Algorithme pararéel

Jean-Paul Chehab

LAMFA, Université de Picardie Jules Verne, Amiens

GDT AAAAAAAAH

Lendi 30 mars 2009

$y' + ay = 0, y(0) = y_0,\ t \in [0,T] = \bigcup_{n=0}^{N-1} [T_n, T_{n+1}]$
Initialisation (résolution grossière)

$$\frac{Y^{n+1} - Y^n}{\Delta T} + aY^{n+1} = 0 \text{ sur } [T_n, T_{n+1}],\ Y^0 = y_0.$$

Résolution exacte (ou fine) sur les sous-intervalles
$\dfrac{dy^n}{dt} + ay^n(t) = 0,$ sur $[T_n, T_{n+1}],\ y^n(t = T^n) = Y^n.$

- I Calcul des sauts $S_k^n = y_k^{n-1}(T_n) - Y_k^n$
- II Propagation des sauts $\dfrac{\delta_k^{n+1} - \delta_k^n}{\Delta T} + a\delta_k^{n+1} = \dfrac{S_k^n}{\Delta T}, \delta_k^0 = 0$
- III Correction $Y_{k+1}^n = y_k^{n-1} + \delta_k^n$ et on résout en parallèle

$$\frac{dy_{k+1}^n}{dt} + ay_{k+1}^n(t) = 0, \text{ sur } [T_n, T_{n+1}],\ y_{k+1}^n(t = T^n) = Y_{k+1}^n.$$

Cas non linéaire

On reprend l'approche de Farhat - Chandesris (2003).

$$\frac{d(y_k + c_k)}{dt} = F(y_k + c_k, t) + g(t), (y_k + c_k)(0) = y^0$$

On linéarise en y_k

$$\frac{dc_k}{dt} = F_y(y_k, t)c_k - \left(\frac{dy_k}{dt} - F(y_k, t) - g(t)\right)$$

On a $\frac{dy_k}{dt} = F(y_k, t) + g(t) - \sum_i S_k^i \delta(T_i)$ dans $\mathcal{D}'$. Du coup

$$\frac{dc_k}{dt} = F_y(y_k, t)c_k + \sum_i S_k^i \delta(T_i),\ c_k(0) = 0.$$

G. Bal et Y. Maday

$$\frac{du}{dt} = A(t,u)\ T_n < t < T_{n+1} U(T_n) = v.$$

Propagateur grossier g_Δ : $u_1^{n+1} = g_\Delta(T^n, u_1^n),\ \in I = \{0 \leq n \leq N-1\}$.
Hypothèses

- $\sup_{n \in I} \|g_\Delta(T^n,u) - g_\Delta(T^n,v)\|_{B_0} \leq (1 + C\Delta T)\|u-v\|_{B_0}$
  avec $\delta g(T^n,u) = g(T^n,u) - g_\Delta(T^n,u)$.
- $\sup_{n \in I} \|\delta g(T^n,u)\|_{B_0} \leq C(\Delta T)^{m+1}\|u\|_{B_1}$
- $\|u(T^n) - u_1^N\|_{B_0} \leq C(\Delta T)^m \|u_0\|_{B_1}$ (stabilité dans B_1 du pb)

On part de l'identité

$$u(T^{n+1}) - u_1^{n+1} = \delta g(T^n, u(T^n)) + g_\Delta(T^n, u(T^n)) - g_\Delta(T^n, u_1^n).$$

On calcule $u(T^{n+1})$ itérativement par

$$u_{k+1}^{n+1} = g_\Delta(T^n, u_{k+1}^n) + \delta g(T^n, u_k^n)$$

Problèmes paraboliques abstraits

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{A}u = 0, \quad u(0) = u_0.$$

On considère le propagateur $\mathcal{S}_\tau : u(0) = \mu \mapsto \mathcal{S}_\tau(\mu)u(\tau)$. $\mathcal{S}$ sera dan la pratique un semi-groupe. On se donne

$$0 = T_0 < T_1 < \cdots < T_N = T$$

On définit

$$u(T_{k+1}) = \mathcal{S}_{T_{k+1}} u_0 = \mathcal{S}_{T_{k+1}-T_k} u(T_k)$$

On considère de manière concommitente deux approximations de ce propagateur

- Un propagateur discret fin $\mathcal{F}$, par exemple

$$\frac{u^{k+1} - u^k}{\delta t} + \mathcal{A}u^{k+1} = 0, \text{ avec } M\delta t = T$$

  et $u^{k+1} = \mathcal{F}_{\delta t} u^k$.

- Un propagateur discret grossier $\mathcal{G}$, par exemple

$$\frac{U^{k+1} - U^k}{\Delta T} + \mathcal{A}U^{k+1} = 0, \text{ avec } \Delta t >> \delta t, \ \Delta T = K\delta t$$

  et $U^{k+1} = \mathcal{G}_{\Delta t} U^k$.

Algorithme

- Initialisation : $Y_{n+1}^1 = \mathcal{G}_{\Delta t} Y_n^1, n = 0, \cdots M' = M/K$ (séquentiel)
- Résolution sur chaque $]T_n, T_{n+1}[$: $\mathcal{F}_{\Delta t} Y_n^k$ (parallèle)
- Résolution sur chaque prédicteur grossier $\mathcal{G}_{\Delta t} Y^{nk+1}$ (séquentiel)
- Correction (séquentiel)

$$\boxed{Y_{n+1}^{k+1} = \mathcal{G}_{\Delta t} Y_n^{k+1} + \mathcal{F}_{\Delta t} Y_n^k - \mathcal{G}_{\Delta t} Y_n^k}$$

Convergence (Maday-Turinici (2001)

Theorem

Si $|\mathcal{S}_T - \mathcal{F}_T| \simeq \delta t$ *et* $|\mathcal{G}_{\Delta T} - \mathcal{F}_{\Delta T}| \simeq \epsilon \Delta T$ *alors le processus itératif*

$$\boxed{Y_{n+1}^{k+1} = \mathcal{G}_{\Delta t} Y_n^{k+1} + \mathcal{F}_{\Delta t} Y_n^k - \mathcal{G}_{\Delta t} Y_n^k}$$

converge et

$$|Y_k^n - y(T_n)| \simeq \epsilon^k + \delta t$$

Méthode de tir multiple (Gander-Vandewalle 2007)

Pour résoudre le problème de Cauchy

$$\dot{u}(t) = f(u), [0,T] = \bigcup_{n=0}^{N-1} [T_n, T_{n+1}], u(0) = u_0 \text{ se réécrit}$$

$$\begin{cases} \dot{u}_0(t) = f(u_0), & u_0(0) = \mathbf{U}_0 & (0, T_1) \\ \dot{u}_1(t) = f(u_1), & u_1(T_1) = \mathbf{U}_1 & (T_1, T_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \\ \dot{u}_{N-1}(t) = f(u_{N-1}), & u_{N-1}(T_{N-1}) = \mathbf{U}_{N-1} & (T_{N-1}, T_N) \end{cases}$$

avec $\mathbf{U}_0 - u_0 = 0, \mathbf{U}_1 - u_0(T_1, U_0) = 0, \cdots, \mathbf{U}_N - u_{N-1}(T, U_{N-1}) = 0$
C'est un système de $N+1$ équations à $N+1$ inconnues $(\mathbf{U}_0, \mathbf{U}_1, \cdots \mathbf{U}_N)^T$ sous la forme $F(U) = 0$ qu'on résout par Newton

$$U^{k+1} = U^k - J_F^{-1} F(U^k)$$

SUITE

On a $J_F =$

$$\begin{pmatrix} I & & & & \\ -\dfrac{\partial u_0}{\partial U_0}(T_1, U_0^k) & I & & & \\ & -\dfrac{\partial u_1}{\partial U_1}(T_2, U_1^k) & I & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -\dfrac{\partial u_{N-1}}{\partial U_{N-1}}(T_{N-1}, U_{N-1}^k) & I \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{cases} U_0^{k+1} & = u_0 \\ U_{n+1}^k + 1 & = u_n(T_{n+1}, U_n^k) + \dfrac{\partial u_n}{\partial U_n}(T_{n+1}, U_n^k)(U_n^{k+1} - U_n^k) \\ & = F(T_{n+1}, T_n, U_n^k) + \underbrace{G(T_{n+1}, T_n, U_n^{k+1}) - G(T_{n+1}, T_n, U_n^k)}_{} \end{cases}$$

Pararéel vu comme multigrille

Gander et Vandewalle interprètent le pararéel comme une méthode multigrille de type Full Approximation Storage (FAS) sur deux grilles en temps : pour résoudre

$$A_h(u) = f$$

on écrit

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \tilde{u}^k & = & \mathcal{S}(u^k, f) \\ A_H(U^{k+1}) & = & I_h^H(f - A_h(\tilde{u}^k)) + A_H(I_h^H \tilde{u}^k), \\ u^{k+1} & = & \tilde{u}^k + I_H^h(U^{k+1} - I_h^H \tilde{u}^k) \end{array} \right.$$

Ici $\mathcal{S}$ opérateur de lissage, I_H^h interpolation.

Illustrations

- equa-diff linéaire
- Equation de la chaleur
- Equation de Burgers

Applications actuelles

- Stokes, Navier-Stokes
- Equations d'ondes linéaires (Gander-Petcu 2008)
- Schrödinger (Maday-Turinici)
- Maths bio (Métabolisme thyroïdien) (Turinici)

ANR PITAC (Parallélisation Incluant le Temps pour Acclérer les Calculs) à Paris 6
`http://www.ann.jussieu.fr/PITAC/`
Yvon Maday, Yves Achdou, Laurent Boudin, Sidi M. Kaber, Frederic Nataf, Florian De Vuyst, Jean Frederic Gerbeau ...