

Exercice 1 : Séries

On considère la suite de terme général

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2},$$

de limite $S = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Écrire une fonction Scilab admettant en entrée un entier n et renvoyant les n premiers termes de la suite $(S_n)_n$.
2. Modifier la fonction précédente pour qu'elle renvoie également la suite des erreurs $(|S_n - S|)_n$.
3. Modifier la fonction précédente pour renvoyer la suite des ratios $\left(\frac{S_{n+1} - S}{S_n - S}\right)_n$.
4. Modifier la fonction précédente pour renvoyer la suite des ratios $\left(\frac{S_{n+1} - S_n}{S_n - S_{n-1}}\right)_n$.
5. Tracer, sur un même graphe, $\frac{S_{n+1} - S}{S_n - S}$ et $\frac{S_{n+1} - S_n}{S_n - S_{n-1}}$ en fonction de n .
6. Tracer, sur un graphe en échelle logarithmique, l'évolution de l'erreur en fonction de n .
7. Reprendre les questions précédentes avec la suite de terme général

$$T_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k},$$

de limite $T = \ln 2$.

Exercice 2 : Méthode d'Aitken

On s'intéresse à la suite de terme général

$$S_n = 4 \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

qui converge vers π . On cherche à étudier l'efficacité de la méthode d'Aitken qui consiste à construire la suite définie par :

$$A_n = \frac{S_n S_{n+2} - S_{n+1}^2}{S_n + S_{n+2} - 2S_{n+1}}.$$

1. Écrire une fonction Scilab admettant en entrée un entier n et renvoyant les n premiers termes de la suite $(S_n)_n$ ainsi que la suite des erreurs $(|S_n - \pi|)_n$.
2. Écrire une fonction Scilab similaire à la fonction précédente, mais calculant la suite $(A_n)_n$.
3. Tracer, sur un même graphe, l'évolution des erreurs obtenues par les deux méthodes en fonction de n .

Exercice 3 : Méthode de Steffensen

On s'intéresse à la suite définie par $x_1 = 3$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - 3}{2x_k}$$

qui converge vers $\sqrt{3}$. On cherche à étudier l'efficacité de la méthode de Steffensen qui consiste, à partir d'une suite définie par $y_{k+1} = F(x_k)$, à définir la suite définie par $y_1 = x_1$ et :

$$y_{k+1} = y_k - \frac{(F(y_k) - y_k)^2}{F(F(y_k)) - 2F(y_k) + y_k}.$$

1. Écrire une fonction Scilab calculant les n premiers termes de la suite $(x_k)_k$ ainsi que la suite des erreurs $(|x_k - \sqrt{3}|)_k$.
2. Écrire une fonction Scilab similaire à la fonction précédente, mais calculant la suite $(y_k)_k$.
3. Tracer, sur un même graphe, l'évolution des erreurs obtenues par les deux méthodes en fonction de n .

Exercice 4 : Comparaison

Soit $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On s'intéresse à la suite définie par $x_1 = a$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad x_{k+1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) x_k + \frac{1}{n} \frac{a}{x_k^{n-1}},$$

qui converge vers $\sqrt[n]{a}$.

1. Écrire des fonctions Scilab calculant les N premiers termes de la suite $(x_k)_k$ ainsi que la suite des erreurs $(|x_k - \sqrt[n]{a}|)_k$:
 - a. de manière classique,
 - b. accélérée par la méthode d'Aitken,
 - c. accélérée par la méthode de Steffensen.
2. Tracer sur un même graphe l'évolution des erreurs obtenues par les trois méthodes en fonction de N .

Exercice 5 : Extrapolation de Richardson

On s'intéresse à la suite définie par :

$$a_n = 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right).$$

1. Déterminer la limite de la suite $(a_n)_n$.
2. À l'aide d'un développement de Taylor, exprimer $\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$ pour n grand.
3. En déduire a_n pour n grand.
4. Écrire des fonctions Scilab calculant les n premiers termes de la suite $(a_n)_n$ ainsi que la suite des erreurs :
 - a. de manière classique,
 - b. utilisant la méthode d'extrapolation de Richardson.
5. Tracer sur un même graphe l'évolution des erreurs obtenues par les deux méthodes en fonction de n .