Université de Picardie Jules Verne
Master 2 AAM
Calcul Scientifique
2019-2020

1 Inverses approchées creuses

Exercice 1 (SPAI)
On cherche à calculer l'inverse d'une matrice A comme solution du problème de minimisation

$$\operatorname*{Inf}_{X\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \|AX - Id\|_F^2$$

Ceci équivaut à minimiser

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n} A_{ik}X_{kj} - \delta_{i,j})^2$$

ou bien

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n} A_{ik}X_{kj} - \delta_{i,j})^2.$$

En notant w_j la solution du système linéaire $Aw_j = e_j$ (w_j est donc la j-ème colonne de A^{-1}), ce problème revient à minimiser

$$\sum_{j=1}^{n} \|Aw_j - e_j\|_2^2,$$

chaque problème $\operatorname*{Inf}_{w_j\in\mathbb{R}^n} \|Aw_j - e_j\|_2^2$ étant indépendant. La recherche d'une approximation creuse de A^{-1} se résume ainsi ̀celle d'une solution creuse de chaque système $Aw_j = e_j$

1. Programmer la méthode.

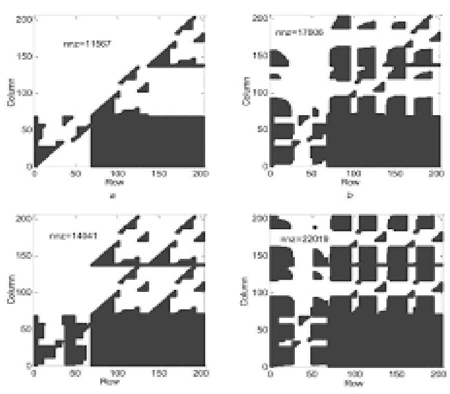

Figure 1: Spy des matrices obtenues aprquelques itérations de SPAI

2 Avec LU par blocs (complément de Schur)

2.1 Factorisation LU et compléments de Schur

On écrit

$$\begin{pmatrix} B & F \\ E & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

se réécrit comme

$$\begin{pmatrix} L & 0 \\ EU^{-1} & L \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} U & L^{-1}F \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

où $S = C - EB^{-1}F$ est le complément de Schur et $B = LU$

2.2 Applications

- Factorisation incomplète par approximations recursives du complément de Schur (ARMS)
- Résolution directe ($\neq$ Uzawa) des problèmes de point selle (ex, Stokes)
- Interprétation matricielle des préconditionneurs hiérarchiques

2.2.1 Algebraic Recursive Multilevel Solver (ARMS)

Idée (Saad- Shumochel 2001)

1. Effectuer cette décomposition récursivement sur S
2. Simplifier en prenant L et U appochées (creuses)
3. Approcher S par une matrice creuse et recommencer.

L' Algorithme est le suivant :

$$A_k = \begin{pmatrix} B_k & F_k \\ E_k & C_k \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} L_k & 0 \\ E_k U_k^{-1} & I \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & A_{k+1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} U_k & L_k^{-1} F_k \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

Ces préconditionneurs sont très robustes pour des problèmes de grandes échelles (plusieurs dizaines de millions d'inconnues)

Exercice 2 (ARMS)
Programmer la méthode pour 2 niveaux. On rangera dans le premier bloc les inconnues d'indices pairs.

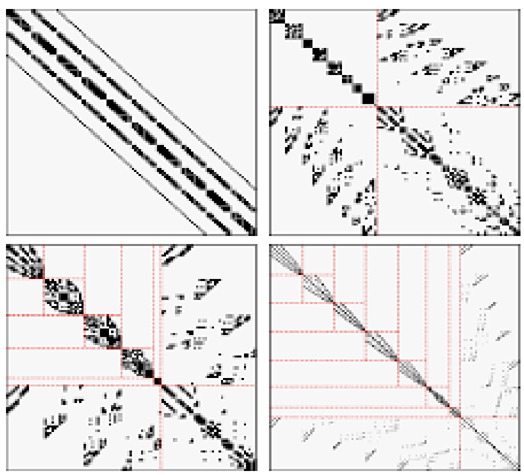

Figure 2: Spy des matrices obtenus aprquelques itérations de ARMS. LA matrice originale est celle de $-\Delta$ par différences finies en dimension 3, de taille $10 \times 10 \times 10$

2.2.2 Une interpretation des préconditionneurs hiérarchiques

Soient deux triangulations régulières $\mathcal{T}_h$ et $\mathcal{T}_{2h}$ et

$V_{2h} = \{v_{2h} \in C(\bar{\Omega})/v_K \in P_1, \forall K \in \mathcal{T}_h, v_{2h}|_{\partial\Omega} = 0\} \subset V_h = \{v_h \in C(\bar{\Omega})/v_K \in P_1, \forall K \in \mathcal{T}_h, v_h|_{\partial\Omega} = 0\}$.

On distingue les coordonnés de l'espace grossier V_{2h} (c : *coarse*) de celles de celui complémentaire $W_h = V_h \setminus V_{2h}$. On a $V_h = V_{2h} \bigoplus W_h$ (f : *fine*). Ainsi le problème variationnel approché

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_h, \text{solution de} \\ a(u_h, v_h) = (f, v_h), \forall v_h \in V_h \end{array}\right.$$

se réécrit sous forme de problème couplé

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } u_h = y_h + z_h \in V_{2h} \times W_h, \text{solution de} \\ a(y_h, \phi_{2h}) + a(z_h, \phi_{2h}) = (f, \phi_{2h}), \forall \phi_{2h} \in V_{2h}, \\ a(z_h, \psi_h) + a(z_h, \psi_h) = (f, \psi_h), \forall \psi_h \in W_h, \end{array}\right.$$

La matrice de rigidité peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{pmatrix} A_{cc} & A_{cf} \\ A_{fc} & A_{ff} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_c \\ \vec{x}_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{b}_c \\ \vec{b}_f \end{pmatrix}. \tag{1}$$

$$A = \begin{pmatrix} I & 0 \\ A_{fc}A_{cc}^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{cc} & 0 \\ 0 & \hat{S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A_{cc}^{-1}A_{cf} \\ 0 & I \end{pmatrix}, \tag{2}$$

Avec $\hat{S} = A_{ff} - A_{fc}A_{cc}^{-1}A_{cf}$

On considère une approximation creuse R de $A_{fc}A_{cc}^{-1}$, soit $\mathcal{S} = \begin{pmatrix} I & -R^T \\ 0 & I \end{pmatrix}$.

$$\text{On a } \mathcal{S}^T A \mathcal{S} \simeq \begin{pmatrix} A_{cc} & 0 \\ 0 & \hat{S} \end{pmatrix} \text{ et on recommence avec } A_{cc}$$

2.2.3 Pb de Stokes

On considère l'EDP

$$\left\{\begin{array}{ll} -\frac{1}{Re}\Delta u + \nabla p = f & \text{dans } \Omega \\ \nabla . u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega & \end{array}\right.$$

Après discrétisation stable (cond inf-sup), on obtient le système

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}$$

La méthode d'Uzawa a été abondemment utilisée. Depuis, Whaten, Sylvester, Loghin , ... ont bâti des solveurs basés sur une décomposition LU incomplète de la matrice du système couplé.