

JIM 2018, 16-18 mai 2018, Amiens

Fourier en musique

J-P. CHEHAB¹

¹LAMFA, UMR CNRS 7352, Université de Picardie Jules Verne, Amiens, France
(jean-paul.chehab@u-picardie.fr)

16 mai 2018

1 Joseph Fourier : modes et travaux

- Fourier (Joseph)
- Fourier (travaux)

2 Good vibrations

- Onde sonore monodirectionnelle
- Rite of the string
- Et en 2D ?
- Formes de Chladni
- Problème inverse

3 Echantillonnage

- Cas stationnaire
- Cas transitoire

4 Au delà

5 Références



Figure – Jean-Baptiste Joseph Fourier 1768-1830, en habit d'Académicien



Figure – Maison de Fourier à Auxerre

Repères biographiques 1

- Naissance à Auxerre
- Enfant pauvre : son père est un très modeste tailleur, sa mère décède alors qu'il a 8 ans, et il devient orphelin à 10 ans
- 1777 : admis à l'école militaire d'Auxerre (tenue par bénédictins), recruté prof; à 16 ans 1/2, passage dans les ordres
- 1785 : Mémoire sur les équations algébriques
- Sans-culotte actif, arrêté et libéré plusieurs fois, il échappe à la guillotine
- 1794 : Ecole normale
- 1795-1798 : enseignant à l'Ecole polytechnique

Repères biographiques 2

- 1798 : Campagne d'Egypte avec Bonaparte (conseiller scientifique)
- 1798-1802 : diplomate Membre de l'Institut d'Egypte (Secrétaire perpétuel) et Monge (Président)
- Préfet de l'Isère 1802-1815 (charge confiée par Bonaparte). Dans un isolement scientifique total, il y a construit son œuvre phare : la théorie analytique de la chaleur (1811)
- 1816 : élu à l'Académie des Sciences, mais Cauchy, désigné par Louis XVIII, prendra sa place
- 1822 : secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences. Publication de son mémoire sur la Chaleur
- 1824 : pressent l'effet de serre et le décrit de manière prémonitoire
- Meurt en 1830. Publication à titre posthume de son ouvrage "Analyse des Equations déterminées"

Travaux de Fourier : équation algébriques (jeunesse), systèmes d'équations (« analyse déterminée »), théorie pour la résolution des systèmes d'inéquations (« analyse indéterminée », non publié), statistiques.

Théorie analytique de la chaleur

Contexte

- Avant Fourier, sujet confus (Lavoisier et Laplace avaient des théories différentes sur la nature "calorique")
- Fourier propose une explication de la propagation de la chaleur, indépendante de la nature calorique
- Le travail (1807) présente des équations et leur traitement par des procédés novateurs
- Mémoire (contenant 9 chapitres) est adressé à la première classe de l'Institut, à Lagrange, Laplace, Lacroix, Monge
- Hostilité de Lagrange, le mémoire ne fut pas imprimé, correspondance entre Fourier et Laplace
- 1811 : le mémoire est proposé au concours et est couronné. Mais toujours pas imprimé
- 1822 : publication de son mémoire

Théorie analytique de la chaleur

164 THÉORIE DE LA CHALEUR.
 valeur particulière de v , on déduira des équations précédentes $F x = e^{-mx}$, $f y = \cos. my$.

168.

On ne pourrait point supposer que m est un nombre négatif, et l'on doit nécessairement exclure toutes les valeurs particulières de v , où il entrerait des termes tels que a^{mx} , m étant un nombre positif, parce que la température v ne peut point devenir infinie, lorsque x est infiniment grande. En effet la chaleur n'étant fournie que par la source constante A, il ne peut en parvenir qu'une portion extrêmement petite dans les points de l'espace, qui sont très-éloignés du foyer. Le reste se détourne de plus en plus vers les arêtes infinies B et C, et se perd dans les masses froides qu'elles terminent.

L'exposant m qui entre dans la fonction e^{-mx} , $\cos. my$ n'est pas déterminé, et l'on peut choisir pour cet exposant un nombre positif quelconque : mais, pour que v devienne nulle en faisant $y = -\frac{1}{2}\pi$ ou $y = +\frac{1}{2}\pi$, quelle que soit x , on prendra pour m un des termes de la suite, 1, 3, 5, 7, 9, etc.; par ce moyen la seconde condition sera remplie.

169.

On formera facilement une valeur plus générale de v , en ajoutant plusieurs termes semblables aux précédents, et l'on aura $v = a e^{-x} \cos. y + b e^{-3x} \cos. 3y + c e^{-5x} \cos. 5y + d e^{-7x} \cos. 7y + \dots$ etc. (b). Il est évident que cette fonction v désignée par $\varphi(x, y)$ satisfait à l'équation $\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} = 0$, et à la condition $\varphi(x, \pm \frac{1}{2}\pi) = 0$. Il reste

Figure – La méthode de résolution de Fourier, consultable sur Gallica
<http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k29061r>

Séries de Fourier

Elles apparaissent dans le 3ième chapitre du Mémoire

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, y \in]0, +\infty[, z \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

Recherche de l'état d'équilibre (Fonction harmonique dans un domaine avec données au bord). Une solution explicite est

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{\sinh(y)}{\cos(x)}\right).$$

Fourier observe que $e^{-y} \cos(x)$, $e^{-3y} \cos(3x)$, $e^{-5y} \cos(5x)$ vérifient $\Delta u = 0$ et $u(\pm\pi/2, y) = 0$. Il cherche une solution de la forme

$u(x, y) = ae^{-y} \cos(x) + be^{-3y} \cos(3x) + ce^{-5y} \cos(5x) + \dots$; en $y = 0$, on a

$$1 = a \cos(x) + b \cos(3x) + c \cos(5x) + \dots$$

Il détermine les coefficients et trouve

$$1 = \frac{4}{\pi} \left(\cos(x) - \frac{1}{3} \cos(3x) + \frac{1}{5} \cos(5x) + \dots \right), \text{ d'où}$$

$u(x, y) = \frac{4}{\pi} \left(e^{-y} \cos(x) - \frac{1}{3} e^{-3y} \cos(3x) + \frac{1}{5} e^{-5y} \cos(5x) + \dots \right)$ Il remarque que la convergence de la somme est "très rapide"

Plus généralement

On considère les séries de la forme

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x), \text{ ou bien } f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega x}.$$

Fourier affirme alors - mais ce ne sera démontré que 20 ans plus tard par Dirichlet en 1829 - que : Toutes les fonctions périodiques f suffisamment régulières de période $T = 2\pi$ peuvent s'écrire comme plus haut.

Fondamental : les calculs des coefficients de Fourier s'effectuent très simplement grâce la propriété d'orthogonalité

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-i\frac{2\pi kx}{T}} dx \text{ car } \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i\frac{2\pi kx}{T}} e^{i\frac{2\pi mx}{T}} dx = \delta_{k,m} = \begin{cases} 1 & k = m \\ 0 & k \neq m \end{cases}$$

Analyse et Synthèse

Analyse et synthèse

- Analyse : calcul des coefficients de Fourier c_k
 - régularité du signal liée à la vitesse à laquelle $c_k \rightarrow 0$ qd $k \rightarrow +\infty$
 - Traitement du signal : remplacer c_k par $\tilde{c}_k = \varphi(c_k)$ ou $\tilde{c}_k = \varphi(c_{k_1}, \dots, c_{k_m})$ (Filtres passe haut, passe bas, débruitages, effets ...)

- Synthèse : reconstruction du signal par sommation $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega x}$

ou bien $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{c}_k e^{ik\omega x}$, après traitement

Illustrations

La fonction créneau $u(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{(2k+1)} \sin((2k+1)\pi x)$

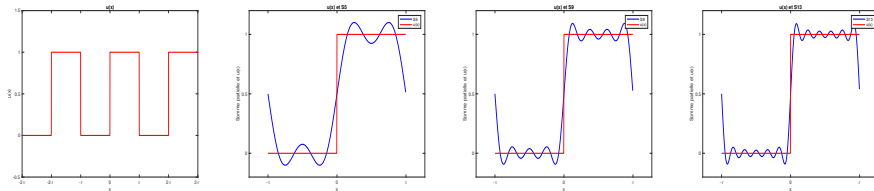


Figure – Fonction créneau et ses synthèses partielles

$$S_N(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^N \frac{2}{(2k+1)} \sin((2k+1)\pi x)$$

Oscillations visibles près de la zone de discontinuité : phénomène de Gibbs

Illustrations

La fonction $u(x) = (x - \pi)^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{k^2} \cos(k\pi x)$, $x \in [0, 2\pi]$

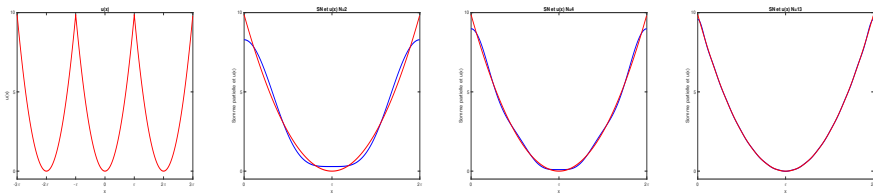


Figure – Fonction parabolique et ses synthèses partielles $S_N(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^N \frac{4}{k^2} \cos(k\pi x)$

Le son est un phénomène vibratoire de l'air. On peut appliquer l'approche de Fourier

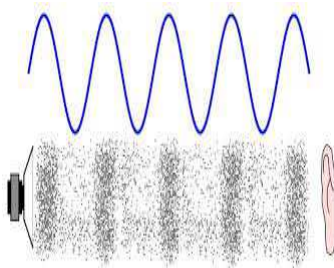


Figure – Vibrations sonores

$P_0 = 2.10^{-5} \text{Pa}$: seuil perception oreille humaine, $L = 20 \log_{10}(\frac{P}{P_0})$ (dB)

D'après les équations d'Euler (vibration d'Euler) en mécanique des fluides, la variation de pression p' vérifie

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - C_T^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = 0 \quad x \in \mathbb{R} \quad t \in]0, T), \quad (2)$$

$$p'(x, 0) = p_0(x), \quad \frac{\partial p'}{\partial t}(x, 0) = p_1(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{Cond. Init.} \quad (3)$$

Un son musical est caractérisé par 3 éléments (outre sa durée)

- La hauteur : elle est liée à la fréquence. L'oreille humaine détecte ceux entre 20 et 20 000 Hertz (1 hertz=1 vibration par seconde)
- L'intensité : elle est liée à l'amplitude maximale du mouvement vibratoire (min $= 2 \times 10^5$ Newton/ m^2)
- Le timbre : il est lié à la décomposition en fréquences (ou en série de Fourier) de sons purs

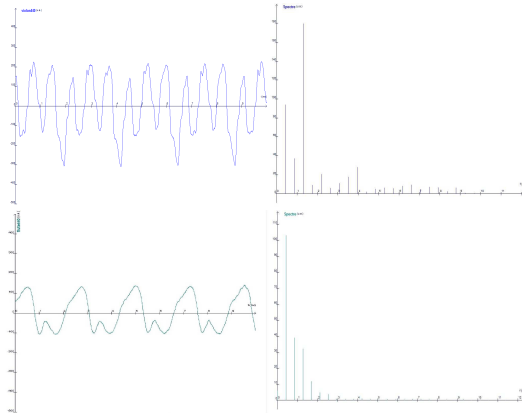


Figure – Signaux et spectres pour le la 440 - violon (archet) et flûte

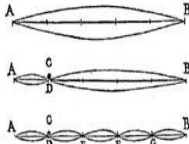
Evolution du la

Remarque : le la n'a pas toujours été à 440 HZ

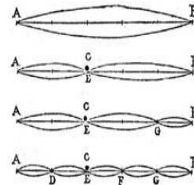
Année	1680	1774	1807	1829	1859	Aujourd'hui
Fréquence (Hz)	404	410	420	430	435	440 444 (Phil. Berlin) 442 (CNSM)

- Conséquence des évolution des instruments (l'influence des cuivres qui chauffent durant le concert, on peut terminer à 445).
- Cela crée des difficultés supplémentaires aux chanteurs et chanteuses

Divisez la corde d'un Monochorde en parties égales ; par exemple en 5, (l'on peut diviser une règle de la même longueur & l'appliquer le long de cette corde :) pincez cette corde à vuide, elle rendra un Son que j'appelle le fondamental de cette corde : mettez aussi-tôt un obstacle léger *C* sur une de ces divisions *D*, comme le bout d'une plume si la corde est nue ; en sorte que le mouvement de cette corde se communique de part



J'appellerai ces points *A, D, E, F, G, B*, les *Nœuds* de ces ondulations, & les milieux de ces ondulations seront appelés les *Ventres* de ces ondulations.



Si l'obstacle *C* est à la 2^e division *E* de la corde, elle rendra le même Son harmonique ; car 1^o. l'obstacle *C* obligera d'abord la corde à faire les deux ondulations *AE, EB*. 2^o. L'ondulation *AE* allant plus vite que l'autre, elle obligera la partie *EG* qui lui est égale, à suivre son mouvement. 3^o. La partie reflanté

Figure – Le Système général de Sauveur in Mémoires de l'Académie Royale des sciences (1701) .

Equations de d'Alembert (1747)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - C_T^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad x \in]0, L[, \quad t \in]0, T), \quad (4)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad t \geq 0 \text{ Cond. Bord} \quad (5)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \quad x \in]0, L[\text{ Cond. Init.} \quad (6)$$

$C_T = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$; T (tension) et ρ (densité volumique), constantes.

Equations de d'Alembert (1747)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - C_T^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad x \in]0, L[, \quad t \in]0, T), \quad (4)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad t \geq 0 \text{ Cond. Bord} \quad (5)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \quad x \in]0, L[\text{ Cond. Init.} \quad (6)$$

$C_T = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$; T (tension) et ρ (densité volumique), constantes.

Résolution formelle

- Séparation des variables : recherche de la solution sous la forme $u(x, t) = w(x)\phi(t)$ avec

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} w(x) - C_T^2 \phi(t) \frac{d^2 w}{dx^2} = 0, \text{ soit } \frac{\frac{d^2 \phi}{dt^2}}{\phi(t)} = C_T^2 \frac{\frac{d^2 w(x)}{dx^2}}{w(x)} = cste$$

- Calcul des modes propres (fréquences propres)

$$-\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = \lambda w(x), \quad w(0) = w(L) = 0$$

- Reconstruction par sommation de chaque harmonique

Détermination des modes propres

Séparation des variables : $u(x, t) = w(x)\phi(t)$:

$$\begin{cases} -C_T^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \lambda w, & x \in]0, L[, & w(0) = w(L) = 0, \\ \phi''(t) + \frac{\lambda}{C_T^2} \phi(t) = 0, & \phi(0) = \phi_0, \phi'(0) = \phi_1 \end{cases}$$

$$u(x, t) = \sin\left(\frac{\pi k}{L} C_T x\right) \left(A_k \cos\left(\frac{\pi k}{L} C_T t\right) + B_k \sin\left(\frac{\pi k}{L} C_T t\right) \right)$$

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sin\left(\frac{\pi k}{L} C_T x\right) \left(A_k \cos\left(\frac{\pi k}{L} C_T t\right) + B_k \sin\left(\frac{\pi k}{L} C_T t\right) \right)$$

Par identification $u_0(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} A_k \sin\left(\frac{\pi k}{L} C_T x\right),$

$$u_1(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\pi k}{L} C_T B_k \sin\left(\frac{\pi k}{L} C_T x\right)$$

Nota : Les fréquences/modes propres sont fonctions croissantes de la tension T

Le modèle décrit ne tient pas compte des amortissements
modèle sans amortissement

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - C_T^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad x \in]0, L[, \quad t \in]0, T), \quad (7)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad t \geq 0 \quad \text{Cond. Bord} \quad (8)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \quad x \in]0, L[\quad \text{Cond. Init.} \quad (9)$$

Le modèle décrit ne tient pas compte des amortissements
modèle avec amortissement

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - C_T^2 \left(1 + \beta \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + R_c \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad x \in]0, L[, \quad t \in]0, T), \quad (10)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad t \geq 0 \text{ Cond. Bord} \quad (11)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} u(x, 0) = u_1(x), \quad x \in]0, L[\text{ Cond. Init.} \quad (12)$$

$-\beta \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}$ (Amortissement visqueux) et $R_c \frac{\partial u}{\partial t}$ (Amortissement fluide)

Timbales

Il s'agit ici d'une membrane vibrante dont les extrémités sont maintenues fixes au bord. Les modes propres sont déterminés par

$$-\Delta u = \lambda u \quad x \in \Omega, \quad (13)$$

$$u = 0 \quad x \in \partial\Omega \quad (\text{Cond. Bord}) \quad (14)$$

$$(15)$$



Figure – Timbales wizzard

Maillage Timbale

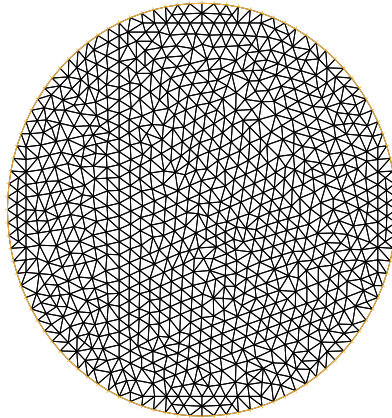


Figure – Maillage en éléments finis de la timbale

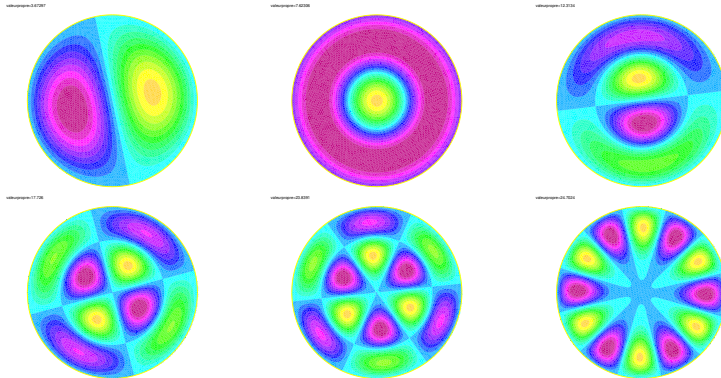


Figure – Lignes pour la timbale

Maillage Timbale

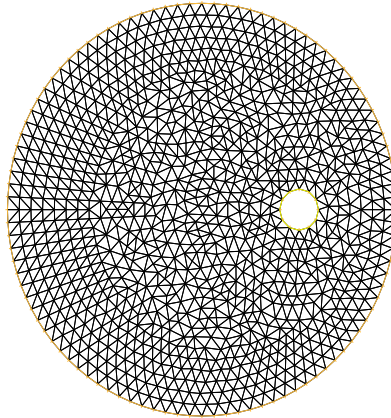


Figure – Maillage en éléments finis de la timbale où un doigt est posé

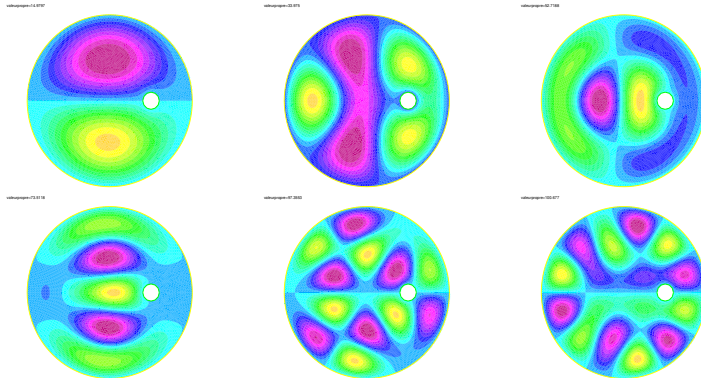
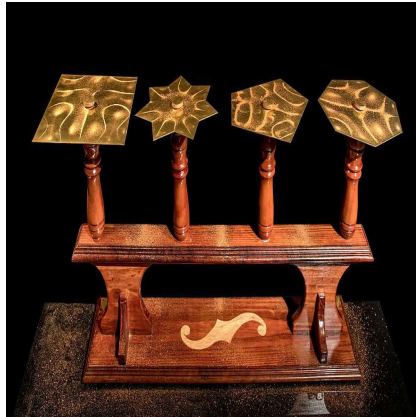


Figure – Lignes pour la timbale où un doigt est posé

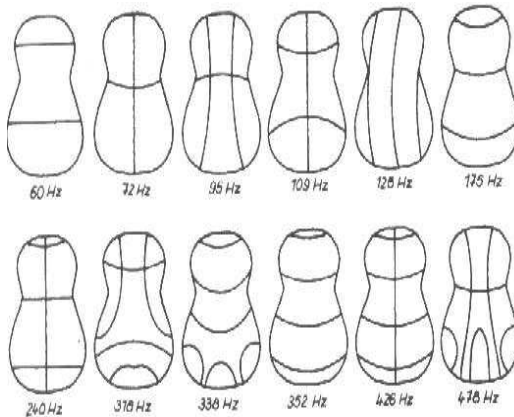
Formes d'Ernst Chladni

Expérience du physicien Allemand Ernst Florens Chladni (1756-1827) en 1807 sur les vibrations des plaques carrées et circulaires. La vibration (à l'aide d'un archet) d'une plaque de cuivre saupoudrée de sable fin fait apparaître des figures géométriques

Formes d'Ernst Chladni



Guitares



Modèle physique et résolution

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - C_T^2 \Delta u = 0 \quad x \in \Omega, \quad t \in]0, T], \quad (16)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad x \in \partial\Omega \quad \text{Cond. Bord} \quad (17)$$

$$\int_{\Omega} u(x, t) dx = 0 \quad t \geq 0 \quad (18)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} u(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega \quad \text{Cond. Init.} \quad (19)$$

Détermination des modes propres

$$-\Delta u = \lambda u \quad x \in \Omega, \quad (20)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad x \in \partial\Omega \quad \text{Cond. Bord} \quad (21)$$

$$\int_{\Omega} u(x, t) dx = 0 \quad t \geq 0 \quad (22)$$



Mailage Telecaster

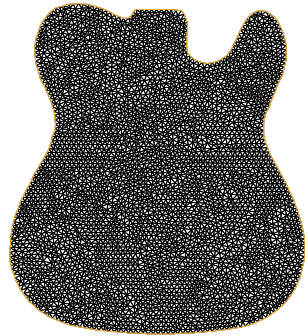


Figure – Fender Telecaster (1951-)

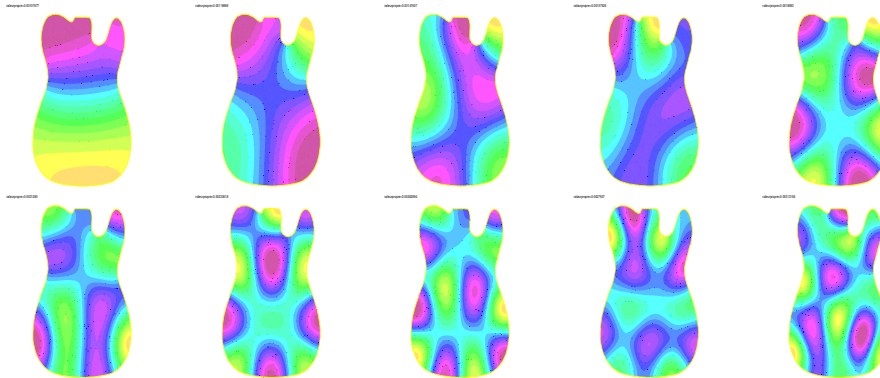


Figure – Lignes pour la table de la Fender Telecaster



Mailage Gibson SG

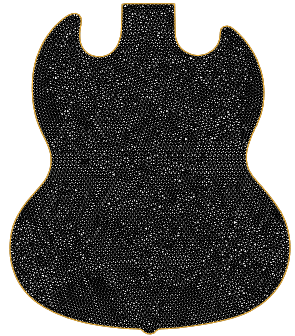


Figure – Gibson SG (1961/63-)

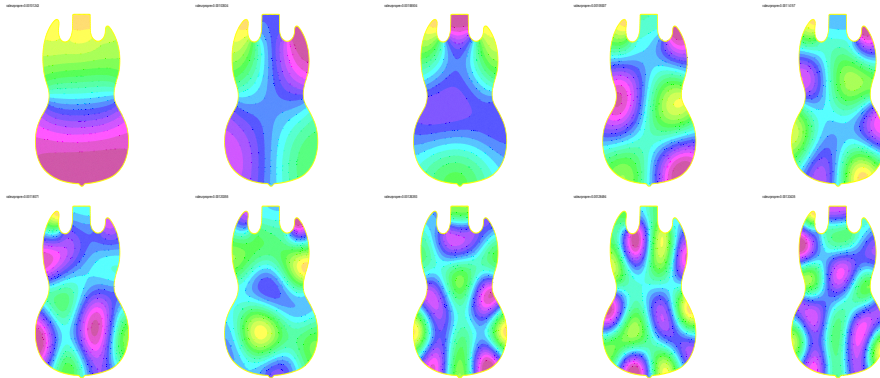


Figure – Lignes pour la table de la Gibson SG

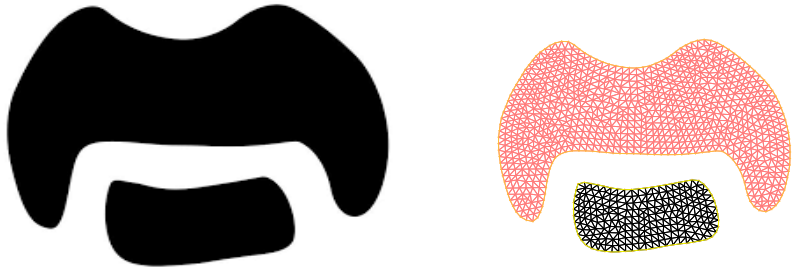


Figure – Logo des moustaches (TM) de FZ (Frank Zappa 1940-1993)

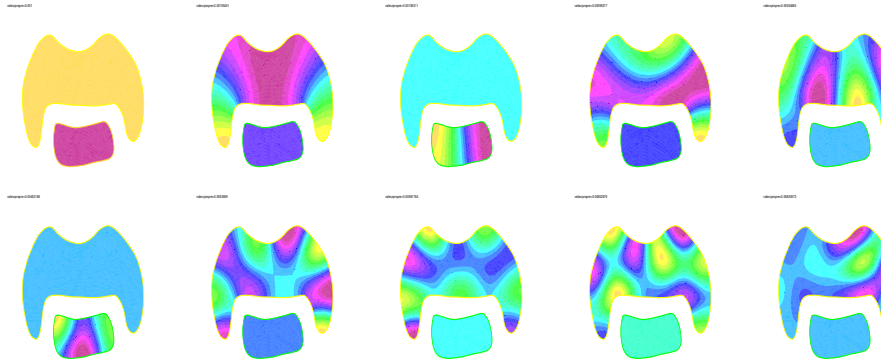


Figure – Ten Frank's Moustache

Peut-on entendre la forme d'un tambour ? Question posée par Mark Kac (1966) dans un célèbre article (Amer. Math. Monthly. 73, Part II : 1-23). Autrement dit, peut-on déterminer totalement le tambour par la suite des fréquences propres ?

Peut-on entendre la forme d'un tambour ? Question posée par Mark Kac (1966) dans un célèbre article (Amer. Math. Monthly. 73, Part II : 1-23). Autrement dit, peut-on déterminer totalement le tambour par la suite des fréquences propres ?
Pas toujours !

Peut-on entendre la forme d'un tambour ? Question posée par Mark Kac (1966) dans un célèbre article (Amer. Math. Monthly. 73, Part II : 1-23). Autrement dit, peut-on déterminer totalement le tambour par la suite des fréquences propres ?

Pas toujours !

Un des contre-exemples proposés par Gordon, Webb & Wolpert en 1992 montre que deux tambours différents peuvent avoir les mêmes fréquences propres, voir aussi l'article de review "Hearing shapes of drums ? mathematical and physical aspects of isospectrality" de O. Giraut et K. Thas (2010), <https://arxiv.org/pdf/1101.1239.pdf>

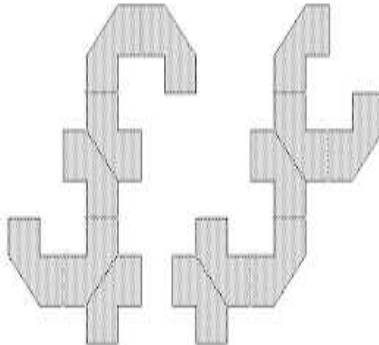


Figure – Un fameux contre-exemple du à Gordon, Webb & Wolpert (1992)

Echantillonnage - cas stationnaire

- On prélève un nombre fini N de valeurs à intervalles réguliers : $u(x_i)$, échantillon= $(u(x_i))_{i=1}^N$.
- Cadence : nombre d'échantillon par unité (temps ou espace), fréquence d'échantillonnage

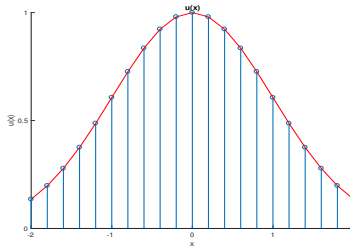


Figure – Echantillonnage

Reconstruction

Analyse/synthèse discrète et FFT

Étant donné un échantillon $u(x_i)$ déterminer $\tilde{u}(x) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \hat{u}_k e^{-\frac{2i\pi}{N} kx}$ avec
 $\tilde{u}(x_m) = u(x_m)$ (relation d'interpolation). Miracle de l'orthogonalité discrète

$$\hat{u}_k = \frac{2}{N} \sum_{m=0}^{N-1} u(x_m) e^{-\frac{2i\pi}{N} mk}$$

Ces calculs de sommes s'effectuent très rapidement grâce à la FFT
(Cooley-Tukey, 1965)

Théorème de Shannon

- Une fréquence d'échantillonnage trop faible conduit à une information pauvre
- Une fréquence d'échantillonnage trop élevée conduit à des calculs lourds
- Choix de la fréquence dictée par le théorème de Shannon pour représenter le signal original à partir de l'échantillon

Theorem

Soit f_c la fréquence maximale et f_m la fréquence minimale du signal $u(x)$. Alors la représentation du signal demande que la fréquence d'échantillonnage f_e vérifie : $f_e \geq 2(f_c - f_m)$. On note $f_e/2$ la fréquence de Nyquist

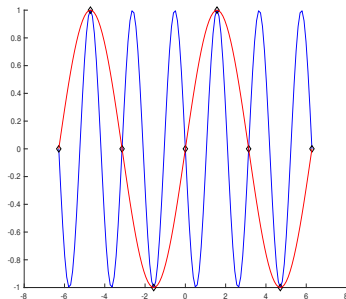


Figure – Echantillonnage et fréquences d'échantillonnage. Les deux signaux sont représentés par les mêmes points

Représentation en amplitude et en fréquence

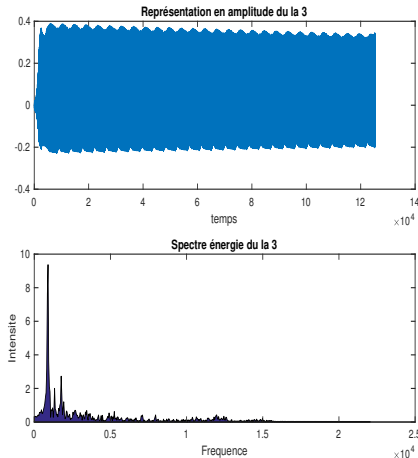


Figure – Représentation temporelle (Variation de pression de l'air ou de l'amplitude d'une membrane en fonction du temps) en haut, et spectre du la 3 (440 Hz), en bas

Question : comment agir sur l'allure d'un signal stationnaire (un son par exemple) ?

Principe : agir **localement** sur les fréquences pour un effet **global**.

$$\tilde{u}_k = F_k \cdot \hat{u}_k$$

où F_k est le symbole du filtre. Du coup

$$\tilde{u}(x) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \tilde{u}_k e^{-\frac{2i\pi}{N} kx} = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \hat{u}_k F_k e^{-\frac{2i\pi}{N} kx} = u(x) * f(x) \text{ avec}$$

$$f(x) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} F_k e^{-\frac{2i\pi}{N} kx}$$

Quelques filtres

- Filtre passe haut
- Filtre passe bas (par exemple pour enlever des harmoniques)

Quelques filtres

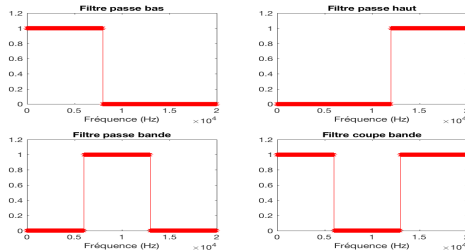


Figure – Quelques filtres classiques

La fréquence de coupure standard est $f_c = 10000$ Hz pour passe-bas, passe-haut et passe-bande

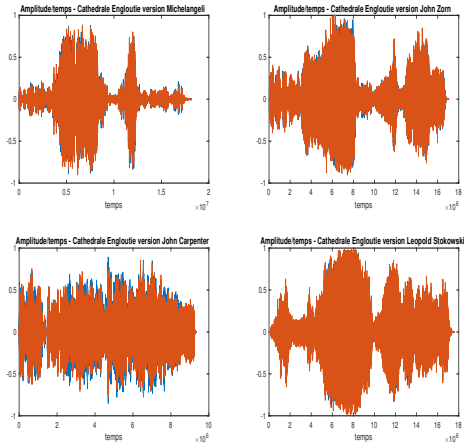


Figure – Représentation temporelle Cathédrale Engloutie (Claude Debussy 1862-1918)

Question : comment représenter un signal sonore $s(t)$ et son spectre au cours du temps ? Si le signal est stationnaire : comme précédemment.
Que faire si les fréquences dépendent aussi du temps ?

Question : comment représenter un signal sonore $s(t)$ et son spectre au cours du temps ? Si le signal est stationnaire : comme précédemment.
Que faire si les fréquences dépendent aussi du temps ?

Outil : Transformée de Fourier

$\hat{s}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-i\xi t} dt$, définie pour une certaine classe de fonctions

On peut donner les fréquences qui composent un signal mais pas leur historique d'apparition.

Principe d'incertitude 1 - version continue

$$\text{Si } \langle T_s \rangle = \left(\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |s(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{étalement spectral}) \text{ alors}$$

$$\langle T_s \rangle \langle T_{\hat{s}} \rangle \geq \frac{1}{4\pi}$$

On ne peut pas agir "à la fois " ou "en même temps" trop finement en temps et en fréquence sur le signal s .

Troncature du signal en temps ou en fréquence

En pratique pas de signaux de durée infinie ou de spectre non borné ; travailler à bande passante limitée (intervalle borné de fréquences)

Fenêtres glissantes 1

On procède à des analyses de type Fourier dans des petites fenêtres de temps et de les faire glisser (ILLUSTRATION). La transformée de Fourier est appliquée à chacune des fenêtres et l'on obtient des informations en temps et en fréquence. Une fenêtre temporelle trop petite empêche une analyse fine en fréquences.

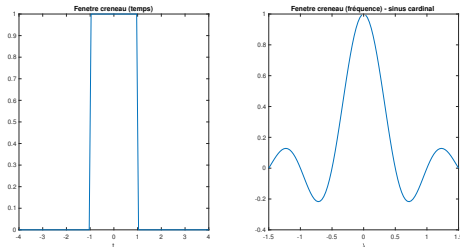


Figure – Fenêtre créneau et sa transformée de Fourier (sinc)

A éviter à cause du phénomène de Gibbs

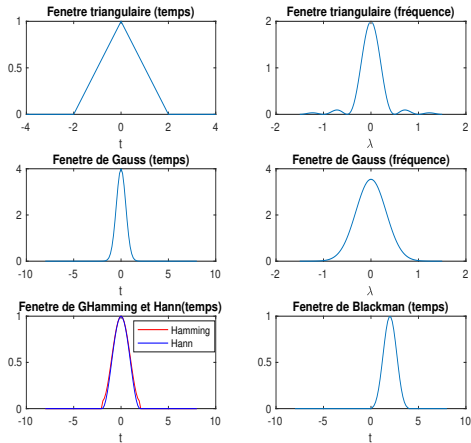


Figure – Quelques fenêtres temporelles (triangulaire, Hann, Haming, Blackman)

Formule de Gabor

Soit g à support compact. On considère alors

$$\mathcal{G}(s)(u, \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)g(t-u)e^{-i\xi t} dt.$$

La formule de Gabor assure la restructibilité :

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}(s)(u, \xi)g(t-u)e^{-i\xi t} d\xi du$$

Spectrogramme

Le spectrogramme est l'application $(u, \xi) \rightarrow |\mathcal{G}(s)(u, \xi)|$. Elle représente dans un seul diagramme à deux dimensions trois paramètres :

- le temps (en s), sur l'axe horizontal
- la fréquence (en Hz), sur l'axe vertical, par intervalles de temps
- la puissance sonore (en Db) ou l'amplitude, sur l'axe transversal

Construction

- On se donne une suite de temps discrets t_i
- On calcule les fréquences sur la fenêtre $[t_i - \Delta t/2, t_i + \Delta t/2]$, Δt est la taille de la fenêtre temporelle
- Sur chaque intervalle, on décrit chaque fréquence présente par son intensité
- Choix Compatible de Δf et de Δt , exemple
CD : Larg. B= $[0,20 \text{ KHz}]$, Freq. éch.=44,1 KHz, Période éch= $22.6 \mu\text{s}$

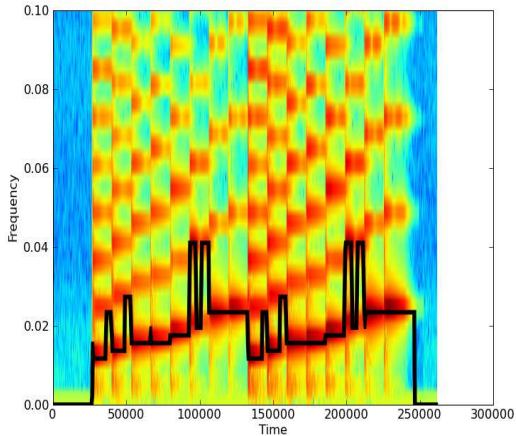


Figure – Spectrogramme d'une gamme

Fourier

- Transformée de Fourier discrète et analyse de structure commune aux gammes majeures, par ton, et pentatoniques dont Debussy (1862-1918) avait grand usage. Application à "l'Isle Joyeuse" et à "Voiles" (E. Amiot)
- Fourier et le traitement d'images
 - Image codée en $N \times N$ pixels auxquels on associe $N \times N$ fréquences ("ondes de couleurs").
 - DCT (Transfo. Fourier Cosinus) permet de faire l'analyse de Fourier discrète
 - Par procédure de filtrage (e.g. mise à zéro de coeffs. de Fourier "petits") et transformation inverse, on résume l'image avec moins de pixels : compression des données
- Généralisations : ondelettes et applications à l'analyse et à la compression des données

- Emmanuel Amiot, "Gammes bien réparties et transformé de Fourier discrète", Mathématiques et sciences humaines, 178, septembre 2007, URL : <http://msh.revues.org/4272>
- Serge Cantat et Luc Hillairet, "Les figures sonores de Chladni", in Images des Mathématiques, Juillet 2012
- Grégoire Derveaux, "Modélisation numérique de la guitare acoustique", thèse, Ecole Polytechnique , 2002, <https://pastel.archives-ouvertes.fr/pastel-00002585>
- Olivier Giraud, Koen Thas, "Hearing shapes of drums? mathematical and physical aspects of isospectrality", <https://arxiv.org/abs/1101.1239v1>
- Romain Joly, " Quand une fontaine et un escalier font une note de musique", in Images des Mathématiques
- Alain Juhel, site Mathourisme, <http://www.mathouriste.eu>
- Mark Kac, "Can One Hear the Shape of a Drum ?", The American Mathematical Monthly, Vol. 73, No. 4, Part 2 : Papers in Analysis (Apr.,1966), pp. 1-23
- Jean-Pierre Kahane, "Fourier, un mathématicien inspiré par la physique", http://www.cnrs.fr/publications/imagesdelaphysique/couv-PDF/IdP2009/Article_01.pdf