

Projet MASOH - Rapport d'étape année 2007

Jean-Paul Chehab

December 26, 2007

1 Organisation et déroulement du projet pour la période mars 2007- décembre 2007

1.1 Rencontres

Depuis la première année de fonctionnement du programme, nous organisons tous les 6 mois une journée MASOH à Lille. Elle est organisée autour de deux exposés donnés par des conférenciers extérieurs. Cette formule permet de dégager du temps pour engager des discussions. Après la première édition en décembre 2006 (J.-C. Saut et Laurent Di Menza) nous avons organisé en 2007

- 11 Juin 2007 Deuxième journée MASOH. Les conférenciers invités étaient
 - Yvan Martel (Université de Versailles St Quentin)
Collision de solitons pour $gKdV$ non intégrable
 - Luc Bergé (CEA DAM, Bruyères le Chatel)
Modèles de propagation pour les impulsions optiques ultra courtes
- 14 décembre 2007 Troisième journée MASOH. Les conférenciers invités étaient
 - Anne De Bouard (CMAP, Ecole Polytechnique, Palaiseau)
Propagation des solitons pour l'équation de Korteweg-de Vries en présence de fluctuations aléatoires
 - Frédéric DIAS (CMLA, ENS Cachan)
Sur la modélisation des vagues extrêmes et des Tsunamis

Le mini-Symposium MASOH du CANUM (mai 2008) tiendra lieu de quatrième journée MASOH, voir plus bas.

1.2 Missions

Des d'etails sont joints en annexe. Nous donnons ici le calendrier des missions déjà effectuées

- juin 2007. Mission de Thierry Goudon à l'Université de Grenade (1 semaine)
- Septembre 2007 Mission de S. Dumont à la FST de Marrakech (1 semaine)

- Septembre 2007 Réunion de travail à Monastir (Tunisie). Les missionnaires soutenus par MASOH : M. Abounouh, C. Calgaro, J.-P. Chehab, L. Di Menza, O. Goubet ; Jacques Laminie, également membre de MASOH était lui aussi présent - séjour d'une semaine
- Octobre 2007 Mission de C. Calgaro et J.-P. Chehab à la FST de Marrakech (1 semaine)
- Novembre 2007 Mission de E. Zahrouni à la FST de Marrakech (1 semaine)

1.3 Visites de MASOHistes à Lille ou à Amiens

- juin 2007 : visite de Mostafa Abounouh (Marrakech) à Lille comme prof invité un mois sur le contingent UFR.
- juin 2007 visite de Hassan Al Moatassime (Marrakech) au LAMFA, comme prof. invité pendant un mois.
- novembre 2007. Visite de 15 jours à Amiens et Lille de I. Damergi et A. Ezzoug, étudiantes en thèse co-encadrées respectivement Ch. Besse (Lille 1) et O. Goubet (Amiens), séjour de 15 jours.
- Décembre 2007 Mission de J. Nieto (Grenade) à l'INRIA-futurs de Lille (1 semaine).
- Décembre 2007, visite d'E. Zahrouni au LAMFA d'Amiens, avec le soutien du programme CMCU "Ondelettes et Fractales" (1 semaine).

1.4 Formations thématiques (cours spécialisés)

T. Goudon a donné un cours spécialisé à Grenade en mai/juin 2007.

1.5 Diffusion des activités de MASOH

Elles sont regroupées sur le site web

<http://math.univ-lille1.fr/~chehab/MASOH.html>

1.6 Démarches parallèles

- Démarches (dossier déposé) auprès de l'AUF (Ch. Besse, O. Goubet)
- Nous prévoyons d'avoir recours au programme Student Internship pour accompagner les thèses en co-tutelle

2 Bilan

2.1 Travaux réalisés et entamés

2.1.1 Articles parus

1. A. Abounouh, H. Al Moatassime, J.-P. Chehab, S. Dumont, O. Goubet, Discrete Schrödinger Equations and dissipative dynamical systems à paraître dans Communications on Pure and Applied Analysis (2007)

2.1.2 Articles soumis ou en préparation

1. C. Calgaro, J.-P. Chehab, J. Laminie, E. Zahrouni, Schémas multiniveaux pour les équations d'ondes, en préparation (finition)
2. M. Abounouh, H. Al Moatassime, C. Calgaro, J.-P. Chehab, Global attractor for a total discretization of damped forced Korteweg-de Vries equation, en préparation
3. O. Goubet et E. Zahrouni, One a time discretization of a weakly damped forced nonlinear Schrödinger equation, soumis

2.2 Communications à des congrès

- 16-19 avril 2007, IMACS, Georgia Tech, USA. Exposé d'Olivier Goubet sur *Discrete Schrödinger Equations and dissipative dynamical systems*.
- 8-13 septembre 2007, congrès "Fractals and related fields", à Monastir. Exposé d'Olivier Goubet sur *Finite Hausdorff dimension for the global attractor of some nonlinear Schrödinger flow*

2.3 Thèses

2.3.1 Thèses démarrées en 2006/2007 (rappel)

- Emna Ezzoug (co-encadrement Olivier Goubet + Fathi ben Nasr (Monastir)), sujet Analyse mathématique et numérique dequations de NLS faiblement amorties en dimension deux.
- Ibtissem Damergi (co-encadrement Christophe Besse + Fathi ben Nasr), sujet Optique non lineaire en milieu stratifies.

2.3.2 Thèses démarrées en 2007/2008

- co-encadrement d'une thèse M. Trabelsi (Tunis), co-encadré par E. Zahrouni et J.-P. Chehab sur *Analyse et simulation d'équations quasi-géostrophiques*. Cette thèse s'appuiera sur les travaux de P. Constantin *et al* et sur ceux récents de E. Zahrouni (FS Monastir) et Ramzi May (FS Bizerte) sur l'analyse harmonique de ces équations ; on y étudiera numériquement le modèle quasi géostrophique

$$\theta_t + (-\Delta\theta)^\alpha + (u.\nabla)\theta = f; u = (-R_2\theta, R_1\theta),$$

pour différentes valeurs de la puissance de l'opérateur de diffusion $(-\Delta)^\alpha$, R_i étant la transformée de Riesz (pour $\alpha = 1$, on retrouve Navier-Stokes). Ce travail mettra notamment en avant des techniques d'approximations d'opérateurs non-locaux, avec les problèmes algébriques sous-jacents lorsque l'on ne se place pas dans le cadre Fourier ; il aura aussi pour objet d'être confronté aux résultats d'analyse et d'explorer les valeurs de α pour lesquelles les résultats mathématiques sont encore manquants. Une étude qualitative des transferts d'énergie est également envisagée.

2.4 Evènements connexes

- Mai 2008. Dans le cadre du CANUM 2008¹, un mini-symposium Ondes Hydrodynamiques organisé par J.-P. Chehab et autour des thématiques MASOH a été retenu par les organisateurs. 4 intervenants sont prévus. Voir aussi le site

http://smai.emath.fr/canum2008/sql_minisymposia.php

Le CANUM couvrira les frais de déplacement des conférenciers de ce mini-symposium.

- Il faut également signaler la présence de G. Fibich², comme conférencier invité au CANUM 2008 ; c'est un spécialiste reconnu de l'analyse et de la modélisation des équations de type Schrödinger.

2.5 Divers

En sept. 2007, Ezzeddine Zahrouni a obtenu un poste de Maître de conférences à l'université de Monastir, cela correspond à un poste de professeur en France.

En sept. 2007, J.-P. Chehab a obtenu un poste de professeur à l'université de Picardie Jules Verne, à Amiens.

3 Organisation prévue pour 2008

Nous entendons continuer à travailler en suivant la même approche. Voici les grandes lignes prévues pour la troisième saison de MASOH.

Les collaborations entre Lille, Amiens, Marrakech, Monastir dans la direction Europe-Maghreb sont désormais solides et commencent à porter leurs fruits : co-encadrements de thèses, articles en collaboration. Cette année MASOH a encouragé la constitution de d'interactions inter-maghrebines, entre Monastir et Marrakech, avec les missions de M. Abounouh (à Monastir, Sept. 2007) et de E. Zahrouni (à Marrakech, Nov. 2007). Nous avons décidé de poursuivre dans cette direction en 2008 pour soutenir des échanges entre ces deux universités.

La seconde direction que nous prévoyons de renforcer est la collaboration avec Grenade (visites de Th. Goudon à Grenade en Février 2007 et de J. Nieto à Lille en Déc. 2007).

3.1 Missions

La durée de chaque mission est d'une semaine et son budget est de 1000 euros environ. Pour l'année à venir, nous pensons utiliser le support pour réaliser des missions entre les différentes équipes mais aussi pour réunir à Lille, la fin de l'année, les acteurs du projet.

¹Le Congrès national d'Analyse NUMérique, CANUM 2008 est organisé conjointement cette année par les universités de Lille, Amiens, Valenciennes, Calais et Paris XIII (Villetaneuse)

²School of Mathematical Sciences, Tel Aviv University, Israel

3.1.1 Missions prévues en 2008

- Mission de M. Abounouh en mai 2008 durant 10 jours, en même temps que le CANUM. Cette visite a pour but la poursuite du programme Abounouh-Al Moatassime-Calgaro-chehab sur la simulation des équations faiblement amorties. M. Abounouh sera d'autre part invité à présenter le travail commun au minisymposium "Ondes Hydrodynamiques" du CANUM 2008.
- Mission de Thierry Goudon à Grenade en avril 2008.
- Des missions à Marrakech et à Monastir sont prévues pour
 - finaliser les travaux entamés (C. Calgaro, J.-P. Chehab, Novembre 2008)
 - pour rencontrer les thésard(e)s (C. Besse, O. Goubet, J.-P. Chehab)
- Une mission Marrakech Monastir (H. Al Moatassime, mars 2008)
- Une mission Monastir Marrakech (E. Zahrouni, septembre 2008)

Il faudra entre 9000 et 10000 euros pour financer ces missions. Il faudra ajouter une à deux missions Lille-Grenade ou Grenade Lille.

3.2 Rencontres

Pour la dernière année du projet, nous envisageons deux rencontres

- Journées MASOH (JM) pour la cloture du projet, décembre 2008, à Lille. Cette rencontre s'étalera sur deux jours ; un effort particulier sera fait pour que les acteurs espagnols, marocains et Tunisiens du projet soient réunis. Ce petit colloque comportera deux volets. Le premier consistera en une série d'exposés, donnés par des membres extérieurs, comme dans les précédentes éditions des JM mais aussi par des MASOHistes sur les travaux effectués. Le second tournera autour de la suite à donner à MASOH, à travers la constitution d'un projet de plus grande ampleur, engageant un nombre plus large de partenaires et portant sur une thématique élargie. Cette rencontre coïncidera avec l'achèvement du rapport final MASOH.
Nous aurons besoin de 2000 à 3000 euros pour financer cette rencontre.
- Un projet d'Ecole d'été sur la thématique MASOH sera organisé (à Monastir ou à Marrakech) courant 2008-2009 ; nous utiliserons pour cela d'autres supports.

4 Annexe

4.1 Travaux et programmes de travail

4.1.1 Equations d'ondes et schémas multiniveaux

C. Calgaro (Lille), J.-P. Chehab E. Zahrouni (Monastir) et J. Laminie (Orsay) ont essayé de développer des méthodes multiniveaux pour l'intégration en temps d'équations telles que KdV, Kuramoto-Sivashinski, Benjamin-Ono. Les méthodes multiniveaux inspirées de Galerkin Non Linéaire (GNL) ne sont pas adaptées à ce contexte (sauf KSE) puisque les transferts d'énergie vont des modes bas à ceux élevés ; il n'y a pas d'effet régularisant contrairement aux EDP paraboliques pour lesquelles les méthodes multiniveaux GNL avaient été imaginées. Il s'agit d'un résultat *a priori* négatif mettant en évidence la nécessité d'avoir un amortissement. Ce travail est rassemblé dans [3] qui sera incessamment déposé comme rapport technique INRIA.

4.1.2 Approximation des équations d'ondes

La clef de l'analyse de Fourier est la décomposition des solutions d'une EDP sur les valeurs propres du laplacien sur un domaine borné. J.-P. Chehab et L. Di Menza se posent la question de l'opportunité d'un tel calcul sur les états excités de NLS en dimension plus grande que deux. En effet l'équation

$$-\omega u + \Delta u + |u|^\sigma u = 0$$

admet une infinité de solutions φ_k ordonnées par leurs nombres d'oscillations. La première solution correspond au "ground state" pour NLS. Est-ce que cela a un sens de d'approcher la solution de

$$iut + \Delta u + |u|^\sigma u = 0;$$

par des sommes de type $\sum \alpha_k(t) \varphi_k(x)$.

4.1.3 Equations faiblement amorties

1 M. Abounouh, H. Almoatassime, C. Calgaro, J.-P. Chehab

Développement et implémentation de schémas numériques pour la simulation d'une équation de KdV faiblement amortie, s'appuyant sur l'article [1].

Lors de la visite de C. Calgaro et J.-P. Chehab à la FST de Marrakech (Nov. 2007) le travail suivant a été mené

- Recherche de solutions stationnaires et périodiques (d'après [4]) et analyse de leur régularité
- Développements de codes en différences finies (d'ordre 2, 4, 6 en espace) et en spectral (Fourier) afin d'obtenir un jeu de résultats concordants.
- Extension des résultats sur l'attracteur discret à des discrétisations en différences finies d'ordre élevé.

A la suite de cela, un programme de travail sur ces thématiques a été défini par HA, MA, CC et JPC, il s'oriente autour des points suivants

Projet 1 *d'ici fin décembre 2007- janvier 2008* : finalisation du travail entamé sur l'équation de KdV amortie suivant les étapes

- Etude d'un schéma aux différences finies de type Sanz-Serna (ordre 2,4,6 en espace)
- Attracteurs discrets
- Simulation numérique dans laquelle on retrouve une dynamique non triviale pour les grands temps (solutions stationnaires, périodiques en temps, cf [4]), régularisation asymptotique, comparaison différences finies-Fourier

Projet 2 *d'ici juin 2008* : étude et mise en œuvre d'un schéma de splitting pour NLS et KdV. Il s'agit, suivant un principe de Duhamel, de décomposer la solution u en somme d'une part, d'une fonction v de même régularité que la condition initiale et exponentiellement amortie et, d'autre part, d'une fonction w , plus régulière.

Projet 3 Développement d'une méthode multiniveau sur la partie w de la solution décomposée. Il est prévu que chaque étape puisse donner lieu à un document écrit soumis à publication.

2 O. Goubet, E. Zahrouni

Schémas pour les grands temps

Etude d'un schéma semi-discret en temps de type Crank-Nicolson scheme pour les équations de Schrödinger nonlinéaire faiblement amorties avec terme de forçage. Preuve de l'existence d'un attracteur de dimension finie pour ce système dynamique. Ce travail fait l'objet d'un article actuellement soumis [5].

4.2 Avancements des thèses

4.2.1 avancement de la thèse de I. Damergi

Situation administrative: inscription en thèse à Tunis, co-encadrement en France par Ch. Besse (Lille) et O. Goubet (Amiens).

Suite à la visite en France de Ibtissem Damergi en novembre 2007, celle-ci doit maintenant implémenter la méthode des PML pour la résolution numérique de

$$u_t + i\Delta u + i\cos(\Omega t)|u|^2u = 0$$

Le code présente encore des imperfections, car les ondes produites ne sont pas absorbées par le bord (c'est l'objet des PML d'éviter la réflexion), et la forme des ondes en est altérée. Ibtissem va vérifier ligne à ligne son code de calcul. Ezzedine Zahrouni et Ibtissem Damergi vont réfléchir au problème théorique sous-jacent à l'étude des PML. Ce problème est très intéressant. Pour la partie théorique, le résultat suivant a été démontré. Soit Ω fixé. Alors il existe une donnée initiale u_0 telle que $u(t)$ explose en temps fini. Un article est en cours de rédaction sur le sujet. Néanmoins rien n'a avancé dans cette direction, notamment dans les deux directions suivantes :

- Etablir le résultat complémentaire du précédent. Pour u_0 donné qui donne lieu à une solution explosive si $\Omega = 0$, peut-on exhiber Ω assez grand qui stabilise la solution et empêche ou retarde l'explosion ?
- Essayer de démontrer l'explosion par la méthode de Glassey pour le schéma *semi-discretisé* en temps.

Sur ce dernier point, Olivier Goubet va rédiger une petite note pour comparer avantages et inconvénients des différentes méthodes numériques utilisées pour NLS.

4.2.2 Avancement de la thèse de E. Ezzoug

Situation administrative: inscription en thèse à Tunis, co-encadrement en France par J. Laminie (Orsay et Pointe-à-Pitre) et O. Goubet (Amiens).

Le code de Emna Ezzoug donne des résultats intéressants. Elle arrive à capturer soit l'explosion, soit la décroissance vers 0 suivant que la donnée initiale est grande ou petite. Le code reste encore à être validé totalement. Il faut en outre vérifier que la condition initiale choisie remplit les conditions au bord. La rédaction de ce qu'à écrit Emna Ezzoug jusqu'alors doit être formalisé pour commencer à apparaître sous la forme de manuscrit de thèse. Il serait bon de comparer les versions Sanz-Serna et Fortin des schémas utilisés par Emna Ezzoug. Elle est invitée à regarder dans deux directions complémentaires

- Etudier le système dynamique donné par la discrétisation en temps de NLS par Crank-Nicolson en 2D, dans l'esprit de l'article [5]
- Essayer de démontrer l'explosion par la méthode de Glassey pour le schéma semi-discrétisé en temps. Des inégalités fonctionnelles en différences finies devront être établies.

4.2.3 Avancement de la thèse de M. Trabelsi

Situation administrative: inscription en thèse à Monastir, co-encadrement en France par JP. Chehab (Amiens).

Un code sur la résolution numérique des équations quasi-géostrophiques par méthodes spectrales a été écrit. La méthode choisie utilise un schéma d'Euler explicite classique pour approcher les solutions d'une équation parabolique. Elle s'attachera

- à vérifier qu'au niveau théorique le schéma choisi en temps vérifie bien les propriétés essentielles des équations continues : décroissance des normes L^2 , L^∞ , d'une certaine énergie.
- Pour "bencharker" le code précédent, écrire un autre code utilisant une méthode de splitting qui sépare la partie diffusion de la partie convection.

References

- [1] A. Abounouh, H. Al Moatassime, J.-P. Chehab, S. Dumont, O. Goubet, Discrete Schrödinger Equations and dissipative dynamical systems à paraître dans Communications on Pure and Applied Analysis (2007)
- [2] A. Abounouh, H. Al Moatassime, C. Calgaro, J.-P. Chehab, Global attractor for a total discretization of damped forced Korteweg-de Vries equation
- [3] C. Calgaro, J.-P. Chehab, J. Laminie, E. Zahrouni, numerical schemes for wave equations, en préparation
- [4] M. Cabral, R. Rosa, Chaos for a damped and forced KdV equation, Physica D 192 (2004) no. 3 & 4, 265-278.
- [5] O. Goubet, E. Zahrouni, On a time discretization of a weakly damped forced nonlinear Schrödinger equation, soumis