

La méthode de Newton en analyse numérique

J-P. CHEHAB¹

¹LAMFA, UMR 7352, Université de Picardie Jules Verne, Amiens, France (jean-paul.chehab@u-picardie.fr)

Journée Mathématique d'Amiens, le 25 juin 2014

- 1 Motivation
 - Babyloniens
 - Méthode de type corde
- 2 Isaac Newton, sa méthode
 - Motivation
 - Sécante
- 3 Newton-Raphson
 - Newton inexacte
 - Quasi Newton
 - Méthode de type sécante
 - Méthodes de Broyden
- 4 Newton et dynamique
 - Flot de Newton
 - Optimisation continue
- 5 Quelques applications
 - Fonctions de matrices
 - Equations différentielles
- 6 Conclusion

La résolution numérique d'une équation non linéaire en particulier la recherche de racines

$$F(x) = 0 \text{ ou en termes de point fixe } G(x) = x$$

a toujours occupé les mathématiciens. D'abord dédiées au calcul de racines de polynômes, les algorithmes numériques se sont adressés par la suite à la résolution numérique de phénomènes naturels, décrits par des modèles non-linéaires (météo, mécanique des fluides, chimie, ...)

La résolution numérique d'une équation non linéaire en particulier la recherche de racines

$$F(x) = 0 \text{ ou en termes de point fixe } G(x) = x$$

a toujours occupé les mathématiciens. D'abord dédiées au calcul de racines de polynômes, les algorithmes numériques se sont adressés par la suite à la résolution numérique de phénomènes naturels, décrits par des modèles non-linéaires (météo, mécanique des fluides, chimie, ...)

- Discrétisation (temps, espace) produit une suite de systèmes non linéaires de grande dimension
- La résolution de chaque système se doit d'être efficace (rapide, fiable) , les méthodes utilisées sont en général de type (quasi)-Newton, point fixe, optimisation non monotone ...

La résolution numérique d'une équation non linéaire en particulier la recherche de racines

$$F(x) = 0 \text{ ou en termes de point fixe } G(x) = x$$

a toujours occupé les mathématiciens. D'abord dédiées au calcul de racines de polynômes, les algorithmes numériques se sont adressés par la suite à la résolution numérique de phénomènes naturels, décrits par des modèles non-linéaires (météo, mécanique des fluides, chimie, ...)

- Discrétisation (temps, espace) produit une suite de systèmes non linéaires de grande dimension
- La résolution de chaque système se doit d'être efficace (rapide, fiable) , les méthodes utilisées sont en général de type (quasi)-Newton, point fixe, optimisation non monotone ...

La méthode de Newton occupe une place particulière : prototype de convergence superlinéaire et on la retrouve sous différentes formes dans de nombreux algorithmes numériques.

Le Jourdain (monsieur) entre le Tigre et l'Euphrate ?

Le Jourdain (monsieur) entre le Tigre et l'Euphrate ?

- Résoudre $F(x) = x^2 - a = 0$ par $x_{k+1} = \frac{1}{2} \left(x_k + \frac{a}{x_k} \right)$ géométriquement, cela revient à rendre carré des rectangles d'aire a (on les prend de côtés x_k et $\frac{a}{x_k}$ respectivement).

Le Jourdain (monsieur) entre le Tigre et l'Euphrate ?

- Résoudre $F(x) = x^2 - a = 0$ par $x_{k+1} = \frac{1}{2} \left(x_k + \frac{a}{x_k} \right)$ géométriquement, cela revient à rendre carré des rectangles d'aire a (on les prend de côtés x_k et $\frac{a}{x_k}$ respectivement).
- La suite converge vers $\sqrt{a}$ pour tout $x_0 > 0$. Mieux : convergence très rapide (quadratique) au vois. de la limite, $|x_{k+1} - \sqrt{a}| \leq C |x_k - \sqrt{a}|^2$

Le Jourdain (monsieur) entre le Tigre et l'Euphrate ?

- Résoudre $F(x) = x^2 - a = 0$ par $x_{k+1} = \frac{1}{2} \left(x_k + \frac{a}{x_k} \right)$ géométriquement, cela revient à rendre carré des rectangles d'aire a (on les prend de côtés x_k et $\frac{a}{x_k}$ respectivement).
- La suite converge vers $\sqrt{a}$ pour tout $x_0 > 0$. Mieux : convergence très rapide (quadratique) au vois. de la limite, $|x_{k+1} - \sqrt{a}| \leq C |x_k - \sqrt{a}|^2$
- IMPORTANT : la convergence est linéaire au début, quadratique ensuite

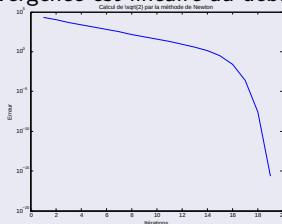


Figure : Historique de la convergence, algo babylonien

Le Jourdain (monsieur) entre le Tigre et l'Euphrate ?

- Résoudre $F(x) = x^2 - a = 0$ par $x_{k+1} = \frac{1}{2} \left(x_k + \frac{a}{x_k} \right)$ géométriquement, cela revient à rendre carré des rectangles d'aire a (on les prend de côtés x_k et $\frac{a}{x_k}$ respectivement).
- La suite converge vers $\sqrt{a}$ pour tout $x_0 > 0$. Mieux : convergence très rapide (quadratique) au vois. de la limite, $|x_{k+1} - \sqrt{a}| \leq C |x_k - \sqrt{a}|^2$
- IMPORTANT : la convergence est linéaire au début, quadratique ensuite

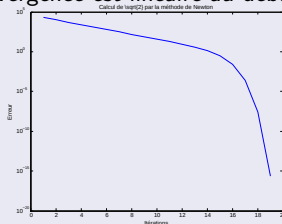


Figure : Historique de la convergence, algo babylonien

- Intéressant : fournit des approximations fractionnaires. $\Rightarrow$ Maths érables [>]

Partons des itérations de Picard

équivalence des problèmes

$$f(x) = 0 \iff x = x - \alpha f(x), \alpha \neq 0$$

vers le bon design de la méthode

- Méthode de la corde

$$x_{k+1} = x_k - \alpha f(x_k)$$

- Méthode de la corde généralisée

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k f(x_k)$$

géométriquement : x_{k+1} abscisse intersection axe Ox avec droite de pente $\frac{1}{\alpha_k}$, passant par $(x_k, f(x_k))$.

Comment choisir α_k pour avoir de "bonnes" propriétés de convergence (en particulier une grande vitesse de convergence)

Definition

(Vitesse de convergence) Une suite $x^{(k)}$ converge vers ξ linéairement si

$$\exists C \in [0, 1[, \exists k_0 \in \mathbb{N} / \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|x^{(k+1)} - \xi|}{|x^{(k)} - \xi|} \leq C$$

Une suite $x^{(k)}$ converge vers ξ à l'ordre $p > 1$ si

$$\exists C > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N} / \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|x^{(k+1)} - \xi|}{|x^{(k)} - \xi|^p} \leq C, \forall k \geq k_0$$

C est le *facteur de convergence*.

Point fixe et vitesse de convergence

Soit ξ point fixe isolé de f , de classe $\mathcal{C}^{m+1}$. on suppose que

$$f'(\xi) = \dots = f^{(m)}(\xi) = 0$$

Alors pour x_0 assez proche de ξ , la suite $x_{k+1} = f(x_k)$ converge vers ξ , à l'ordre $m+1$. On dit que f est la fonction d'itération



Figure : Portrait d'Isaac Newton

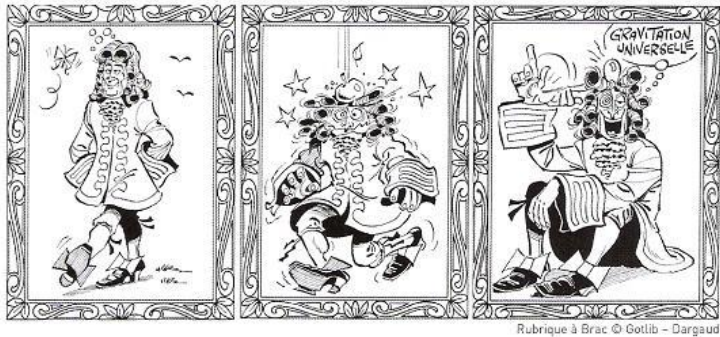


Figure : Portraits d'Isaac Newton par Marcel Gotlib

Méthode de Newton (1669), in *The method of fluxions and infinite series*Initialisation x_0 donnéPour $k = 0, \dots$ poser
$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{1}{f'(x^{(k)})} f(x^{(k)})$$

Theorem

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I . On suppose que f admet un unique zéro ξ dans I et que $f'(\xi) \neq 0$ alors il existe un réel $\eta > 0$ tel que si $x^{(0)} \in \Omega =]\xi - \eta, \xi + \eta[$

- La suite $x^{(k)}$ définie par $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$ reste dans Ω et converge vers ξ .
- La convergence est quadratique

⇒ **Mathématiques érables** [>]

⇒ **Mathématiques érables** [>]

Finalement la méthode de Newton est une méthode de point fixe qui consiste à fabriquer canoniquement fonction d'itération $x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ assez plate au voisinage de la racine.

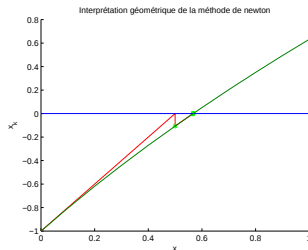
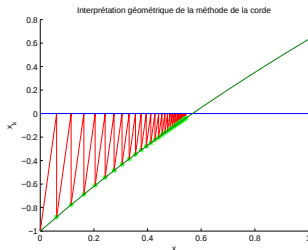


Figure : Méthode de la corde et de Newton

Le calcul d'une dérivée peut être compliqué et coûteux, en volumes de calculs.

Remplacer la dérivé par la sécante

$$f'(x^{(k)}) \simeq \frac{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})}{x^{(k)} - x^{(k-1)}}$$

on définit la méthode de la sécante comme suit

Méthode de la sécante

Initialisation x_0 et x_1 donnés

Pour $k = 0, \dots$

poser

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{x^{(k)} - x^{(k-1)}}{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})} f(x^{(k)})$$

Convergence locale superlinéaire, vitesse en nombre d'or $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

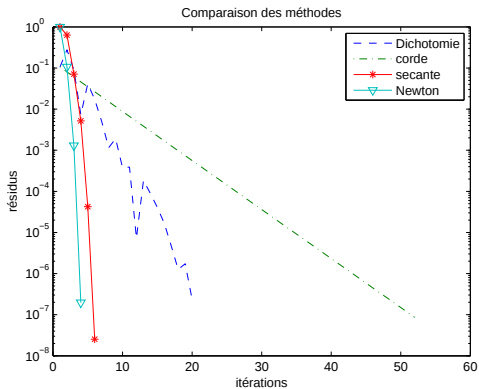


Figure : Méthodes de la corde, de dichotomie, de Newton et de la sécante

Soit $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. On cherche à approcher x^* , racine isolée de F .

$$F(x^*) = 0 = F(x + (x^* - x)) = F(x) + DF(x) \circ (x^* - x) + \mathcal{O}(\|x^* - x\|)$$

où $DF(x)$ désigne la matrice jacobienne de F prise en x . Si bien que

$$x^* \simeq x - DF(x)^{-1}F(x)$$

On peut alors définir les itérations par

$$x_{k+1} = x_k - DF(x_k)^{-1}F(x_k).$$

En pratique on décompose en deux parties :

- Résoudre le système linéaire $DF(x_k)\delta_k = F(x_k)$
- Poser $x_{k+1} = x_k - \delta_k$.

Theorem

Version $\mathcal{C}^2$ Soit $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, de classe $\mathcal{C}^2$. Soit x^ un zéro isolé de F , soit tel que*

$$\exists B(x^*, r) / F(x^*) = 0 \text{ et } F(x) \neq 0, \forall x \in B(x^*, r), x \neq x^*.$$

On suppose enfin que $DF(x^)$ est inversible.*

Alors, il existe une boule fermée $\mathcal{B}$ centrée en x^ telle que $\forall x_0 \in \mathcal{B}$, la suite x_k est bien définie, demeure dans $\mathcal{B}$ et converge vers x^* , le seul zéro de F dans $\mathcal{B}$.*

On a de plus

$$\|x_k - x^*\| \leq \beta^k \|x_0 - x^*\|$$

avec $\beta \in]0, 1[$.

Version $\mathcal{C}^1$ avec convexité

Lemma

Soit C_0 une région convexe de $\mathbb{R}^n$. On suppose que

- $DF(x)$ existe pour tout x dans C_0
- Il existe $\gamma > 0$ telle que

$$\|DF(x) - DF(y)\| \leq \gamma \|x - y\|, \quad \forall x, y \in C_0$$

Alors, pour tout $x, y \in C_0$:

$$\|F(x) - F(y) - DF(y) \circ (x - y)\| \leq \frac{\gamma}{2} \|x - y\|^2$$

Theorem

Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $F : C \rightarrow \mathbb{R}^n$, une fonction continue sur C , différentiable pour tout $x \in C_0$ convexe, avec $\bar{C}_0 \subseteq C$. On pose $B(x, r) = \{x' / \|x' - x\| < r\}$, $h = \alpha\beta\gamma < 1$, $r = \alpha(1 - h)$. On fait les hypothèses suivantes

- $DF(x)$ est inversible
- DF est lipschitzienne de rapport L .
- $\|(DF(x_0))^{-1}F(x_0)\| \leq \alpha$

Alors, il existe $r > 0$ tel que $\forall x^{(0)} \in B(x, r)$, la suite x_k reste dans la boule $B(x, r)$ et converge vers x , à une vitesse quadratique :

$$\|x_k - x\| \leq \alpha \frac{h^{2^k} - 1}{1 - h^{2^k}}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

La méthode de Newton-Raphson demande à chaque itération k de

- Calculer exactement la jacobienne $DF(x_k)$
- Résoudre un système linéaire avec $Df(x_k)\delta_k = F(x_k)$

Alléger Newton ?

- En résolvant les systèmes $Df(x_k)\delta_k = F(x_k)$ de manière approchée – > Newton inexacte
- en remplaçant $DF(x_k)$ par un préconditionneur – > Quasi-Newton

Rappel : loin de la solution : convergence linéaire + calcul jacobienne et système linéaire associé coûteux

Newton inexacte

pour $k = 0, \dots$

Déterminer δ_k tel que $\|DF(x_k)\delta_k - F(x_k)\| \leq r_k \|F(x_k)\|$

Poser $x_{k+1} = x_k - \delta_k$

Theorem

Convergence

- Si r_k est fixé, on obtient une convergence locale linéaire
- si $r_k \rightarrow 0$, on obtient une convergence locale superlinéaire
- si $r_k = \mathcal{O}(\|F(x_k)\|)$, on obtient une convergence locale quadratique.

Idée pratique : approcher $DF(x_k)$ par une matrice B_k plus facile à construire et telle que les systèmes linéaires associés se résolvent raisonnablement.

Quasi-Newton

pour $k = 0, \dots$

Résoudre $B_k \delta_k = F(x_k)$

Poser $x_{k+1} = x_k - \delta_k$

Questions : conditions de convergence

Theorem

Dennis-Moré Soit $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, continue et différentiable sur D , ouvert, convexe, et x^ une racine de F . On suppose que $DF(x)$ est continue en x^* et que $DF(x^*)$ est non singulière. Soit B_k une suite de matrices inversibles, on suppose que pour x_0 dans D , la suite $x_{k+1} = x_k - B_k^{-1}F(x_k)$ demeure dans D et converge vers x^* . Alors x_k converge Q superlinéairement vers x^* si et seulement si*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\| (B_k - DF(x^*))(x_{k+1} - x_k) \|}{\| x_{k+1} - x_k \|} = 0.$$

Comment choisir les B_k ? Relations de type sécante

On pose $s_k = x_{k+1} - x_k$, $y_k = F(x_{k+1}) - F(x_k)$

Idée : construire B_k vérifiant une ou plusieurs relations de sécante

$$B(x_{k-1} - x_k) + F(x_k) = F(x_{k-1})$$

$$B(x_{k-2} - x_k) + F(x_k) = F(x_{k-2})$$

...

Cela définit donc les relations

$$Bs_{k-j} = y_{k-j}, \quad j = 1, \dots, n$$

d'où

$$B = (y_{k-n} \cdots y_{k-1})(s_{k-n} \cdots s_{k-1})^{-1}$$

Problème : coûteux et instable. On se restreint à la première relation

$$B_k(x_k - x_{k-1}) = F(x_k) - F(x_{k-1})$$

Méthodes de type sécante avec B_k diagonale : $B_k = \alpha_k Id$

$$\textcircled{1} \alpha_k = \frac{\langle x_k - x_{k-1}, y \rangle}{\langle F(x_k) - F(x_{k-1}), y \rangle} \text{ pour } y \in \mathbb{R}^n$$

- ① $y = x_k - x_{k-1}$ on obtient la méthode de Barzilai Borwein (Raydan)
- ② $y = F(x_k) - F(x_{k-1})$: méthode d'Altman (généralisations non linéaires de la plus profonde descente)

$$\textcircled{2} \alpha_k = - \frac{\langle \Delta^m x_{k-1}, y \rangle}{\langle \Delta^{m+1} x_{k-1}, y \rangle}$$

- ① $m = 1, y = \Delta^{m+1} x_{k-1}$: méthode de Lemaréchal ($n = 1 \equiv$ Steffensen)
- ② $m = 2$ et $y = \Delta^{m+1} x_{k-1}$, généralisations de Marder Weitzner (Brezinski-C)

Theorem

L'unique matrice minimisant $\|B - B_k\|$ avec la contrainte $Bs_k = y_k$ est donnée par

$$B_{k+1} = B_k + \frac{y_k - B_k s_k}{(s_k)^t s_k} (s_k)^t$$

et l'algorithme de Broyden s'écrit

Résoudre $B_k \delta_k = F(x_k)$

Poser $x_{k+1} = x_k - \delta_k$

On peut définir par récurrence la suite des inverses de B_k

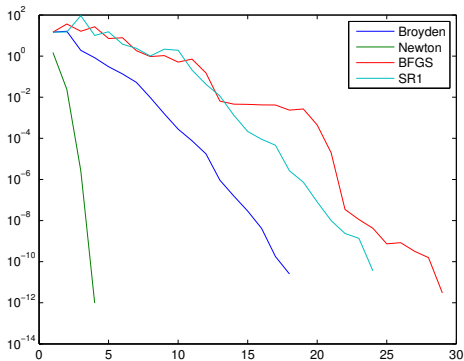
$$B_{k+1}^{-1} = B_k^{-1} + \frac{s_k - B_k^{-1} y_k}{(s_k)^t (B_k^{-1} y_k)} (s_k)^t B_k^{-1}$$

On obtient alors la "mauvaise" méthode de Broyden (*bad Broyden*), car instable numériquement.

Equation de Burgers visqueuse 1d

$$-\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \frac{\partial u}{\partial x} = f \quad x \in]0, 1[$$

$$u(0) = u(1) = 0$$



Flot de gradient

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} F(x), \text{ avec } F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Relations d'optimalité du premier ordre (hyp différentiabilité) $\nabla F(x) = 0$. Les minima sont points critiques de

$$\frac{dx}{dt} = -\nabla F(x)$$

qui est un flot de gradient. On montre facilement que

$$\frac{dF(x)}{dt} + \langle \nabla F, \nabla F \rangle = 0$$

$F(x)$ décroît donc le long des orbites.

flot préconditionné par $(\nabla^2 F(x))^{-1}$

$$\frac{dx}{dt} = -(\nabla^2 F(x))^{-1} \nabla F(x)$$

On montre facilement que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla F(x)\|^2 + \|\nabla F(x)\|^2 = 0$$

du coup $\|\nabla F(x(t))\| = e^{-t} \|\nabla F(x(0))\|$.

Flot de gradient. Version discrète

Discrétisation par Euler explicite avec pas de temps variable

$$x_{k+1} = x_k - \Delta t_k \nabla F(x_k)$$

on retrouve toutes les méthodes de gradient à un pas. La propriété générique de stabilité assure que pour Δt_k assez petit, le schéma est stable.

Flot de gradient. Version discrète

Discrétisation par Euler explicite avec pas de temps variable

$$x_{k+1} = x_k - \Delta t_k \nabla F(x_k)$$

on retrouve toutes les méthodes de gradient à un pas. La propriété générique de stabilité assure que pour Δt_k assez petit, le schéma est stable.

flot préconditionné par $(\nabla^2 F(x))^{-1}$. Version discrète

Discrétisation par Euler explicite avec pas de temps variable

$$x_{k+1} = x_k - \Delta t_k (\nabla^2 F(x_k))^{-1} \nabla F(x_k)$$

et pour $\Delta t_k = 1$, on retombe sur Newton Raphson

$$x_{k+1} = x_k - (\nabla^2 F(x_k))^{-1} \nabla F(x_k)$$

Flot de Newton d'ordre 2 (H. Attouch *et al*, JMPA, 2002).

$\Phi : H \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, H , Hilbert réel

$$x''(t) + \alpha x'(t) + \beta \nabla^2 \Phi(x(t)) x'(t) + \nabla \Phi(x(t)) = 0$$

Les trajectoires convergent vers un minimiseur de Φ , on peut générer par discrétisation des méthodes numériques adaptées. Etude via le système d'ordre 1 équivalent

$$\begin{cases} x'(t) + c \nabla \Phi(x(t)) + ax(t) + by(t) = 0 \\ y'(t) + ax(t) + by(t) = 0 \end{cases}$$

Flot de Newton d'ordre 2 (H. Attouch *et al*, JMPA, 2002).

$\Phi : H \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, H , Hilbert réel

$$x''(t) + \alpha x'(t) + \beta \nabla^2 \Phi(x(t)) x'(t) + \nabla \Phi(x(t)) = 0$$

Les trajectoires convergent vers un minimiseur de Φ , on peut générer par discrétisation des méthodes numériques adaptées. Etude via le système d'ordre 1 équivalent

$$\begin{cases} x'(t) + c \nabla \Phi(x(t)) + ax(t) + by(t) = 0 \\ y'(t) + ax(t) + by(t) = 0 \end{cases}$$

Etude des modèles continus qui président aux méthodes de résolution des systèmes linéaires (Bhaia-Kaskurewicz, C-Laminie)

Méthode numérique avec préconditionnement implicite

Flot de Newton $\frac{dx}{dt} = -(\nabla F(x))^{-1}F(x)$

Flot de Newton couplé $\frac{dx}{dt} = -z$
 $(\nabla F(x))z = F(x)$

Flot de Newton relaxé $\frac{dx}{dt} = -z$
 $\epsilon \frac{dz}{dt} = F(x) - \nabla F(x)z$

Theorem

Si F est $\mathcal{C}^2$ dans un vois. de la solution x^ of $F(x) = 0$, alors $(x^*, 0)$ est asymptotiquement stable $\forall \epsilon > 0$.*

1- W opt. méthode 1

calculer z^k approx. de
 l'état stationnaire de

$$\epsilon \frac{dz}{dt} = F(x^k) - \frac{F(x^k + \tau z) - F(x^k)}{\tau}$$

$$z(0) = z^{k-1}.$$

2- W opt. méthode 2

calculer x^{k+1} depuis x^k par $x^{k+1} = x^k + \alpha_k z_k$

Étape 1- avec minimisation du type Cauchy

Étape 2 - avec la méthode spectrale globalisée (Raydan) calculer x^{k+1} depuis x^k

Applications : racines matrice, NSE

Equations de Navier-Stokes 2D incompressibles (C-Raydan (ETNA, 2009))

- Variables primitives

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\text{Re}} \Delta U + (U \cdot \nabla U) + \nabla P &= f \text{ in } \Omega =]0, 1[^2, \\ \nabla \cdot U &= 0, \text{ dans } \Omega =]0, 1[^2, \\ U &= g, \text{ sur } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (1)$$

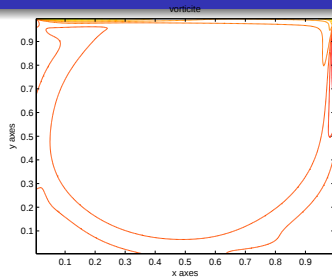
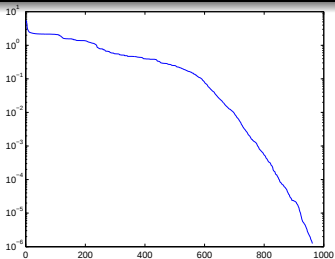
Here $U = (u, v)$ est le champ de vitesse, P la pression

- formulation $\omega - \psi$

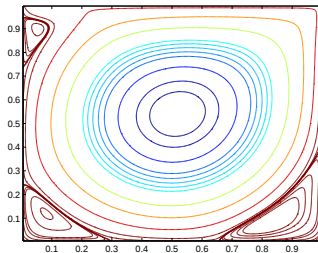
$$\begin{aligned} -\frac{1}{\text{Re}} \Delta \omega + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} &= 0 \quad \text{in } \Omega =]0, 1[^2 \\ \Delta \psi &= \omega \quad \text{in } \Omega =]0, 1[^2 \\ \psi &= 0 \quad \text{on } \partial\Omega \end{aligned}$$

ici $\omega = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$ et $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$ donc $\Delta \psi = \omega$.

Newton pour NSE : C.-H. Bruneau-C. Jouron (JCP, 89'), Ghia-Ghia (JCP, 1982, $\omega - \psi$)

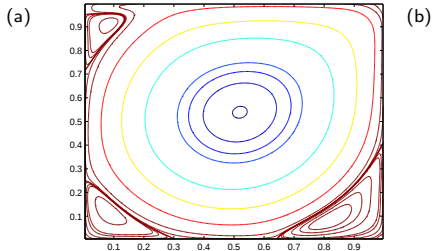
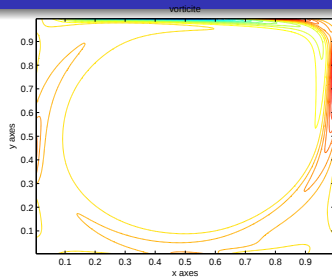
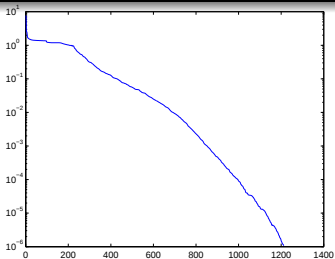


(a)



(b)

(c)



(c)

- Inverse d'une matrice $X_{k+1} = 2X_k - X_k A X_k$ avec $X_0 = \frac{A}{\|A\|_F^2}$

ou bien Euler explicite à $\frac{dX}{dt} = X(I - AX)$, avec $\Delta t = 1$.

- Inverse d'une matrice $X_{k+1} = 2X_k - X_k A X_k$ avec $X_0 = \frac{A}{\|A\|_F^2}$

ou bien Euler explicite à $\frac{dX}{dt} = X(I - AX)$, avec $\Delta t = 1$.

- Racine carrée d'une matrice

Résoudre en S_k : $X_k S_k + S_k X_k = -(X_k^2 - A)$, puis poser $X_{k+1} = X_k + S_k$.

- Inverse d'une matrice $X_{k+1} = 2X_k - X_k A X_k$ avec $X_0 = \frac{A}{\|A\|_F^2}$

ou bien Euler explicite à $\frac{dX}{dt} = X(I - AX)$, avec $\Delta t = 1$.

- Racine carrée d'une matrice

Résoudre en S_k : $X_k S_k + S_k X_k = -(X_k^2 - A)$, puis poser $X_{k+1} = X_k + S_k$.

- Signe d'une matrice $S = \text{signe}(A) = A(A^2)^{-1/2}$

$$\text{Newton-Schultz } X_{k+1} = \frac{1}{2} X_k (3I - X_k^2)$$

- Inverse d'une matrice $X_{k+1} = 2X_k - X_k A X_k$ avec $X_0 = \frac{A}{\|A\|_F^2}$

ou bien Euler explicite à $\frac{dX}{dt} = X(I - AX)$, avec $\Delta t = 1$.

- Racine carrée d'une matrice

Résoudre en $S_k : X_k S_k + S_k X_k = -(X_k^2 - A)$, puis poser $X_{k+1} = X_k + S_k$.

- Signe d'une matrice $S = \text{signe}(A) = A(A^2)^{-1/2}$

$$\text{Newton-Schultz } X_{k+1} = \frac{1}{2} X_k (3I - X_k^2)$$

- Riccati matricielle $C + XA + A^T X - XBX = 0$, méthode de Kleinman (1968)

Etant donné $X_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$

tel que $X_0 = X_0^T$ et $A - BX_0$ stable

Pour

$k = 0, \dots$

Poser

$$\mathcal{A}_k = A - BX_k$$

Résoudre

$$\mathcal{A}_k^T X_{k+1} + X_{k+1} \mathcal{A}_k = -C - X_k B X_k$$

version Newton inexacte : F. Feitzinger, T. Hylla and E. W. Sachs, SIAM

Pararéal : méthode de tir multiple (Gander-Vandewalle 2007)

Pour résoudre le problème de Cauchy

$$\dot{u}(t) = f(u), [0, T] = \bigcup_{n=0}^{N-1} [T_n, T_{n+1}], u(0) = u_0 \text{ se réécrit}$$

$$\left\{ \begin{array}{lll} \dot{u}_0(t) = f(u_0), & u_0(0) = \mathbf{U}_0 & (0, T_1) \\ \dot{u}_1(t) = f(u_1), & u_1(T_1) = \mathbf{U}_1 & (T_1, T_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dot{u}_{N-1}(t) = f(u_{N-1}), & u_{N-1}(T_{N-1}) = \mathbf{U}_{N-1} & (T_{N-1}, T_N) \end{array} \right.$$

avec $\mathbf{U}_0 - u_0 = 0, \mathbf{U}_1 - u_0(T_1, U_0) = 0, \dots, \mathbf{U}_N - u_{N-1}(T, U_{N-1}) = 0$ C'est un système de $N + 1$ équations à $N + 1$ inconnues $(\mathbf{U}_0, \mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_N)^T$ sous la forme $F(U) = 0$ qu'on résout par Newton

$$U^{k+1} = U^k - J_F^{-1} F(U^k)$$

suite

On a $J_F =$

$$\begin{pmatrix} I & & & \\ -\frac{\partial u_0}{\partial U_0}(T_1, U_0^k) & I & & \\ & -\frac{\partial u_1}{\partial U_1}(T_2, U_1^k) & I & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & -\frac{\partial u_{N-1}}{\partial U_{N-1}}(T_{N-1}, U_{N-1}^k) & I \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{cases} U_0^{k+1} &= u_0 \\ U_{n+1}^k + 1 &= u_n(T_{n+1}, U_n^k) + \frac{\partial u_n}{\partial U_n}(T_{n+1}, U_n^k)(U_n^{k+1} - U_n^k) \\ &= F(T_{n+1}, T_n, U_n^k) + \underbrace{G(T_{n+1}, T_n, U_n^{k+1}) - G(T_{n+1}, T_n, U_n^k)} \end{cases}$$

Newton presque partout

- Robustesse et convergence superlinéaire (prototype)
- Newton : "méthode mère", à l'origine de nombreux développements algorithmiques

Dans d'autres domaines

- En dynamique complexe, les itérations

$$z \mapsto z - \frac{P(z)}{P'(z)}$$

où P polynôme

- Polynômes (factorisation, méthode de Bairstow), calcul des racines
- En algèbre (cf. A. Chambert-Loir)