

# Intégration numérique

## (notes de cours)

Jean-Paul Chehab  
Université de Picardie Jules Vernes  
LAMFA CNRS 6140

version du 6 mai 2009

### Contents

<b>1</b>	<b>Motivations</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>formules de quadrature</b>	<b>2</b>
2.1	Expression générale . . . . .	2
2.2	Résultat de convergence . . . . .	2
<b>3</b>	<b>Formules de type interpolation</b>	<b>3</b>
3.1	Obtention des formules (formules de Newton-Cotes) . . . . .	3
3.2	Formules composites . . . . .	5
3.3	Estimations d'erreurs . . . . .	6
3.3.1	Simplement . . . . .	7
3.3.2	Noyau de Peano . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Accélération par Romberg</b>	<b>8</b>
<b>5</b>	<b>Introduction à la quadrature de Gauss</b>	<b>9</b>
5.1	Formulation du problème . . . . .	9
5.2	Le résultat général avec les polynômes orthogonaux . . . . .	9
5.2.1	Les polynômes orthogonaux . . . . .	9
5.2.2	Le résultat principal . . . . .	11
5.2.3	Exemples . . . . .	12

# 1 Motivations

Partons d'un exemple pratique. La constante  $\pi$  a une signification géométrique, elle correspond à la surface du disque unité, surface que l'on peut approcher par une intégrale. On peut donc calculer numériquement  $\pi$  en approchant une intégrale. L'aire du disque est égale à 4 fois celle du quart de disque inclus dans le premier quadrant, c'est à dire  $\{x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ . Cette surface est donc l'intégrale

$$I = 4 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

Une simple application de la formule des rectangles rencontrée au lycée donne

$$I \simeq 4 \sum_{i=1}^N \sqrt{1 - \frac{i-1}{N}} \frac{1}{N}$$

Cette formule était connue des mathématiciens japonais au 17 ième siècle vers 1670, [2].

## 2 formules de quadrature

### 2.1 Expression générale

Soit  $f \in \mathcal{C}([a, b])$ , on cherche à approcher

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx$$

par le nombre

$$Q(f) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \omega_i$$

où les  $x_i$  sont des points de  $[a, b]$  et  $\omega_i$  des réels donnés. Une telle formule est appelée *formule de quadrature*. Nous sommes amenés à nous poser les questions suivantes

- Comment construire de telles formules en pratique ?
- comment définir et mesurer la précision de telles formules ?
- Quand la convergence a-t-elle lieu ? Quelle peut-être l'expression de l'erreur ?

### 2.2 Résultat de convergence

Pour commencer, donnons-nous le résultat général suivant

**Théorème 1** Soit  $I = [a, b]$  un intervalle fermé borné de  $\mathbb{R}$ . Soit  $f \in \mathcal{C}([a, b])$  et la formule de quadrature

$$Q_n(f) = \sum_{i=1}^n w_i^{(n)} f(x_i^{(n)})$$

où les  $x_i^{(n)}$  sont des points de  $I$  pour tout  $n$ . On suppose que

$$i. \exists M > 0 / \forall n, \sum_{i=1}^n |w_i^{(n)}| \leq M$$

ii.  $\forall p$ , polynôme,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n(f) = I(f) = \int_a^b p(x) dx$$

Alors, la formule de quadrature converge vers  $f$ , i.e.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n(f) = I(f).$$

**Preuve.** Soit  $\epsilon > 0$ . D'après le théorème de Weierstrass, il existe  $q$ , polynôme, tel que

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - q(x)| < \epsilon$$

On peut écrire

$$\left| \int_a^b f(x) dx - Q_n(f) \right| = \left| \int_a^b f(x) dx + Q_n(q - f) + I(q) - Q_n(q) \right|$$

Ainsi

$$\left| \int_a^b f(x) dx - Q_n(f) \right| \leq \int_a^b |f(x) - q(x)| dx + \sum_{i=1}^n |w_i^{(n)}| \cdot |f(x_i^{(n)}) - q(x_i^{(n)})| + \left| \int_a^b q(x) dx - \sum_{i=1}^n w_i^{(n)} q(x_i^{(n)}) \right|$$

Pour cet  $\epsilon > 0$ , en vertu de ii.,  $\exists N / \forall n \geq N$

$$\left| \int_a^b q(x) dx - \sum_{i=1}^n w_i^{(n)} q(x_i^{(n)}) \right| < \epsilon$$

Finalement, pour cet  $\epsilon > 0$ ,  $\exists N(\epsilon)$  tel que  $\forall n \geq N$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - Q_n(f) \right| \leq \epsilon(b - a) + \epsilon M + \epsilon.$$

■

**Remarque 2** Ce résultat suggère d'intégrer une approximation polynomiale de la fonction pour approcher  $I(f)$ .

### 3 Formules de type interpolation

#### 3.1 Obtention des formules (formules de Newton-Cotes)

L'idée de base est la suivante : pour  $f \in \mathcal{C}([a, b])$  et  $(x_i)_{i=1}^{n+1}$  une suite de points deux à deux distincts on approche  $I(f)$  par l'intégrale  $I(p_n)$  où  $p_n$  est le polynôme d'interpolation de  $f$  aux points  $(x_i)_{i=1}^{n+1}$ . Les formules de quadratures s'obtiennent assez facilement. On a la

**Proposition 3** Soient  $(x_i)_{i=1}^{n+1}$  une suite de points deux à deux distincts, tous dans  $[a, b]$  et  $f \in \mathcal{C}([a, b])$ . On note  $p_n$  le polynôme d'interpolation de  $f$  aux points  $(x_i)_{i=1}^{n+1}$ . On a

$$\int_a^b p_n(x) dx = \sum_{i=1}^n f(x_i) w_i$$

avec

$$w_i = \int_a^b l_i(x) dx$$

où  $l_i(x)$  est le  $i$ -ième polynôme de Lagrange associé aux points  $(x_i)_{i=1}^{n+1}$ .

**Preuve.** Il suffit de partir de l'écriture de  $p_n$  dans la base de Lagrange relative aux  $x_i$ . Nous avons

$$p_n(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) l_i(x)$$

d'où le résultat. ■

On retrouve ainsi la forme générale des formules de quadrature.

### Quelques exemples

- $n = 0$

$$Q(f) = (b - a)f(x_1), \text{ Formule des rectangles}$$

- $n = 1$ ,  $x_1 = a, x_2 = b$ ,

$$Q(f) = \frac{b - a}{2} (f(a) + f(b)), \text{ Formule des trapèzes}$$

- $n = 2$ ,  $x_1 = a, x_2 = \frac{a+b}{2}, x_3 = b$ ,

$$Q(f) = \frac{b - a}{6} \left( f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right), \text{ Formule de Simpson}$$

De manière générale voici une liste de formules de quadrature lorsque les points d'intégration (ou d'interpolation) sont régulièrement espacés

Définissons à présent ce que l'on entend par ordre de précision d'une formule de quadrature

**Définition 4** On dit qu'une formule de quadrature est d'ordre  $m$  si  $m$  est le plus grand entier tel que la formule soit exacte sur  $\mathfrak{P}_m$ , autrement dit tel que

$$I(p) = Q(p), \forall p \in \mathfrak{P}_m$$

$n$	$\alpha_i$	Num	Erreur	Nom
1	1 1	2	$\frac{h^3}{12}f^{(2)}(\xi)$	Trapèzes
2	1 4 1	6	$\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi)$	Simpson
3	1 3 3 1	8	$\frac{3h^5}{80}f^{(4)}(\xi)$	3/8
4	7 32 12 32 7	90	$\frac{8h^7}{945}f^{(6)}(\xi)$	Milne
5	19 75 50 50 75 19	288	$\frac{275h^7}{11096}f^{(6)}(\xi)$	Milne
6	41 216 27 272 27 216 41	840	$\frac{9h^9}{1400}f^{(8)}(\xi)$	Weddle

### 3.2 Formules composites

Elles consistent découper l'intervalle d'intégration en sous-intervalles sur lesquels une formule de quadrature (de type interpolation par exemple) est appliquée. Ces formules reposent sur la relation de Chasles. Plus précisément, donnons-nous  $n + 1$  points  $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$ . Nous avons

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$$

En approchant  $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$  par une formule de quadrature  $Q_i(f)$  sur  $[x_i, x_{i+1}]$ , nous obtenons

$$I(f) \simeq \sum_{i=0}^{n-1} Q_i(f).$$

On retrouve ainsi les somme de Riemann. En effet, si l'on approche  $f$  sur  $[x_i, x_{i+1}]$  par sa valeur en  $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ , nous obtiendrons

$$Q_i(f) \simeq (x_{i+1} - x_i)f(\xi_i)$$

et donc

$$I(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)f(\xi_i).$$

On obtient la *méthode des rectangles à gauche composite* pour  $\xi_i = x_i$ , celle des *des rectangles à droite composite* pour  $\xi_i = x_{i+1}$ .

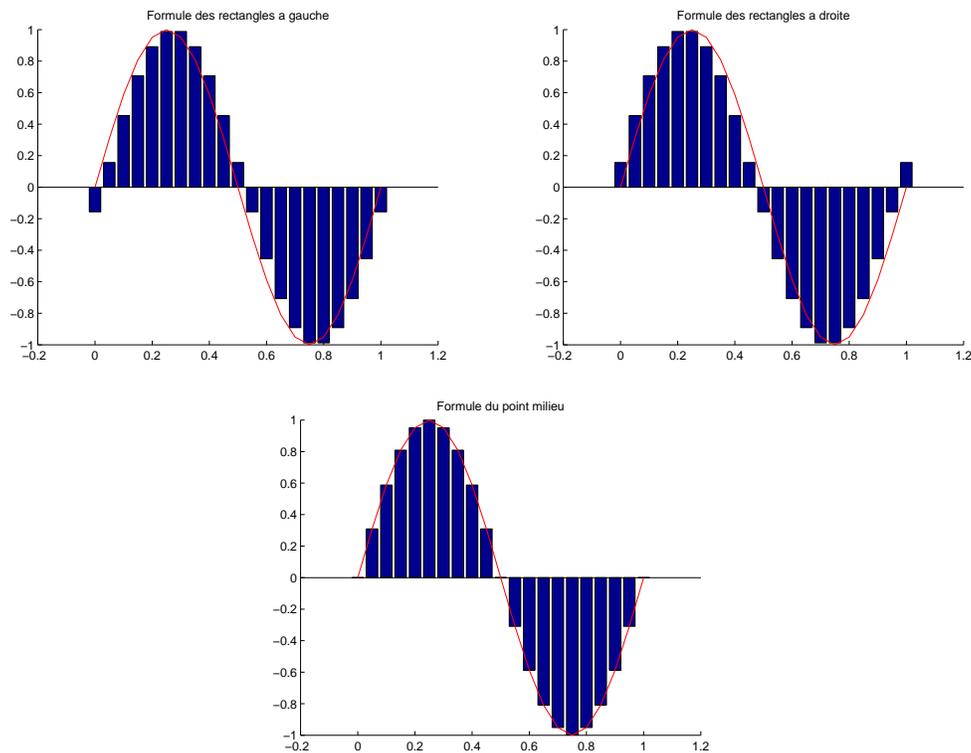


Figure 1: Formules composites pour la méthode des rectangles à gauche, à droite et pour le point milieu

### 3.3 Estimations d'erreurs

Si  $f$  est assez régulière, nous pouvons directement donner une estimation de l'erreur de quadrature en majorant l'intégrale de l'erreur d'interpolation. Plus précisément, pour  $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])$  nous avons en effet

$$|I(f) - Q(f)| \leq \left| \int_a^b (f(x) - p(x)) dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - p(x)| dx \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} \int_a^b \left| \prod_{i=1}^{n+1} (x - x_i) \right| dx$$

Parfois cette estimation n'est pas assez précise, et il est utile de chercher à exprimer sous une forme d'égalité l'erreur d'intégration. On cherchera plus précisément des formules du type

$$\int_a^b p_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx = h^{p+1} K f^{(p)}(\xi), \text{ avec } \xi \in [a, b].$$

Cela permettra, comme on le verra dans la suite, d'inspirer de nouvelles méthodes de quadrature. Le degré d'interpolation et la régularité de la fonction sont les deux principales données pour obtenir de telles formules. Examinons ce qui se passe sur un exemple très simple. Soit  $f$   $L$ -lipschitzienne sur  $[a, b]$ . Approchons  $\int_a^b f(x)dx$  par une formule des rectangles composite :

$$Q(f) = \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) f(\xi_i).$$

Alors

$$|Q(f) - I(f)| = \left| \sum_{i=1}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x) - f(\xi_i)) dx \right| \leq \sum_{i=1}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} L|x - \xi_i| dx$$

Et comme  $|x - \xi_i| \leq x_{i+1} - x_i$ ,  $\forall x \in [x_i, x_{i+1}]$ , nous avons

$$|Q(f) - I(f)| \leq L \sum_{i=1}^n ((x_{i+1} - x_i))^2 \leq L_i((x_{i+1} - x_i)) \sum_{i=1}^n ((x_{i+1} - x_i)) = (b-a)L_i((x_{i+1} - x_i)).$$

CE résultat ne peut être amélioré si  $f$  est plus régulière : l'erreur est donc limitée par le degré du polynôme d'interpolation.

### 3.3.1 Simplement

Nous rappelons tout d'abord la formule de la moyenne

**Théorème 5** Soit  $f$  et  $g$  deux fonction continues sur  $[a, b]$ . On suppose que  $g$  garde un signe constant sur  $[a, b]$ . Alors il existe au moins un  $\xi \in [a, b]$  tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$$

**Preuve.** On introduit la fonction  $F(t)$  par

$$F(t) = f(t) \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)g(x)dx$$

Pour établir, le résultat, il suffit de montrer que  $F$  s'annule dans  $[a, b]$ . La fonction  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , elle atteint donc ses bornes. Il existe donc  $x_m$  et  $x_M$  tels que

$$f(x_m) = \min_{x \in [a, b]} f(x) \leq f(x) \leq f(x_M) = \max_{x \in [a, b]} f(x)$$

Il en découle que

$$F(x_m) \leq 0 \text{ et } F(x_M) \geq 0.$$

Le théorème des valeurs intermédiaires s'applique ici et nous pouvons conclure à l'existence d'un réel  $\xi$  de  $[a, b]$  tel que  $F(\xi) = 0$ . ■ En appliquant ce résultat à la formule des rectangles, nous obtenons, avec  $g(x) = 1$

$$E(f) = (b-a)f(\eta) - \int_a^b f(x)dx = (b-a)(f(\eta) - f(\xi)).$$

Si  $f$  est dérivable sur  $[a, b]$ , le théorème des accroissements finis nous assure de l'existence de  $\theta \in ]a, b[$  tel que

$$E(f) = (b-a)^2 f'(\theta).$$

Les formules d'erreur que nous allons obtenir ne sont qu'une généralisation.

### 3.3.2 Noyau de Peano

Le noyau de Peano permet de représenter l'erreur de quadrature sous forme intégrale. Nous admettrons le résultat suivant

**Théorème 6** *Soit*

$$R(p) = Q(f) - I(f).$$

*On suppose que  $R(p) = 0$  pour tous les polynômes de  $\mathbb{P}_n$ . Alors, pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])$ ,*

$$R(f) = \int_a^b f^{(n+1)}(t)K(t)dt$$

où  $K(t)$  est le noyau de Peano avec

$$K(t) = \frac{1}{n!}R_x([(x-t)_+^n]), \quad (x-t)_+^n = \begin{cases} (x-t)^n & \text{si } x \geq t, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

## 4 Accélération par Romberg

Elle est basée sur l'extrapolation à la limite de Richardson. Soit  $A(h)$  une suite de nombres réels convergeant vers  $a_0$  lorsque  $h$  tend vers 0. Supposons que  $Q(h)$  admette le développement

$$A(h) = a_0 + a_1h + a_2h^2 + \dots + a_nh^n + R_{n+1}(h)$$

Si  $a_1 \neq 0$ , la suite  $A(h)$  approche  $a_0$  au premier ordre. De manière générale, soit  $k_0$  le plus petit indice tel que  $a_{k_0} \neq 0$ . Alors  $A(h)$  approche  $a_0$  à l'ordre  $k_0$ . Pour rendre la convergence plus rapide, il faudrait pouvoir "éliminer" les coefficients successifs de  $a_{k_0}$ . A cet effet, on construit de proche en proche une suite  $B(h)$  convergeant aussi vers  $a_0$  mais plus vite puisqu'avec un développement en 0 sous la forme

$$B(h) = a_0 + b_{k_1}h^{k_1} + \dots$$

avec  $k_1 \gg k_0$ .

Remarquons qu'en remplaçant  $h$  par  $\delta h$ , nous avons

$$A(\delta h) = a_0 + a_1\delta h + a_2\delta^2h^2 + \dots + a_n\delta^n h^n + R_{n+1}(h)$$

Ainsi, en définissant  $B(h)$  par

$$B(h) = \frac{A(\delta h) - A(h)}{1 - \delta} = a_0 + b_2h^2 + \dots +$$

La nouvelle suite  $B(h)$  approche  $a_0$  à l'ordre 2. Nous pouvons généraliser ce procédé comme suit :

### Méthode de Romberg

Initialisation	$\mathcal{A}_{m,0} = A(\delta^m h), m = 0, \dots, n$
Pour $k = 0, \dots,$	
poser	$\mathcal{A}_{m,k+1} = \frac{\mathcal{A}_{m,k} - \delta^{2(k+1)}\mathcal{A}_{m-1,k}}{1 - \delta^{2(k+1)}}$

La méthode de Romberg consiste à répéter ce procédé recursivement avec  $\delta = \frac{1}{2}$  et nous l'appliquons à l'approximation d'une intégrale par la formule des trapèzes composite.

## 5 Introduction à la quadrature de Gauss

### 5.1 Formulation du problème

Dans les méthodes de quadrature de type interpolation, les points d'intégration étaient fixés au préalable. Les formules produites sont de l'ordre du nombre de ces points. En revenant à l'expression générale des formules de quadrature, une question naturelle est : peut-on déterminer les points  $x_i$  et les poids  $w_i$  de sorte à ce que la formule soit d'ordre maximal ? Formulée mathématiquement cette question devient

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } x_i, w_i, i = 1, \dots, n+1 \text{ tels que} \\ &\sum_{i=1}^n p(x_i)w_i = \int p(x)w(x)dx \end{aligned}$$

pour tout  $p$  dans  $\mathbb{P}_m$  avec  $m$  maximum. Ici  $w(x)$  est une fonction positive, intégrable, dite fonction poids. Sans faire davantage de calculs, on voit immédiatement qu'ayant  $2(n+1)$  inconnues, il faut au moins  $2(n+1)$  équations pour espérer atteindre l'ordre  $2n+1$ . Peut-on alors choisir  $x_i$  et  $w_i$  pour que l'ordre atteint soit maximum, c'est à dire  $2n+1$  ?

### 5.2 Le résultat général avec les polynômes orthogonaux

#### 5.2.1 Les polynômes orthogonaux

Soit  $f$  une fonction continue. Considérons le problème de l'évaluation numérique de l'intégrale

$$I(f) = \int_a^b f w dx$$

où  $w(x)$  est une fonction poids jouissant des propriétés suivantes

- $w(x) \geq 0$  est mesurable sur  $[a, b]$
- tous les moments  $\mu_k = \int_a^b x^k w dx$  existent et sont finis.
- pour les polynômes positifs  $P$  sur  $[a, b]$

$$\int_a^b P w dx = 0 \Rightarrow P = 0$$

On cherche à approcher  $I(f)$  sous la forme

$$\tilde{I}(f) = \sum_{i=1}^n f(x_i)w_i$$

où les  $x_i$  et les  $w_i$  sont à déterminer de sorte à ce que cette formule soit d'ordre le plus élevé possible, i.e, exacte pour les polynômes de degré le plus grand possible. Nous allons voir que

ces formules dites de Gauss, sont uniques et d'ordre  $2n - 1$  et qu'apparaissent naturellement les polynômes orthogonaux.

Soit

$$\Pi_n = \{p / \deg(p) \leq n\}$$

et

$$\tilde{\Pi}_n = \{p/p = x^n + a_1x^{j-1} + \dots + a_0\}$$

Nous avons le résultat générique suivant

**Théorème 7** *Il existe une famille de polynômes orthogonaux  $p_n \in \tilde{\Pi}_n$  tels que*

- i.  $(p_i, p_j) = 0, i \neq j$
- ii.  $p_0 = 1$  ( $p_{-1} = 0$ )
- iii.  $p_{i+1} = (x - \delta_{i+1})p_i - \gamma_{i+1}^2 p_{i-1}$
- iv.  $\delta_{i+1} = \frac{(xp_i, p_i)}{(p_i, p_i)}, \gamma_{i+1} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \\ \frac{(p_i, p_i)}{(p_{i-1}, p_{i-1})} & \text{sinon} \end{cases}$

**Preuve.** L'existence des polynômes s'obtient par le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, en partant de  $p_0 = 1$ . Les  $p_i$  étant unitaires, on peut écrire

$$p_{i+1} = (x - \delta_{i+1})p_i + c_{i-1}p_{i-1} + \dots + c_0p_0$$

On a donc

$$(p_{i+1}, p_i) = 0 = ((x - \delta_{i+1})p_i, p_i) \Rightarrow \delta_{i+1} = \frac{(xp_i, p_i)}{(p_i, p_i)}$$

D'autre part,

$$(p_{i+1}, p_{i-1}) = 0 = (xp_{i-1}, p_i) + c_{i-1}(p_{i-1}, p_{i-1}) \Rightarrow c_{i-1} = -\frac{(xp_{i-1}, p_i)}{(p_i, p_i)}$$

En développant  $xp_{i-1}$  dans  $\tilde{\Pi}_i$  on voit que  $(xp_{i-1}, p_i) = (p_i, p_i)$ . ■ On retrouve dans un cadre plus général le résultat sur les racines, et dont la démonstration est identique au cas des polynômes de Legendre.

**Théorème 8** *Les racines  $x_i$  de  $p_n$  sont réelles et simples, elles sont toutes contenues dans l'intervalle ouvert  $]a, b[$ .*

**Preuve.** Soit  $\ell$  le nombre de zéros distincts de  $p_n$ , compris entre  $a$  et  $b$  et d'ordre impair, on note ces racines  $\xi_1, \dots, \xi_\ell$ .

Supposons que  $\ell < n$ . Comme  $p_n$  est orthogonal à tous les polynômes de degré  $\leq n - 1$ . Ainsi

$$\int_a^b p_n(x) \prod_{i=1}^{\ell} (x - \xi_i) dx = 0$$

or ceci est impossible car la fonction intégrée ne change pas de signe dans  $[a, b]$ , il en découle que  $\ell = n$ . ■

**Théorème 9** *La matrice de Vandermonde*

$$A = \begin{pmatrix} p_0(t_1) & \cdots & p_0(t_n) \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n-1}(t_1) & \cdots & p_{n-1}(t_n) \end{pmatrix}$$

est inversible dès que les  $t_i$  sont deux à deux distincts.

**Preuve.** Supposons que  $A$  (ou  $A^T$ ) ne soit pas inversible. Alors, il existe un vecteur  $c = (c_0, \dots, c_{n-1})^T$  tel que  $A^T c = 0$ . Le polynôme

$$q = \sum_{i=0}^{n-1} c_i p_i(x)$$

a  $n$  racines distinctes  $t_1, \dots, t_n$  il est donc nul. Les  $p_i$  étant linéairement indépendants, on a nécessairement  $c_i = 0$ , ce qui contredit l'hypothèse de non inversibilité de  $A$ . ■

### 5.2.2 Le résultat principal

On peut à présent énoncer le résultat principal

**Théorème 10** *Soient  $x_1, \dots, x_n$  les racines du polynôme  $p_n$ ,  $w_1, \dots, w_n$  les racines du système d'équations*

$$\sum_{i=1}^n c_i p_i(x_k) w_i = \begin{cases} (p_0, p_0) & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k = 1, 2, \dots, n-1 \end{cases}$$

Alors  $w_i > 0$  et

$$a \int_a^b p w dx = \sum_{i=1}^n c_i p_i(x_k) w_i \text{ pour tout } p \in \Pi_{2n-1}. \text{ Les } w_i \text{ sont appelés poids}$$

b Inversement, si  $w_i, x_i$  sont tels que la formule soit exacte pour tout polynôme de  $\Pi_{2n-1}$ , alors ce sont les nombres définis par le système

c Il n'est pas possible de trouver des  $x_i, w_i$  tels que la formule soit exacte sur  $\Pi_{2n}$ .

**Preuve.** ■

À présent, nous allons établir un lien entre polynômes orthogonaux et matrices tridiagonales, ce lien permettra de calculer de manière intéressante les  $x_i, w_i$ .

Soit la suite de matrice tridiagonale

$$J_j = \begin{pmatrix} \delta_1 & \gamma_2 & & & \\ \gamma_2 & \delta_2 & \gamma_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \gamma_{n-1} & \delta_{n-1} & \gamma_n \\ & & & \delta_n & \gamma_n \end{pmatrix}$$

**Théorème 11** *Les racines  $x_i$  du  $n$ -ième polynôme orthogonal sont les valeurs propres de la matrice.*

**Preuve.** Nous avons en effet  $p_j(x) = \det(J_j - xI)$  car il satisfait la relation de récurrence à trois termes. ■

### 5.2.3 Exemples

## References

- [1] J.-L. Chabert, E. Barbin, M. Guillemot, A. Michel-Pajus, J. Borowczyk, A. Djebbar, J.-C. Martzloff, *Histoire d'algorithmes, du caillou à la puce*, Belin, Paris, 1993.
- [2] J.-P. Delahaye, *Le fascinant nombre  $\pi$* , Pour la Science, Belin, Paris, 1997.
- [3] Hairer, *Cours d'analyse numérique*, université de Genève
- [4] A. Magnus, *Analyse numérique*, cours UCL, Louvain la Neuve.
- [5] A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri, *Méthodes numériques pour le calcul scientifique*, Springer Paris, 2000.
- [6] M. Schatzman, *Analyse numérique pour la licence*, InterEdition, 1993.
- [7] J. Stoer, R. Burlisch, *Introduction to Numerical Analysis*, text in Applied Mathematics, 12, Springer, 3rd Edition 2002