Homologie à coefficients sur des petites catégories

Serge Bouc

Cette note présente les définitions et propriétés de base de l'homologie à coefficients sur une petite catégorie, et une liste d'exemples où une telle situation apparaît concrètement. L'essentiel est tiré d'un article de Quillen ([4]). Voir aussi [3] pour une présentation "toposique" de la cohomologie.

1. Préfaisceaux sur une petite catégorie

1.1. Définition : *Pour des raisons historiques, un foncteur d'une petite catégorie $\mathcal{C}$ à valeurs dans une catégorie $\mathcal{M}$ est aussi appelé préfaisceau sur $\mathcal{C}$ à valeurs dans $\mathcal{M}$. On a ainsi une notion de préfaisceau d'ensembles, de A-modules, d'anneaux ..., suivant que $\mathcal{M}$ est la catégorie des ensembles, des A-modules pour un anneau A, des anneaux...*

Un morphisme des préfaisceaux est une transformation naturelle de foncteurs.

1.2. Exemple : Un ensemble ordonné $(X, \leq)$ est une catégorie, dont les objets sont les éléments de X. L'ensemble des morphismes de $x \in X$ dans $y \in X$ est de cardinal 1 si $x \leq y$, et 0 sinon.

La raison historique mentionnée ci-dessus correspond au cas où X est l'ensemble des ouverts d'un espace topologique, ordonné pour l'ordre inverse de l'inclusion.

Pour cette même raison, on définit habituellement un préfaisceau sur un catégorie $\mathcal{C}$ comme un foncteur contravariant sur $\mathcal{C}$. Le passage à la catégorie opposée fait passer d'une définition à l'autre.

1.3. Catégories de préfaisceaux. Les préfaisceaux sur une catégorie $\mathcal{C}$ à valeurs dans une catégorie $\mathcal{M}$ forment une catégorie $\mathbf{Fonct}_{\mathcal{M}}(\mathcal{C})$. Dans le cas où $\mathcal{M}$ est la catégorie des A-modules pour un anneau A, cette catégorie est notée $\mathbf{Fonct}_A(\mathcal{C})$.

Si $\mathcal{M}$ est une catégorie abélienne, il est est de même de $\mathbf{Fonct}_{\mathcal{M}}(\mathcal{C})$: le noyau (resp. le conoyau) d'un morphisme $f : F \to G$ est donné pour un objet X de $\mathcal{C}$ par

$$(\mathrm{Ker}\ f)(X) = \mathrm{Ker}\ f_X \qquad (\mathrm{Coker}\ f)(X) = \mathrm{Coker}\ f_X \quad ,$$

où $f_X : F(X) \to G(X)$ est l'évaluation de f en X.

De même, une suite
$$F \to G \to H$$
de $\mathbf{Fonct}_{\mathcal{M}}(\mathcal{C})$ est exacte si et seulement si pour tout objet X de $\mathcal{C}$, la suite
$$F(X) \to G(X) \to H(X)$$
est exacte dans $\mathcal{M}$.

1.4. Image réciproque. Lorsque $\Phi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est un foncteur entre petites catégories, la composition par Φ induit un foncteur $\mathbf{Fonct}_{\mathcal{M}}(\mathcal{D}) \to \mathbf{Fonct}_{\mathcal{M}}(\mathcal{C})$. L'image du préfaisceau G par ce foncteur est notée $G \circ \Phi$, ou $\Phi^*(G)$: c'est l'image réciproque de G par Φ.

Cette construction est évidemment fonctorielle par rapport à G : il y a donc un foncteur d'image réciproque par Φ de $\mathbf{Fonct}_{\mathcal{M}}(\mathcal{D})$ dans $\mathbf{Fonct}_{\mathcal{M}}(\mathcal{C})$.

1.5. Image directe. Dans la situation précédente, soit Y un objet de $\mathcal{D}$. Soit $\Phi{\downarrow_Y}$ la catégorie suivante :

- Les objets de $\Phi{\downarrow_Y}$ sont les couples (X, f) formés d'un objet X de $\mathcal{C}$ et d'un morphisme $f : \Phi(X) \to Y$.
- Un morphisme $g : (X, f) \to (X', f')$ dans $\Phi{\downarrow_Y}$ est un morphisme de X dans X' dans $\mathcal{C}$ tel que le diagramme
$$\begin{tikzcd} \Phi(X) \arrow[rr, "\Phi(g)"] \arrow[dr, "f"'] & & \Phi(X') \arrow[dl, "f'"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$
soit commutatif. La composition des morphismes est la composition des morphismes de $\mathcal{C}$.

Si $g : Y \to Y'$ est un morphisme dans $\mathcal{D}$, la composition par g induit un foncteur évident de $\Phi{\downarrow_Y}$ dans $\Phi{\downarrow_{Y'}}$.

1.6. Hypothèse : *Dans la suite, les préfaisceaux considérés seront à valeurs dans une catégorie $\mathcal{M}$ admettant toutes les petites limites inductives.*

Soit alors F un préfaisceau sur $\mathcal{C}$. Si Y est un objet de $\mathcal{D}$, soit
$$F'(Y) = \varinjlim_{\Phi\downarrow_Y} F \quad .$$
Si $g : Y \to Y'$ est un morphisme dans $\mathcal{D}$, alors il résulte de la composition par g un morphisme
$$F'(g) : F'(Y) = \varinjlim_{\Phi\downarrow_Y} F \to F'(Y') = \varinjlim_{\Phi\downarrow_{Y'}} F$$

tel que pour tout objet (X, f) de $\Phi{\downarrow}_Y$, le diagramme

$$(\mathbf{1.7})\qquad \begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{l_{X,f}} & \varinjlim\limits_{\Phi\downarrow_Y} F \\ {\scriptstyle Id}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle F'(g)} \\ F(X) & \xrightarrow[l_{X,g\circ f}]{} & \varinjlim\limits_{\Phi\downarrow_{Y'}} F \end{array}$$

où les flèches horizontales sont les morphismes canoniques, soit commutatif.

Il est clair que F' devient ainsi un préfaisceau sur $\mathcal{D}$, appelé image directe de F, et noté $\Phi_*(F)$.

Cette construction est aussi fonctorielle en F : il y a donc un foncteur d'image directe par Φ de $\mathbf{Fonct}_{\mathcal{M}}(\mathcal{C})$ dans $\mathbf{Fonct}_{\mathcal{M}}(\mathcal{D})$.

2. Propriété d'adjonction

2.1. Proposition : *Soit $\Phi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur entre petites catégories. Alors pour toute catégorie $\mathcal{M}$, le foncteur $F \mapsto \Phi_*(F)$ de $\mathbf{Fonct}_{\mathcal{M}}(\mathcal{C})$ dans $\mathbf{Fonct}_{\mathcal{M}}(\mathcal{D})$ est adjoint à gauche du foncteur $G \mapsto \Phi^*(G)$.*

Démonstration: Soit F un préfaisceau sur $\mathcal{C}$, soit G un préfaisceau sur $\mathcal{D}$, et $\alpha : \Phi_*(F) \to G$ une transformation naturelle. Alors pour tout objet Y de $\mathcal{D}$, il y a un morphisme

$$\alpha_Y : \varinjlim_{\Phi\downarrow_Y} F \to G(Y) \ \ .$$

En particulier, si X est un objet de $\mathcal{C}$ et f un morphisme de $\Phi(X)$ dans Y, il y a un morphisme

$$\alpha_{Y,X,f} : F(X) \to G(Y) \ \ .$$

Il en résulte pour tout objet X de $\mathcal{C}$ un morphisme

$$\beta_X = \alpha_{\Phi(X),X,Id} : F(X) \to G \circ \Phi(X) \ \ .$$

Si $h : X \to X'$ est un morphisme dans $\mathcal{C}$, alors h est aussi un morphisme de $\Big(X, \Phi(h)\Big)$ dans (X', Id) dans $\Phi{\downarrow}_{\Phi(X')}$. Donc

$$\begin{aligned} \beta_{X'} \circ F(h) &= \alpha_{\Phi(X'),X',Id} \circ F(h) = \alpha_{\Phi(X')} \circ l_{X',Id} \circ F(h) = \alpha_{\Phi(X')} \circ l_{X,\Phi(h)} \\ &= G \circ \Phi(h) \circ \alpha_{\Phi(X),X,Id} = G \circ \Phi(h) \circ \beta_X \end{aligned}$$

car α est une transformation naturelle. Il en résulte que β est une transformation naturelle de F dans $G \circ \Phi = \Phi^*(G)$.

Inversement, si une telle transformation β est donnée, alors pour tout objet X de $\mathcal{C}$, il y a un morphisme

$$\beta_X : F(X) \to G \circ \Phi(X) \quad .$$

Alors si f est un morphisme de $\Phi(X)$ dans un objet Y de $\mathcal{D}$, il y a par composition un morphisme

$$G(f) \circ \beta_X : F(X) \to G(Y) \quad .$$

Si $g : (X, f) \to (X', f')$ est un morphisme dans $\Phi{\downarrow_Y}$, alors

$$G(f') \circ \beta_{X'} \circ F(g) = G(f') \circ (G \circ \Phi)(g) \circ \beta_X = G(f) \circ \beta_X \quad .$$

Il en résulte donc un morphisme

$$\alpha_Y : \Phi_*(F)(Y) = \varinjlim_{\Phi\downarrow_Y} F \to G(Y)$$

tel que $\alpha_{Y,X,f} = \alpha_Y \circ l_{X,f} = G(f) \circ \beta_X$.

Si $k : Y \to Y'$ est un morphisme dans $\mathcal{D}$, alors pour un objet (X, f) de $\Phi{\downarrow_Y}$

$$\begin{aligned} \alpha_{Y'} \circ \Phi_*(F)(k) \circ l_{X,f} &= \alpha_{Y'} \circ l_{X,k\circ f} \\ &= G(k \circ f) \circ \beta_X \\ &= G(k) \circ G(f) \circ \beta_X \\ &= G(k) \circ \alpha_Y \circ l_{X,f} \quad , \end{aligned}$$

et il en résulte que $G(k) \circ \alpha_Y = \alpha_{Y'} \circ \Phi_*(F)(k)$, donc que les α_Y constituent une transformation naturelle de $\Phi_*(F)$ dans G.

Les correspondances $\alpha \mapsto \beta$ et $\beta \mapsto \alpha$ ainsi définies sont inverses l'une de l'autre : en effet, si α est une transformation naturelle de $\Phi_*(F)$ dans G, il lui correspond une transformation $\beta : F \to \Phi^*(G)$, laquelle donne la correspondance $\alpha' : \Phi_*(F) \to G$ définie par les morphismes composés

$$F(X) \xrightarrow{\alpha_{\Phi(X),X,Id}} G \circ \Phi(X) \xrightarrow{G(f)} G(Y) \quad .$$

Or le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "l_{X,Id}"] \arrow[d, "Id"'] & \varinjlim_{\Phi\downarrow_{\Phi(X)}} F \arrow[r, "\alpha_{\Phi(X)}"] \arrow[d, "\Phi_*(F)(f)"'] & G \circ \Phi(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(X) \arrow[r, "l_{X,f}"] & \varinjlim_{\Phi\downarrow_Y} F \arrow[r, "\alpha_Y"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

est commutatif, car le carré de gauche est un cas particulier du carré 1.7, et le carré de droite est commutatif si α est une tranformation naturelle. La composée des flèches horizontales du haut est égale à $\alpha_{\Phi(X),X,Id}$, et la composée des flèches horizontales du bas est égale à $\alpha_{Y,X,f}$. En évaluant les morphismes de $F(X)$ dans $G(Y)$ obtenus en parcourant les bords de ce diagramme, il en résulte que

$$\alpha'_{Y,X,f} = G(f) \circ \alpha_{\Phi(X),X,Id} = \alpha_{Y,X,f} \quad ,$$

donc que $\alpha' = \alpha$.

Inversement, en partant d'une transformation naturelle β de F dans $\Phi^*(G)$, donnant une transformation $\alpha : \Phi_*(F) \to G$, la transformation $\beta' : F \to \Phi^*(G)$ associée à α est donnée par

$$\beta'_X = \alpha_{\Phi(X),X,Id} \quad .$$

Or par construction $\alpha_{Y,X,f} = G(f) \circ \beta_X$, donc

$$\beta'_X = G(Id) \circ \beta_X = \beta_X \quad ,$$

donc $\beta' = \beta$, ce qui achève la démonstration de la proposition. $\square$

2.2. Corollaire : *Si $\mathcal{M}$ est une catégorie abélienne, et si F est un objet projectif de $\mathbf{Fonct}_{\mathcal{M}}(\mathcal{C})$, alors $\Phi_*(F)$ est un objet projectif de $\mathbf{Fonct}_{\mathcal{M}}(\mathcal{D})$.*

Démonstration: En effet le foncteur Φ_* est adjoint à gauche du foncteur Φ^* qui est exact. Il envoie donc un objet projectif sur un objet projectif. $\square$

2.3. Corollaire : *Si $\mathcal{M}$ est une catégorie abélienne ayant suffisamment de projectifs, il en est de même de $\mathbf{Fonct}_{\mathcal{M}}(\mathcal{C})$.*

Démonstration: En effet, soit $\mathcal{C}_d$ la catégorie discrète sous-jacente à $\mathcal{C}$, c'est-à-dire la catégorie qui a les même objets que $\mathcal{C}$, mais dont les seuls morphismes sont les morphismes identités de $\mathcal{C}$. Il y a un foncteur évident

$$\Omega_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}_d \to \mathcal{C}$$

qui envoie objets et morphismes sur eux-mêmes. Un préfaisceau F sur $\mathcal{C}_d$ est simplement la donnée pour tout objet X de $\mathcal{C}$, d'un objet $F(X)$ de $\mathcal{M}$. Si F et F' sont deux préfaisceaux sur $\mathcal{C}_d$, alors

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Fonct}_{\mathcal{M}}(\mathcal{C}_d)}(F, F') = \prod_{X \in Ob(\mathcal{C})} \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}\Big(F(X), F'(X)\Big) \quad .$$

Il en résulte en particulier que si $F(X)$ est un objet projectif de $\mathcal{M}$ pour tout objet X de $\mathcal{C}$, alors F est un objet projectif de $\mathbf{Fonct}_{\mathcal{M}}(\mathcal{C}_d)$: en effet, un produit direct de suites exactes de groupes abéliens est une suite exacte de groupes abéliens.

L'image directe par $\Omega_{\mathcal{C}}$ d'un préfaisceau F sur $\mathcal{C}_d$ est définie pour un objet Y de $\mathcal{C}$ par

$$(\Omega_{\mathcal{C}})_*(F)(Y) = \bigoplus_{X \xrightarrow{f} Y} F(X) \quad .$$

Soit

$$i^F_{X,f} : F(X) \to \oplus_{X \xrightarrow{f} Y} F(X)$$

le morphisme canonique. Alors

$$(\Omega_{\mathcal{C}})_*(F)(h) \circ i^F_{X,f} = i^F_{X,h\circ f} \quad .$$

Soit alors pour tout objet X de $\mathcal{C}$, un objet projectif $P(X)$ de $\mathcal{M}$ au-dessus de $G(X)$, i.e. doté d'un épimorphisme

$$p_X : P(X) \to G(X) \to 0 \quad .$$

La donnée des objets $P(X)$ définit un préfaisceau P sur $\mathcal{C}_d$, qui est un objet projectif de $\mathbf{Fonct}_{\mathcal{M}}(\mathcal{C}_d)$. La donnée des morphismes p_X définit un morphisme $p : P \to (\Omega_{\mathcal{C}})^*(G)$. Par adjonction, il en résulte un morphisme q de $(\Omega_{\mathcal{C}})_*(P)$ dans G tel que

$$q_Y \circ i^P_{X,f} = G(f) \circ p_X$$

et qui est évidemment un épimorphisme, puisque $q_Y \circ i^P_{Y,Id}$ est l'épimorphisme p_Y.

Comme de plus pour tout préfaisceau G sur $\mathcal{C}$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Fonct}_{\mathcal{M}}(\mathcal{C})}\Big((\Omega_{\mathcal{C}})_*(P), G\Big) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fonct}_{\mathcal{M}}(\mathcal{C}_d)}\Big(P, (\Omega_{\mathcal{C}})^*(G)\Big) \quad ,$$

et comme le foncteur $(\Omega_{\mathcal{C}})^*$ est exact, il en résulte que $(\Omega_{\mathcal{C}})_*(P)$ est un objet projectif de $\mathcal{C}$, ce qui complète la démonstration. □

3. Homologie

3.1. Hypothèse : *Dans la suite, la catégorie $\mathcal{M}$ sera une catégorie abélienne ayant suffisamment de projectifs.*

Soit $\bullet$ la catégorie ayant un seul objet et un seul morphisme. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie, il y a un (unique!) foncteur

$$\Gamma = \Gamma_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \bullet \ .$$

Un préfaisceau M sur $\bullet$ à valeurs dans une catégorie $\mathcal{M}$ est simplement un objet de $\mathcal{M}$. Le foncteur $\Gamma^*(M)$ est le foncteur constant sur $\mathcal{C}$, égal à M partout, les morphismes de transition étant égaux à l'identité.

Inversement, si F est un préfaisceau sur $\mathcal{C}$ à valeurs dans $\mathcal{M}$, alors $\Gamma_*(F)$ n'est autre que la limite inductive du foncteur F sur $\mathcal{C}$.

Le foncteur de limite inductive est donc adjoint à gauche du foncteur constant. C'est donc un foncteur exact à droite.

3.2. Définition : *Soit $i \in \mathbb{N}$. Le i-ème objet d'homologie de la catégorie $\mathcal{C}$ à valeurs dans le préfaisceau $F : \mathcal{C} \to \mathcal{M}$ est par définition la valeur en F du i-ème foncteur dérivé gauche du foncteur de limite inductive sur $\mathcal{C}$. C'est un objet de $\mathcal{M}$, noté $H_i(\mathcal{C}, F)$.*

Pour calculer $H_i(\mathcal{C}, F)$, on choisit une résolution projective de F dans $\mathbf{Fonct}_{\mathcal{M}}(\mathcal{C})$

$$\ldots \to P_n \to \ldots \to P_1 \to P_0 \to F \to 0 \ .$$

Alors $H_i(\mathcal{C}, F)$ est le i-ème objet d'homologie du complexe

$$\ldots \to \varinjlim_{\mathcal{C}} P_n \to \ldots \to \varinjlim_{\mathcal{C}} P_1 \to \varinjlim_{\mathcal{C}} P_0 \to 0 \ .$$

En particulier $H_0(\mathcal{C}, F) = \varinjlim_{\mathcal{C}} F$.

Lorsque $\mathcal{M}$ est la catégorie des groupes abéliens, et lorsque F est le foncteur constant égal à $\mathbb{Z}$, alors $H_i(\mathcal{C}, F)$ est noté $H_i(\mathcal{C}, \mathbb{Z})$, et s'appelle le i-ème groupe d'homologie à valeurs entières de $\mathcal{C}$.

3.3. Lemme : *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie admettant un objet final. Alors pour tout préfaisceau F sur $\mathcal{C}$, à valeurs dans $\mathcal{M}$, et pour tout entier $i \geq 1$*

$$H_i(\mathcal{C}, F) = 0 \ .$$

Démonstration: Soit c un objet final de $\mathcal{C}$. Alors pour tout préfaisceau F sur $\mathcal{C}$, il est clair que

$$\varinjlim_{\mathcal{C}} F \simeq F(c) \ ,$$

et cet isomorphisme est fonctoriel en F. Le foncteur de limite inductive est donc isomorphe au foncteur d'évaluation en c. En particulier, c'est un foncteur exact, et ses foncteurs dérivés de rang au moins 1 sont nuls. $\square$

3.4. Projectivité relative. Soit F un préfaisceau sur $\mathcal{C}$, à valeurs dans $\mathcal{M}$. Pour le foncteur $\Omega_{\mathcal{C}}$, le morphisme de co-unité η de l'adjonction de la proposition 2.1 est donné pour un objet Y de $\mathcal{C}$ par le morphisme

$$\eta_Y : (\Omega_{\mathcal{C}})_* \circ (\Omega_{\mathcal{C}})^*(F)(Y) \to F(Y)$$

tel que $\eta_Y \circ i^F_{X,f} = F(f)$.

Ce morphisme est un épimorphisme, puisque sa composée avec le morphisme $s_Y = i^F_{Y,Id}$ est l'identité. Il faut noter que bien que s_Y soit une section de η_Y pour tout Y, le morphisme η n'est pas un épimorphisme scindé de préfaisceaux, car les morphismes s_Y ne sont pas fonctoriels en Y.

Ainsi $(\Omega_{\mathcal{C}})^*$ est un foncteur entre catégories abéliennes, admettant un adjoint à gauche $(\Omega_{\mathcal{C}})_*$. De plus, le morphisme de co-unité est un épimorphisme : dans cette situation, les résultats de la section 4 de [1] s'appliquent. En particulier, le lemme 4.4 de [1] montre que $(\Omega_{\mathcal{C}})^*$ est un foncteur fidèle. J'utiliserai les notions suivantes, tirées de [1] (cf. aussi [5] 8.6.7) :

3.5. Définition : *Un préfaisceau G sur $\mathcal{C}$ est dit $(\Omega_{\mathcal{C}})^*$-projectif, ou projectif par rapport à $(\Omega_{\mathcal{C}})^*$, s'il vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :*

1. *Le morphisme $(\Omega_{\mathcal{C}})_* \circ (\Omega_{\mathcal{C}})^*(G) \to G$ est un épimorphisme scindé.*
2. *Il existe un objet F de $\mathbf{Fonct}_{\mathcal{M}}(\mathcal{C}_d)$ et un épimorphisme scindé $(\Omega_{\mathcal{C}})_*(F) \to G$.*
3. *Pour tout diagramme*

$$\begin{array}{ccc} & & G \\ & & \downarrow a \\ A & \xrightarrow{b} & B \end{array}$$

pour lequel $(\Omega_{\mathcal{C}})^*(b)$ est un épimorphisme scindé, il existe un morphisme $c : G \to A$ tel que $a = b \circ c$.

Comme le morphisme de co-unité est surjectif, il en résulte qu'un objet projectif de $\mathbf{Fonct}_{\mathcal{M}}(\mathcal{C})$ est toujours $(\Omega_{\mathcal{C}})^*$-projectif.

3.6. Résolution standard. La proposition suivante est une traduction du lemme 4.6 de [1] :

3.7. Proposition : *Tout préfaisceau F sur $\mathcal{C}$ à valeurs dans $\mathcal{M}$ admet une* *résolution*

$$(\mathbf{3.8}) \qquad \ldots \to L_n \to \ldots \to L_1 \to L_0 \to F \to 0$$

par des objets $(\Omega_{\mathcal{C}})^*$-projectifs, telle que le complexe

$$\ldots \to (\Omega_{\mathcal{C}})^*(L_n) \to \ldots \to (\Omega_{\mathcal{C}})^*(L_1) \to (\Omega_{\mathcal{C}})^*(L_0) \to (\Omega_{\mathcal{C}})^*(F) \to 0$$

soit exact et scindé, et une telle résolution est unique à homotopie près.

En particulier, si F est projectif, le complexe 3.8 est homotope à la résolution $0 \to F \stackrel{Id}{\to} F \to 0$, donc il est acyclique et scindé.

3.9. Lemme : *Soit G un préfaisceau sur $\mathcal{C}_d$. Alors*

$$\varinjlim_{\mathcal{C}} (\Omega_{\mathcal{C}})_*(G) = \bigoplus_{X \in Ob(\mathcal{C})} G(X) \ .$$

Démonstration: En effet, le foncteur de limite inductive sur $\mathcal{C}$ n'est autre que $(\Gamma_{\mathcal{C}})_*$. Or

$$(\Gamma_{\mathcal{C}})_* \circ (\Omega_{\mathcal{C}})_* = (\Gamma_{\mathcal{C}} \circ \Omega_{\mathcal{C}})_* = (\Gamma_{\mathcal{C}_d})_* \ ,$$

et de plus $(\Gamma_{\mathcal{C}_d})_*$ est le foncteur de limite inductive sur $\mathcal{C}_d$. Donc pour tout préfaisceau G sur $\mathcal{C}_d$

$$\varinjlim_{\mathcal{C}} (\Omega_{\mathcal{C}})_*(G) = \varinjlim_{\mathcal{C}_d} G = \bigoplus_{X \in Ob(\mathcal{C})} G(X) \ ,$$

ce qui prouve le lemme. □

3.10. Hypothèse : *Je supposerai désormais que $\mathcal{M}$ satisfait de plus l'axiome (AB4) (cf. [5] A.4.4) des catégories abéliennes, i.e. que les sommes directes quelconques indexées par des ensembles existent dans $\mathcal{M}$, et qu'une somme directe quelconque de suite exactes est exacte.*

3.11. Proposition : *Soit F un préfaisceau sur $\mathcal{C}$, projectif par rapport au foncteur $(\Omega_{\mathcal{C}})^*$. Alors pour tout entier $i \geq 1$*

$$H_i(\mathcal{C}, F) = 0 \ .$$

Démonstration: Il suffit de montrer la proposition lorsque $F = (\Omega_{\mathcal{C}})_*(G)$, pour un préfaisceau G sur $\mathcal{C}_d$. Soit alors pour tout objet X de $\mathcal{C}$, une résolution projective

$$\ldots \to P_n(X) \to \ldots \to P_1(X) \to P_0(X) \to G(X) \to 0 \ .$$

Il en résulte une résolution
(**3.12**)

$$\ldots \to (\Omega_{\mathcal{C}})_*(P_n) \to \ldots \to (\Omega_{\mathcal{C}})_*(P_1) \to (\Omega_{\mathcal{C}})_*(P_0) \to (\Omega_{\mathcal{C}})_*(G) \to 0 \ ,$$

puisque le foncteur $(\Omega_{\mathcal{C}})_*$ est exact, donné par

$$(\Omega_{\mathcal{C}})_*(G)(Y) = \bigoplus_{X \xrightarrow{f} Y} G(X) \ .$$

De plus les $(\Omega_{\mathcal{C}})_*(P_i)$ sont projectifs, car les P_i sont projectifs dans $\mathbf{Fonct}_{\mathcal{M}}(\mathcal{C}_d)$. En appliquant le foncteur de limite inductive sur $\mathcal{C}$ à la suite exacte 3.12, il vient

$$\ldots \to \bigoplus_{X \in Ob(\mathcal{C})} P_n(X) \to \ldots \to \bigoplus_{X \in Ob(\mathcal{C})} P_1(X) \to \bigoplus_{X \in Ob(\mathcal{C})} P_0(X) \to \bigoplus_{X \in Ob(\mathcal{C})} G(X) \to 0 \ .$$

Cette suite est exacte, car somme directe de suites exactes, et la proposition en découle. □

3.13. Proposition : *Soit $\Phi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur entre petites catégories. Alors pour tout préfaisceau F sur $\mathcal{C}$, il existe une suite spectrale homologique telle que*

$$E^2_{p,q} = H_p\Big(\mathcal{D}, Y \mapsto H_q(\Phi\downarrow_Y, F)\Big) \Rightarrow H_{p+q}(\mathcal{C}, F) \ .$$

Démonstration: En effet, le diagramme de catégories

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{D} \\ \Gamma_{\mathcal{C}} & \searrow & \downarrow \Gamma_{\mathcal{D}} \\ & & \bullet \end{array}$$

est commutatif. Il en résulte que $(\Gamma_{\mathcal{D}})_* \circ \Phi_* = (\Gamma_{\mathcal{C}})_*$. De plus le foncteur Φ_* transforme un objet projectif en un objet projectif. La suite spectrale cherchée n'est autre que la suite spectrale de Grothendieck associée au foncteur composé $(\Gamma_{\mathcal{D}})_* \circ \Phi_*$. □

Les deux résultats précédents conduisent à s'intéresser au cas où, pour tout objet Y de $\mathcal{D}$, la catégorie $\Phi\downarrow_Y$ admet un objet final :

3.14. Proposition : *Soit $\Phi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur entre petites catégories. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *Pour tout objet Y de $\mathcal{D}$, la catégorie $\Phi{\downarrow}_Y$ admet un objet final.*
2. *Le foncteur Φ admet un adjoint à droite.*

Démonstration: En effet, si la condition 1) est vérifiée, soit pour tout objet Y de $\mathcal{D}$ un objet final $\Big(\Theta(Y), \eta_Y\Big)$ de $\Phi{\downarrow}_Y$. Alors η_Y est un morphisme de $\Phi\Big(\Theta(Y)\Big)$ dans Y. Dire que $\Big(\Theta(Y), \eta_Y\Big)$ est un objet final signifie que si X est un objet de $\mathcal{C}$ et f un morphisme de $\Phi(X)$ dans Y, alors il existe un seul morphisme g de X dans $\Theta(Y)$ tel que $f = \eta_Y \circ \Phi(g)$.

En particulier, pour $Y = \Phi(X)$ et $f = Id_{\Phi(X)}$, j'obtiens un morphisme ε_X de X dans $\Theta\Big(\Phi(X)\Big)$ tel que

$$(\mathbf{3.15}) \qquad Id_{\Phi(X)} = \eta_{\Phi(X)} \circ \Phi(\varepsilon_X) \ .$$

Si $h : Y \to Y'$ est un morphisme dans $\mathcal{D}$, alors $h \circ \eta_Y$ est un morphisme de $\Phi\Big(\Theta(Y)\Big)$ dans Y'. Il existe donc un unique morphisme $\Theta(h)$ de $\Theta(Y)$ dans $\Theta(Y')$ tel que

$$(\mathbf{3.16}) \qquad h \circ \eta_Y = \eta_{Y'} \circ \Phi\Big(\Theta(h)\Big) \ .$$

Cette définition fait de Θ un foncteur de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{C}$. De plus, en notant Ψ_Y l'endomorphisme de $\Theta(Y)$ défini par $\Psi_Y = \Theta(\eta_Y) \circ \varepsilon_{\Theta(Y)}$, j'ai

$$\eta_Y \circ \Phi(\Psi_Y) = \eta_Y \circ \Phi\Big(\Theta(\eta_Y)\Big) \circ \Phi(\varepsilon_{\Theta(Y)}) = \eta_Y \circ \eta_{\Phi(\Theta(Y))} \circ \Phi(\varepsilon_{\Theta(Y)}) \ .$$

Mais le produit $\eta_{\Phi\left(\Theta(Y)\right)} \circ \Phi(\varepsilon_{\Theta(Y)})$ est égal à l'identité, par l'équation 3.15. Donc $\eta_Y \circ \Phi(\Psi_Y) = \eta_Y$, ce qui prouve que Ψ_Y est l'identité de $\Theta(Y)$, puisqu'il existe un seul endomorphisme i de $\Theta(Y)$ tel que $\eta_Y \circ \Phi(i) = \eta_Y$. En d'autres termes

$$(\mathbf{3.17}) \qquad \Theta(\eta_Y) \circ \varepsilon_{\Theta(Y)} = Id_{\Theta(Y)} \ .$$

L'équation 3.16 montre que les morphismes η_Y induisent une transformation naturelle du foncteur $\Theta \circ \Phi$ vers l'identité. De même, les morphismes ε_X induisent une transformation naturelle du foncteur identité vers le foncteur

$\Theta \circ \Phi$: en effet, il s'agit de montrer que si $g : X \to X'$ est un morphisme dans $\mathcal{C}$, alors

$$\textbf{(3.18)} \qquad \Theta\Big(\Phi(g)\Big) \circ \varepsilon_X = \varepsilon_{X'} \circ g \ .$$

Soit P_X le premier membre de cette équation, et S_X le second. Alors

$$\eta_{\Phi(X')} \circ \Phi(P_X) = \eta_{\Phi(X')} \circ \Phi\Theta\Phi(g) \circ \Phi(\varepsilon_X) = \Phi(g) \circ \eta_{\Phi(X)} \circ \Phi(\varepsilon_X) = \Phi(g) \ .$$

D'autre part

$$\eta_{\Phi(X')} \circ \Phi(S_X) = \eta_{\Phi(X')} \circ \Phi(\varepsilon_{X'}) \circ \Phi(g) = \Phi(g) \ .$$

L'égalité 3.18 en résulte, car il existe un seul morphisme j tel que

$$\eta_{\Phi(X')} \circ \Phi(j) = \Phi(g) \ .$$

Les équations 3.15 et 3.17 montrent alors que Θ est adjoint à droite de Φ. Donc la condition 2) est vérifiée.

Inversement, si le foncteur Φ admet un adjoint à droite Θ, alors pour tout objet X de $\mathcal{C}$, il y a un morphisme d'unité $\varepsilon_X : X \to \Theta \circ \Phi(X)$, et pour tout objet Y de $\mathcal{D}$, il y a un morphisme de co-unité $\eta_Y : \Phi \circ \Theta(Y) \to Y$. En particulier, le couple $\Big(\Theta(Y), \eta_Y\Big)$ est un objet de $\Phi{\downarrow_Y}$.

Si (X, f) est un objet de $\Phi{\downarrow_X}$, alors $\Theta(f) \circ \varepsilon_X$ est un morphisme de (X, f) dans $\Big(\Theta(Y), \eta_Y\Big)$ dans la catégorie $\Phi{\downarrow_Y}$: en effet

$$\eta_Y \circ \Phi\Big(\Theta(f) \circ \varepsilon_X\Big) = \eta_Y \circ \Phi\Theta(f) \circ \Phi(\varepsilon_X) = f \circ \eta_{\Phi(X)} \circ \Phi(\varepsilon_X) = f \ .$$

Inversement, si g est un morphisme de (X, f) dans $\Big(\Theta(Y), \eta_Y\Big)$ dans la catégorie $\Phi{\downarrow_Y}$, alors g est un morphisme de X dans $\Theta(Y)$ tel que $f = \eta_Y \circ \Phi(g)$. Alors

$$\Theta(f) \circ \varepsilon_X = \Theta(\eta_Y) \circ \Theta\Phi(g) \circ \varepsilon_X = \Theta(\eta_Y) \circ \varepsilon_{\Theta(Y)} \circ g = g \ .$$

Cela montre que $\Big(\Theta(Y), \eta_Y\Big)$ est un objet final de $\Phi{\downarrow_Y}$. D'où la proposition. □

3.19. Corollaire : *Soit $\Phi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur entre petites catégories, ayant un adjoint à droite Θ. Alors pour tout préfaisceau F sur $\mathcal{C}$ et pour tout entier n*

$$H_n(\mathcal{C}, F) \simeq H_n(\mathcal{D}, F \circ \Theta) \ ,$$

et en particulier $H_n(\mathcal{C}, \mathbb{Z}) \simeq H_n(\mathcal{D}, \mathbb{Z})$

Démonstration: C'est le cas où la suite spectrale dégénère. $\square$

3.20. Notation : *Soit F un préfaisceau sur $\mathcal{C}$ à valeurs dans $\mathcal{M}$. Je pose*

$$L_0(F) = (\Omega_{\mathcal{C}})_* \circ (\Omega_{\mathcal{C}})^*(F) \quad ,$$

et pour un entier $i \geq 1$

$$L_i(F) = L_0\Big(L_{i-1}(F)\Big) \quad .$$

Il est facile de voir par récurrence que si Y est un objet de $\mathcal{C}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$L_n(F)(Y) = \bigoplus_{X_0 \overset{f_0}{\to} \dots \overset{f_{n-1}}{\to} X_n \overset{f_n}{\to} Y} F(X_0) \quad .$$

Soit $d_0 : L_0(F) \to F$ le morphisme de co-unité, et $d_n : L_n(F) \to L_{n-1}(F)$ défini par

$$(d_n)_Y \circ i^F_{X_0 \overset{f_0}{\to} \dots \overset{f_{n-1}}{\to} X_n \overset{f_n}{\to} Y} = i^F_{X_1 \overset{f_1}{\to} \dots \overset{f_{n-1}}{\to} X_n \overset{f_n}{\to} Y} \circ F(f_0) + \dots$$

$$\dots \sum_{i=1}^{n} (-1)^i i^F_{X_0 \overset{f_0}{\to} \dots \overset{f_{i-2}}{\to} X_{i-1} \overset{f_i f_{i-1}}{\to} X_{i+1} \overset{f_{i+1}}{\to} \dots \overset{f_{n-1}}{\to} X_n \overset{f_n}{\to} Y} \quad .$$

Alors il est facile de vérifier que les d_n sont des morphismes de préfaisceaux, et que $d_n \circ d_{n-1} = 0$. De plus

3.21. Lemme : *Le complexe*

$$R_* = \dots L_n(F) \overset{d_n}{\to} \dots \overset{d_1}{\to} L_0(F) \overset{d_0}{\to} F \to 0$$

est une résolution de F par des objets $(\Omega_{\mathcal{C}})^*$-projectifs, et son image par $(\Omega_{\mathcal{C}})^*$ est acyclique et scindée.

Démonstration: Par construction, les $L_n(F)$ sont $(\Omega_{\mathcal{C}})^*$-projectifs, car ils sont dans l'image de $(\Omega_{\mathcal{C}})_*$. De plus, il est facile de vérifier que les morphismes $h_Y : F(Y) \to L_0(F)(Y)$ et $(h_n)_Y : L_n(F)(Y) \to L_{n+1}(F)(Y)$ définis pour un objet Y de $\mathcal{C}$ par

$$h_Y(u) = i^F_{Y,Id} \qquad (h_n)_Y \circ i^F_{X_0 \overset{f_0}{\to} \dots \overset{f_{n-1}}{\to} X_n \overset{f_n}{\to} Y} = i^F_{X_0 \overset{f_0}{\to} \dots \overset{f_{n-1}}{\to} X_n \overset{f_n}{\to} Y \overset{Id}{\to} Y}$$

sont des homotopies de l'identité vers le morphisme nul du complexe

$$\dots L_n(F)(Y) \stackrel{d_n}{\to} \dots \stackrel{d_1}{\to} L_0(F)(Y) \stackrel{d_0}{\to} F(Y) \to 0 \ .$$

En d'autre termes, le complexe $(\Omega_{\mathcal{C}})^*(R_*)$ est acyclique et scindé. Comme $(\Omega_{\mathcal{C}})^*$ est exact et fidèle, le complexe R_* est acyclique. □

3.22. Notation : *Soit n un entier naturel. Je note $C_n(\mathcal{C}, F)$ la limite inductive de $L_n(F)$ sur $\mathcal{C}$.*

En d'autres termes, par le lemme 3.9

$$C_n(F) = \bigoplus_{X_0 \stackrel{f_0}{\to} \dots \stackrel{f_{n-1}}{\to} X_n} F(X_0) \ .$$

Les différentielles d_n donnent à la limite des différentielles $\delta_n : C_n(F) \to C_{n-1}(F)$ définies par

$$\begin{aligned}\delta_n \circ i^F_{X_0 \stackrel{f_0}{\to} \dots \stackrel{f_{n-1}}{\to} X_n} &= i^F_{X_1 \stackrel{f_1}{\to} \dots \stackrel{f_{n-1}}{\to} X_n} \circ F(f_0) + \dots \\ &\dots \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i i^F_{X_0 \stackrel{f_0}{\to} \dots \stackrel{f_{i-2}}{\to} X_{i-1} \stackrel{f_i f_{i-1}}{\to} X_{i+1} \stackrel{f_{i+1}}{\to} \dots \stackrel{f_{n-1}}{\to} X_n} + \dots \\ &\dots (-1)^n i^F_{X_0 \stackrel{f_0}{\to} \dots \stackrel{f_{n-2}}{\to} X_{n-1}} \ .\end{aligned}$$

3.23. Proposition : *Le i-ème objet d'homologie du complexe $\Big(C_*(F), \delta_*\Big)$ est isomorphe à $H_i(\mathcal{C}, F)$.*

Démonstration: Cela résulte (cf. [5] ex. 2.4.3) du fait que par la proposition 3.11, le complexe $\Big(L_i(F), d_i\Big)$ est une résolution de F par des objets acycliques pour le foncteur de limite inductive. □

3.24. Une autre résolution. Soit $L'_n(F)(Y)$ le sous-objet de $L_n(F)(Y)$ défini par $L'_0 = 0$ et si $n \geq 1$

$$L'_n(F)(Y) = \bigoplus_{X_0 \stackrel{f_0}{\to} \dots \stackrel{f_{n-1}}{\to} X_n \stackrel{f_n}{\to} Y} F(X_0) \ ,$$

où la somme porte sur les suites $X_0 \stackrel{f_0}{\to} \dots \stackrel{f_{n-1}}{\to} X_n \stackrel{f_n}{\to} Y$ pour lesquelles au moins un des morphismes $f_0, \dots, f_{n-1}$ est égal à l'identité. Il est facile de vérifier que $L'_n(F)$ est un sous-préfaisceau de $L_n(F)$, et que $d_n\Big(L'_n(F)\Big) \subseteq L'_{n-1}(F)$. Autrement dit, les $L'_n(F)$ constituent un sous-complexe du complexe $L_*(F)$. De plus, le complexe $L'_*(F)(Y)$ est visiblement stable par les homotopies h_*.

Il en résulte qu'en posant pour $n \geq 0$

$$\hat{L}_n(F) = L_n(F)/L'_n(F) \ ,$$

j'obtiens une résolution de F dont l'image par $(\Omega_{\mathcal{C}})^*$ est acyclique et scindée. De plus $\hat{L}_0(F) = L_0(F)$, et si $i \geq 1$

$$\hat{L}_n(F)(Y) = \bigoplus_{X_0 \overset{f_0}{\to} \dots \overset{f_{n-1}}{\to} X_n \overset{f_n}{\to} Y} F(X_0) \ ,$$

où la somme porte sur les suites $X_0 \overset{f_0}{\to} \dots \overset{f_{n-1}}{\to} X_n \overset{f_n}{\to} Y$ pour lesquelles les morphismes $f_0, \dots, f_{n-1}$ sont différents de l'identité. Il est alors clair que le foncteur $\hat{L}_n(F)$ est dans l'image de $(\Omega_{\mathcal{C}})_*$, donc qu'il est $(\Omega_{\mathcal{C}})^*$-projectif. La proposition 3.7 permet de conclure que le complexe $\hat{L}_*(F)$ est homotope au complexe $\hat{L}_*(F)$. Ce qui justifie les notations suivantes :

3.25. Notation : *Soit n un entier naturel, et $\hat{C}_n(\mathcal{C}, F)$ défini par*

$$\hat{C}_n(F) = \bigoplus_{X_0 \overset{f_0}{\to} \dots \overset{f_{n-1}}{\to} X_n} F(X_0) \ ,$$

où la somme porte sur les suites $X_0 \overset{f_0}{\to} \dots \overset{f_{n-1}}{\to} X_n$ telles que pour tout i, le morphisme f_i soit différent du morphisme identique.

Je note $\hat{\delta}_n : \hat{C}_n(F) \to \hat{C}_{n-1}(F)$ le morphisme défini par

$$\begin{aligned}\hat{\delta}_n \circ i^F_{X_0 \overset{f_0}{\to} \dots \overset{f_{n-1}}{\to} X_n} &= i^F_{X_1 \overset{f_1}{\to} \dots \overset{f_{n-1}}{\to} X_n} \circ F(f_0) + \dots \\ &\dots \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \varepsilon_{f_i f_{i-1}} i^F_{X_0 \overset{f_0}{\to} \dots \overset{f_{i-2}}{\to} X_{i-1} \overset{f_i f_{i-1}}{\to} X_{i+1} \overset{f_{i+1}}{\to} \dots \overset{f_{n-1}}{\to} X_n} + \dots \\ &\qquad \dots (-1)^n i^F_{X_0 \overset{f_0}{\to} \dots \overset{f_{n-2}}{\to} X_{n-1}} \ ,\end{aligned}$$

où $\varepsilon_g = 1$ si g n'est pas le morphisme identique, et $\varepsilon_g = 0$ sinon.

Les considérations précédentes prouvent alors le résultat suivant :

3.26. Proposition : *Les $\Big(\hat{C}_n(\mathcal{C}), F\Big)$ et les morphismes $\hat{\delta}_n$ constituent un* *complexe dans $\mathcal{M}$, dont le i-ème objet d'homologie est isomorphe à $H_i(\mathcal{C}, F)$.*

4. Exemples

4.1. Homologie des groupes. Soit G un groupe, et $\bullet_G$ la catégorie ayant un seul objet, et dont les morphismes sont les éléments de G, la composition des morphismes étant la multiplication de G.

Un préfaisceau sur $\bullet_G$ à valeurs dans les groupes abéliens n'est autre qu'un $\mathbb{Z}G$-module. Si M est un tel préfaisceau, alors

$$\varinjlim_{\bullet_G} M = M_G = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M \quad .$$

Il en résulte que les foncteurs dérivés du foncteur de limite inductive sont isomorphes aux foncteurs d'homologie entière du groupe G, i.e. que pour tout entier $i \geq 0$

$$H_i(\bullet_G, \mathbb{Z}) \simeq H_i(G, \mathbb{Z}) \quad .$$

4.2. Homologie d'ensembles ordonnés. Soit X un ensemble ordonné, considéré comme catégorie. Si F est un préfaisceau sur X, pour calculer $H_i(X, F)$, on préfère en général utiliser la proposition 3.26, ce qui revient dans ce cas à utiliser le complexe formé des objets

$$\hat{C}_n(X, F) = \bigoplus_{x_0 < x_1 < \ldots < x_n} F(x_0) \quad ,$$

où la somme porte sur les suites strictement croissantes $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ d'éléments de X. La différentielle est alors donnée par

$$d_n \circ i^F_{x_0 < \ldots < x_n} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i i^F_{x_0 < \ldots < x_{i-1} < x_{i+1} < \ldots < x_n} \quad .$$

4.3. Les catégories $\mathcal{A}[T]$. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. Dans [2] III §5.15, les auteurs définissent une catégorie $\mathcal{A}[T]$, analogue d'un anneau de polynômes, de la façon suivante :

4.4. Définition : *Les objets de $\mathcal{A}[T]$ sont les couples (X, t), où X est un objet de $\mathcal{A}$ et t un endomorphisme de X dans la catégorie $\mathcal{A}$. Un morphisme* *dans $\mathcal{A}[T]$ de (X,t) dans (X',t') est un morphisme $f : X \to X'$ dans $\mathcal{A}$ tel que $t' \circ f = f \circ t$. La composition des morphismes est celle de $\mathcal{A}$.*

Soit $\bullet_{\mathbb{N}}$ la catégorie ayant un seul objet, et dont les morphismes sont l'ensemble des entiers naturels, la composition étant l'addition. Il est clair que la correspondance qui à un préfaisceau F sur $\bullet_{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$ associe l'objet $\Big(F(\bullet), F(1)\Big)$ de $\mathcal{A}[T]$, et la correspondance qui à l'objet (X,t) de $\mathcal{A}[T]$ associe le préfaisceau F sur $\bullet_{\mathbb{N}}$ défini par

$$F(\bullet) = X \quad , \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ F(n) = t^n \quad ,$$

sont des équivalences de catégories inverses l'une de l'autre entre $\mathbf{Fonct}_{\mathcal{A}}(\bullet_{\mathbb{N}})$ et $\mathcal{A}[T]$.

Dans la section III §5.15 de [2], les auteurs considèrent ensuite le foncteur qui à un objet Y de $\mathcal{A}$ associe l'objet noté (Y^∞, s_Y), où Y^∞ est la somme directe indexée par $\mathbb{N}$ de copies de Y, et s_Y est l'opérateur de décalage à droite. Il montrent que si Y est un objet projectif de $\mathcal{A}$, alors (Y^∞, s_Y) est un objet projectif de $\mathcal{A}[T]$.

Ce résultat peut s'expliquer par le corollaire 2.2 : soit $\Phi : \bullet \to \bullet_{\mathbb{N}}$ le seul foncteur possible. Il est clair que $\mathcal{A}$ s'identifie à $\mathbf{Fonct}_{\mathcal{A}}(\bullet)$. Si Y est un objet de $\mathcal{A}$, alors il est facile de voir que $\Phi_*(Y)$ s'identifie à (Y^∞, s_Y).

Références

[1] S.Bouc. – Résolutions de foncteurs de Mackey. *In : Group representations : Cohomology, Group Actions and Topology.* – AMS Proceedings of Symposia in pure mathematics, Janvier 1998, vol. 63.

[2] S. I.Gelfand et Y. I.Manin. – *Methods of Homological Algebra.* – Springer, 1996.

[3] I.Moerdijk. – *Classifying Spaces and Classifying Topoi.* – Springer, 1995, *Lecture Notes in Mathematics*, volume 1616.

[4] D.Quillen. – *Higher K-theory*, pp. 85–147. – Springer-Verlag, 1973, *Lecture Notes in Mathematics*, volume 341.

[5] C. A.Weibel. – *An introduction to homological algebra.* – Cambridge University Press, 1994, *Cambridge studies in advanced mathematics*, volume 38.