Mathématiques Financières

2$^{\text{ème}}$ partie – Marchés financiers en temps discret
& instruments financiers classiques

Université de Picardie Jules Verne – Amiens
Par Jean-Paul FELIX
Cours du vendredi 12 février 2010

Définition :

Une **action** est un titre de propriété sur une entreprise qui donne droit entre autre au versement d'une partie des bénéfices futurs ou dividendes

Indices

Libellé	Dernier	Ouverture	Veille	Var.%	+/o/-
CAC 40	5 587,82	5 584,01	5 520,02	+1,23%	38 / 0 / 2
CAC IT20	4 932,14	4 927,76	4 885,92	+0,95%	19 / 0 / 1
Euro Stoxx 50	4 235,38	4 215,92	4 193,58	+1,00%	47 / 2 / 0
Dow Jones 30	13 289,29	13 043,07	13 041,85	+1,90%	30 / 0 / 0
Nasdaq Composite	2 563,16	2 518,82	2 500,64	+2,50%	2166 / 107 / 639
Nikkei 225	16 153,82	16 182,09	16 012,83	+0,88%	53 / 39 / 102

Palmarès CAC40

Libellé	Dernier	Var.%
CREDIT AGRICOLE	27,94	+3,90%
BOUYGUES	56,93	+3,42%
CARREFOUR	53,60	+2,80%
Libellé	**Dernier**	**Var.%**
ESSILOR INTERNA...	44,65	-1,63%

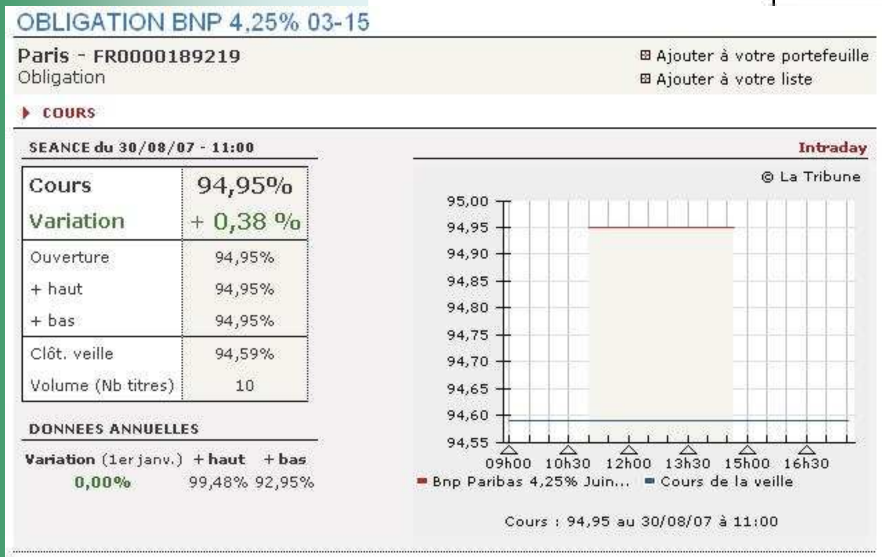
Palmarès SRD

Libellé	Dernier	Var.%
COMPLETEL	35,23	+13,54%
NATIXIS	16,00	+8,40%
SGAM ETF LEVERA...	21,02	+4,16%
Libellé	**Dernier**	**Var.%**
TRADER CLASSIFI...	0,13	-7,14%
SGAM ETF XBEAR ...	55,73	-3,15%
ESSILOR INTERNA...	44,65	-1,63%

Définition :

Une **obligation** est un titre de dette émis par une institution ou une entreprise

>> Aussi appelé, titre de créance représentatif d'un emprunt.

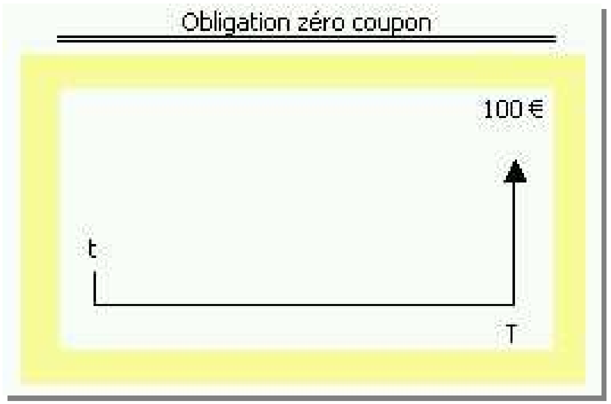


Les obligations zéro coupon (ou « strips »)

Définition :
Une obligation ***zéro coupon*** est un actif qui verse un flux fixe à une date future T.

On peut résumer cet actif par le schéma suivant, où 100 est appelé nominal ou notionnel.

Le prix en t de cet actif est formalisé par 100 * B(t,T), ou plus généralement N * B(t,T), avec N le notionnel de l'obligation zéro coupon, et B(t,T) le prix zéro coupon.



Les obligations zéro coupon (ou « strips »)

- Introduisons la notion corollaire de **taux zéro coupon** R(t,T) qui est le taux de rendement actuariel du zéro coupon
- Il s'agit du taux auquel les 100 € sont empruntés (ou prêtés)
- La formule qui le définit est la suivante : $B(t,T) = \frac{1}{(1+R(t,T))^{(T-t)}}$
- Si on dispose des coefficients d'actualisation, on dispose de la courbe des taux zéro coupon, et inversement

Les obligations zéro coupon (ou « strips »)

- Exercice : Considérons 3 obligations zéro coupon de caractéristiques

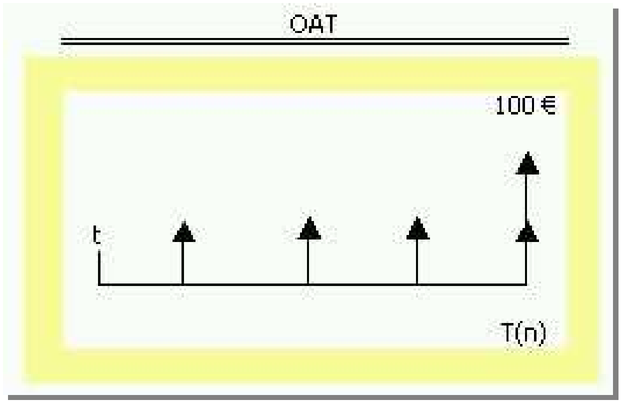
Obligation	Maturité	Prix
Obligation 1	1 an	96.43
Obligation 2	2 ans	92.47
Obligation 3	3 ans	87.97

- Chaque obligation délivre 100 € à maturité
- En déduire la courbe des taux zéro coupon

Les OAT (Obligations Assimilables du Trésor)

- Lorsque l'Etat émet à t une obligation à taux fixe S :
  - il emprunte un nominal N, et s'engage en contrepartie à verser, généralement annuellement, un coupon que l'on notera C tel que C = S * N, qui est un pourcentage fixe du nominal, et à rembourser le capital à la date d'échéance T_n

- Le schéma des flux est le suivant :



Les OAT (Obligations Assimilables du Trésor)

- Exemple simple
  - OAT 4.75% 25/04/2035
  - Détention unitaire de 1 € (valeur nominale)
  - Contrat par lequel l'état français s'engage à verser au détenteur dudit contrat :
    - Chaque année le 25/04, 0.0475 €, entre maintenant et le 25/04/2035 inclus
    - 1 € le 25/04/2035 (remboursement du nominal)
  - La valeur actuelle est le prix auquel se négocie l'obligation aujourd'hui

Les OAT (Obligations Assimilables du Trésor)

- Nous pouvons considérer toute OAT comme une combinaison linéaire d'obligation zéro coupon
  - Ainsi, à chaque date τ supérieure ou égale à t, il est possible d'évaluer l'obligation en considérant chacun des flux futurs comme celui d'une obligation zéro coupon.

- Nous avons alors $$P = \sum_{T_i > \tau} \left(C * B(\tau, T_i) \right) + N * B(\tau, T_n)$$

- Soit $$P = N * \left[\sum \left(S * B(\tau, T_i) \right) + B(\tau, T_n) \right]$$

Le marché des OAT est, en France, un marché liquide : il est donc possible à tout moment, en interrogeant le marché, de connaître le prix des obligations existantes

Calcul d'un taux forward

- Un taux forward est un taux portant sur une période future. Il se déduit des taux du marché.
- Par exemple le taux du 6 mois dans 3 mois se déduit du taux 3 mois et du taux du 9 mois. En simplifiant, il devra respecter l'égalité suivante :

- Intérêts (4.5%) de l'opération à 3 mois

  +

  Intérêts (5%) de l'opération à 6 mois dans 3 mois

  =

  Intérêts (T_f) de l'opération à 9 mois

$$\left(1+\frac{4{,}50\% \times 91}{360}\right) \times \left(1+\frac{tf \times 183}{360}\right) = \left(1+\frac{5{,}00\% \times 274}{360}\right)$$

Calcul d’un taux forward

- Pour plus de simplicité, nous avons raisonné sur un **taux moyen**
  - Dans la réalité, il faut tenir compte du spread et du sens des différentes opérations
- Par exemple, un **emprunt de 6 mois dans 3 mois** se construit avec un **emprunt de 9 mois** et un **prêt de 3 mois**
- En résumé, on obtient la formule générale suivante :

  - Tc = taux de la période courte
  - Tl = taux de la période longue
  - Njc = nombre de jours de la période courte
  - Njl = nombre de jours de la période longue
  - Base = base de calcul
  - Tf est le **taux forward** portant sur Njf jours (Njl - Njc)

$$Tf = \left[\frac{\left(1 + \frac{Njl \times Tl}{Base}\right)}{\left(1 + \frac{Njc \times Tc}{Base}\right)} - 1 \right] \times \frac{Base}{(Njl - Njc)}$$

Définition :
Un **taux de change** est le prix d'une devise exprimé en une autre devise

Cours croisés au comptant

Devises	EURO	USD	JPY (100)	GBP	CHF
EURO (EUR)	-	0.8100	0.7336	1.4881	0.6518
E.U. (USD)	1.2346	-	0.9057	1.8372	0.8047
Japon (JPY)	136.31	110.41	-		
GB (GBP)	0.6720	0.5443	0.4930		
Suisse (CHF)	1.5342	1.2427	1.1255		

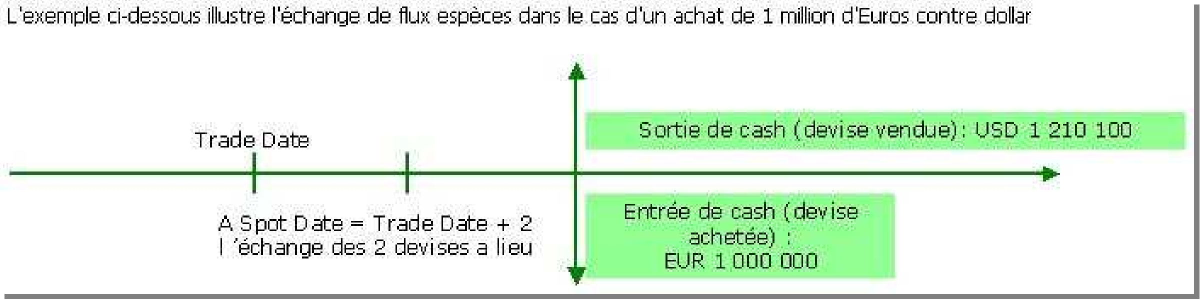
Ex: 1 EUR = 1.2346 USD

Les contrats à terme de change (ou futures)

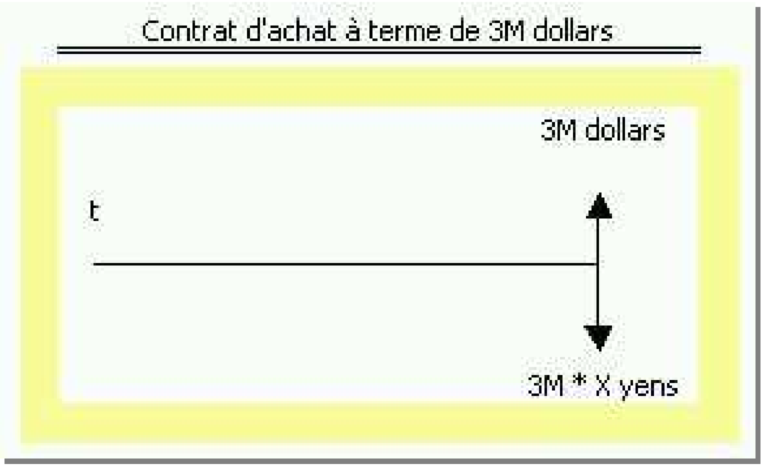
- Sur le marché des changes, peuvent être aussi considérés comme actifs de base, les contrats à terme de change. Il s'agit pour un intervenant d'acheter, pour une date future déterminée dans le contrat, une certaine quantité de devise à un prix préfixé.

- **Exemple simplifié**

  Supposons qu'un industriel japonais ait acheté des biens de production à un industriel américain, et ce pour un montant de 3 millions de dollars. Cet industriel japonais doit s'acquitter à la date T d'une facture en dollars, d'un montant de 3 millions.



- Nous sommes en t et notre acheteur japonais, pour ne pas subir de risque de dépréciation éventuelle du yen (hausse du prix du dollar en yen, le dollar/yen passant, pour fixer les idées, de 132,5 à 140) décide de rentrer dans un contrat d'achat à terme de 3 millions de dollar



- Pour une valeur X particulière appelée **taux de change à terme**, la transaction est à coût nul
  - i.e. elle ne génère pas en t de paiement d'une contrepartie vers l'autre en t. Nous noterons par la suite, cette valeur X(t,T)

- Une fois le contrat en place, notre acheteur japonais a l'assurance de pouvoir acheter à la date T, les 3 millions de dollars (nécessaires au règlement de sa facture) pour une somme en Yen, qui est fixée en t, et ce quelle que soit l'évolution de la parité dollar/yen.

- **Principe d'Absence d'Opportunité d'Arbitrage appliqué à la valorisation des contrats à terme de change**

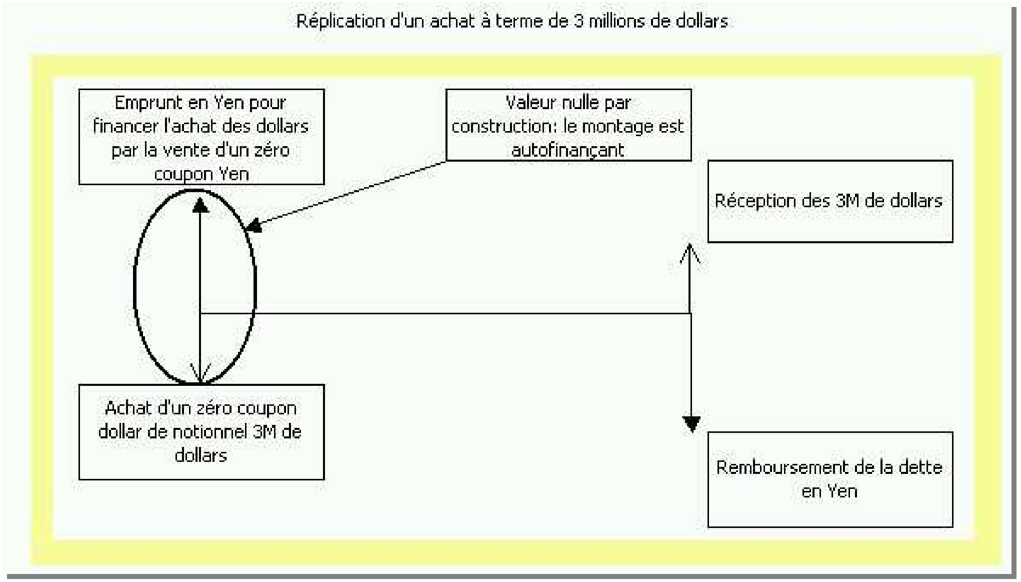
Quel est la valeur de X(t,T) ?

Pour répondre à cette question, nous procéderons en deux étapes :

1. Mise en place d'une stratégie « réplicante » à base d'actifs de base : change « spot »* et zéro coupons,
2. puis mise en œuvre du principe d'AO

(*) Transaction « spot » : achat dans une devise, vente dans une autre devise

1. Pour garantir à l'acheteur japonais le versement de 3 millions de dollars au taux de change X(t,T), la banque qui a proposé l'actif met en place le montage suivant
   - Elle achète dès aujourd'hui sur le marché US un zéro coupon de nominal 3 millions et d'échéance T. En T elle recevra les 3 millions de dollars



- Un tel zéro coupon lui coûte en t, « $B^{US}(t,T)$ * 3M » dollars

- Pour financer un tel achat, elle s'endette en Yen à hauteur de « $B^{US}(t,T)$ * 3M * X(t) » qu'elle devra rembourser en T pour un montant de « $B^{US}(t,T)$ * 3M * X(t) / $B^{JPY}(t,T)$ »

- Ce montage permet à la banque de mettre à disposition de son client, les 3 millions de dollars à la date T

- En contrepartie de ces 3 millions de dollars, la banque demandera à son client de lui verser en yen, toujours à la date T, la somme de

$$\frac{B^{US}(t,T) \; * \; 3M \; * \; X(t)}{B^{JPY}(t,T)}$$

- Nous avons donc, dans le cadre de cette stratégie de réplication :

Les 3 M€ au taux de change à terme souhaité

$$\boxed{3M * X(t,T)} = \boxed{3M * \frac{X(t) * B^{US}(t,T)}{B^{JPY}(t,T)}}$$

Le prix à payer par la contrepartie pour être couvert

- Nous obtenons alors : $X(t,T) = \dfrac{X(t) * B^{US}(t,T)}{B^{JPY}(t,T)}$

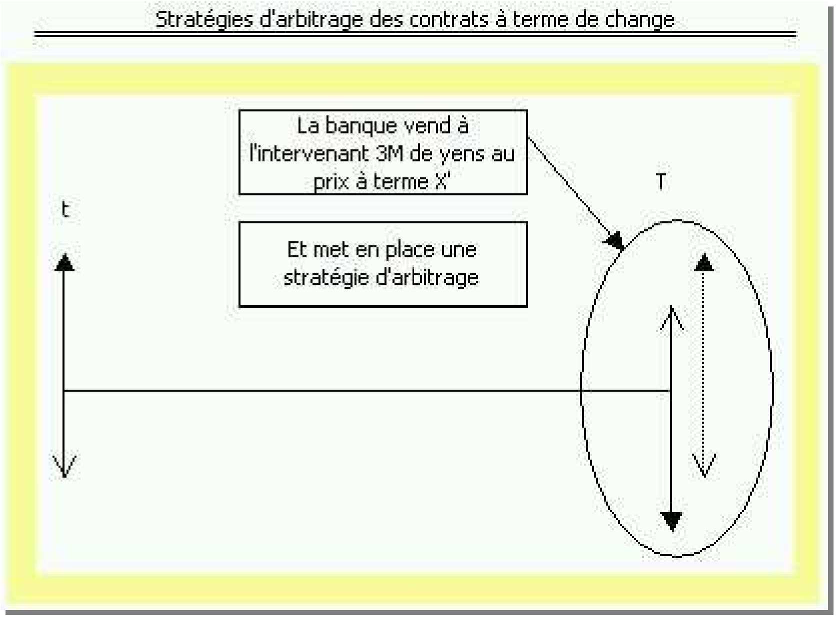
- Le taux de change à terme est la valeur du taux de change aujourd'hui capitalisé sur T-t au taux d'intérêt JPY et actualisé au taux d'intérêt US sur T-t

2. L'évaluation que nous allons faire ici de X(t,T) repose sur l'hypothèse que le marché des contrats à terme de change est bien arbitré, i.e. qu'il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage

   Prouvons donc que cette valeur obtenue par réplication est la seule qui convienne sous l'hypothèse d'AOA

   i.e. que si un autre intervenant proposait un contrat à terme avec taux de change à terme différent, on aurait une opportunité d'arbitrage

- Supposons que la banque propose un contrat à terme à valeur X' > X(t,T)
- Alors il est possible d'effectuer le montage illustré sur le schéma ci-dessous



Ce montage est une combinaison du montage précédemment décrit et d'un contrat de vente à terme passé avec l'intervenant au taux X' (flux en pointillé).

- Par construction, l'investissement en t est nul. En revanche, il génère en T un flux strictement positif en Yen de :

$$3M * X' - 3M * \frac{X(t) * B^{US}(t,T)}{B^{JPY}(t,T)} = 3M * (X' - X(t,T)) > 0$$

- Ce qui est incompatible avec l'absence d'opportunité d'arbitrage

- Inversement, nous montrons que si un intervenant propose un contrat à terme à X' < X(t,T), il est possible de l'arbitrer
  - i.e. de monter une opération financière à coût nul qui rapporte une somme positive avec une probabilité non nulle, en l'occurrence dans ce cas particulier à coup sûr.

- Les **contrats à terme** existe sur d'autres types de sous-jacent et servent dans un certain nombre de cas à spéculer, comme l'exemple suivant le présente.

  - **Exemple de spéculation avec contrat à terme :**

    Soit un individu avec 4 500 € et voulant spéculer sur l'or. Le prix spot de l'or au 1er avril est de 450 € l'once d'or.

    Spéculation sans contrat à terme :

    Le 1er avril : achat de 10 onces d'or à 450 € l'once : 4 500 €,

    Le 1er mars : vente de 10 onces d'or à 455 € l'once : 4 550 €.

    Le profit est de 50 €.

    Spéculation avec contrat à terme :

    Le 1er avril : achat de 2 contrats *futures* pour 100 onces d'or avec prix *futures* à 450 € l'once et échéance 1er mars,

    Le 1er mars : fermeture de la position *futures*, si prix spot au 1er mars est à 455 € l'once.

    Le profit sera de 2 * (455 - 450) * 100 = 1 000 €.

Remarques : gains sur contrats à terme hors frais et prix des contrats près.

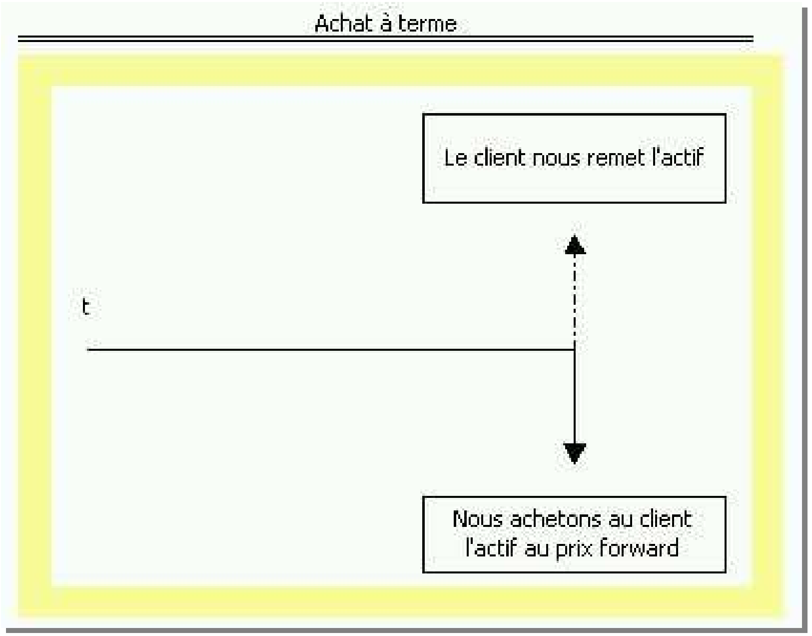
- Nous sommes en t et considérons un actif S (une obligation ou une action) dont nous voulons déterminer le prix à terme en T>t
- Pour simplifier, considérons que cet actif ne verse pas de coupon ou de dividendes entre t et T

- **Réplication**

  Considérons que nous sommes une banque et qu'un client s'adresse à nous pour une vente à terme

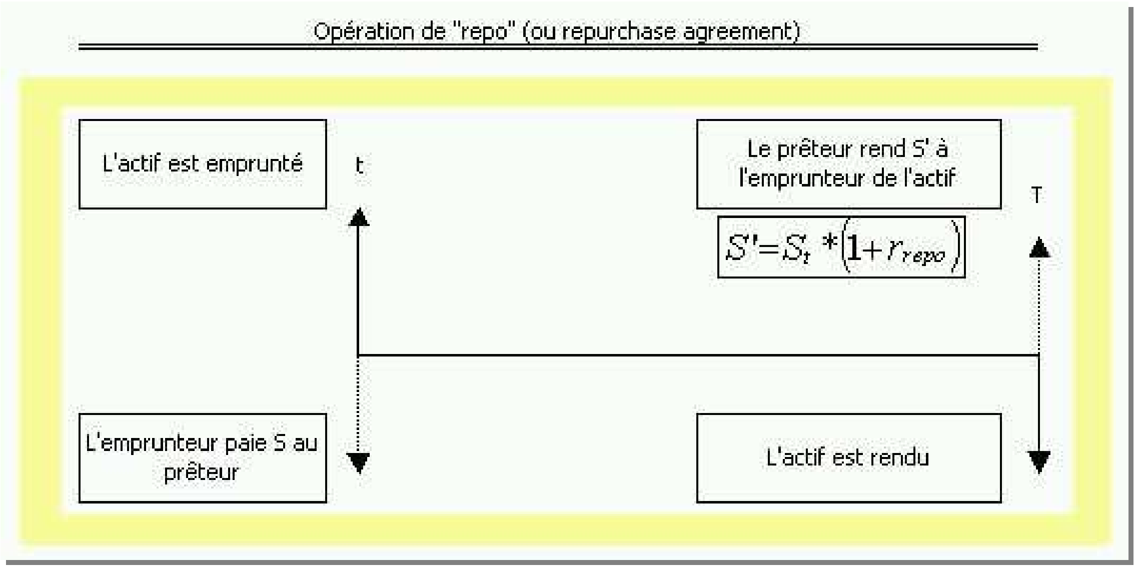
  Il nous faut donc monter une stratégie : nous sommes la banque et de notre point de vue, nous effectuons un achat à terme de l'actif S

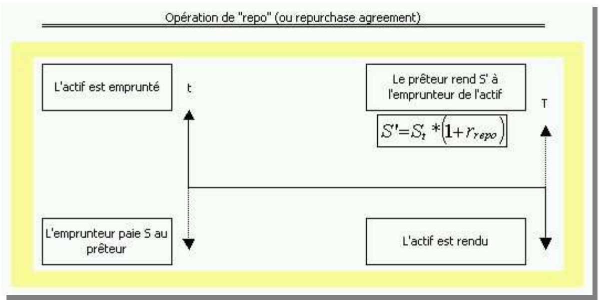
- Pour répliquer de tels flux, la banque va mettre en place une stratégie à base d'actifs de base qui sont ici :
  - l'actif « spot », et
  - une opération de « repurchase agreement » dite aussi opération « repo ».



« Repurchase Agreement »

Une opération de « repo » consiste en l'achat (ou la vente) d'un actif assorti(e) de la revente (resp. du rachat) de cet actif.





« Repurchase Agreement »

Il s'agit en substance de l'habillage, sous la forme juridique, de deux transactions au comptant en sens inverse et décalées dans le temps

1ère transaction : une cession suivie d'un rachat au terme de l'opération

2ème transaction : refinancement d'actifs financiers à un taux d'intérêt négocié entre les deux parties contractantes (le prêteur des titres et celui du numéraire)

Réplication, et conséquences de l'AOA

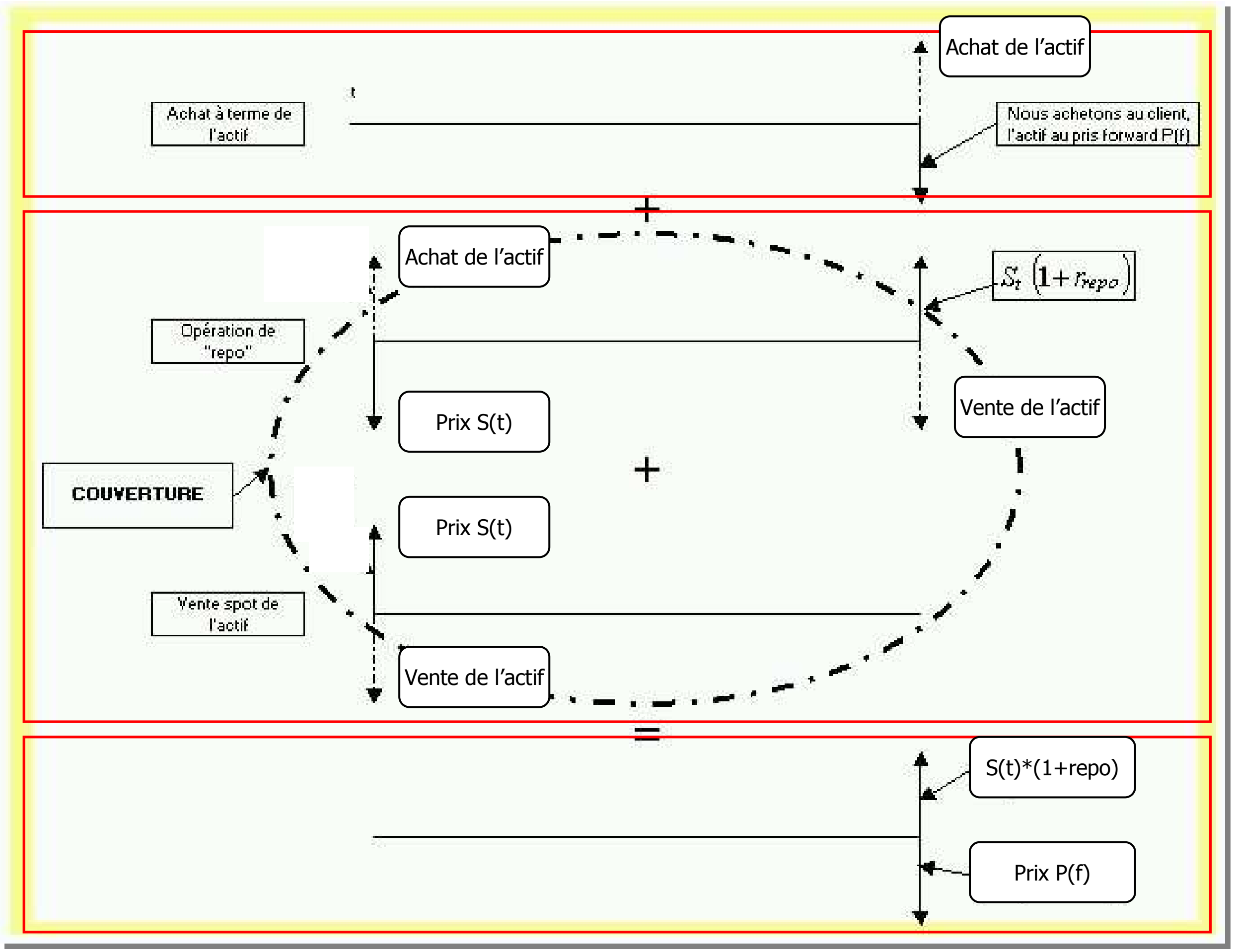
- Nous rentrons dans l'opération d'achat à terme
- Nous nous couvrons par une « repo » et par une vente « spot »
  - « spot » signifie que l'on exécute la vente immédiatement, i.e. en t
- Le montage, sa couverture et la résultante sont représentés ci-après

Prix « forward » d'un actif (6/7)

Souhait du client

Montage de la banque

Résultat de l'opération



- L'opération globale qu'effectue la banque est une opération qui en t ne lui génère aucun flux, donc aucun investissement et qui en T, lui rapporte :

$$S_t * \left(1 + r_{repo}\right) - P^f$$

- Sous AOA, une opération à investissement nul (*) ne peut que rapporter 0, On a donc :

$$P^f = S_t * \left(1 + r_{repo}\right)$$

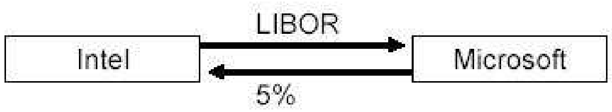
(*) Hors frottement, hors frais divers, hors frais d'intermédiaires

Définition :

Les **swaps** sont des contrats, caractérisés par des échanges de flux d'intérêt, entre deux contreparties, sans qu'il n'y ait d'échange de flux de capital

- Calculés à partir d'un montant principal, les échanges de flux d'intérêt ont lieu à des dates fixées lors de la conclusion du contrat de swap

- Dans notre présentation des swaps, nous allons considérer dans un premier temps, les swaps standards (dits « **plain vanilla** »)
- Puis, nous ferons une présentation succincte des swaps non-standards à la fin de la séance



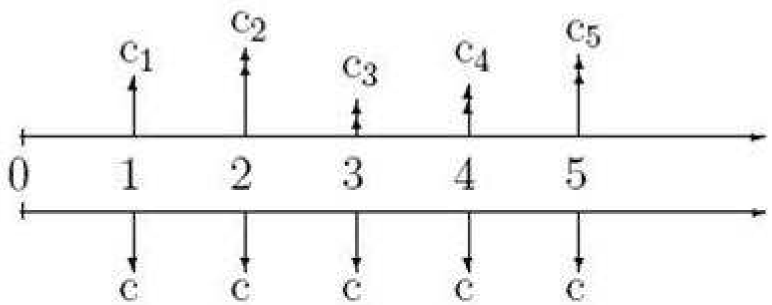
La dynamique du marché des swaps est double

- Pour une banque : il n'y a pas d'échange de capital
  - Dans le cas d'un swap de taux d'intérêt, il s'agit d'un prêt débarrassé de l'essentiel de son risque de crédit !
- Pour une entreprise : modification des caractéristiques des actifs financiers

Montant Principal	Il s'agit du montant qui permettra de calculer les flux d'intérêts entre les deux parties. Ce montant est identique pour les deux jambes.
Base	Elle renseigne sur la durée entre deux dates et sur le nombre de jours considéré dans une année. La base la plus souvent utilisée est la base « Exact/360 » qui prend en compte le nombre exact de jours calendaires entre 2 dates et 360 jours pour une année.
Devise	Elle correspond à la devise dans laquelle le swap est libellé.
Echéance	Il s'agit de la date à laquelle le swap n'existe plus. A cette date, les deux parties ont fini d'échanger tous les flux du swap.
Echéancier du swap	Il correspond à l'échéancier des flux échangés entre les deux parties. Les dates auxquelles les flux du swap s'échangent sont déterminées lors de la conclusion du contrat.
Taux variable	Le taux variable, généralement payé en fin de période, est connu en début de période. Ainsi, le premier paiement de la patte variable est connu au moment de la conclusion du swap.
Taux fixe	Le « market-maker » calcule la valeur du taux fixe telle que la valeur du swap est égale à zéro (i.e. telle que la valeur de la patte fixe égale la valeur de la patte variable). Ce taux fixe est couramment appelé **taux de swap**.

- Exemple d'échéancier de swap

L'échéancier des flux d'un swap à paiement annuel et de maturité 5 ans est



Les flèches à double tete representent les flux connus seulement a la date du précédent paiement (c_1 est connu en 0, c_2 est connu à la date 1 et ainsi de suite...)

La méthode dite des zéro-coupon

- Le prix du swap s'écrit comme la différence entre les coupons fixes (C_i) et les coupons variables (F_j)

$$SWAP_t = N.\left\{\sum_{i=1}^{n} C_i - \sum_{j=1}^{m} F_j\right\}$$

- Avec $C_i = C * B(t, T_{ki}) * \frac{T_{ki} - T_{ki-1}}{360}$ $\qquad F_j = \boxed{F(t, V_{j-1})} * B(t, T_j) * \frac{T_j - T_{j-1}}{360}$

Taux forward entre T_{j-1} et T_j

- Nous avons aussi

La méthode dite des zéro-coupon

- Lorsque la maturité du taux variable est identique à la durée entre deux paiements de la patte variable, le prix du taux variable s'exprime de la façon suivante :

$$F(t,V_{j-1})=\left(\frac{B(t,T_{j-1})}{B(t,T_j)}-1\right).\frac{360}{T_j-T_{j-1}}$$

- L'équation du prix du swap se simplifie alors en :

$$SWAP_t=N.\left\{\sum_{i=1}^{n}C.\left(\frac{T_{ki}-T_{ki-1}}{360}\right).B(t,T_{ki})-\sum_{j=1}^{m}\left(B(t,T_{j-1})-B(t,T_j)\right)\right\}$$

  – soit $SWAP_t=N.\left\{\sum_{i=1}^{n}C.\left(\frac{T_{ki}-T_{ki-1}}{360}\right).B(t,T_{ki})-\left(1-B(t,T_m)\right)\right\}$

La méthode dite des zéro-coupon (suite)

- En général $\left(\frac{T_{ki}-T_{ki-1}}{360}\right)=1$, si bien que la formule d'évaluation du swap :

$$SWAP_t = N.\left\{\sum_{i=1}^{n} C.B(t,T_{ki}) - \left(1-B(t,T_m)\right)\right\}$$

$$\Downarrow$$

$$SWAP_t = N.\underbrace{\left\{\sum_{i=1}^{n} C.B(t,T_{ki}) + B(t,T_m)\right\}}_{\text{OTF}} - N$$

Retour sur le taux de swap

- La valeur d'un swap standard de montant nominal N est égale à celle:
  - d'une obligation à taux fixe de maturité identique à celle du swap et de même montant nominal que le swap
  - moins le montant nominal du swap
- A une date t donnée, le taux fixe C est déterminé de telle façon que la valeur du swap soit égale à 0
- Ce taux fixe est appelé **taux de swap**
- C'est ainsi que sont cotés les swaps

Présentation de Swaps non-standards

Swaps à montant principal non fixe

- les swaps amortissables sont des swaps dont le montant principal décroît au cours du temps
- les « **accrediting swaps** » sont des swaps dont le montant croît au cours du temps
- les « **roller coaster swaps** » sont des swaps dont le montant nominal peut croître et décroître d’une période à une autre.

- **« Basis Swaps »**
  - Un « basis swap » est un swap d'échange de deux pattes variables
  - Les taux variables échangés peuvent être de deux marchés de taux différents avec éventuellement des maturités différentes, ou du même marché mais avec différentes maturités
- **Swaps zéro-coupon**
  - Le swap zéro-coupon est un swap d'échange d'une patte fixe ou variable délivrant périodiquement des flux contre une patte fixe ou variable délivrant un seul flux