Université de Picardie Jules Verne
Master 2 AAM
Calcul Scientifique
2018-2019

Préconditionnement et spectre

1 Rappel de quelques commandes Scilab utiles ici

- Valeurs propres de A : `spec(A)`
- Vecteurs et valeurs propres de A : `[R,diagevals]=spec(A)`, `R` contient les vecteurs propres et `diagevals` la matrice diagonale associée
- Génération aléatoire d'entiers (10 ici) dans un intervalle donné ($[1, 100]$ ici): `grand(10,1,"uin",1,100)`

2 Gradient conjugué et choix particuliers du second membre

Exercice 1
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice symétrique et définie positive (SDP) ; dans les applications on prendra successivement pour A

- La matrice tridiagonale `Axx=2*eye(N,N)-diag(ones(N-1,1),1)-diag(ones(N-1,1),-1);`
- La matrice pentadiagonale `Id=eye(N,N); A=kron(Id,Axx)+kron(Axx,Id);` ou bien `A=Id.*.Axx+Axx.*.*Id;`
- Une matrice SDP aléatoire

1. Représenter graphiquement les valeurs propres pour chacune des matrices ci-dessus.
2. Faire tourner le GC avec `b=1-2*rand(n,1)`. Répétez l'expérience. Que constatez-vous ?
3. Choisir au hasard m vecteurs propres de A parmi n et construire avec une combinaison linéaire b; on prendra des coefficients suivant une loi uniiforme dans $[-1, 1]$
4. En partant de $x_0 = 0$, faire tourner le Gradient conjugué pour différentes valeurs de m. Qu'observez-vous ?

3 Repésentation des spectres des Matrices préconditionnées

3.1 Préconditionneur direct

Exercice 2 (Avec ILU(0))

1. Faire tourner le programme en Annexe. Que constatez-vous ?

2. Compléter le programme en annexe en représentant le spectre de $(R^T R)^{-1}A$, où R est le facteur de Cholesky de A obtenu par `chol` ; on fera attention à travailler avec A pleine.

3. Que remarquez-vous ?

3.2 Préconditionneur inverse

Exercice 3 (Méthode deu gradient)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, SDP, on considère la fonctionnelle $\Phi : \mathcal{M}_n\mathbb{R} \ \to \mathbb{R}^+$ définie par

$$\Phi(X) = \frac{1}{2}\|Id - AX\|^2_{F,M}$$

où $\|X\|^2_{F,M} =< MX, X >_F = trace(X^T MX)$ avec M matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ SDP.

1. Pour $M = A^{-1}$ exprimer $\Phi(X)$. Que vaut argmin$(\Phi)(X)$?

2. Calculer $\nabla\Phi(X)$.

3. On cherche à approcher A^{-1} en calculant quelques itérées $X^{(k)}$ de la méthode du gradient appliquées à Φ

   (a) Ecrire la méthode et montrer que
   $$R^{(k+1)} = (Id - \alpha_k A)R^{(k)}$$
   où $R^{(k)} = Id - AX^{(k)}$.

   (b) Proposer une valeur optimale pour α_k

   (c) Programmer la méthode et effectuer quelques itérations. On notera $X^{(*)}$ la dernière itération produite; on pourra partir de $X^{(0)} = \dfrac{A}{\|A\|^2_F}$.

   (d) Représenter le spectre de $X^{(*)}A$.

4. Utiliser X^* comme préconditionneur inverse dans la méthode du gradient conjugué.

4 Annexe

```
//------------------------------------------
//Spectre de matrices preconditionnees
//------------------------------------------
clear all
clf()
//**** Construction de la matrice ****
N=20;
h=1/(N+1);//pas de discretisation en espace
x=h:h:1-h;
y=h:h:1-h;
[X,Y]=meshgrid(x,y);
Axx=2*eye(N,N)-diag(ones(N-1,1),1)-diag(ones(N-1,1),-1);
//Axx=sparse(Axx);
Id=eye(N,N); //Matrice identit
//construction de la matrice en dimension 2
// A est de taille NxN par NxN
A=kron(Id,Axx)+kron(Axx,Id);
A=A/h∧2;
//**** Construction du preconditionneurde la matrice ****
D=diag(diag(A)); E=tril(A,-1), F=triu(A,1);
B=((D+E))*(D\(D+F));
//
//Calcul des valeurs propres de A, B et A\ B
//
SPA=spec(A);
SPB=spec(B);
SPPREC=spec(B\A);
figure(1)
plot(real(SPA),imag(SPA),'*')
figure(2)
plot(real(SPPREC),imag(SPPREC),'*')
```