

Notes de cours sur le thème "Arithmétique"

1 Nombres premiers

On pourra consulter avec beaucoup de profit le livre de Jean-Paul Delahaye [2].

1.1 Crible

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figure 1: Crible Eratostène

Principe : On dresse la liste des nombres entiers plus petits que n , n donné. On marque 2, puis on élimine de la liste tous les multiples de 2 supérieurs à 2. On recommence le processus en marquant le premier nombre non barré supérieur à 2, c'est à dire 3. On élimine alors tous les entiers de la liste multiples de 3 et supérieurs à 3. On recommence le processus en marquant le premier nombre non barré supérieur à 3, c'est à dire 5.

En fait, on n'a pas besoin de balayer tous les nombres de la liste.

Illustration :

A =

column 1 to 12

2. 3. 5. 7. 11. 13. 17. 19. 23. 29. 31. 37.

column 13 to 23

41. 43. 47. 53. 59. 61. 67. 71. 73. 79. 83.

column 24 to 25

89. 97.

1.2 Factorisation par nombres premiers

Il s'agit de la décomposition d'un nombre en facteurs premiers. On cherchera à écrire un algorithme simple puis à le programmer.

1.3 Spirale d'Ulam

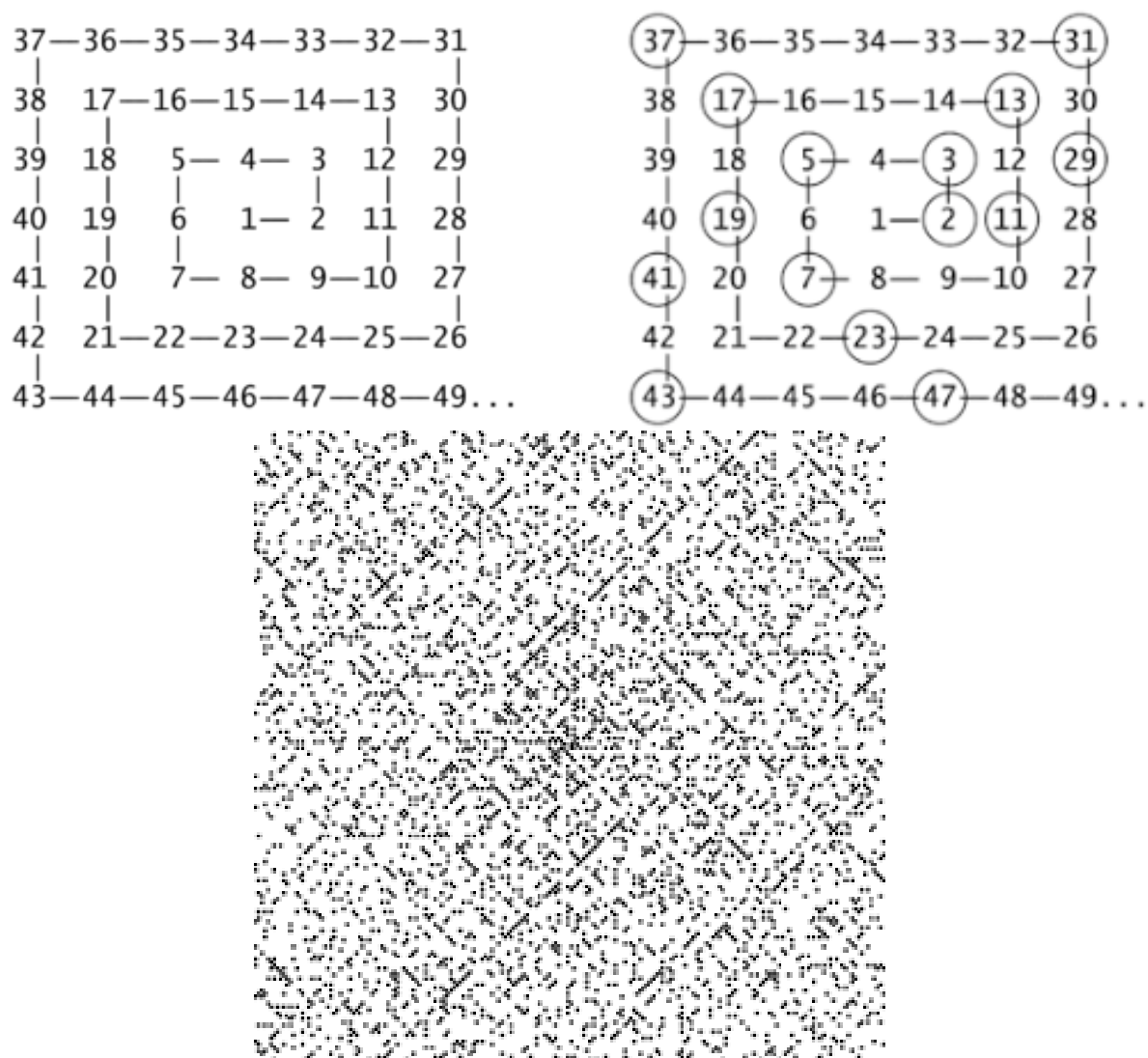


Figure 2: En haut, Spirale d'Ulam (g), marquage des nombres premiers (droite) et, en bas marquage des premiers pour un grand nombre de points

2 Calcul de π

On pourra consulter avec beaucoup de profit le livre de Jean-Paul Delahaye [1].

2.1 Fraction continue

Exercice A l'aide d'une méthode simple, programmer la fonction qui à une suite de longueur finie $[abcd \dots]$ associe la fraction

$$\alpha + \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \dots}}}}$$

Indication : on pourra partir du terme le plus profond et remonter par une formule de récurrence. Quels sont les avantages, les inconvénients ?

Théorème 1 Soit n fixé. On définit les suites p_k et q_k , pour $k = 1, \dots, n$ par

$$\begin{aligned} p_{-2} &= 0, p_{-1} = 1, p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \\ q_{-2} &= 1, q_{-1} = 0, q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \end{aligned}$$

Alors pour tout on a $\frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}$

Preuve. On procède par une récurrence d'ordre 2 sur n .

pour $n = 0$ on. a $\frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1} = a_0$;

pour $n = 1$ on. a $\frac{p_1}{q_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1} = a_0 + \frac{1}{a_1}$

Supposons à présent que $n \geq 2$ et que $\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = [a_0, a_1, \dots, a_{n-2}]$ et $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}]$.

La fraction $\frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}$ s'obtient en considérant

$$[a_0, a_1, \dots, a_{n-1}] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots \frac{1}{a_{n-2} + \frac{1}{a_{n-1}}}}}$$

et en remplaçant a_{n-1} par $a_{n-1} + \frac{1}{a_n}$. On a donc

$$\begin{aligned}
[a_0, a_1, \dots, a_n] &= [a_0, a_1, \dots, a_{n-1} + \frac{1}{a_n}] \\
&= \frac{p_{n-1} \left(a_0, a_1, \dots, a_{n-1} + \frac{1}{a_n} \right)}{q_{n-1} \left(a_0, a_1, \dots, a_{n-1} + \frac{1}{a_n} \right)} \\
&= \frac{\left(a_{n-1} + \frac{1}{a_n} \right) p_{n-2} + p_{n-3}}{\left(a_{n-1} + \frac{1}{a_n} \right) q_{n-2} + q_{n-3}} \\
&= \frac{a_{n-1} p_{n-2} + p_{n-3} + \frac{1}{a_{n-1}} p_{n-2}}{a_{n-1} q_{n-2} + q_{n-3} + \frac{1}{a_{n-1}} q_{n-2}} \\
&= \frac{p_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}} p_{n-2}}{q_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}} q_{n-2}} \\
&= \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{p_n}{q_n}
\end{aligned}$$

■

Définition 2 les fractions $\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2} \dots$ sont les réduites de $[a_0, a_1, \dots, a_n]$.

Exemple 1

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}$$

ou de manière abrégée

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, \dots]$$

On peut considérer les réduites en arrêtant le développement. On obtient ainsi des approximations rationnelles de π :

Exemple 2

Le nombre d'or $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est défini comme racine positive de l'équation

$$x^2 = x + 1 \text{ ou encore } x = 1 + \frac{1}{x}$$

On a ainsi

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\phi}} = 1 + \frac{1}{\phi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\phi}} = 1 + \frac{1}{\phi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\phi}}}$$

on a donc $\phi = [1; 1, 1, 1, 1, \dots]$

| Réduite | Valeur | $10^6 \times$ erreur |
|------------------------|--------------------------------------|----------------------|
| $\frac{22}{7}$ | 3,142857143 | -1264,489 |
| $\frac{333}{106}$ | 3,141509434 | 83,220 |
| $\frac{355}{113}$ | 3,141592920 | -0,226 |
| $\frac{103993}{33102}$ | 3,14159265301190 | 0,00057789 |
| $\frac{104348}{33215}$ | 3,14159265392142 | -0,00033163 |
| $\frac{208341}{66317}$ | 3,14159265346 | 0,00012235 |
| $\frac{208341}{66317}$ | 3,14159265361 | -0,00002915 |
| | $\pi = \mathbf{3,14159265358979...}$ | |

Table 1: Les réduites successives de π

2.2 Les suites et séries

- $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots \frac{(-1)^k}{2k+1} + \dots$: formule de Leibnitz (1682)
- $\frac{\pi}{8} = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots \frac{1}{(4k+1)(4k+3)} + \dots$: formule de Leibnitz (1682)
- $\pi = 2 \times \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \times \dots$: François Viète (1592)
- $V_n = 8 \sum_{k=0}^n \frac{1}{(4k+1)(4k+3)}, \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \pi$

La (fameuse) formule de Simon Plouffe (1995) dite aussi formule de Bailey-Borwein-Plouffe permet de calculer indépendamment en base 16 les décimales de π .

$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6}}{16^i}.$$

Elle est fascinante et se démontre pourtant très simplement.

Lemme 3

$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6}}{16^i}.$$

Preuve.

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{8i+n} \frac{1}{16^i} = \sqrt{2}^n \sum_{i=0}^{+\infty} \left[\frac{x^{n+8i}}{8i+n} \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}^n \sum_{i=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^{n-1+8i} dx = \sqrt{2}^n \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{1-x^8} dx$$

On a donc

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6}}{16^i} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{4\sqrt{2} - 8x^3 - 4\sqrt{2}x^4 - 8x^5}{1-x^8} dx$$

On effectue le changement de variables $y = \sqrt{2}x$ et on obtient

$$\begin{aligned} S &= 16 \int_0^1 \frac{y-1}{y^4-2y^3+4y-4} dy = 4 \int_0^1 \frac{2-y}{y^2-2y+2} dy + 4 \int_0^1 \frac{y}{y^2-2} dy \\ &= \int_0^1 \frac{4-4y}{y^2-2y+2} dy + 4 \int_0^1 \frac{1}{(y-1)^2+1} dy + 4 \int_0^1 \frac{y}{y^2-2} dy \\ &= [-2 \ln(y^2-2y+2) + 4 \arctan(y-1) + 2 \ln(2-y^2)]_0^1 \\ &= \pi. \end{aligned}$$

■

Considérons les suites :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$

Ces dernières peuvent converger très lentement. Pour les accélérer, on peut utiliser l'extrapolation à la limite de Richardson. Un d.l. nous donne

$$n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) = \pi + \frac{\pi^3}{3n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

et

$$2n \tan\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \pi + \frac{\pi^3}{12n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

En considérant la combinaison

$$2n \tan\left(\frac{\pi}{2n}\right) - \frac{1}{4} n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{3}{4} \pi + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

On obtient une nouvelle suite qui converge plus vite vers π . On peut itérer le processus.

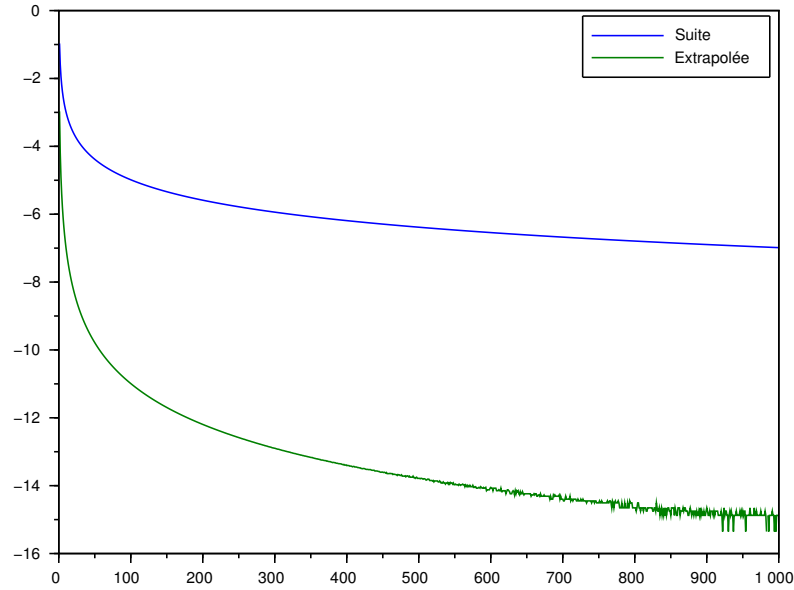


Figure 3: Accélération de Richardson pour la suite $n \tan(\frac{\pi}{n})$

Posons $t_k^{(0)} = 3.2^k \tan(\frac{\pi}{3.2^k})$ On définit alors la suite $t_k^{(j)}$ par (Huygens)

$$t_k^{(1)} = \frac{4t_{k+1}^{(0)} - t_k^{(0)}}{3} = \pi + O(\frac{1}{16^k})$$

Pour finir, on peut considérer la méthode de Newton : soit f la fonction $f(x) = \sin(x)$, pour $x \in [x - \delta, x + \delta]$ de sorte que f soit monotone (strictement décroissante en fait) dans cet intervalle, soit $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$, par exemple $\delta = .5$ On part de $x^{(0)} = \pi - \delta$ et on calcule la suite $x^{(k)}$ par la formule

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$$

On trouve les valeurs suivantes

| k | 0 | 1 | 2 | 3 |
|--------|---------------------|----------------------------|---------------------------|----------------------------|
| Valeur | 2.64159265358979312 | 3.18789514343358382 | 3.1415595355684669 | 3.14159265358980555 |
| Erreur | -0.5 | 0.04630248984379071 | -0.00003311802132622 | 0.000000000000001243 |

2.3 Les formules en Arctan

- $\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ (Gregory)
- $\frac{\pi}{4} = 4 \arctan(\frac{1}{5}) - \arctan(\frac{1}{239})$: formule de Machin (1680-1752)

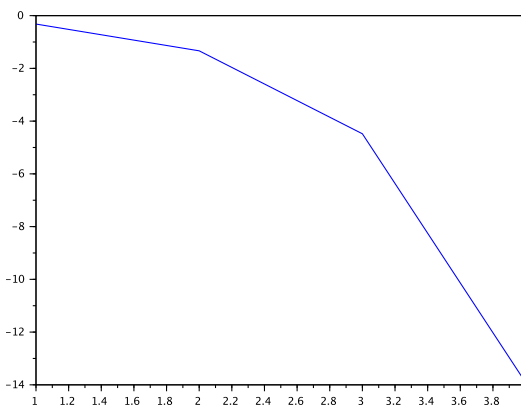


Figure 4: Méthode de Newton pour le calcul de π , $x^{(0)} = \pi - 0.5$

Pour vérifier la formule de Machin, on utilise l'identité

$$\forall x, y, xy \neq 1, \arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

ou bien que

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

On pose $t = \tan(x)$. On montre facilement que

$$\tan(2x) = \frac{2t}{1-t^2} \text{ puis que } \tan(4x) = \frac{4t(1-t^2)}{1-6t^2+t^4}$$

Ainsi $\tan(4 \arctan(\frac{1}{5})) = \frac{120}{119}$. Par ailleurs $\tan(x-y) = \frac{\tan(x) - \tan(y)}{1 + \tan(x)\tan(y)}$, donc

$$\tan(4 \arctan(\frac{1}{5}) - \arctan(\frac{1}{239})) = \frac{\frac{120}{119} - \frac{1}{239}}{1 + \frac{120}{119} \cdot \frac{1}{239}} = 1 = \tan(\frac{\pi}{4})$$

Ainsi $4 \arctan(\frac{1}{5}) - \arctan(\frac{1}{239}) = \frac{\pi}{4}$ On peut donc approcher les valeurs $\arctan(\frac{1}{5})$ et $\arctan(\frac{1}{239})$ par la série, avec convergence rapide puisque l'argument est plus petit que 1. On a en définitive

$$\pi = 4 \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \left(4 \frac{1}{5^{2k+1}} - \frac{1}{239^{2k+1}} \right) \frac{(-1)^k}{2k+1} \right).$$

2.4 Formules de Ramanujan

- $\pi = \frac{12}{\sqrt{190}} \ln((2\sqrt{2} + \sqrt{10})(3 + \sqrt{10}) + 2, 7177172010^{-19})$
- $\pi = \lim_{k \rightarrow +\infty} 2^k \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots \sqrt{2}}}}}$, k est le nombre de radicaux

2.5 Intégrales

- $\frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$
- $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$

S'agissant du calcul de l'intégrale propre $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$, on introduit la méthode, dite de Monte Carlo (géométrique). La valeur de l'intégrale, qui est de $\frac{\pi}{4}$, est la l'aire de la zone A délimitée par l'axe des x et la courbe, pour $x \in [0, 1]$. elle correspond aussi au rapport de l'aire de A et de l'aire totale du carré $[0, 1] = 1$. L'idée consiste donc à tirer au sort et de manière indépendante N couples (x, y) et à calculer le rapport du nombre de couples se trouvant dans A et du nombre total de couples (N). On utilise comme loi de probabilité la loi uniforme sur $[0, 1]$.

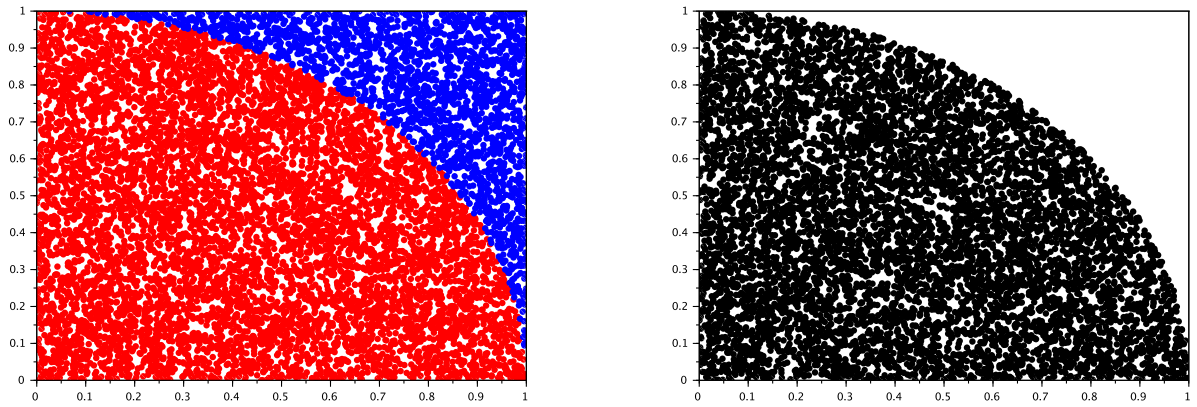


Figure 5: Monte Carlo pour le calcul de π , $N = 10^4$

La convergence est assez lente

| N | 10 | 10^2 | 10^3 | 10^4 | 10^5 | 10^6 | 10^7 | 10^8 |
|--------|----------|----------|----------|------------|------------|-----------|--------|--------|
| Valeur | 3.600000 | 3.080000 | 3.176000 | 3.12400011 | 3.15560018 | 3.1412439 | | |

Table 2: Valeurs approchées de π par la méthode de Monte Carlo, pour différentes valeurs de N

2.6 Formules récurrentes

Méthode d'Archimède

On inscrit le cercle entre deux polygones réguliers à n cotés, afin d'obtenir un encadrement de son

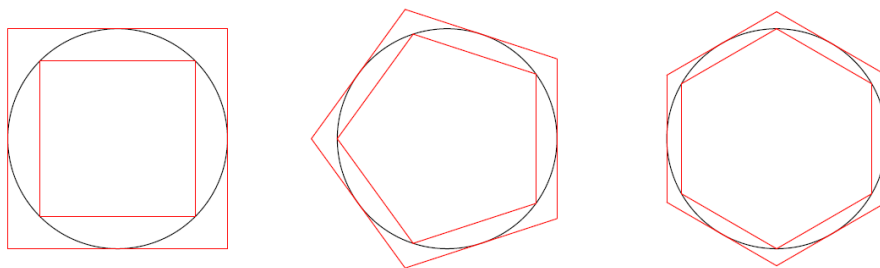


Figure 6: Polygones Archimède

pèrimètre et donc de 2π On notera p_n la circonférence du polygone inscrit, et q_n la circonférence du polygone circonscrit, donc $p_4 = 4\sqrt{2}$, $q_4 = 4$, $p_6 = 6$ et $q_6 = 4\sqrt{3}$, et on admet que pour tout $n \geq 3$,

$$\begin{aligned} q_{2n} &= \frac{2p_n q_n}{p_n + q_n} \\ p_{2n} &= \sqrt{p_n q_{2n}} \end{aligned}$$

3 Autres constantes

- La constante d'Euler $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$
- $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
- Nombre d'or et suite de Fibonacci

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1}, \quad u_0 = u_1 = 1.$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Exercice 1 *Ecrire un programme pour construire chaque suite. Illustrer leur convergence.*

4 Programmes

4.1 Eratostène

```
clear
function A=erato (n)
A=2:n;// n entier >=2.
k=1;// k compte les nombres premiers trouvés.
while A(k)^2<=A($)
ms=max(size(A));
I=find(pmodulo(A(k+1 :ms) ,A(k))==0);
// On repere les multiples de A(k) apres A(k).

A(k+I )=[]; // On a efface les multiples de A(k ).

k=k+1;
end ;
endfunction
```

```
A=erato(100)
```

4.2 factorisation

```
clear
function A=erato (n)
A=2:n;// n entier >=2.
k=1;// k compte les nombres premiers trouvés.
while A(k)^2<=A($)
ms=max(size(A));
I=find(pmodulo(A(k+1 :ms) ,A(k))==0);
// On repere les multiples de A(k) après A(k).

A(k+I )=[]; // On a efface les multiples de A(k ).

k=k+1;
end ;
endfunction
function F=factorisation (n)
Facteurs=Erato(n);
Puissances=[];

for i=1:max(size(Facteurs))
j=1;
while mod(n,Facteurs(i)^j)==0
j=j+1
end
```

```

Puissances=[Puissances , j -1];
end
K= f i n d ( P u i s s a n c e s = = 0 ) ;
Facteurs (K)=[];
Puissances (K)=[];
F=[Facteurs ; Puissances ];
endfunction

```

4.3 Spirale d'Ulam

```

function A=erato (n)
A=2:n;// n entier >=2.
k=1;// k compte les nombres premiers trouvés.
while A(k)^2<=A($)
ms=max(size(A));
I=find(pmodulo(A(k+1 :ms) ,A(k))==0);
// On repere les multiples de A(k) après A(k).

A(k+I )=[]; // On a efface les multiples de A(k ).

k=k+1;
end ;
endfunction

clf()
k=1;
orig=[0,0];
u=1;
PTS=[orig];
for l=1:300
if pmodulo(l,2)==1
for j=1:l
PTS=[PTS ; orig+u*[0,j]];
k=k+1;
end
orig=orig+u*[0,1];
for j=1:l
PTS=[PTS; orig+u*[j,0]];
k=k+1;
end
orig=orig+u*[1,0];
end
if pmodulo(l,2)==0
for j=1:l
k=k+1;
PTS=[PTS ;orig+u*[0,-j]];

```

```

end
orig=orig+u*[0,-1];
for j=1:l
k=k+1;
PTS=[PTS ;orig+u*[-j,0]];
end
orig=orig+u*[-1,0];
end
end
//plot(PTS(:,1),PTS(:,2),'r')
//Marquage des seuls points de numéro premier
I=erato(k);
plot(PTS(I,1),PTS(I,2),'dk')

```

4.4 Fraction rationnelle

Fraction réduite, méthode simple

```

clear
format('v',20)
x=[3,7,15,1,292,1,1,1,2,1,3,1,14];
//x=[1,1,1,1,1,1,1,1,1,1];
phi=(1+sqrt(5))/2;
lim=%pi;
ones(1,100)
n=max(size(x));
RESU=[x(1)];
for j=2:n
res=1/x(j);

    for i=j-1:-1:2
res=1/(x(i)+res);
    end
RESU=[RESU, x(1)+res];
end
error=log(abs(RESU-lim))/log(10);
plot(error)

```

Fraction réduite, deuxième méthode

```

clear
format('v',20)
A=[3.,7.,15.,292.,1.,1.,1.];
function [pk,qk]=Bracket2rat(A)

    num=[A(1,$)] ; den=[1];
for k=1 :size(A,'c')-1
a=num(1,$) ;
b=den(1,$) ; num=[num,A(1,max(size(A,'c'))-k)*a+b] ; den=[den,a] ;

```

```

end;
pk=num($);qk=a;
endfunction

for k=1:max(size(A))
B=A(1,1:k)
    pk,qk
=Bracket2rat(A);
pk/qk
end

```

4.5 Calcul de π

```

clear
function [app,PTI,PT0]=MonteCarlo(n)
comp=0;
PTI=[];
PT0=[];
for i=1:n
x=rand();
y=rand();
if (x^2+y^2)<=1 then
comp=comp+1;
PTI=[PTI ; [x,y]];
else
PT0=[PT0 ; [x,y]];
end
end
app=comp/n;
endfunction

```

```

for k=1:4
n=10^k;
    app,PTI,PT0
=MonteCarlo(n);
approx=4*app
end
clf();
plot(PTI(:,1),PTI(:,2),'.r')
plot(PT0(:,1),PT0(:,2),'.b')
drawnow

```

Newton

```

clear
format('v',20)
clf()

```

```

delta=.5;
x=%pi-delta;
Nmax=10;
epsilon=1.e-10;
k=0;
res=10;
iter=[x];
erreur=[x-%pi];
resi=[abs(sin(x))];
while k <Nmax  res >epsilon
x=x-sin(x)/cos(x);
res=abs(sin(x));
iter=[iter,x];
resi=[resi, res];
erreur=[erreur,x-%pi];
k=k+1;
end
plot(log(resi)/log(10))
iter
erreur

```

References

- [1] J.-P. Delahaye, Le fascinant nombre Pi , Belin- Pour la Science, 1997
- [2] J.-P. Delahaye, Merveilleux nombres premiers , Belin- Pour la Science, 2000