $T_n(\cos(\frac{(2k+1)\pi}{2n})) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n$

vi Les polynômes T_n sont orthogonaux par rapport au produit scalaire L^2 à poids $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, i.e.

$$\int_{-1}^1 T_i(x)T_j(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \pi & \text{si } i = j = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } i = j \neq 0 \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Preuve. [i] se démontre par simple application des formules trigonométriques. On pose $\theta = \cos(x)$, ainsi

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2 \cos(n\theta) \cos(\theta) - \sin(n\theta) \sin(\theta) = 2x \cos(n\theta) = 2xT_n(x).$$

L'assertion [ii] se démontre simplement par récurrence.

[iii] découle de la définition des T_n

[iv] et [v] sont de simples vérifications à partir de la définition des T_n .

Les relations d'orthogonalité [vi] s'obtiennent par un simple changement de variables $u = \cos(x)$

$$\int_{-1}^1 T_i(x)T_j(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^\pi \cos(iu) \cos(ju) du$$

■ A présent nous allons montrer que les T_n satisfont la propriété de minimisation recherchée. Nous commençons par le

Lemme 2 *Soit $q(x)$ un polynôme de degré n dont le coefficient de x^n est 2^{n-1} . On suppose $q \neq T_n$. Alors*

$$\max_{x \in [-1, 1]} |q(x)| > \max_{x \in [-1, 1]} |T_n(x)| = 1.$$

Preuve. On procède par l'absurde. Supposons que

$$\max_{x \in [-1, 1]} |q(x)| \leq \max_{x \in [-1, 1]} |T_n(x)| = 1$$

On considère $r(x) = q(x) - T_n(x)$. Cette fonction s'annule au moins une fois dans chacun des intervalles $[\cos(\frac{k\pi}{n}), \cos(\frac{(k+1)\pi}{n})]$, en effet

$$r(\frac{k\pi}{n}) = q(\frac{k\pi}{n}) - (-1)^k = \begin{cases} q(\frac{k\pi}{n}) - 1 \leq 0 & \text{si } k \text{ est pair} \\ q(\frac{k\pi}{n}) + 1 > 0 & \text{si } k \text{ est impair,} \end{cases}$$

et

$$r(\frac{(k+1)\pi}{n}) = q(\frac{(k+1)\pi}{n}) - (-1)^{k+1} = \begin{cases} q(\frac{k\pi}{n}) + 1 > 0 & \text{si } k \text{ est pair} \\ q(\frac{(k+1)\pi}{n}) - 1 \leq 0 & \text{si } k \text{ est impair,} \end{cases}$$

Ainsi, $r(x)$ prend des valeurs de signe opposés aux extrémités de l'intervalle $[\cos(\frac{k\pi}{n}), \cos(\frac{(k+1)\pi}{n})]$. C'est une fonction continue et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annule au moins une fois dans $[\cos(\frac{k\pi}{n}), \cos(\frac{(k+1)\pi}{n})]$. Elle possède donc n au moins zéros dans $[-1, 1]$. Or $r(x)$ est un polynôme de degré $n - 1$, les termes directs s'annulant. Ceci contredit $r(x) \neq 0$. ■
Nous pouvons désormais établir le résultat principal

Théorème 6 *Le choix des points d'interpolation minimisant l'expression*

$$\max_{x \in [-1, 1]} |(x - x_1) \cdots (x - x_{n+1})|$$

est donné par

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n+2}\right), k = 1, \dots, n+1.$$

Preuve. D'après le lemme précédent, la valeur minimale est atteinte pour $(x - x_1) \cdots (x - x_{n+1}) = 2^n T_n(x)$. ■

4.3 Défauts de l'interpolation polynomiale - phénomène de Runge

Le polynôme d'interpolation p ne converge pas toujours uniformément vers la fonction f quel que soit le choix des points d'interpolation. Un contre exemple célèbre a été proposé par Runge. On considère la fonction $f(x) = \frac{1}{1+16x^2}$ sur $[-1, 1]$. Pour des points d'interpolations régulièrement répartis, on observe l'apparition d'oscillations importantes près de $x = -1$ et $x = 1$ lorsque n augmente. Ce phénomène, connu sous le nom de *phénomène de Runge* ne survient pas lorsque les x_i sont les racines du polynôme de Tchebycheff, voir figure ci-dessous.

Soient $x_i, i = 1, \dots$ une suite de points deux à deux distincts. Soit X la matrice infinie triangulaire inférieure dont la i ème ligne est

$$x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_i$$

ou encore

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ x_1 & x_2 & 0 & \cdots & \cdots \\ & & \ddots & & \\ x_1 & \cdots & x_n & & \\ \vdots & & & \ddots & \end{pmatrix}$$

On définit l'erreur d'interpolation par

$$E_{n,\infty} = \|f - \Pi_n f\|_\infty$$

Soit p_n^* la meilleure interpolation polynomiale, i.e. le polynôme tel que

$$E_n^* = \|f - p_n^*\|_\infty \leq \|f - q_n\|_\infty, \forall q_n \in P_n$$

Nous avons alors le résultat suivant dont nous ne donnons pas la démonstration, le lecteur (la lectrice) pourra consulter [3].

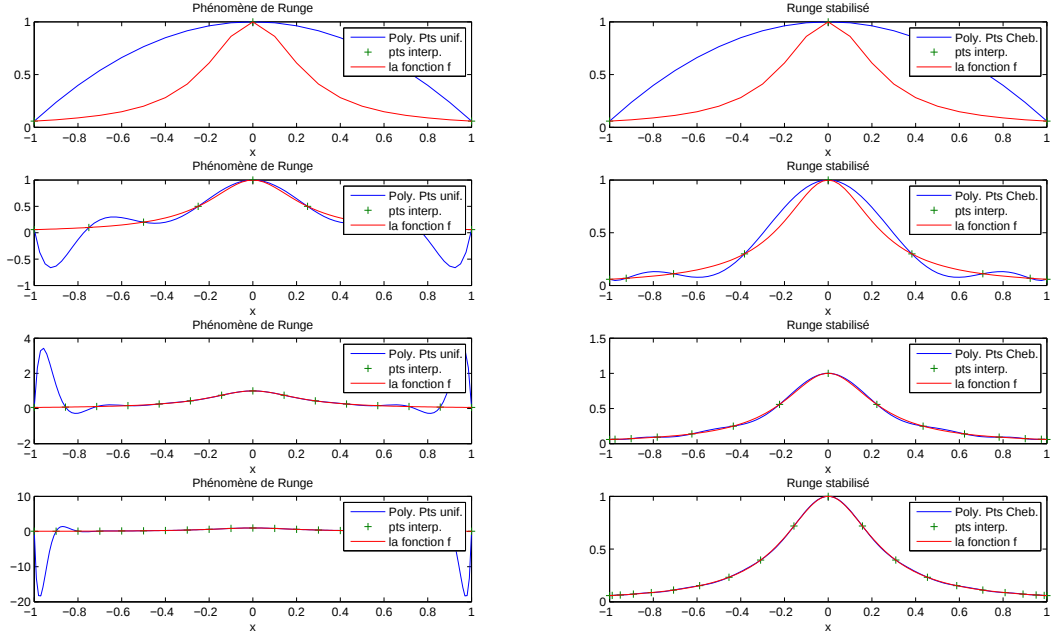


Figure 5: Phénomène de Runge pour $f(x) = \frac{1}{1 + 16x^2}$

Théorème 7 Soient $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$ et X une matrice d'interpolation sur $[a, b]$. Alors

$$E_{n,\infty}(X) \leq E_n^*(1 + \Lambda_n(X)), n = 1, \dots$$

où Λ_n est la constante de Lebesgue de X , elle se définit par

$$\Lambda_n(X) = \left\| \sum_{i=1}^{n+1} |l_i^n| \right\|$$

où l_j^n désigne le i -ème polynôme caractéristique associé à la $n + 1$ -ème ligne de X

4.4 Extention au cas bi-dimensionnel

On peut construire facilement un polynôme d'interpolation de Lagrange sur un réseau cartésien de point. Soit $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ On se donne $N + 1$ points x_i et $M + 1$ points y_i tels que

$$a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_N \leq b \text{ et } c \leq y_0 < y_1 < \dots < y_M \leq d.$$

On considère alors deux familles de polynômes de Lagrange

$$L_i^x(x) = \prod_{k=0, k \neq i}^N \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \text{ et } L_j^y(y) = \prod_{m=0, m \neq j}^M \frac{y - y_m}{y_j - y_m}$$

Soit à présent f une fonction continue sur Ω , on définit le polynôme d'interpolation de Lagrange de f sur Ω , de degré N en x et de degré M en y par

$$\Pi_{N,M}(f)(x,y) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M f(x_i, y_j) L_i^x(x) L_j^y(y)$$

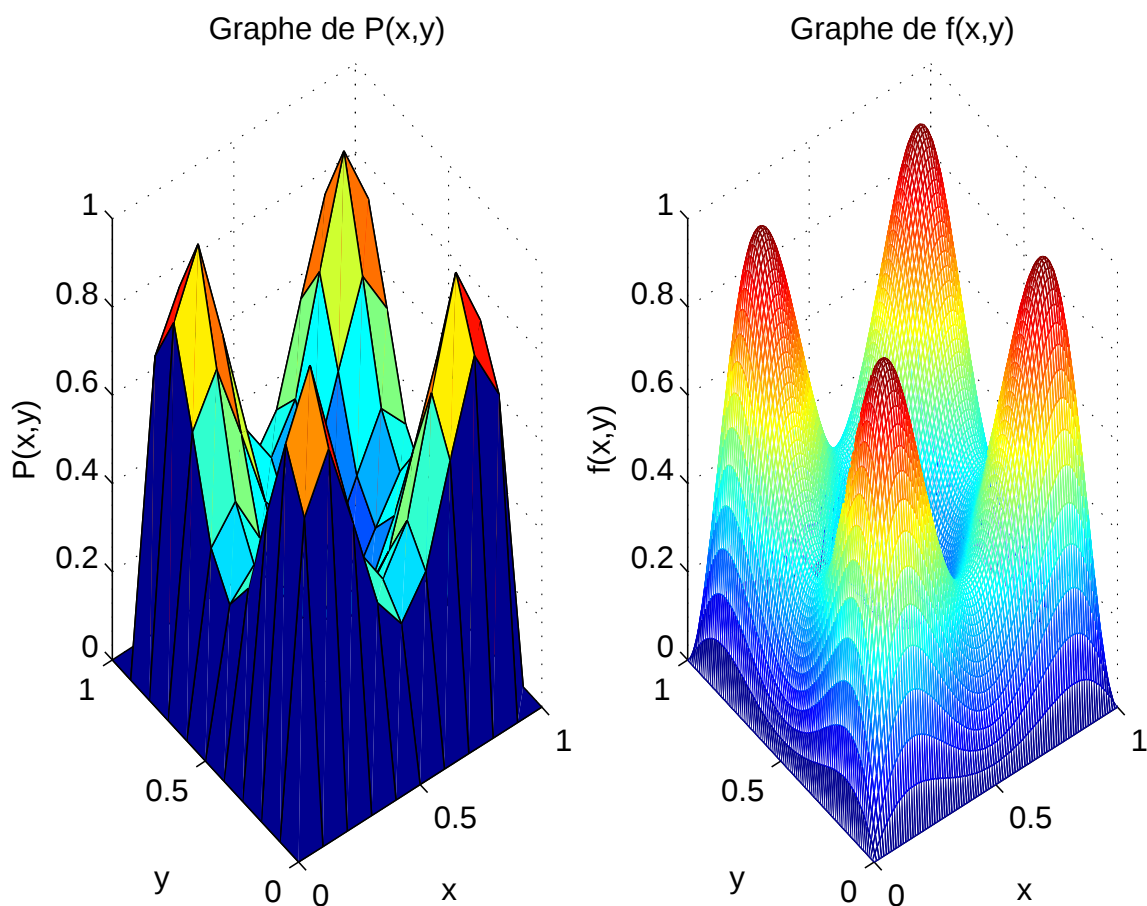


Figure 6: Polynôme de Lagrange en dimension 2

5 Polynômes d'interpolation Hermite (polynôme osculateur)

5.1 Motivation

Dans le but de construire des approximations polynômiales p plus précises d'une fonction f donnée, on applique le principe d'interpolation, mais plus seulement en faisant coïncider les valeurs de f et de p en des réels x_i prédéfinis : on impose en outre que les dérivées de f et de p soient égales en ces points.

5.2 Construction directe

Commençons par considérer le cas cubique : soit $f \in \mathcal{C}^1([0, 1])$. On cherche à construire un polynôme p de degré 3 tel que

$$\begin{aligned} f(0) = p(0) \quad f(1) = p(1) & \quad (\text{relations d'interpolation de Lagrange pour } f \text{ aux points } 0 \text{ et } 1) \\ f'(0) = p'(0) \quad f'(1) = p'(1) & \quad (\text{relations d'interpolation pour } f' \text{ aux points } 0 \text{ et } 1) \end{aligned}$$

Pour calculer p , nous nous inspirons de l'expression du polynôme d'interpolation dans la base de Lagrange. Nous cherchons à déterminer $\phi_1(x), \phi_2(x), \psi_1(x), \psi_2(x)$ dans $\mathbf{P}_3$ tels que

$$\begin{aligned} \phi_1(0) = 1, \phi_1(1) = 0 \quad \phi_1'(0) = 0, \phi_1'(1) = 0, \\ \phi_2(0) = 0, \phi_2(1) = 1 \quad \phi_2'(0) = 0, \phi_2'(1) = 0, \\ \psi_1(0) = 0, \psi_1(1) = 0 \quad \psi_1'(0) = 1, \psi_1'(1) = 0, \\ \psi_2(0) = 0, \psi_2(1) = 0 \quad \psi_2'(0) = 0, \psi_2'(1) = 1, \end{aligned}$$

Après calculs, on trouve

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= (x-1)^2(1+2x) & \phi_2(x) &= x^2(3-2x), \\ \psi_1(x) &= x(x-1)^2 & \psi_2(x) &= (x-1)x^2 \end{aligned}$$

On montre ensuite que $\phi_1(x), \phi_2(x), \psi_1(x), \psi_2(x)$ forment une base de $\mathbf{P}_3$. De la sorte p peut s'exprimer (de manière unique) comme

$$p(x) = f(0)\phi_1(x) + f(1)\phi_2(x) + f'(0)\psi_1(x) + f'(1)\psi_2(x).$$

Plus précisément, nous avons le

Théorème 8 $\phi_1(x), \phi_2(x), \psi_1(x), \psi_2(x)$ forment une base de $\mathbf{P}_3$

Preuve. Soit $p \in \mathbf{P}_3$ et

$$s(x) = p(x) - (p(0)\phi_1(x) + p(1)\phi_2(x) + p'(0)\psi_1(x) + p'(1)\psi_2(x)).$$

La fonction $s(x)$ est un polynôme de degré ≤ 3 et nous avons les relations $s(1) = s(0) = 0$ et $s'(0) = s'(1) = 0$, autrement dit 0 et 1 sont racines doubles de $s(x)$. Du coup $s(x)$ se factorise par $x^2(1-x)^2$, ce qui n'est possible que si $s(x) = 0$. Il est facile maintenant de vérifier que les coefficients sont uniques : montrons que

$$\alpha_1\phi_1(x) + \alpha_2\phi_2(x) + \alpha_3\psi_1(x) + \alpha_4\psi_2(x) = 0 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0.$$

Il suffit de prendre d'abord $x = 0$ puis $x = 1$ pour obtenir $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Puis en dérivant, l'expression et en prenant toujours $x = 0$ puis $x = 1$, on obtient $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$. ■

Nous pouvons à présent considérer le cas général. Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$ et $(x_i)_{i=0}^N$ $N+1$ points deux à deux distincts de $[a, b]$. On cherche à interpoler f ainsi que sa dérivée première aux points x_i . Ces $2N+2$ degrés de liberté nous conduisent à construire un tel polynôme dans P_{2N+1} . Cherchons d'emblée à construire les fonctions de P_{2N+1} $h_i(x)$ et $\tilde{h}_i(x)$ telles que

$$h_i(x_j) = \delta_{i,j}, h_i'(x_j) = 0 \text{ et } \tilde{h}_i'(x_j) = \delta_{i,j}, \tilde{h}_i(x_j) = 0.$$

Si de telles fonctions existent, alors

$$p(x) = \sum_{k=0}^N f(x_k)h_k(x) + \sum_{k=0}^N f'(x_k)\tilde{h}_k(x)$$

est bien un polynôme de P_{2N+1} et satisfait les conditions d'interpolation.

Proposition 7 On pose $N = 2n + 2$. On a

$$H_{N-1} = \sum_{i=1}^{n+1} (y_i A_i(x) + y'_i B_i(x))$$

avec

$$A_i(x) = (1 - 2(x - x_i)l'_i(x_i))l_i^2(x) \text{ et } B_i(x) = (x - x_i)l_i^2(x)$$

On remarque que $l'_i(x_i) = \sum_{k=1, k \neq i}^{n+1} \frac{1}{x_i - x_k}$

Preuve. Par construction, H_{N-1} est un élément de P_{2N+1} et il vérifie de plus les relations d'interpolation. Il reste établir l'unicité. Pour cela il suffit de vérifier que si $H_{N+1}(x) = 0, \forall x$ alors $A_i = B_i = 0$. C'est chose aisée grâce aux propriétés de h_i et $\tilde{h}_i$. ■

Nous pouvons établir un résultat d'expression de l'erreur d'interpolation similaire à celui obtenu pour les polynômes de Lagrange.

Théorème 9 Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{2n+2}$ sur un intervalle I contenant les points deux à deux distincts $x_i, i = 0, \dots, N$, rangés dans l'ordre croissant. Alors pour tout $x \in [x_0, x_N]$ il existe (au moins) un réel ξ_x dans ce même intervalle tel que

$$f(x) - H_{N-1}(x) = \frac{f^{(2N+2)}(\xi_x)}{(N+1)!}.$$

Preuve. On procède comme dans le cas de l'interpolation de Lagrange, mais en considérant la fonction

$$F(t) = f(t) - H_{N-1}(t) - \left(\prod_{i=1}^{n+1} (t - x_i) \right)^2 S(x)$$

où $S(x)$ est telle que $F(x) = 0$. ■

Exemple Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $I = [0, 1]$. Soit $H(x)$ un polynôme de degré ≤ 3 tel que

$$\begin{cases} H(0) = f(0) \\ H(1) = f(1) \\ H'(0) = f'(0) \\ H'(1) = f'(1) \end{cases}$$

Déterminons H . En appliquant les formules du théorème, on trouve

$$\begin{aligned} H(x) &= f(0)(1-x)^2(1+2x) + f(1)x^2(3-2x) + f'(0)x(1-x)^2 + f'(1)x^2(x-1) \\ &= f(0) + xf'(0) + (-2f'(0) - 3f(0) + 3f(1) - f'(1))x^2 + (2f(0) + f'(0) - 2f(1) + f'(1))x^3 \end{aligned}$$

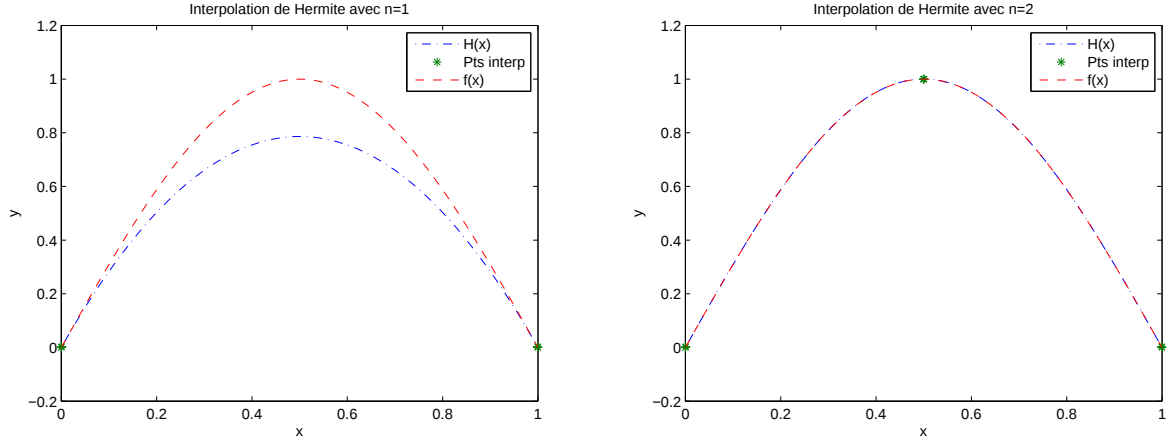


Figure 7: Polynôme d'interpolation d'Hermite pour $f(x) = \sin(\pi x)$ sur $[0, 1]$ avec 2 et 3 points d'interpolation

5.3 De Lagrange à Hermite

Commençons par donner le résultat technique suivant :

Lemme 3 Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^m([a, b])$ et $x_i \in [a, b]$, une suite de points deux à deux distincts. Alors

$$\begin{aligned} f[x_i x_i] &= f'(x_i), \\ \underbrace{f[x_i x_i \cdots x_i]}_{k+1 \text{ fois}} &= \frac{f^{(k)}(x_i)}{k!}, k = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Preuve. On introduit $\epsilon > 0$ tels que les suites x_i et $x_i + \epsilon$ soient composées de points deux à deux distincts. On procède par récurrence. Pour $k = 1$, on définit

$$f[x_i x_i] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f[x_i x_i - \epsilon + \epsilon] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x_i + \epsilon) - f(x_i)}{\epsilon} = f'(x_i).$$

Les autres relation s'obtiennent directement par recurrence. ■ Le résultat suivant lie les polynômes de Lagrange et de Hermite

Proposition 8 Soient $x_i, i = 1, \dots, n+1$ $n+1$ réels deux à deux distincts et rangés dans l'ordre croissant. Soit $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([x_1, x_{n+1}])$. Soit $\epsilon > 0$ tel que

$$x_1 < x_1 + \epsilon < x_2 - \epsilon < x_2 < x_2 + \epsilon \cdots x_k - \epsilon < x_k < x_k + \epsilon \cdots x_{n+1} - \epsilon < x_{n+1}$$

On note $P_\epsilon(x) \in \mathbf{P}_{2n+1}$ le polynôme d'interpolation de f en ces points. Alors

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \max_{x \in [x_1, x_{n+1}]} |p_\epsilon(x) - H(x)| = 0,$$

où $H \in \mathbf{P}_{2n+1}$ est le polynôme d'interpolation de Hermite aux points x_i vérifiant

$$H(x_i) = f(x_i), \quad H'(x_i) = f'(x_i), \quad i = 1, \dots, n+1.$$

Preuve.

■

6 Interpolation par morceaux (cas affine)

Nous l'avons vu à travers les calculs menés plus haut, pour espérer approcher précisément une fonction f par un polynôme d'interpolation p de f en des points x_i sur un intervalle I donné, il est nécessaire que le degré de p soit élevé et cela d'autant plus que la longueur de I est grande. La construction de p requiert alors un nombre important d'opérations, demande du temps de calcul et, surtout, présente un risque de propagation d'erreurs numériques pouvant aboutir *in fine* à un résultat de mauvaise qualité. *A contrario*, la construction d'un polynôme d'interpolation de petit degré, si elle fournit une approximation peu précise, est peu coûteuse. La précision et le faible coût (en termes de volume de calculs) de la construction d'un approximant sont donc antagonistes. L'interpolation par morceaux peut se présenter comme un compromis, elle permet de concilier faible coût de calcul et précision raisonnable. Il s'agit de décomposer l'intervalle d'étude I en sous-intervalles de "petite taille" et de construire sur chacun d'eux un polynôme d'interpolation de faible degré. En voici une illustration simple.

6.1 Construction

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ et $N \in \mathbb{N}^*$. On considère les points $x_i = \frac{i}{N+1}$, $i = 0, \dots, N+1$ et la subdivision de $[0, 1] = \cup_{i=0}^N [x_i, x_{i+1}]$. Sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, on construit $p_i(x)$, le polynôme d'interpolation (de degré inférieur ou égal à un) de f aux points x_i et x_{i+1} . Ainsi la fonction

$$\Pi f(x) = \begin{cases} p_i(x) & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est une fonction continue, affine par morceaux et coïncidant avec f aux points x_i . Par la formule de Newton, on trouve facilement l'expression de p_i :

$$p_i(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i).$$

On peut néanmoins construire Πf à l'aide d'une formule proche de celle des polynômes d'interpolation dans la base de Lagrange. Il faut pour cela construire des fonctions ϕ_i affines par morceaux telles que

$$\phi_i(x_j) = \delta_{i,j}.$$

On définit l'espace vectoriel de dimension finie V_h par

$$V_h = \{v \in \mathcal{C}^0([0, 1]) \text{ , } v|_{K_i} \in P_1, \ 0 \leq i \leq N\}.$$

Remarquons que l'on a bien $V_h \subset \mathcal{C}^0([0, 1])$ mais $V_h \mathcal{C}^0([0, 1])$.

Cet espace est de dimension finie et les fonctions $\phi_i(x)$ définies par

$$\phi_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1 - x}{h} & \text{si } 0 \leq x \leq x_1, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h} & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \frac{x_{i+1} - x}{h} & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{pour } i = 1, \dots, N,$$

$$\phi_{N+1}(x) = \begin{cases} \frac{x - x_N}{h} & \text{si } x_N \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

forment une base de V_h .

Lemme 4 *Les $\phi_i(x)$ forment une base de V_h et $\dim(V_h) = N + 2$.*

Preuve. Il suffit de vérifier dans un premier temps que les ϕ_i sont linéairement indépendantes, ce qui est aisé puisque

$$\sum_{i=0}^{N+1} a_i \phi_i(x) = 0, \quad \forall x \in [0, 1] \implies a_i = 0, \quad i = 0, \dots, N + 1.$$

Il reste à montrer que les ϕ_i forment bien une famille génératrice de V_h qui sera alors du coup de dimension $N + 1$. A cet effet, on introduit la

Définition 5 *On définit l'opérateur d'interpolation Π_h par :*

$$\begin{aligned} \Pi_h : \mathcal{C}^0([0, 1]) &\longrightarrow V_h \\ v &\longmapsto \Pi_h(v)(x) = \sum_{i=0}^{N+1} v(x_i) \phi_i(x). \end{aligned}$$

Nous avons les relations d'interpolation $\Pi(v)(x_i) = v(x_i)$, $\forall i = 0, \dots, N + 1$.

On établit le

Lemme 5 *Si $v \in V_h$ alors $v = \Pi_h v$.*

Preuve. (du lemme) Soit $v \in V_h$. Puisque V_h est un espace vectoriel, la fonction $w = v - \Pi_h(v) \in V_h$ et cette fonction est donc affine par morceaux. En particulier, elle s'annule en chaque x_i , ce qui implique $w = 0$. ■

L'application du lemme nous assure que la famille Φ_i est génératrice, ce qui démontre le résultat. ■

6.2 Estimation d'erreur

Proposition 9 *Soit $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$ et Πf le polynôme d'interpolation par morceaux P_1 aux points $x_i = a + i \frac{b-a}{N+1}$. On note $h = \max_i (x_{i+1} - x_i)$. Alors, il existe une constante $C > 0$, indépendante de h , telle que*

$$\|f - \Pi f\|_{\infty} \leq Ch^2 \|f''\|_{\infty}$$

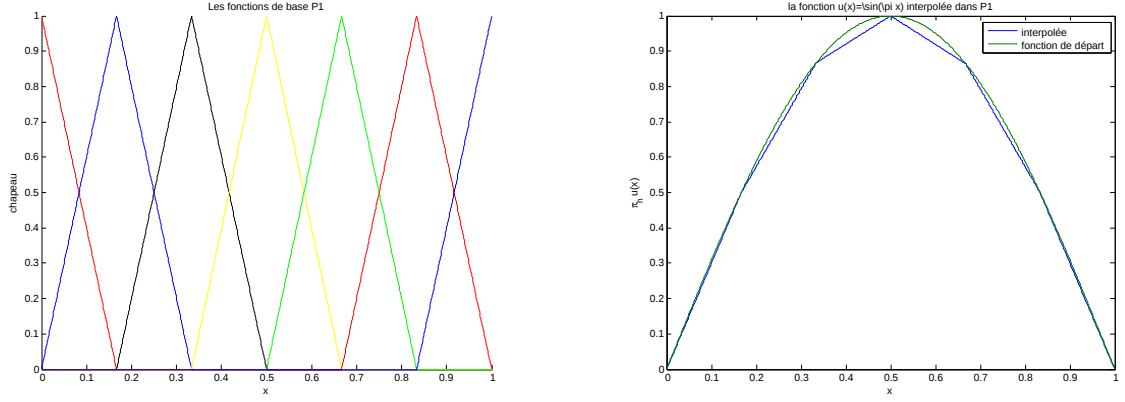


Figure 8: Base de P_1 et interpolée par morceaux de $\sin(\pi x)$

Preuve. On ne perd rien en généralité à se ramener au cas de l'intervalle $[0, 1]$. Soit i fixé, $i \in \{0, \dots, N\}$. On se donne x dans $[x_i, x_{i+1}]$. Nous pouvons écrire

$$e(x) = f(x) - \Pi(x) = \int_{x_i}^x e'(s) ds.$$

Or

$$\begin{aligned} e'(s) &= f'(s) - \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}, \\ &= f'(s) - \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(t) dt, \\ &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f'(s) - f'(t)) dt \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$e(x) = \int_{x_i}^x \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f'(s) - f'(t)) dt ds$$

Mais $f'(s) - f'(t) = \int_t^s f''(\xi) d\xi$. Il s'ensuit que

$$e(x) = \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \int_{x_i}^x \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\int_t^s f''(\xi) d\xi \right) dt ds.$$

du coup

$$\begin{aligned}
|e(x)| &\leq \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \int_{x_i}^x \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\int_t^s |f''(\xi)| d\xi \right) dt ds, \\
&\leq \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} |f''(\xi)| d\xi \right) dt ds, \\
&\leq (x_{i+1} - x_i)^2 \|f''\|_{\infty}.
\end{aligned}$$

d'où le résultat avec $C = 1$. ■

References

- [1] Hairer, *Cours d'analyse numérique*, université de Genève
- [2] A. Magnus, *Analyse numérique*, cours UCL, Louvain la Neuve.
- [3] A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri, *Méthodes numériques pour le calcul scientifique*, Springer Paris, 2000.
- [4] M. Schatzman, *Analyse numérique pour la licence*, InterEdition, 1993.
- [5] J. Stoer, R. Burlisch, *Introduction to Numerical Analysis*, text in Applied Mathematics, 12, Springer, 3rd Edition 2002