Université de Picardie Jules Verne
Master 2 AAM
Calcul Scientifique
2019-2020

Différences finies

Exercice 1 (méthode de tir)
On considère le problème

$$\mathcal{P}\begin{cases} -\dfrac{d^2u}{dx^2} + a(x)\dfrac{du}{dx} + b(x)u = f \quad \text{dans }]0,1[, \\ \\ u(0) = a,\ u(1) = b \end{cases}$$

On va le résoudre numériquement à l'aide de techniques d'équations différentielles. A cet effet, on va transformer $\mathcal{P}$ en un problème de conditions initiales :

$$\mathcal{T}\begin{cases} -\dfrac{d^2u}{dx^2} + a(x)\dfrac{du}{dx} + b(x)u = f \\ \\ u(0) = a, \\ \dfrac{du}{dx}(0) = \xi \end{cases}$$

où ξ devra être déterminé de sorte à ce que $u(1) = b$: c'est ce qu'on appelle la méthode de tir. On peut la mettre en œuvre de la façon suivante pour les équations linéaires :
Soient $u_1(x)$ et $u_2(x)$ les solutions de $\mathcal{T}$ pour $\xi = \xi_1$ et $\xi = \xi_2$ respectivement, $\xi_1 \neq \xi_2$.

La solution u de $\mathcal{P}$ peut alors s'écrire comme

$$u(x) = \lambda_1 u_1(x) + \lambda_2 u_2(x).$$

1. Quelles relations vérifient λ_1 et λ_2 (on construira un système linéaire 2 x 2 dont λ_1 et λ_2 sont solutions en considérant $u(0)$ puis $u(1)$).
2. On réécrit l'équation du second ordre en deux équations couplées du premier ordre, d'inconnues u et $v = \dfrac{du}{dx}$. Ecrire le système obtenu.
3. Proposer une méthode d'intégration de ce système.
4. Programmer en SCILAB une procédure de résolution et faire tourner le code sur le problème de Dirichlet homogène.
5. Représenter sur un même graphe, $u,\ u_1$ et u_2.
6. Quelles méthodes d'intégration[1] choisir pour u et pour v que la solution approchée obtenue coincide avec celle que donnerait une méthode de différences finies appliquée aux problème aux limites ?

[1] Euler implicite, Euler explicite, Runge Kutta $\cdots$

Exercice 2 (Problèmes non symétriques - Conditions aux limites de Dirichlet)
On considère l'équation

$$-\nu \frac{d^2u}{dx^2} + b\frac{du}{dx} + c(x)u = f \quad 0 < x < 1, \tag{1}$$
$$u(0) = 1, u(1) = 0. \tag{2}$$

Ici $\nu > 0, b > 0$, $c(x)$ est une fonction continue à valeurs positives ou nulles.

1. En effectuant le changement de variables
$$v(x) = exp(-\frac{bx}{2\nu})u(x),$$
montrer que $v(x)$ est solution de
$$-\frac{d^2v}{dx^2} + (\frac{b^2}{4\nu} + c(x))v = exp(-\frac{bx}{2\nu})\ f(x) \quad 0 < x < 1,$$
$$v(0) = 1, v(1) = 0.$$
En déduire que le problème de départ admet une unique solution classique.

2. On prend $f(x) = 0$ et c constante. Résoudre explicitement l'équation.
Ind. On doit trouver $u(x) = \dfrac{e^{\frac{bx}{2\nu}}}{e^{\frac{b}{2\nu}}} \dfrac{\sinh(\frac{\sqrt{b^2+4\nu c}}{2\nu}x)}{\sinh(\frac{\sqrt{b^2+4\nu c}}{2\nu})}$

3. On introduit les 3 discrétisations suivantes de la dérivée première

Schéma	D.L.	Nomenclature	Ordre
$\frac{u(x+h)-u(x)}{h}$	$u'(x) + \frac{h}{2}u^{(2)}(\theta)$	schéma décentré en aval	ordre 1
$\frac{u(x)-u(x-h)}{h}$	$u'(x) - \frac{h}{2}u^{(2)}(\theta)$	schéma décentré en amont	ordre 1
$\frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h}$	$u'(x) + \frac{h^2}{6}u^{(3)}(\theta)$	schéma centré	ordre 2

(a) On décompose l'intervalle $[0,1]$ en $N+1$ sous-intervalles de même longueur $h = \frac{1}{N+1}$. Soit $u(x) \in \mathcal{C}^4([0,1])$ la solution classique de (1)-(2). On pose $x_i = i.h, i = 0, \cdots, N+1$. Montrer que
$$|bu'(x_i) - b\frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h}| \leq Ch\ max_{x\in[0,1]}|u^{(2)}(x)|,$$
$$|bu'(x_i) - b\frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{h}| \leq Ch\ max_{x\in[0,1]}|u^{(2)}(x)|,$$
$$|bu'(x_i) - b\frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{2h}| \leq Ch^2 max_{x\in[0,1]}|u^{(3)}(x)|.$$

(b) Ecrire la discrétisation par différences finies de l'équation pour chacun des schémas d'approximation de la dérivée première présentés dans le tableau ci-dessus. Préciser l'ordre de chacun des trois schémas obtenus. On notera invariablement A la matrice du système.

(c) Montrer que si $b > \frac{2\nu}{h}$ alors seule la matrice associée au schéma décentré en amont est une M-matrice et a donc la propriété du maximum discret.

(d) Etude du schéma décentré en amont

i. Soit B la matrice symétrique $N \times N$ telle que

$$B_{ii} = \frac{2}{h^2},\ B_{i,i+1} = B_{i+1,i} = -\frac{1}{h^2},\ B_{ij} = 0 \text{ si } |i-j| > 1.$$

Soit V un vecteur de R^N. On pose $V_0 = V_{N+1} = 0$. Montrer que

$$(BV, V) = \frac{1}{h^2}\sum_{i=0}^{N}(V_{i+1} - V_i)^2$$

ii. (Inégalité de Poincaré discrete) En remarquant que

$$V_i = \sum_{j=0}^{i-1} \frac{V_{j+1} - V_j}{\sqrt{h}}\sqrt{h},$$

et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que

$$V_i^2 \le h \sum_{j=0}^{N} \frac{(V_{j+1} - V_j)^2}{h},$$

en en déduire l'inégalité de Poincaré discrète

$$\sum_{i=0}^{N} V_i^2 \le \sum_{i=0}^{N} \frac{(V_{i+1} - V_i)^2}{h},$$

iii. Soit V un vecteur de $\mathbb{R}^N$. On pose toujours $V_0 = V_{N+1} = 0$. Montrer que

$$(AV, V) = \left(\frac{\nu}{h^2} + \frac{b}{2h}\right)\sum_{i=0}^{N}(V_{i+1} - V_i)^2 + \frac{b}{2h}\sum_{i=0}^{N}(V_{i+1} - V_i)V_i$$

iv. En déduire que

$$(AV, V) \ge \left(\nu + \frac{hb}{2}\right)\sum_{i=0}^{N} V_i^2 = \|V\|_2^2.$$

v. En déduire que

$$AV = F \Longrightarrow (V, AV) \le \|F\|_2\|V\|_2 \Longrightarrow \|V\|_2 \le \frac{1}{\nu + \frac{hb}{2}}\|F\|_2.$$

vi. Conclure en établissant l'estimation de l'erreur

$$\|E\|_2 \le Ch\frac{\nu + b}{\nu + \frac{hb}{2}} \operatorname*{Max}_{x\in[0,1]} |u^{(3)}(x)|.$$

(e) i. Mettre en œuvre les trois différentes discrétisations du problème et résoudre numériquement celui-ci ; on fixera N, $b = 1$ et $c = 0$, et on fera varier ν.

ii. Que remarque-t-on quand ν diminue ?
Quel schéma semble le plus adapté ?

Exercice 3 (Schéma compact)
Soit f une fonction $\mathcal{C}^4([0,1])$, on considère le problème aux limites

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x) = f, \ \forall x \in]0,1[\ , \\ \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

On admettra que ce problème possède une unique solution classique $u \in \mathcal{C}^6([0,1])$. On se donne $N \in \mathbb{N}^*$ et les points $x_i = ih, \ i = 0, \cdots, N+1$, avec $h = \dfrac{1}{N+1}$.

1. Montrer que

$$\frac{2u(x_i) - u(x_{i-1}) - u(x_{i+1})}{h^2} = -u"(x_i) - \frac{h^2}{12}u^{(4)}(x_i) - \frac{h^4}{6!}\left(u^{(6)}(\xi_i) + u^{(6)}(\eta_i)\right),$$

où ξ_i et η_i sont des réels dans $]x_i, x_{i+1}[$ et $]x_{i-1}, x_i[$ respectivement.

2. En exploitant le fait que u est solution du problème, en déduire que

$$\frac{2u(x_i) - u(x_{i-1}) - u(x_{i+1})}{h^2} = f(x_i) + \frac{h^2}{12}f"(x_i) - \frac{h^4}{6!}\left(u^{(6)}(\xi_i) + u^{(6)}(\eta_i)\right).$$

3. Montrer que

$$-h^2 f"(x_i) = 2f(x_i) - f(x_{i-1}) - f(x_{i+1}) - \frac{h^4}{24}\left(f^{(4)}(\theta_i) + f^{(4)}(\omega_i)\right),$$

avec θ_i et ω_i dans $]x_i, x_{i+1}[$ et $]x_{i-1}, x_i[$ respectivement. En déduire alors que

$$\frac{2u(x_i) - u(x_{i-1}) - u(x_{i+1})}{h^2} = f(x_i) - \frac{2f(x_i) - f(x_{i-1}) - f(x_{i+1})}{12} + g_i$$

avec $g_i = -\dfrac{h^4}{6!}\left(u^{(6)}(\xi_i) + u^{(6)}(\eta_i)\right) - \dfrac{h^4}{24}\left(f^{(4)}(\theta_i) + f^{(4)}(\omega_i)\right)$. On définit la suite $u_i, \imath = 0, \cdots N$ par les relations

$$\begin{cases} \dfrac{2u_i - u_{i-1} - u_{i+1}}{h^2} = f(x_i) - \dfrac{2f(x_i) - f(x_{i-1}) - f(x_{i+1})}{12}, i = 1, \cdots, N, \\ \\ u_0 = u_{N+1} = 0. \end{cases}$$

4. (a) Programmer ce schéma en Scilab

   (b) Faire tourner le code pour différentes valeurs de n sur un exemple où la solution est connue. Calculer le quotient de l'erreur en norme infinie et du h^4. Que remarquez-vous ?

Exercice 4 (Produit de Kronecker)
Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. On définit le produit de Kronecker $A \bigotimes B$ la matrice

$$A \bigotimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1,n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & & a_{mn}B \end{pmatrix}.$$

La matrice $A \bigotimes B$ est donc dans $\mathcal{M}_{mp,nq}$.

1. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$. Calculer $A \bigotimes B$ puis $B \bigotimes A$. Conclusion ?

2. Maintenant A et B sont quelconques, $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Etablir les propriétés suivantes (ne pas y passer un temps infini !)

   (a) $(\alpha A) \bigotimes B = A \bigotimes (\alpha B) = \alpha A \bigotimes B$

   (b) $(\mathrm{A}^T \bigotimes B^T) = (A \bigotimes B)^T$

   (c) $(A \bigotimes B) \bigotimes C = A \bigotimes (B \bigotimes C)$

   (d) $(A + B) \bigotimes C = A \bigotimes C + B \bigotimes C$ (lorsque $A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$).

   (e) $A \bigotimes (B + C) = A \bigotimes B + A \bigotimes C$ (lorsque $A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$).

   (f) $(A \bigotimes B)(C \bigotimes D) = AC \bigotimes BD$

   (g) $(A \bigotimes B)^{-1} = A^{-1} \bigotimes B^{-1}$.

3. (a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice symétrique et I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $M = I_n \bigotimes A + A \bigotimes I_n$.

      i. Montrer que M est diagonalisable.

      ii. On suppose que A est définie positive. Montrer qu'il en est de même pour M.
      Ind. On pourra montrer que $< I_n \bigotimes Ax, x >> 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^{n^2}$ *puis, dans un second temps que* $< A \bigotimes I_n x, x >> 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^{n^2}$. *Dans ce dernier cas, on suggère d'écrire* x *par blocs, sous la forme* $x = (\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n)^T$ *où les* $x_i \in \mathbb{R}^n$ *et on notera* $(\bar{x}_i)_k$ *la kième composante de* $\bar{x}_i$.

      iii. Montrer que si x et y sont deux vecteurs propres de A de valeurs propres associées λ et μ alors $x \bigotimes y$ est vecteur propre de M. Calculer la valeur propre associée. Conclure.

   (b) Application. Soit la matrice $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   On rappelle que ses valeurs propres sont les nombres $\lambda_i = 2(1 - \cos(i\pi h))$, de vecteurs propres associés $\omega_i = (\sin(i\pi h), \sin(2i\pi h), \cdots, \sin(ni\pi h))^T$ où $h = \dfrac{1}{n+1}$. On rappelle également l'identité suivante

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(ik\pi h)\sin(jk\pi h) = \frac{n+1}{2}\delta_{i,j}.$$

i. Soit U un vecteur de $\mathbb{R}^n$ de composantes U_k dans la base canonique. Soient $\hat{U}_k$ les composantes de U dans la base des vecteurs propres de A. Montrer que

$$U_i \sin(i\ k\pi h) = \sum_{j=1}^{n} \hat{U}_j \sin(i\ j\pi h) \sin(i\ k\pi h)\ i = 1, \cdots, n.$$

ii. Montrer, par sommation sur l'indice i que

$$\hat{U}_k = \frac{2}{n+1} \sum_{i=1}^{n} U_i \sin(ik\pi h).$$

iii. En déduire une méthode de résolution du système $AU = b$ en passant par la base des vecteurs propres de A.

(c) Application

i. Calculer $M = I_n \bigotimes A + A \bigotimes I_n$.

ii. Calculer les vecteurs propres de M.

iii. Soit U un vecteur de $\mathbb{R}^{n^2}$. On note $U_{k,\ell}$ la coordonnée numéro $n(\ell - 1) + k$ de U.

A. Soit $\hat{U}_{k,\ell}$ la $n(\ell - 1) + k$ -ième coordonnée de U dans la base des vecteurs propres de M. Montrer que

$$U_{k,\ell} = \sum_{i,j=1}^{n} \hat{U}_{k,\ell} \sin(ki\pi h) \sin(\ell j\pi h).$$

B. En s'inspirant de $b)ii)$, montrer que

$$\hat{U}_{k,\ell} = \left(\frac{2}{n+1}\right)^2 \sum_{i,j=1}^{n} U_{k,\ell} \sin(ki\pi h) \sin(\ell j\pi h).$$

C. En déduire alors une méthode de résolution de $MU = B$.