

L2 - Langage de programmation Autour des polynômes

Jean-Paul CHEHAB

LAMFA UMR CNRS 7352, Univ. Picardie Jules Verne

Confinement, an 1

Plan

1 Pourquoi s'intéresser aux polynômes ?

Plan

- ① Pourquoi s'intéresser aux polynômes ?
- ② Polynômes en Scilab
 - Construction avec `poly`
 - Calcul des racines, de coefficients, des facteurs : `roots` `coeff` et `pfact`

Plan

- 1 Pourquoi s'intéresser aux polynômes ?
- 2 Polynômes en Scilab
 - Construction avec `poly`
 - Calcul des racines, de coefficients, des facteurs : `roots` `coeff` et `pfact`
- 3 Calcul de racines
 - Difficultés
 - Sensibilité

Plan

- ① Pourquoi s'intéresser aux polynômes ?
- ② Polynômes en Scilab
 - Construction avec `poly`
 - Calcul des racines, de coefficients, des facteurs : `roots` `coeff` et `pfact`
- ③ Calcul de racines
 - Difficultés
 - Sensibilité
- ④ Polynômes en algèbre linéaire
 - Cayley-Hamilton
 - Matrice compagnon

Plan

- 1 Pourquoi s'intéresser aux polynômes ?
- 2 Polynômes en Scilab
 - Construction avec `poly`
 - Calcul des racines, de coefficients, des facteurs : `roots` `coeff` et `pfact`
- 3 Calcul de racines
 - Difficultés
 - Sensibilité
- 4 Polynômes en algèbre linéaire
 - Cayley-Hamilton
 - Matrice compagnon
- 5 Polynômes orthogonaux
 - Polynômes de Tchebycheff
 - Polynômes de Legendre

Plan

- 1 Pourquoi s'intéresser aux polynômes ?
- 2 Polynômes en Scilab
 - Construction avec `poly`
 - Calcul des racines, de coefficients, des facteurs : `roots` `coeff` et `pfact`
- 3 Calcul de racines
 - Difficultés
 - Sensibilité
- 4 Polynômes en algèbre linéaire
 - Cayley-Hamilton
 - Matrice compagnon
- 5 Polynômes orthogonaux
 - Polynômes de Tchebycheff
 - Polynômes de Legendre
- 6 Approximation polynomiale
 - interpolation
 - Bernstein vs interpolation

- Fonctions les plus simples à construire
- Propriétés d'approximation
 - locales (formules de Taylor)
 - dans espaces de fonctions, ex dans $\mathcal{C}([a, b])$ (théorème de Stone-Weierstrass)
 - interpolation et formules de quadrature
- On les retrouve partout
 - algèbre
 - traitement d'images et du son

Polynômes

- Par les racines :

$$p(x) = a_n \prod_{i=1}^n (x - \xi_i)$$

Polynômes

- Par les racines :

$$p(x) = a_n \prod_{i=1}^n (x - \xi_i)$$

- par les coefficients :

$$p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i,$$

les a_i sont les *coefficients*.

En Scilab

- // Définition par les racines
 $\rightarrow p1 = \text{poly}([1 \ 2 \ 3], "x")$
 $p1 =$
 $-6 \ +11x \ -6x^2 \ +x^3$

Polynômes

- Par les racines :

$$p(x) = a_n \prod_{i=1}^n (x - \xi_i)$$

- par les coefficients :

$$p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i,$$

les a_i sont les *coefficients*.

En Scilab

- // Définition par les racines
-> p1 = poly([1 2 3], "x")
p1 =
-6 + 11x - 6x² + x³
- // Définition par les coefficients
-> p2 = poly([1 2 3], "x", "coeff")
p2 =
1 + 2x + 3x²

Theorem (Théorème fondamental de l'algèbre)

Tout polynôme à coefficient complexe de degré n admet n racines complexes, ou, de manière équivalente, on peut écrire tout $p \in \mathbf{P}_n$ sous la forme

$$p(x) = a_n \prod_{i=1}^n (x - \xi_i),$$

les nombres ξ_i étant les racines de $p(x)$.

Et sa forme équivalente

Theorem (Forme équivalente)

Tout polynôme non constant à coefficients réels s'écrit comme un produit de polynômes à coefficients réels de degrés 1 ou 2.

- les racines : roots

```
-> r=roots(p1)
```

```
r =
```

```
3.00000000000000035527137
```

```
1.99999999999999928945726
```

```
1.00000000000000004440892
```

- les racines : roots

```
-> r=roots(p1)
```

```
r =
```

```
3.00000000000000035527137
```

```
1.99999999999999928945726
```

```
1.00000000000000004440892
```

- les coefficients : coeff

```
-> cp1=coeff(p1)
```

```
cp1 =
```

```
-6. 11. -6. 1.
```

```
// Les coefficients sont rangés par ordre croissant des  
puissances, de  $a_0$  à  $a_n$ 
```

- les racines : roots

```
-> r=roots(p1)
```

```
r =
```

```
3.00000000000000035527137
```

```
1.99999999999999928945726
```

```
1.00000000000000004440892
```

- les coefficients : coeff

```
-> cp1=coeff(p1)
```

```
cp1 =
```

```
-6. 11. -6. 1.
```

```
// Les coefficients sont rangés par ordre croissant des  
puissances, de  $a_0$  à  $a_n$ 
```

- pfact permet de calculer numériquement les facteurs de degré 1 ou 2 du polynôme (version équivalente du théorème de d'Alembert) :

```
polfact(p1)
```

```
column 1 to 3
```

```
1 -3.00000000000000035527137 +x -1.99999999999999928945726 +x
```

```
column 4
```

```
-1.00000000000000004440892 +x
```

Formules jusqu'à $n = 4$

- $n = 1$ $ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$; $n = 2$ $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- $n = 3$ $x^3 + px + q = 0$ (formules de Cardan, 1547)
 $x_k = u_k + v_k, k = 1, 2, 3$ avec

$$u_k = j^k \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left(-q + \sqrt{\frac{-\Delta}{27}} \right)} \text{ et } v_k = j^{-k} \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left(-q - \sqrt{\frac{-\Delta}{27}} \right)}$$

et $\Delta = -(4p^3 + 27q^2)$, $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

- $n = 4$ $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ (formules de Ferrari, 1540) : écrire $x^4 = (x^2 + \lambda) - 2\lambda x^2 - \lambda^2$ et chercher λ de sorte à ce que le polynôme s'écrive comme différence de deux carrés.

Formules jusqu'à $n = 4$

- $n = 1$ $ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$; $n = 2$ $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- $n = 3$ $x^3 + px + q = 0$ (formules de Cardan, 1547)
 $x_k = u_k + v_k, k = 1, 2, 3$ avec

$$u_k = j^k \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left(-q + \sqrt{\frac{-\Delta}{27}} \right)} \text{ et } v_k = j^{-k} \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left(-q - \sqrt{\frac{-\Delta}{27}} \right)}$$

et $\Delta = -(4p^3 + 27q^2)$, $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

- $n = 4$ $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ (formules de Ferrari, 1540) : écrire $x^4 = (x^2 + \lambda) - 2\lambda x^2 - \lambda^2$ et chercher λ de sorte à ce que le polynôme s'écrive comme différence de deux carrés.

Theorem

Pour tout entier $n \geq 5$, il n'existe pas de formule générale exprimant par radicaux les racines d'un polynôme quelconque de degré n , c'est-à-dire de formule n'utilisant que les coefficients, la valeur 1, les quatre opérations et l'extraction des racines n -ièmes.

Un premier exemple

Soit $f(x) = (x - 1)^4$ et $f_\epsilon(x) = (x - 1)^4 - \epsilon$. Les racines de f sont $\xi = 1$ avec multiplicité égale à 4, celles de f_ϵ sont

$$\xi = 1 + \sqrt[4]{\epsilon}$$

Si $\epsilon = 10^{-4}$, on trouve comme racines

$$\xi_1 = 1.1, \quad \xi_2 = 1 + i0.1, \quad \xi_3 = 1 - i0.1, \quad \xi_4 = 0.9 \quad \text{où } i = \sqrt{-1}.$$

La recherche des racines d'un polynôme est un problème mal conditionné : lorsque la perturbation ϵ vaut 10^{-4} la variation relative du résultat vaut 10^{-1} , soit une erreur de 10% .

Deuxième exemple : le polynôme de Willkinson

$$p_n(x) = \prod_{i=1}^n (x - i).$$

Le calcul numérique des racines de $p_n(x)$ retourne des résultats très éloignés des valeurs $\{1, 2, \dots, n\}$ dès que $n \geq 25$, voir la figure ci-après.

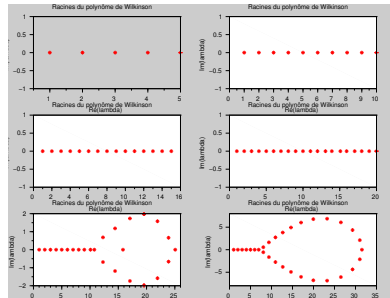


Figure – Racines du polynôme de Wilkinson pour, $n = 5, 10, 15, 20, 25, 30$
 ⇒ ANIMATION

Theorem (Cayley Hamilton)

Soit A une matrice carrée d'ordre n sur un corps commutatif K ($K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$). Soit $p_A(x)$ le polynôme caractéristique

$$p_A(x) = \det(x \text{Id}_n - A) = x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1x + \alpha_0.$$

Alors

$$P_A(A) = A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \cdots + \alpha_1A + \alpha_0 = 0.$$

Illustration

poly, det

```
// Calcul des valeurs propres comme racines du polynôme caractéristique
->A=rand(3,3)//matrice 3 x 3 de coefficients tirés suivant une loi
uniforme sur [0,1]
A=
column 1 to 2
0.211324865464121103287    0.3303270917385816574097
0.7560438541695475578308    0.6653811042197048664093
0.000221134629100561142    0.6283917883411049842834
column 3
0.8497452358715236186981
0.6857310198247432708740
0.8782164813019335269928
->p = poly(A,'x')//retourne le polynôme caractéristique de A
-0.2167305540955342946230 +0.2297117866228667315553x
-1.7549224509857594966888x2 +x3
```

suite

```
// calculons ses racines (donc les valeurs propres de A)
rA=roots(p)
rA =
1.69483711101828626866
0.0300426699837365585033 + 0.3563346188599859631907i
0.0300426699837365585033 - 0.3563346188599859631907i
La commande spec permet de calculer les valeurs propres spA=spec(A)
spA =
0.030042669983736509931 + 0.3563346188599859631907i
0.030042669983736509931 - 0.3563346188599859631907i
1.6948371110182864907046
//on retombe sur nos pieds !
```

Vérification de de Cayley-Hamilton sur un exemple

```

Id=eye(n,n);
//la matrice identité, ici n=3
PA=Id;
for i=1:n,
PA=PA*(r(i)*Id-A);
end
PA =
column 1 to 2
0.00000000000000001974862 0.0000000000000000127808
0.00000000000000003853102 0.00000000000000005584136
0. 0.00000000000000002220446
column 3
0.000000000000000003330669
0.000000000000000002220446
0.000000000000000006661338

```

$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots a_{n-1}x^{n-1} + x^n$. A ce polynôme p on associe la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

On dit que M est la *matrice compagnon* de p . Nous avons le

Theorem

$p(x)$ est le *polynôme caractéristique* de M .

On peut considérer la transposée de cette matrice et toute permutation, ce qui ne change pas ses valeurs propres.

En scilab, la commande `companion` permet de construire la matrice `companion` d'un polynôme donné.

```
-> p=poly([1 2 3], "x")
```

```
p=
```

```
-6 +11x -6x2 +x3
```

```
-> M=companion(p)
```

```
M =
```

```
6. -11. 6.
```

```
1. 0. 0.
```

```
0. 1. 0.
```

```
//
```

```
//On retrouve bien p
```

```
//
```

```
-> poly(M, "x") ans =
```

```
-5.9999999999999982236432 +10.99999999999999822364x -6x2 +x3
```

Soit $[a, b]$ un intervalle borné. On commence par se donner une fonction w intégrable telle que

- $w(x) \geq 0 \forall x \in]a, b[$
- tous les moments $\mu_k = \int_a^b x^k w dx$ existent et sont finis.
- pour les polynômes positifs P sur $[a, b]$ $\int_a^b P w dx = 0 \Rightarrow P = 0$.

Definition

On définit le polynôme de Tchebycheff de degré n , $n = 0, 1, \dots$ par
 $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$, $\in [-1, 1]$.

Definition

On définit le polynôme de Tchebycheff de degré n , $n = 0, 1, \dots$ par $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$, $\in [-1, 1]$.

Theorem (Polynômes de Tchebycheff)

- *orthogonalité*

$$\int_{-1}^1 T_n T_m \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0, \text{ si } n \neq m,$$

- *relation de récurrence à 3 termes*

$$T_0 = 1, \quad T_1 = x, \quad T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \forall n \geq 1.$$

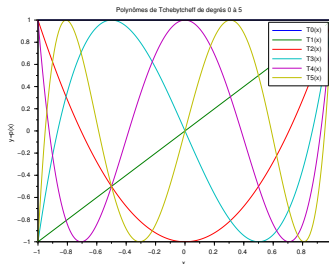


Figure – Polynômes de Tchebycheff T_N , $n = 0, \dots, 5$

Theorem (Polynômes de Legendre)

- *orthogonalité*

$$\int_{-1}^1 L_n L_m dx = 0 \text{ si } n \neq m,$$

- *relation de récurrence à 3 termes*

$$L_0 = 1, L_1 = x, (n+1)L_{n+1} = (2n+1)xL_n - nL_{n-1}, \forall n \geq 1.$$

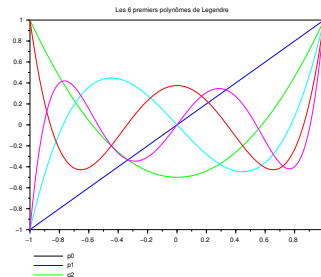


Figure – Polynômes de Legendre L_N , $n = 0, \dots, 5$

Soit f continue sur $[a, b]$ et $x_i, i = 1, \dots, n+1, n+1$ points 2 à 2 distincts.
 On cherche à construire un polynôme $p(x)$ tel que

$$(\mathcal{P}) \quad f(x_i) = p(x_i), i = 1, \dots, n+1.$$

Ce problème équivaut à déterminer les réels $(a_i)_{i=0}^n$ tels que

$$p(x_i) = \sum_{j=0}^n a_j x_i^j.$$

Le polynôme p peut se construire de diverses manières, par exemple en résolvant le Vandermonde de matrice (voir aussi la feuille Etude de fonctions)

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_k & x_k^2 & & x_k^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^n \end{pmatrix},$$

L'hypothèse x_i 2 à 2 distincts est nécessaire et suffisante pour avoir l'existence et l'unicité du polynôme d'interpolation.

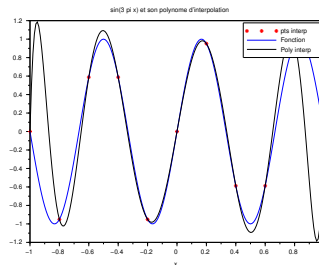


Figure – La fonction $f(x) = \sin(3\pi x)$ et son polynôme d'interpolation de degré 10 sur $[-1, 1]$

⇒ ANIMATION

Comparaison des vitesses de convergence

Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ avec $f(0) = f(1) = 0$. On rappelle que la suite des polynômes de Bernstein

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

associée converge uniformément vers f . Cette convergence peut-être très lente, on montre que

$$\max_{x \in [0, 1]} |f(x) - B_n(f)(x)| \leq C \frac{1}{\sqrt{n}}$$

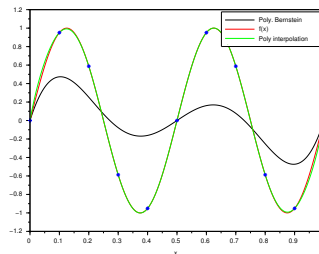


Figure – La fonction $f(x) = \sin(3\pi x)$, son polynôme d'interpolation de degré 20 sur $[-1, 1]$ et le polynôme de Bernstein correspondant

⇒ ANIMATION