Université de Picardie Jules Verne
Licence 2
Scilab
2017-2018

Arithmétique

1 Nombres premiers

On pourra consulter avec beaucoup de profit le livre de Jean-Paul Delahaye [2].

1.1 Crible

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Figure 1: Crible Eratostène

Principe : On dresse la liste des nombres entiers plus petits que n, n donné. On marque 2, puis on élimine de la liste tous les multiples de 2 supérieurs à 2. On recommence le processus en marquant le premier nombre non barré supérieur à 2, c'est à dire 3. On élimine alors tous les entiers de la liste multiples de 3 et supérieurs à3. On recommence le processus en marquant le premier nombre non barré supérieur à 3, c'est à dire 5.
En fait, on n'a pas besoin de balayer tous les nombres de la liste.
Illustration :

```
A =
```

```
   column 1 to 12

2.   3.   5.   7.   11.   13.   17.   19.   23.   29.   31.   37.

column 13 to 23

41.   43.   47.   53.   59.   61.   67.   71.   73.   79.   83.

column 24 to 25

89.   97.
```

1.2 Factorisation par nombres premiers

Il s'agit de la décomposition d'un nombre en facteurs premiers. On cherchera à écrire un algorithme simple puis à le programmer.

1.3 Spirale d'Ulam

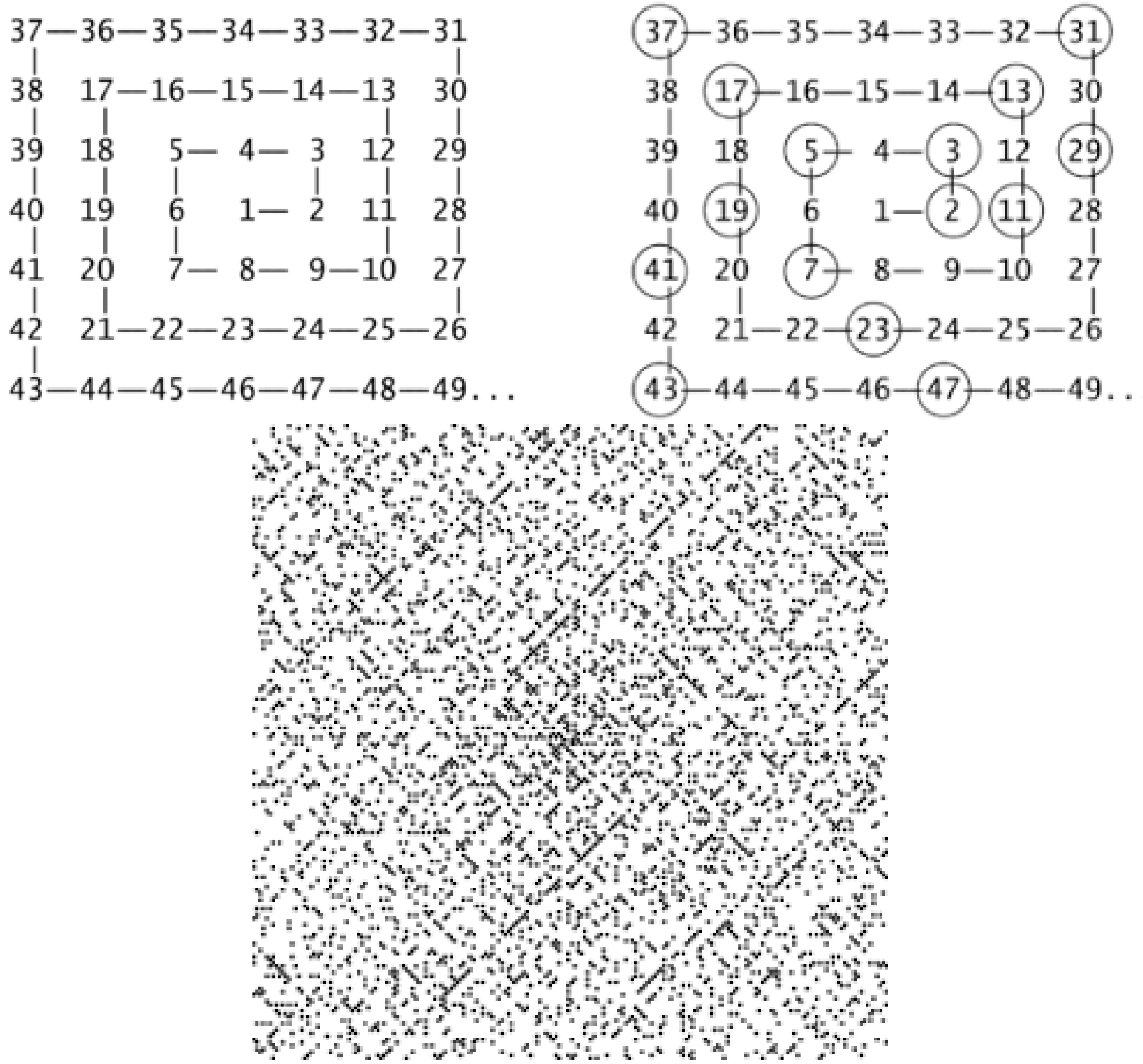

Figure 2: En haut, Spirale d'Ulam (g), marquage des nombres premiers (droite) et, en bas marquage des premiers pour un grand nombre de points

2 Calcul de π

On pourra consulter avec beaucoup de profit le livre de Jean-Paul Delahaye [1].

2.1 Fraction continue

Exercice A l'aide d'une méthode simple, programmer la fonction qui à une suite de longueur finie `[abcd...]` associe la fraction

$$\alpha + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cdots}}}}.$$

Indication : on pourra partir du terme le plus profond et remonter par une formule de réccurence. Quels sont les avantages, les inconvénients ?

Théorème 1 *Soit n fixé. On définit les suites p_k et q_k, pour $k = 1, \cdots, n$ par*

$$\begin{aligned} p_{-2} = 0, p_{-1} = 1, p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \\ q_{-2} = 1, q_{-1} = 0, q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \end{aligned}$$

Alors pour tout on a $\frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, \cdots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots \over a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}$

Preuve. On procède par une récurrence d'ordre 2 sur n.

pour $n = 0$ on. a $\frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1} = a_0$;
pour $n = 1$ on. a $\frac{p_1}{q_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1} = a_0 + \frac{1}{a_1}$

Supposons à présent que $n \geq 2$ et que $\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = [a_0, a_1, \cdots, a_{n-2}]$ et $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = [a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}]$.
La fraction $\frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, \cdots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots \over a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}$ s'obtient en considérant

$$[a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots \over a_{n-2} + \cfrac{1}{a_{n-1}}}}$$

et en remplaçant a_{n-1} par $a_{n-1}+\dfrac{1}{a_n}$. On a donc

$$\begin{aligned}
[a_0,a_1,\cdots,a_n] &= [a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}+\frac{1}{a_n}] \\
&= \frac{p_{n-1}\left(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}+\frac{1}{a_n}\right)}{q_{n-1}\left(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}+\frac{1}{a_n}\right)} \\
&= \frac{\left(a_{n-1}+\frac{1}{a_n}\right)p_{n-2}+p_{n-3}}{\left(a_{n-1}+\frac{1}{a_n}]\right)q_{n-2}+q_{n-3}} \\
&= \frac{a_{n-1}p_{n-2}+p_{n-3}+\frac{1}{a_{n-1}}p_{n-2}}{a_{n-1}q_{n-2}+q_{n-3}+\frac{1}{a_{n-1}}q_{n-2}} \\
&= \frac{p_{n-1}+\frac{1}{a_{n-1}}p_{n-2}}{q_{n-1}+\frac{1}{a_{n-1}}q_{n-2}} \\
&= \frac{a_np_{n-1}+p_{n-2}}{a_nq_{n-1}+q_{n-2}} = \frac{p_n}{q_n}
\end{aligned}$$

■

Définition 2 *les fractions* $\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}\cdots$ *sont les réduites de* $[a_0,a_1,\cdots,a_n]$.

Exemple 1

$$\pi = 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}}$$

ou de manière abrégée

$$\pi = [3;7,15,1,292,1,1,1,2,1,3,1,14,\cdots]$$

On peut considérer les *réduites* en arrêtant le développement. On obtient ainsi des approximations rationnelles de π :

Exemple 2

Le nombre d'or $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ est défini comme racine positive de l'quation

$$x^2 = x+1 \text{ ou encore } x = 1+\frac{1}{x}$$

On a ainsi

$$\phi = 1+\frac{1}{\phi} = 1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{\phi}} = 1+\frac{1}{\phi} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{\phi}}} = 1+\frac{1}{\phi} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{1+}}}$$

on a donc $\phi = [1;1,1,1,1,\cdots]$

Réduite	Valeur	$10^6\times$ erreur
$\frac{22}{7}$	**3,14**2857143	-1264,489
$\frac{333}{106}$	**3,1415**09434	83,220
$\frac{355}{113}$	**3,141592**920	-0,226
$\frac{103993}{33102}$	**3,141592653**01190	0,00057789
$\frac{104348}{33215}$	**3,141592653**92142	-0,00033163
$\frac{208341}{66317}$	**3,141592653**46	0,00012235
$\frac{208341}{66317}$	**3,141592653**61	-0,00002915
	$\pi = \mathbf{3,14159265358979}$...	

Table 1: Les réduites successives de π

2.2 Les suites et séries

- $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots \frac{(-1)^k}{2k+1} + \cdots$: formule de Leibnitz (1682)
- $\frac{\pi}{8} = \frac{1}{1\times 3} + \frac{1}{5\times 7} + \cdots \frac{1}{(4k+1)(4k+3)} + \cdots$: formule de Leibnitz (1682)
- $\pi = 2 \times \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \times \cdots$: François Viète (1592)
- $V_n = 8\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(4k+1)(4k+3)}, \lim_{n\to+\infty} V_n = \pi$

La (fameuse) formule de Simon Plouffe (1995) peremt de calculer indépendemment en base 16 les décimales de π.

$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6}}{16^i}.$$

Elle est fascinante et se démontre pourtant très simplement.

Lemme 3

$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6}}{16^i}.$$

Preuve.

$$\sum_{i=0}^{\infty} S = \frac{\frac{4}{8i+n}}{=} \sqrt{2}^n \sum_{i=0}^{+\infty} \left[\frac{x^{n+8i}}{8i+n}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}^n \sum_{i=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^{n-1+i} dx = \sqrt{2}^n \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{1-x^8} dx$$

On a donc

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6}}{16^i} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{4\sqrt{2} - 8x^3 - 4\sqrt{2}x^4 - 8x^5}{1-x^8} dx$$

On effectue le changement de variables $y = \sqrt{2}x$ et on obtient

$$\begin{aligned} S &= 16\int_0^1 \frac{y-1}{y^4 - 2y^3 + 4y - 4} dy = 4\int_0^1 \frac{2-y}{y^2 - 2y + 2} dy + 4\int_0^1 \frac{y}{y^2-2} dy \\ &= \int_0^1 \frac{4-4y}{y^2-2y+2} dy + 4\int_0^1 \frac{1}{(y-1)^2+1} dy + 4\int_0^1 \frac{y}{y^2-2} dy \\ &= [-2\ln(y^2-2y+2) + 4\arctan(y-1) + 2\ln(2-y^2)]_0^1 \\ &= \pi. \end{aligned}$$

■

Considérons les suites :

- $\lim_{n\to+\infty} n\sin(\frac{\pi}{n})$
- $\lim_{n\to+\infty} n\tan(\frac{\pi}{n})$

Ces dernières peuvent converger très lentement. Pour les accélérer, on peut utiliser l'extrapolation à la limite de Richardson. Un d.l. nous donne

$$n\tan(\frac{\pi}{n}) = \pi + \frac{\pi^3}{3n^2} + O(\frac{1}{n^4})$$

et

$$2n\tan(\frac{\pi}{2n}) = \pi + \frac{\pi^3}{12n^2} + O(\frac{1}{n^4})$$

En considérant la combinaison

$$2n\tan(\frac{\pi}{2n}) - \frac{1}{4}n\tan(\frac{\pi}{n}) = \frac{3}{4}\pi + O(\frac{1}{n^4})$$

On obtient une nouvelle suite qui converge plus vite vers π. On peut itérer le procéssus.

Posons $t_k^{(0)} = 3.2^k \tan(\frac{\pi}{3.2^k})$ On définit alors la suite $t_k^{(j)}$ par (Huygens)

$$t_k^{(1)} = \frac{4t_{k+1}^{(0)} - t_k^{(0)}}{3} = \pi + O(\frac{1}{16^k})$$

Pour finir, on peut considérer la méthode de Newton : soit f la fonction $f(x) = \sin(x)$, pour $x \in [x-\delta, x+\delta]$ de sorte que f soit monotone (strictement décroissante en fait) dans cet intervalle, soit $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$, par exemple $\delta = .5$ On part de $x^{(0)} = \pi - \delta$ et on calcule la suite $x^{(k)}$ par la formule

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)}}{f'(x^{(k)})}$$

On trouve les valeurs suivantes

k	0	1	2	3
Valeur	2.64159265358979312	**3.1**8789514343358382	**3.1415**5595355684669	**3.141592653589**80555
Erreur	-0.5	0.04630248984379071	-0.00003311802132622	0.00000000000001243

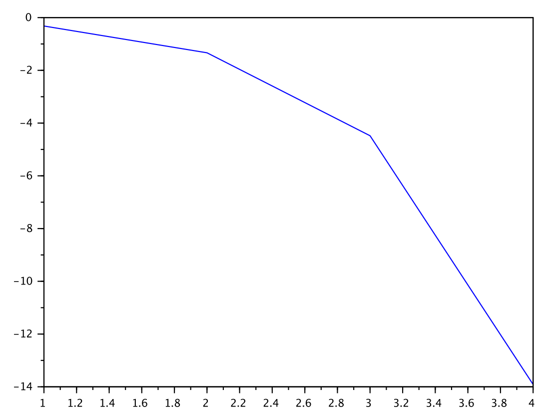

Figure 3: Méthode de Newton pour le calcul de pour le calcul de π, $x^{(0)} = \pi - 0.5$

2.3 Les formules en Arctan

- $\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ (Gregory)
- $\frac{\pi}{4} = 4\arctan(\frac{1}{5}) - \arctan(\frac{1}{239})$: formule de Machin (1680-1752)

Pour vérifier la formule de Machin, on utilise l'identité

$$\forall x, y,\ \ xy \neq 1, \arctan(x) + \arctan(y) = \arctan(\frac{x+y}{1-xy})$$

ou bien que

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$$

On pose $t = \tan(x)$. On montre facilement que

$$\tan(2x) = \frac{2t}{1-t^2} \text{ puis que } \tan(4x) = \frac{4t(1-t^2)}{1-6t^2+t^4}$$

Ainsi $\tan(4\arctan(\frac{1}{5})) = \frac{120}{119}$. Par ailleurs $\tan(x-y) = \frac{\tan(x)-\tan(y)}{1+\tan(x)\tan(y)}$, donc

$$\tan(4\arctan(\frac{1}{5}) - \arctan(\frac{1}{239})) = \frac{\frac{120}{119} - \frac{1}{239}}{1 + \frac{120}{119}\frac{1}{239}} = 1 = \tan(\frac{\pi}{4})$$

Ainsi $4\arctan(\frac{1}{5}) - \arctan(\frac{1}{239}) = \frac{\pi}{4}$ On peut donc approcher les valeurs $\arctan(\frac{1}{5})$ et $\arctan(\frac{1}{239})$ par la série, avec convergence rapide puisque l'argument est plus petit que 1. On a en définitive

$$\pi = 4\left(\sum_{k=0}^{+\infty}(4\frac{1}{5^{2k+1}} - \frac{1}{239^{2k+1}})\frac{(-1)^k}{2k+1}\right).$$

2.4 Formules de Ramanujan

- $\pi = \frac{12}{\sqrt{190}}\ln((2\sqrt{2}+\sqrt{10})(3+\sqrt{10}+2,7177172010^{-19}$
- $\pi = \lim_{k\to+\infty} 2^k\sqrt{2-\sqrt{2+2+\sqrt{2+\cdots\sqrt{2}}}}$, k est le nombre de radicaux

2.5 Intégrales

- $\frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x}dx$
- $\frac{\pi}{4} = \int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$

S'agissant du calcul de l'intégrale propre $\frac{\pi}{4} = \int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$, on introduit la méthode, dite de Monte Carlo (géométrique). La valeur de l'intégrale, qui est de $\frac{\pi}{4}$, est la l'aire de la zone A délimitée par l'axe des x et la courbe, pour $x \in [0,1]$. elle correspond aussi au rapport de l'aire de A et de l'aire totale du carré $[0,1] = 1$. L'idée consiste donc à tirer au sort et de manière indépendante N couples (x,y) et à calculer le rapport du nombre de couples se trouvant dans A et du nombre total de couples (N). On utilise comme loi de probabilité la loi uniforme sur $[0,1]$.

La convergence est assez lente

N	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
Valeur	3.600000	3.080000	3.176000	3.12400011	3.15560018	3.1412439		

Table 2: Valeurs approchées de π par la méthode de Monte Carlo, pour différentes valeurs de N

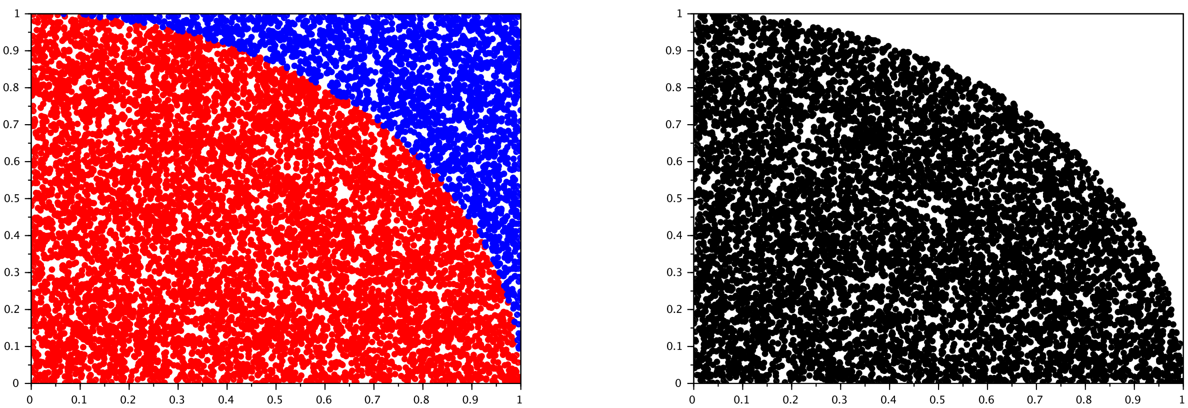

Figure 4: Monte Carlo pour le calcul de π, $N = 10^4$

2.6 Formules recurrentes

Méthode d'Archimède

On inscrit le cercle entre deux polygones réguliers à n cotés, afin d'obtenir un encadrement de son

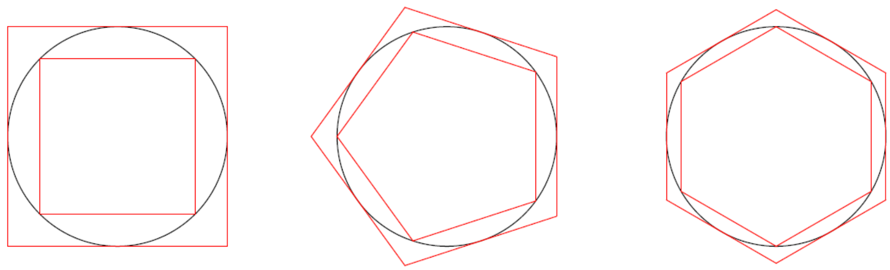

Figure 5: Polygones Archimède

pèrimètre et donc de 2π On notera p_n la circonférence du polygone inscrit, et q_n la circonférence du polygone circonscrit, donc $p_4 = 4\sqrt{2}$, $q_4 = 4$, $p_6 = 6$ et $q_6 = 4\sqrt{3}$, et on admet que pour tout $n \geq 3$,

$$q_{2n} = \frac{2p_nq_n}{p_n + q_n}$$
$$p_{2n} = \sqrt{p_nq_{2n}}$$

3 Autres constantes

- La constante d'Euler $\gamma = \lim\limits_{n\to} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$
- $e = \lim\limits_{n\to} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}$
- Nombre d'or et suite de Fibonacci

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1},\ u_0 = u_1 = 1.$$

$\lim_{k\to+\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

4 Programmes

4.1 Eratostène

```
clear
function A=erato (n)
A=2:n;// n entier >=2.
k=1;// k compte les nombres premiers trouvés.
while A(k)∧2<=A($)
ms=max(size(A));
I=find(pmodulo(A(k+1 :ms) ,A(k))==0);
// On repere les multiples de A(k) apres A(k).

A(k+I )=[]; // On a efface les multiples de A(k ).

k=k+1;
end ;
endfunction


A=erato(100)
```

4.2 factorisation

```
clear
function A=erato (n)
A=2:n;// n entier >=2.
k=1;// k compte les nombres premiers trouvés.
while A(k)∧2<=A($)
ms=max(size(A));
I=find(pmodulo(A(k+1 :ms) ,A(k))==0);
// On repere les multiples de A(k) après A(k).

A(k+I )=[]; // On a efface les multiples de A(k ).

k=k+1;
end ;
endfunction
function F=factorisation (n)
Facteurs=Erato(n);
Puissances =[];

for i=1:max(size(Facteurs))
j=1;
while mod(n,Facteurs(i)∧j)==0
j=j+1
end
```

```
Puissances=[Puissances , j -1];
end
K= f i n d ( P u i s s a n c e s = = 0 ) ;
Facteurs (K)=[];
Puissances (K)=[];
F=[Facteurs ; Puissances ];
endfunction
```

4.3 Spirale d'Ulam

```
function A=erato (n)
A=2:n;// n entier >=2.
k=1;// k compte les nombres premiers trouvés.
while A(k)∧2<=A($)
ms=max(size(A));
I=find(pmodulo(A(k+1 :ms) ,A(k))==0);
// On repere les multiples de A(k) après A(k).

A(k+I )=[]; // On a efface les multiples de A(k ).

k=k+1;
end ;
endfunction

clf()
k=1;
orig=[0,0];
u=1;
PTS=[orig];
for l=1:300
if pmodulo(l,2)==1
for j=1:l
PTS=[PTS ; orig+u*[0,j]];
k=k+1;
end
orig=orig+u*[0,l];
for j=1:l
PTS=[PTS; orig+u*[j,0]];
k=k+1;
end
orig=orig+u*[l,0];
end
if pmodulo(l,2)==0
for j=1:l
k=k+1;
PTS=[PTS ;orig+u*[0,-j]];
```

```
end
orig=orig+u*[0,-l];
for j=1:l
k=k+1;
PTS=[PTS ;orig+u*[-j,0]];
end
orig=orig+u*[-l,0];
end
end
//plot(PTS(:,1),PTS(:,2),'.r')
//Marquage des seuls points de numéro premier
I=erato(k);
plot(PTS(I,1),PTS(I,2),'dk')
```

4.4 Fraction rationnelle

Fraction réduite, méthode simple

```
clear
format('v',20)
x=[3,7,15,1,292,1,1,1,2,1,3,1,14];
//x=[1,1,1,1,1,1,1,1,1,1];
phi=(1+sqrt(5))/2;
lim=%pi;
ones(1,100)
n=max(size(x));
RESU=[x(1)];
for j=2:n
res=1/x(j);

  for i=j-1:-1:2
res=1/(x(i)+res);
end
RESU=[RESU, x(1)+res];
end
error=log(abs(RESU-lim))/log(10);
plot(error)
```

Fraction réduite, deuxième méthode

```
clear
format('v',20)
A=[3.,7.,15.,292.,1.,1.,1.];
function [pk,qk]=Bracket2rat(A)

  num=[A(1,$)] ; den=[1];
for k=1 :size(A,'c')-1
a=num(1,$) ;
b=den(1,$) ; num=[num,A(1,max(size(A,'c'))-k)*a+b] ; den=[den,a] ;
```

```
end;
pk=num($);qk=a;
endfunction

for k=1:max(size(A))
B=A(1,1:k)
  pk,qk
=Bracket2rat(A);
pk/qk
end
```

4.5 Calcul deπ

```
clear
function [app,PTI,PTO]=MonteCarlo(n)
comp=0;
PTI=[];
PTO=[];
for i=1:n
x=rand();
y=rand();
if (x∧2+y∧2)<=1 then
comp=comp+1;
PTI=[PTI ; [x,y]];
else
PTO=[PTO ; [x,y]];
end
end
app=comp/n;
endfunction


for k=1:4
n=10∧k;
  app,PTI,PTO
=MonteCarlo(n);
approx=4*app
end
clf();
plot(PTI(:,1),PTI(:,2),'.r')
plot(PTO(:,1),PTO(:,2),'.b')
drawnow
```

Newton

```
clear
format('v',20)
clf()
```

```
delta=.5;
x=%pi-delta;
Nmax=10;
epsilon=1.e-10;
k=0;
res=10;
iter=[x];
erreur=[x-%pi];
resi=[abs(sin(x))];
while k <Nmax  res >epsilon
x=x-sin(x)/cos(x);
res=abs(sin(x));
iter=[iter,x];
resi=[resi, res];
erreur=[erreur,x-%pi];
k=k+1;
end
plot(log(resi)/log(10))
iter
erreur
```

References

[1] J.-P. Delahaye, Le fascinant nombre Pi , Belin- Pour la Science, 1997

[2] J.-P. Delahaye, Merveilleux nombres premiers , Belin- Pour la Science, 2000