Université de Picardie Jules Verne
Préparation à l'Agrégation de Mathématiques
Option Calcul Scientifique et modélisation
2019-2020

EDO

Contents

1 Quelques outils - Rappels **2**
1.1 Théorème d'existence globale, d'unicité globale 2
1.2 Théorème de comparaison 2
1.3 Systèmes linéaires 3
1.4 Matrice A constante: classification des points d'équilibre 3
1.4.1 Le cas $n = 2$ 4
1.4.2 Cas général 7
1.5 Cas non linéaire 8
1.5.1 Méthode de linéarisation 8
1.5.2 Théorème de Lyapounov 8

2 Applications **10**
2.1 Systèmes différentiels 10
2.2 Quelques EDO issues de modèles en mécanique, en chimie ou en dynamique des populations 10

1 Quelques outils - Rappels

1.1 Théorème d'existence globale, d'unicité globale

Définition 1
Soient $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ et $\tilde{x} : \tilde{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ deux solutions de $x'(t) = f(t, x(t))$. On dit que $\tilde{x}$ est un prolongement de x si

(1) $I \subset \tilde{I}$;

(2) $\tilde{x}(t) = x(t), \forall t \in I$.

On dit qu'une solution $x : I \to \mathbb{R}^n$ est maximale si x n'admet pas de prolongement.

Théorème 1
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ouvert, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application continue et localement Lipschitzienne sur Ω par rapport la deuxime variable et soit $x(t)$ une solution de $x'(t) = f(t, x(t))$ sur un intervalle $I = [a, b[$.

$x(t)$ peut se prolonger au delà de b si et seulement si il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que la courbe $t \mapsto (t, x(t))$, $t \in [a, b[$, reste contenue dans K.

De même, une solution définie sur $]a, b]$ peut se prolonger au-delà de a dans les mêmes conditions.

Corollaire 1 (Critère de maximalité)
Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application continue et $x(t)$ une solution de $x'(t) = f(t, x(t))$ sur un intervalle $I =]a, b[$.

$x(t)$ est maximale si et seulement si la courbe $t \mapsto (t, x(t))$, $t \in]a, b[$ s'échappe de tout compact K de Ω quand $t \to a+$ et quand $t \to a-$, c'est à dire

$$\lim_{\substack{t \to a+ \\ t \to b-}} \left(|t| + \|x(t)\| + \frac{1}{\text{dist}((t, x(t)), \partial\Omega)} \right) = +\infty.$$

Définition 2
Soient Ω_1 un intervalle de $\mathbb{R}$, $\Omega = \Omega_1 \times \mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ continue. Une solution $x(t)$ de $x'(t) = f(t, x(t))$ est dite globale si elle est dfinie sur Ω_1 tout entier.

Théorème 2 (Existence globale (condition suffisante))
Soient Ω_1 un intervalle de $\mathbb{R}$, $\Omega = \Omega_1 \times \mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ continue et localement Lipschitzienne sur Ω par rapport à x

Supposons qu'il existe deux fonctions c, k continues sur Ω_1, avec $c, k \geq 0$, telles que

$$\|f(t, x)\| \leq c(t) + k(t)\|x\| \tag{1}$$

alors toute solution maximale de l'équation $x'(t) = f(t, x(t))$ est globale.

1.2 Théorème de comparaison

Théorème 3 (Théorème de comparaison)
Soient $f_1, f_2 : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continues et telles que

$$f_1(t, x) \leq f_2(t, x) \qquad \text{pour tout } (t, x) \in \Omega.$$

Soient $x_1, x_2 : I \to \mathbb{R}$ ($t_0 \in I$) solutions de

$$\begin{cases} x_i'(t) = f_i(t, x_i(t)) \\ x_i(t_0) = \bar{x}_i. \end{cases}$$

(1) Si $\bar{x}_1 \leq \bar{x}_2$, alors $x_1(t) \leq x_2(t)$ pour tout $t \in I$, $t \geq t_0$;

(2) Si $\bar{x}_1 \geq \bar{x}_2$, alors $x_1(t) \geq x_2(t)$ pour tout $t \in I$, $t \leq t_0$;

(3) Si $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$, alors $\begin{cases} x_1(t) \leq x_2(t), \forall t \in I, t \geq t_0, \\ x_1(t) \geq x_2(t), \forall t \in I, t \leq t_0. \end{cases}$

1.3 Systèmes linéaires

Considérons le système linéaire

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + b(t), \qquad t \in \Omega_1 \subset \mathbb{R}. \tag{2}$$

avec $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$; $A : \Omega_1 \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ continue ; $b : \Omega_1 \to \mathbb{R}^N$ continu.

Lemme 1
Soient $\Omega_1 \subset \mathbb{R}$, $a_{i,j} \in C^0(\Omega_1)$ pour chaque $1 \leq i, j \leq n$ et $b_i \in C^0(\Omega_1)$ pour chaque $1 \leq i \leq n$.

Pour chaque $(t_0, x_0) \in \Omega_1 \times \mathbb{R}^n$ il passe une seule solution maximale $x(t)$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

En outre, $x(t)$ est définie sur Ω_1 tout entier.

On calcule directement la solution :

$$x(t) = C(t)x(0) + \int_0^t C(t-s)b(s)ds$$

avec $C(t) = e^{-\int_0^t A(s)ds}$

L'espace linéaire des solutions de $x'(t) = A(t)x(t)$ est de dimension n.

Remarque 1
Ici $f(x,t) = A(t)x(t) + b(t)$ est localement lipschitzienne, $\|f(x,t)\| \leq \|b(t)\| + \|A(t)\|\|x\|$, on obtient directement l'existence et l'unicité de la solution maximale.

1.4 Matrice A constante: classification des points d'équilibre

La solution du systèmepeut s'écrire sous forme d'exponentielle :

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{3}$$

On suppose pour commencer que A est inversible, sin bien que $(0,0)$ est le seul point d'équiibre. On distingue deux cas

- A diagonalisable en dimension n quelconque;
- A non diagonalisable en dimension $n = 2$.

Théorème 4
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $x'(t) = Ax(t)$. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ $(k \leq n)$ les valeurs propres de A.

(i) $\bar{x} = 0$ est asymptotiquement stable si et seulement si $\Re(\lambda_j) < 0$ pour chaque $j = 1, \ldots, k$.

(ii) $\bar{x} = 0$ est stable si et seulement si $\Re(\lambda_j) \leq 0$ pour chaque $j = 1, \ldots, k$ et $\Re(\lambda_j) = 0$ implique $\dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda_j Id)) = m_j$.

Ici m_j est la multiplicité algébrique de λ_j, a veut dire l'ordre de multiplicité de la racine λ_j dans le polynôme caractéristique de A.

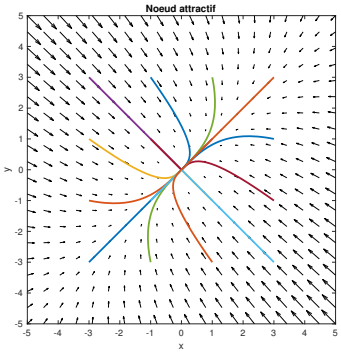
1.4.1 Le cas $n = 2$

Dans le cas $n = 2$ nous pouvons décrire en détail e le comportement et tracer le portrait de phase autour du point d'équilibre $\bar{x} = 0$.

1) Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ et $\lambda_1 \neq \lambda_2$ les valeurs propres et v_1, v_2 une base de vecteurs propres associés. La solution est de la forme

$$x(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} v_2, \qquad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

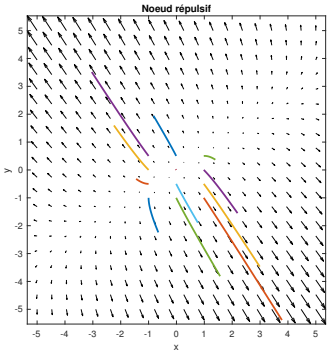
$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$



nœud impropre stable
(courbes tangentes v_1)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

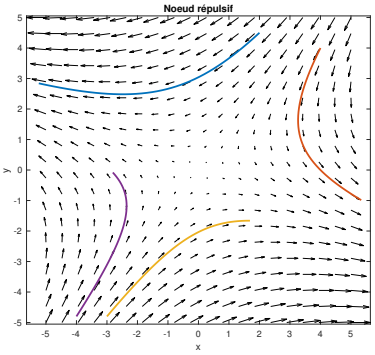
$0 < \lambda_1 < \lambda_2$



nœud impropre instable
(courbes tangentes v_1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

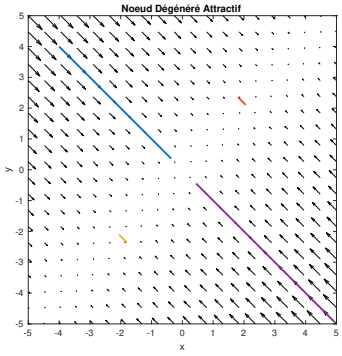
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

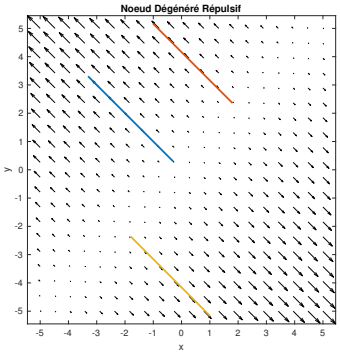


col (instable)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cas Dégénéré : $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$, dans lequel $x(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \alpha_2 v_2$.





$\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

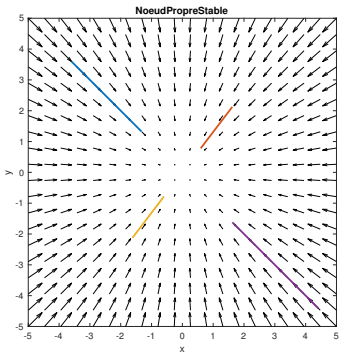
$\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$

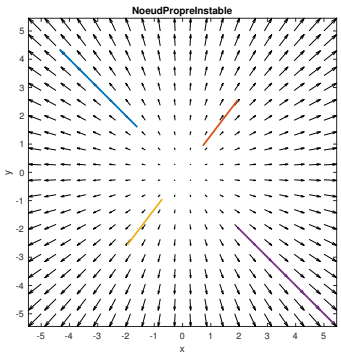
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ ayant une valeur propre double $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si A est diagonalisable, il existe une base de vecteurs propres v_1, v_2 et la solution est de la forme

$$x(t) = \alpha_1 e^{\lambda t} v_1 + \alpha_2 e^{\lambda t} v_2, \qquad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$





$\lambda < 0$ nœud propre stable

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\lambda > 0$ nœud propre instable

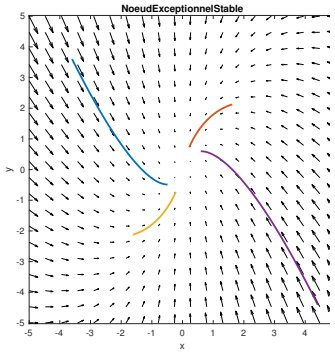
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

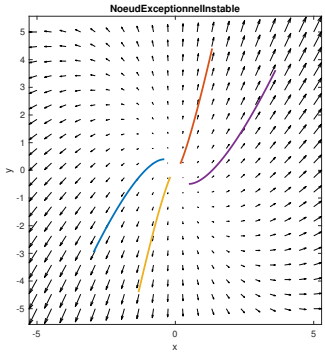
Si A est non diagonalisable, la solution La solution générale s'écrit sous la forme

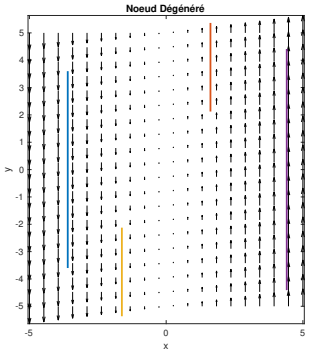
$$x(t) = \alpha_1 e^{\lambda t} v + \alpha_2 e^{\lambda t}(tv + w), \qquad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R},$$

avec v vecteur propre et w solution de $(A - \lambda Id)w = v$.

$\lambda < 0$ $\lambda > 0$ $\lambda = 0$







Nœud exceptionnel stable

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Nœud exceptionnel instable

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

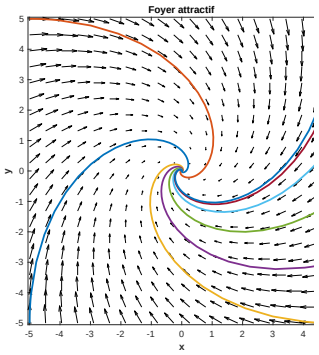
Nœud dégénéré

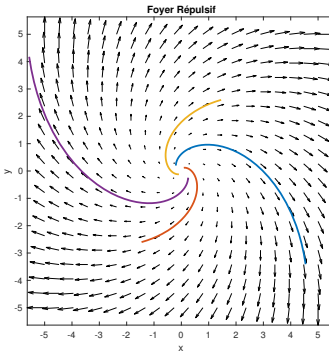
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

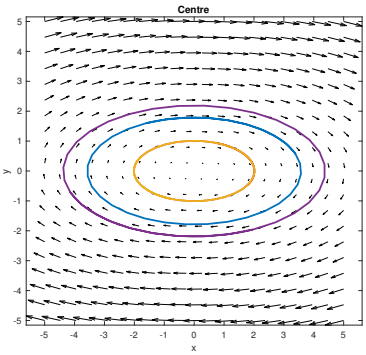
3) Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ ayant valeurs propres $\lambda, \bar{\lambda} \in \mathbb{C}$, avec $\Im(\lambda) \neq 0$. La solution générale s'écrit sous la forme

$$x(t) = \alpha_1 \Re(e^{\lambda t} v) + \alpha_2 \Im(e^{\lambda t} v), \qquad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R},$$

où v est le vecteur propre associé à λ.







$\Re(\lambda) > 0$ foyer instable

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Re(\lambda) = 0$ centre

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Re(\lambda) < 0$ foyer stable,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.4.2 Cas général

On considère à présent plus généralement le système différentiel

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{5}$$

Ici A est une matrice $n \times n$ à coefficients réels. On notera $\sigma(A)$, le spectre de A. On rappelle la

Définition 3
On dit que la valeur propre λ de A est défective si

$$\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I) < m_\lambda,$$

où m_λ est la multiplicité de λ.

Nous pouvons énoncer le

Théorème 5
Le point d'équilibre 0 est

- asymptotiquement stable si et seulement si

$$\forall \lambda \in \sigma(A), \Re\lambda < 0.$$

- stable si et seulement si
  - $\forall \lambda \in \sigma(A), \Re\lambda \leq 0$
  - $\forall \lambda \in \sigma(A), \Re\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda$ n'est pas défective.

Preuve. Voir Hirsh-Smale, ch. 9, p 180. ■

1.5 Cas non linéaire

1.5.1 Méthode de linéarisation

On s'intéresse au comportement local des solutions de l'EDO et à cet effet on analyse l'évolution des petites perturbations autour d'un point d'équilibre. Si $\bar{x}$ est un point stationnaire, on peut écrire, si f est différentiable en $\bar{x}$ et pour δ assez petit,

$$f(\bar{x} + \delta) \approx f(\bar{x}) + Jf(\bar{x})\delta,$$

o $Jf(\bar{x})\delta$ est la différentielle de f en $\bar{x}$ appliquée à δ. Posons $w = \bar{x} + \delta$. Pour étudier le comportement du système,

$$\frac{dw}{dt} = f(w) \tag{6}$$
$$w(0) = \bar{x} + \delta_0, \tag{7}$$

au voisinage de $\bar{x}$, on étudie

$$\frac{d\delta}{dt} = Jf(\bar{x})\delta, \tag{8}$$
$$\delta(0) = \delta_0, \tag{9}$$

qui est évidemment un système linéaire. La question essentielle qui se pose est de savoir si le comportement du point d'équilibre du système linéarisé est comparable à celui du système original. Dans la suite, nous supposerons pour simplifier que $\bar{x} = 0$, cela ne perd rien en généralité.

Comme plus haut, commençons par considérer le cas du système différentiel 2×2. Equivalence locale des systèmes Nous avons le

Théorème 6
Si f est différentiable en 0 et $f(0) = 0$, alors

- si $Re\lambda < 0, \forall \lambda \in \sigma(f(0))$ alors 0 est asymptotiquement stable,
- si il existe $\lambda \in \sigma(f(0))$ tel que $Re\lambda > 0$ alors 0 est asymptotiquement instable.

Le théorème n'apporte pas de réponse si toutes les valeurs propres du système sont imaginaires pures, alors que dans ce cas un système linéaire est stable.

1.5.2 Théorème de Lyapounov

Le théorème de Lyapounov permet de conclure la stabilité par d'autres arguments. Tout d'abord, donnons-nous la

Définition 4
Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et U un voisinage de 0 dans Ω. Soit $V : U \to \mathbb{R}$ une fonction continue et différentiable sur $U \setminus \{0\}$. V est une fonction de Lyapounov si

- $V(0) = 0$ et $\forall u \neq 0$, $V(u) > 0$.
- $\frac{dV(u)}{dt} =< f(u), \nabla V(u) > \leq 0, \ \forall u \in U \setminus \{0\}$.

On a alors le

Théorème 7
S'il existe une fonction de Lyapounov pour le système alors 0 est stable.

2 Applications

2.1 Systèmes différentiels

Exercice 1

1. On considère les équations différentielles matricielles

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = AX \\ X(0) = Id, \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \frac{dY}{dt} = -YA \\ Y(0) = Id. \end{cases}$$

Ici $A(t)$ est une fonction continue de t à valeurs dans $\mathcal{M}(n,n)(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que Ces deux problèmes de Cauchy sont bien posés sur tout intervalle $[0,T]$

(b) Montrer que $X(t)Y(t) = Y(t)X(t) = Id$

2. On considère l'EDOM

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = AX(t) + X(t)B, \quad t > 0, \\ X(0) = C. \end{cases}$$

Ici A, B et C sont des matrices $n \times n$ données. (9)

Montrer que

$$X(t) = e^{tA} C e^{tB}.$$

3. On considère l'équation matricielle

$$AX + XB = C \quad (*)$$

Montrer que si

$$X = -\int_0^{+\infty} e^{tA} C e^{tB} dt$$

existe pour toute matrice C $n \times n$, elle représente l'unique solution de l'équation (*).

2.2 Quelques EDO issues de modèles en mécanique, en chimie ou en dynamique des populations

Exercice 2 (Equation de Van der Pol)

L'équation de Van der Pol permet de d'écrire des phénomènes vibratoires dans certaines situations ; on peut la voir comme une équation des ondes non linéaire avec terme d'amortissement (actif en dehors de la boule unité) et sans dépendance en espace.

$$\begin{cases} \left(\frac{d^2}{dt^2}u(t)\right) - \epsilon(1 - u(t)^2)\left(\frac{d}{dt}u(t)\right) + u(t) = 0, \ t > 0, \\ u(0) = u_0, \\ u'(0) = u_1. \end{cases}$$

où $\epsilon > 0$.

1. Ecrire l'équation comme un système d'ordre 1, on posera $v = \frac{du}{dt}$.

2. Montrer que

$$\frac{1}{2}\frac{du^2 + v^2}{dt} \leq \epsilon v^2 \leq \epsilon(u^2 + v^2),$$

et conclure que le problème de Cauchy est bien posé sur $\mathbb{R}^+$.

3. Quels sont les états d'équilibre ? Ecrire le linéarisé en les point critiques. Quelle est leur stabilité ?

4. On pose $\epsilon = 1$ et on considère à présent l'équation

$$\begin{cases} \left(\frac{d^2}{dt^2}u(t)\right) - (1-u(t)^2)\left(\frac{d}{dt}u(t)\right) + u(t) - u^3(t) = 0,\ t > 0, \\ u(0) = u_0, \\ u'(0) = u_1. \end{cases}$$

   (a) Déterminer les points d'équilibre et préciser leur stabilité.

   (b) Tracer l'allure des courbes

5. Représenter les solutions en portrait de phase $\epsilon = \frac{1}{4}$, et pour les données initiales : $(0, 0.2),\ (1, 2),\ (2, 4)$. On utilisera RK4.

Exercice 3 (Problèmes raides, un exemple simple)
On rappelle qu'une *équation différentielle raide* est une EDO dont la sensibilité aux paramètres rend difficile sa résolution numérique par des schémas explicites. On peut relier la définition au caractère mal conditionné du système et la formuler comme suit : (10)

L'équation $\frac{dx}{dt} = F(x)$ est raide si

$$\exists(\lambda_1, \lambda_2) \in sp(DF(x)),\ |\lambda_1| << |\lambda_2|$$

On considère l'équation

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -120x(t) + 40 \quad t \in [0, 1], \\ x(0) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

La solution exacte est $x(t) = \frac{1}{3}$. Si l'on perturbe $x(0)$ en ajoutant $\epsilon > 0$, i.e. en partant de $x(0) = \frac{1}{3} + \epsilon$, la solution devient $x(t) = \frac{1}{3} + \epsilon e^{-120t}$.

1. Résoudre le système (3) avec les méthodes d'Euler explicite et d'Euler implicite pour $\Delta t = \frac{1}{50}$ et pour $\epsilon = 10^{-6}$

2. Résoudre le système perturbé avec les méthodes d'Euler explicite et d'Euler implicite pour $\Delta t = \frac{1}{50}$ et pour $\epsilon = 10^{-6}$

3. Même question avec $\Delta t = \frac{1}{150}$. Que remarquez-vous ?

Exercice 4 (Le système de Minea)
Ce système différentiel 3×3 possède quelques points communs avec les équations des Navier-Stokes (en dimension infinie). On en trouvera une présentation dans le livre de R. Temam *Infinite dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, Springer 1997.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) + x + \delta(y^2 + z^2) = 1, \\ \frac{d}{dt}y(t) + y - \delta xy = 0, , \\ \frac{d}{dt}z(t) + z - \delta xz = 0, \\ x(0) = x_0,\ y(0) = y_0,\ z(0) = z_0. \end{cases}$$

Ici $\delta > 0$.

1. On pose $X = (x(t), y(t), z(t))$. Montrer que

$$\frac{1}{2}\frac{d\|X\|^2}{dt} + \|X\|^2 = x \leq \|X\|.$$

   et, en utilisant l'inégalité de Young

$$\frac{d\|X\|^2}{dt} + \|X\|^2 \leq 1.$$

   En déduire une majoration de $\|X(t)\|$. Conclusion ?

2. Représenter graphiquement les courbes intégrales dans le plan (y, z) pour $1 < \delta < 9/8$ et $\delta > 9/8$; on considèrera le plan (x, z).

Exercice 5 (Réaction chimique : oxydation du sulfite de cuivre)
L'oxydation du sulfite de cuivre est une réaction d'autocatalyse qu'on peut modéliser par le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -k_1 x(t) + k_3 y(t)z(t), \\ \frac{dy}{dt} = k_1 x(t) - k_3 y(t)z(t) - k_2 y(t)^2 \\ \frac{dz}{dt} = k_2 y(t)^2 \\ x(0) = 1, y(0) = 0, z(0) = 0 \end{cases}$$

Ici $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ représentent les quantités des composantes au temps t et les k_i, $i = 1, 2, 3$ les vitesses de réxaction qui s'effectuent successivement à des vitesses très différentes : $1 = 0.4$ (lente), $k_2 = 3.10^7$ (très rapide) et $k_3 = 10^4$ (rapide), d'où le caractère raide du système. On peut montrer que

- $x(t)$ est décroissante et tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$,
- $y(t)$ est croissante puis décroissante et tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$,
- $z(t)$ est croissante et tend vers 1 quand t tend vers $+\infty$,

1. Montrer que la quantité de matière est conservée, i.e. $x(t) + y(t) + z(t) = Cste$.
2. Résoudre numériquement (5) par Euler explicite pour $T = 0.3$ avec $\Delta t = 10^{-3}$, puis $\Delta t = 10^{-4}$. Représenter y en projection. Que remarquez-vous ?

3. On applique présent la méthode d'Euler implicite pour $\Delta t = 10^{-2}$, puis $\Delta t = 10^{-3}$. On utilisera la méthode de Newton pour résoudre les problèmes non linéaires à chaque pas de temps, avec la précision $\epsilon = 10^{-6}$.

Exercice 6 (Méthode de tir)
On considère le problème

$$\mathcal{P}\begin{cases} -\frac{d^2u}{dx^2} + a(x)\frac{du}{dx} + b(x)u = f \quad \text{dans }]0,1[, \\ \\ u(0) = a,\ u(1) = b \end{cases}$$

On va le résoudre numériquement à l'aide de techniques d'équations différentielles. A cet effet, on va transformer $\mathcal{P}$ en un problème de conditions initiales :

$$\mathcal{T}\begin{cases} -\frac{d^2u}{dx^2} + a(x)\frac{du}{dx} + b(x)u = f \\ \\ u(0) = a, \frac{du}{dx}(0) = \xi \end{cases}$$

où ξ devra être déterminé de sorte à ce que $u(1) = b$: c'est ce qu'on appelle la méthode de tir. On peut la mettre en œuvre de la façon suivante pour les équations linéaires : (11)

Soient $u_1(x)$ et $u_2(x)$ les solutions de $\mathcal{T}$ pour $\xi = \xi_1$ et $\xi = \xi_2$ respectivement, $\xi_1 \neq \xi_2$.
La solution u de $\mathcal{P}$ peut alors s'écrire comme

$$u(x) = \lambda_1 u_1(x) + \lambda_2 u_2(x).$$

1. Quelles relations vérifient λ_1 et λ_2 (on construira un système linéaire 2 x 2 dont λ_1 et λ_2 sont solutions en considérant $u(0)$ puis $u(1)$).

2. On réécrit l'équation du second ordre en deux équations couplées du premier ordre, d'inconnues u et $v = \frac{du}{dx}$. Ecrire le système obtenu.

3. Proposer une méthode d'intégration de ce système.

4. Programmer en SCILAB une procédure de résolution et faire tourner le code sur le problème de Dirichlet homogène.

5. Représenter sur un même graphe, $u,\ u_1$ et u_2.

6. Quelles méthodes d'intégration[1] choisir pour u et pour v que la solution approchée obtenue coincide avec celle que donnerait une méthode de différences finies appliquée aux problème aux limites ?

Exercice 7 (modélisation d'une artère)
On modélise une artère par un cylindre souple de base circulaire. On note (12)

- L la longueur di cylindre (13)

- R_0 son rayon. (14)

La paroi est constituée d'un matériau élastique et on note H son épaisseur. Pour décrire le comportement mécanique de la paroi en interaction avec le sang, on procède comme suit : on

[1] Euler implicite, Euler explicite, Runge Kutta $\cdots$

suppose que le cylindre est constitué d'anneaux indépendants les uns des autres ce qui revient à ne tenir compte que des déformations radiales, celles longitudinales étant négligeables. Le rayon R du vaisseau est donné par

$$R(t) = R_0 + y(t)$$

L'application du principe fondamental de la dynamique conduit à l'EDO

$$y''(t) + \beta y'(t) + \alpha y(t) = \gamma(p(t) - p_0) \tag{16}$$

où $\alpha = \dfrac{E}{\rho_\omega R_0^2}, \gamma = \dfrac{1}{\rho_\omega H}, \beta > 0$. Ici, les paramètres physiques ρ_ω et E désignent respectivement la densité de la paroi artérielle et son module de Young ; la fonction $p - p_0$ représente la contrainte due la différence de pression entre l'intérieur et l'exterieur de l'artère. Au repos, lorsque $p = p_0$ l'artère est cylindrique et $R = R_0$.

1. Etudier cette EDO ; on pourra la mettre sous forme equivalente d'un système différentiel.

2. Mettre en œuvre la méthode d'Euler explicite avec les données suivantes (réalistes)

   $y(0) = 0, L = 5.10^{-2}[m, R_0 = 5.10^{-3}[m],$
   $\rho_\omega = 10^3[Kgm^{-3}], H = 3.10^{-4}[m], E = 9.10^5[m]$
   $\gamma = 3.3[Kg^{-1}m^{-2}], \alpha = 26.10^6[s^{-2}]$
   $p - p_0 = x\Delta p(a + b\cos(\omega_0 t)), \Delta p = 0.25.133.32[Nm^{-2}], a = 10.133.32[Nm^{-2}],$
   $b = 133.32[Nm^{-2}], \omega_0 = 2\pi/0.8[rads^{-1}]$

   pour $x = L/2$.

3. Etudier les cas $\beta = \sqrt{\alpha}$ et $\beta = \alpha$. On prendra $\Delta t = 10^{-4}$ dans le premier cas ; on pourra calculer le quotient de raideur et proposer une autre méthode numérique.