

Homologie de certains ensembles de 2-sous-groupes des groupes symétriques

S. BOUC

*DMI, École Normale Supérieure,
45 Rue d'Ulm, 75230 Paris-Cedex 05, France*

Communicated by Michel Broué

Received May 1990

SOMMAIRE

1. *Introduction.*
2. *Topologie.* 2.1. Connexité. 2.2. Groupe fondamental. 2.2.1. Les cas $n = 5$ et $n = 6$. 2.2.2. Le cas $n \geq 8$. 2.2.3. Le cas $n = 7$.
3. *Homologie.* 3.1. Une suite exacte. 3.2. Homologie en caractéristique 0 ou $p > n$. 3.3. Homologie entière: résultats partiels. 3.3.1. Une autre suite exacte. 3.3.2. Quelques groupes $\tilde{H}_k(d_2(n))$. 3.4. Modules de Lefschetz.

1. INTRODUCTION

Dans [QU1], Quillen étudie d'un point de vue topologique et homologique l'ensemble $s_p(G)$ des p -sous-groupes non-triviaux d'un groupe fini G . Il montre que cet ensemble a le même type d'homotopie que l'ensemble $a_p(G)$ des p -sous-groupes abéliens élémentaires non-triviaux de G . De plus, si G est un groupe de Chevalley en caractéristique p , ces deux ensembles ont le même type d'homotopie que l'immeuble de Tits associé.

Une question naturelle est alors de savoir se qui se passe pour d'autres groupes. Si G est un groupe symétrique S_n , et si $p = 2$, le calcul de l'homologie de $s_2(G)$ est très difficile dans le cas général. Je vais étudier ici les propriétés topologiques et homologiques de certains sous-ensembles naturels de l'ensemble $a_2(S_n)$.

Notation. Si A est un ensemble, je note $d_2(A)$ l'ensemble des partitions non-triviales de A dont toutes les parties sont de cardinal 1 ou 2. Cet ensemble est ordonné par la relation "être plus fin que". Si A est l'ensemble $\{1, \dots, n\}$, je noterai $d_2(n)$ l'ensemble $d_2(A)$.

L'ensemble $d_2(n)$ peut-être considéré comme l'ensemble des 2-sous-groupes abéliens élémentaires non-triviaux de S_n qui sont engendrés par des transpositions.

La première partie est consacrée à l'étude topologique des ensembles $d_2(n)$, en particulier le calcul du groupe fondamental, qui réserve une surprise puisque le groupe fondamental de $d_2(7)$ est cyclique d'ordre 3.

Dans la deuxième partie, j'essaierai de calculer l'homologie des ensembles $d_2(n)$. Le premier résultat concerne le cas de l'homologie en caractéristique nulle ou suffisamment grande: les modules d'homologie sont alors entièrement connus en tant que S_n -modules, et se décomposent en somme directe des modules de Specht correspondant à des diagrammes de Young symétriques autour de la diagonale. En particulier, si $n = 2k + 1$, le module d'homologie de rang maximum de $d_2(n)$ est simplement le module de Specht correspondant au crochet symétrique $(k + 1, 1^k)$. Des considérations de dimension prouvent donc que ces modules interviennent toujours dans $H_{k-1}(a_2(S_{2k+1}))$.

En ce qui concerne l'homologie entière, les résultats seront moins précis, ce qui tient aux outils employés: une suite exacte de modules semi-simples fournit plus d'informations qu'une suite exacte de \mathbf{Z} -modules. Comme le montre le cas $n = 7$, les modules d'homologie entière de $d_2(n)$ ont en général de la torsion: certains sont cycliques d'ordre 3, d'autres sont des 3-groupes de rang non-borné en fonction de n . Je n'ai pas trouvé de cas où ces groupes ont une p -torsion pour p autre que 3, sans toutefois pouvoir démontrer ce fait.

J'indiquerai enfin comment calculer les modules de Lefschetz des ensembles $d_2(n)$, dont la série est connue dans l'anneau $\mathcal{B}(1)$ de [BO2].

Le lien de $d_2(n)$ avec $s_2(S_n)$ est précisé par le lemme suivant:

LEMME 1. *Soit $T_2(n)$ l'ensemble des 2-sous-groupes abéliens élémentaires non-triviaux du groupe symétrique S_n qui sont engendrés par des transpositions, et $TT_2(n)$ l'ensemble des 2-sous-groupes de S_n qui contiennent une transposition. Alors $d_2(n)$ s'identifie à $T_2(n)$, et l'inclusion de $T_2(n)$ dans $TT_2(n)$ est une équivalence d'homotopie.*

Dém. La première assertion est triviale. Pour la seconde, soit i l'injection de $T_2(n)$ dans $TT_2(n)$. Alors si $Q \in TT_2(n)$, en posant

$$i^Q = \{R \in T_2(n) \mid R \subseteq Q\}$$

il est clair que i^Q n'est pas vide si Q contient une transposition. En notant Q° le sous-groupe engendré de Q par les éléments de i^Q , il est clair que Q° est abélien élémentaire: deux transpositions contenues dans Q engendrent en effet un 2-sous-groupe, donc elles commutent.

Autrement dit, l'ensemble i^Q a un plus grand élément Q° , ce qui prouve le lemme.

2. TOPOLOGIE

2.1. Connexité

L'ensemble $d_2(1)$ est vide. L'ensemble $d_2(2)$ est réduit à un point, la partition grossière de $\{1, 2\}$. L'ensemble $d_2(3)$ est un ensemble discret à trois éléments, les partitions $\{\{1, 2\}, 3\}$, $\{\{1, 3\}, 2\}$, et $\{\{2, 3\}, 1\}$. Une notation s'impose

Notation. Si π est un élément de $d_2(n)$, et si p_0, \dots, p_k sont les paires de π , je noterai $\pi = p_0 | \dots | p_k$.

L'ensemble $d_2(4)$ a trois composantes connexes: l'une formée de $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$, et $\{1, 2\} | \{3, 4\}$, la seconde de $\{1, 3\}$, $\{2, 4\}$, et $\{1, 3\} | \{2, 4\}$, et la troisième de $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, et $\{1, 4\} | \{2, 3\}$. Chacune de ces composantes connexes a un plus grand élément (la seule partition de type 2-2 qu'elle contient). Donc $d_2(4)$ est homotope à un ensemble discret de cardinal 3.

Pour $n \geq 5$, j'ai le

LEMME 2. Si $n \geq 5$, l'ensemble $d_2(n)$ est connexe.

Dém. Puisque tout élément de $d_2(n)$ contient une paire, il suffit de prouver que deux paires quelconques p et p' sont dans la même composante connexe: c'est clair si p et p' sont disjointes, puisque $p | p'$ est une partition les contenant toutes les deux. Et si p et p' ont un point commun, alors puisque $n \geq 5$, il existe une paire q disjointe de p et de p' . Alors $p < p | q > q < p' | q > p'$, et $d_2(n)$ est connexe (par arcs).

2.2. Groupe fondamental

Etant données les remarques précédentes, la question du groupe fondamental de $d_2(n)$ n'a d'intérêt que pour $n \geq 5$.

2.2.1. Le cas $n=5$ et $n=6$

Pour $n=5$ ou $n=6$, la question est réglée par le lemme suivant:

LEMME 3. Pour $n=5$ ou $n=6$, l'ensemble $d_2(n)$ a le type d'homotopie d'un graphe.

Dém. Si $n=5$, alors $d_2(5)$ est un graphe, puisque de dimension 1. Pour $n=6$, le résultat découle de la remarque suivante:

LEMME 4. Si n est pair, soit $n=2k$, alors l'ensemble $d_2(n)$ est homotope à un ensemble de dimension $k-2$.

Dém. Soit en effet $d'_2(n)$ l'ensemble $d_2(n)$ privé des partitions de type 2^{k-1} . L'ensemble $d'_2(n)$ est de dimension $k-2$. Soit i l'injection de $d'_2(n)$ dans $d_2(n)$. Je définis l'application f de $d_2(n)$ dans $d'_2(n)$ par $f(\pi) = \pi$ si π n'est pas de type 2^{k-1} . Et si π est de type 2^{k-1} , alors il existe une unique paire p_π disjointe de toutes les paires de π . Je pose dans ce cas $f(\pi) = \pi \setminus p_\pi$. Les applications i et f sont croissantes, et de plus $f \circ i = \text{Id}$, et $i \circ f \geq \text{Id}$. Donc i et f sont des équivalences d'homotopie.

Remarques. (a) Le cas $n = 4$ étudié plus haut est un cas particulier du lemme 4.

(b) Le lemme 3 permet de conclure que le groupe fondamental de $d_2(n)$ pour $n = 5$ ou $n = 6$ est un groupe libre, dont le nombre de générateurs est égal à l'opposé de la caractéristique d'Euler-Poincaré réduite de $d_2(n)$. Je montrerai plus loin que cette dernière vaut -6 pour $n = 5$ et -16 pour $n = 6$.

2.2.2. *Le cas $n \geq 8$*

Notation. Si $\{i, j\}$ est une paire de $\{1, \dots, n\}$, je note $c_{i,j}(n)$ l'ensemble des éléments de $d_2(n)$ de la forme $\{i, k\}$, $\{j, l\}$, ou $\{i, k\} \setminus \{j, l\}$, avec $k, l \neq i, j$. Avec cette notation,

PROPOSITION 1. *L'ensemble $d_2(n) - c_{1,2}(n)$ est contractile.*

Dém. Soit A le sous-ensemble de $d_2(n)$ formé de la seule partition $\{1, 2\}$. Alors avec les notations de [BO1], j'ai

$$e(A) = \{\pi \in d_2(n) \mid] \cdot, \pi] \cap A \text{ est contractile}\} = \{\pi \in d_2(n) \mid \{1, 2\} \in \pi\}$$

et $e(A)$ est homotope à A , par l'inclusion de A dans $e(A)$. De même

$$fe(A) = \{\pi \in d_2(n) \mid [\pi, \cdot [\cap e(A) \text{ est contractile}\}$$

est l'ensemble des éléments de $d_2(n)$ qui contiennent $\{1, 2\}$ ou dont le support est disjoint de $\{1, 2\}$.

Et si π est un élément de $d_2(n)$ qui n'est pas dans $fe(A)$, mais qui contient une paire disjointe de $\{1, 2\}$, alors $] \cdot \pi] \cap fe(A)$ a un plus grand élément, formé de l'ensemble des paires de π disjointes de $\{1, 2\}$. Donc $e fe(A)$ est formé des éléments de $d_2(n)$ qui contiennent une paire disjointe de $\{1, 2\}$. Et il est facile de voir que le complémentaire de $e fe(A)$ est égal à $c_{1,2}(n)$. D'où la proposition.

Soit alors i l'injection de $d_2(n) - c_{1,2}(n)$ dans $d_2(n)$. Si $\pi \in d_2(n)$, je note i_π l'ensemble des λ de $d_2(n) - c_{1,2}(n)$ qui sont moins fins que π . Alors:

LEMME 5. 1. Si $\pi = \{1, i\}$ ou $\pi = \{2, j\}$, l'ensemble i_π est homotope à $d_2(n-3)$.

2. Si $\pi = \{1, i\} \mid \{2, j\}$, l'ensemble i_π est homotope à $d_2(n-4)$.

Dém. Si $\pi = \{1, i\}$, et si $\lambda \in i_\pi$, je note $f(\pi)$ la partition formée des parties de π qui ne rencontre pas $\{1, 2, i\}$. C'est un élément de $D_i = d_2(\{1, \dots, n\} - \{1, 2, i\})$, car λ contient au moins une paire disjointe de $\{1, 2, i\}$ si $\lambda \in i_\pi$. Inversement, si $\lambda \in D_i$, je note $g(\lambda)$ l'élément de i_π obtenu en rajoutant à λ la partition $\{1, i\}$. Alors f et g sont des applications croissantes, telles que $g \circ f(\lambda) \leq \lambda$ et $f \circ g(\lambda) = \lambda$. Donc f et g sont des équivalences d'homotopie. D'où l'assertion (1).

De même pour l'assertion (2), si $\pi = \{1, i\} \mid \{2, j\}$, et si $\lambda \in i_\pi$, je note $f(\lambda)$ la partition de $\{1, \dots, n\} - \{1, 2, i, j\}$ obtenue en enlevant à λ les paires $\{1, i\}$ et $\{2, j\}$. C'est un élément de $E_{i,j} = d_2(\{1, \dots, n\} - \{1, 2, i, j\})$. Et si $\lambda \in E_{i,j}$, je note $g(\lambda)$ la partition obtenue en rajoutant à λ les paires $\{1, i\}$ et $\{2, j\}$. Les mêmes considérations sur f et g prouvent alors l'assertion (2).

Le cas $n \geq 8$ est alors résolu par le lemme suivant:

LEMME 6. Soient X un ensemble ordonné connexe, et f une application croissante de X dans un ensemble ordonné Y . Si pour tout élément maximal y de Y , l'ensemble f^y est connexe et non-vide, alors Y est connexe et le morphisme $\pi_1(f)$ de $\pi_1(X)$ dans $\pi_1(Y)$ est surjectif.

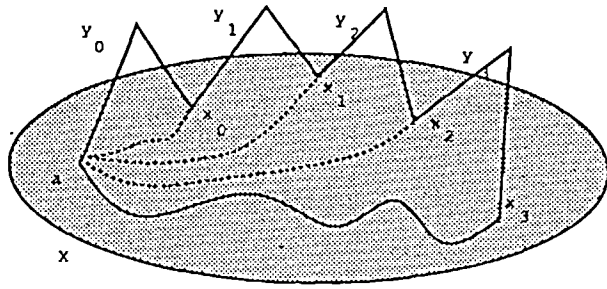
Dém. Je me ramène tout d'abord au cas où f est injective: soit $X *_f Y$ l'ensemble réunion disjointe de X et Y , ordonné par les relations d'ordre de X et Y , et par les relations $x \leq y$ dans $X *_f Y$ si $f(x) \leq y$ dans Y . Soit g l'application de $X *_f Y$ dans Y définie par $g(x) = f(x)$ si $x \in X$ et $g(y) = y$, et j l'injection de Y dans $X *_f Y$. Alors g et j sont croissantes et telles que $j \circ g(x) \geq x$ si $x \in X$, et que $j \circ g(y) = y$ et $g \circ j(y) = y$ si $y \in Y$.

Donc g induit une équivalence d'homotopie de $X *_f Y$ sur Y .

Soit alors i l'injection de X dans $X *_f Y$. Les éléments maximaux de $X *_f Y$ sont les éléments maximaux de Y (puisque $x < f(x)$ dans $X *_f Y$). Et si y est un élément maximal de Y , alors $i^y = f^y$. Le triplet $X, X *_f Y, i$ vérifie donc les hypothèses du lemme 6. Comme de plus $g \circ i = f$, il suffit de prouver le lemme lorsque f est injective.

Le raisonnement précédent prouve également que je peux supposer que X est une partie fermée de Y (i.e., si $z \in Y$, et $z \leq x \in X$, alors $z \in X$).

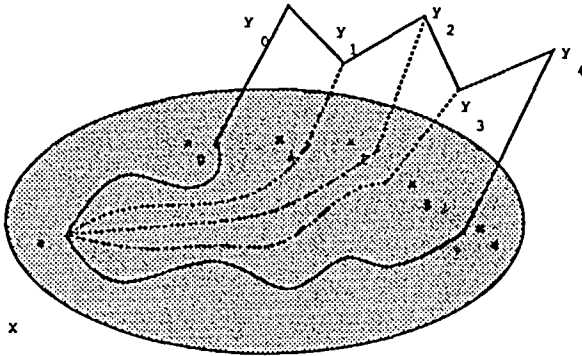
Comme tout élément de Y est plus petit qu'un élément maximal y_0 , et comme f^{y_0} est non-vide, il est clair que Y est alors connexe puisque X l'est. Soit alors a un point de X , et L un lacet de base a dans Y . En décomposant $L - X$ en ses composantes connexes, j'obtiens le diagramme suivant:



Puisque X est connexe, je peux pour chacun des x_i choisir un chemin dans X de a à x_i . J'ai ainsi décomposé L en un produit de lacets de base a ayant un seul morceau hors de X .

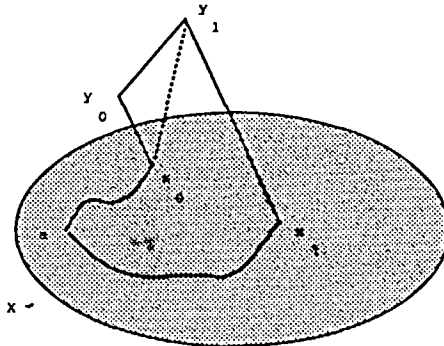
Donc $\pi_1(Y)$ est engendré par les lacets contenus dans X et les lacets L tels que $L - X$ soit connexe.

Si L est un tel lacet, j'ai le dessin suivant:



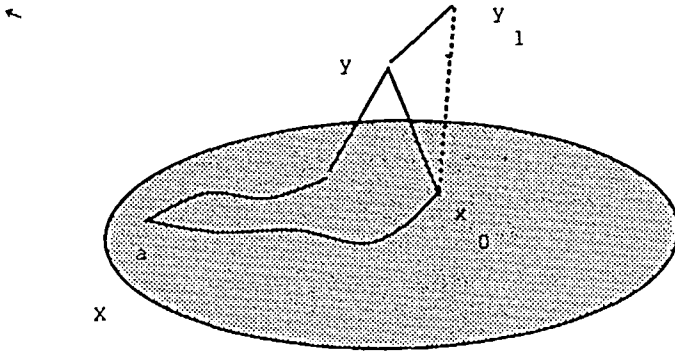
Puisque les f^{y_i} sont non-vides, je peux alors choisir pour chaque y_i un élément $x_i < y_i$ dans X . J'ai alors décomposé L en un produit de lacets ayant au plus deux points hors de X .

Alors si L est un lacet ayant deux points y_0 et y_1 hors de X , avec $y_0 < y_1$, je peux choisir x_0 dans X , plus petit que y_0 , et j'ai le dessin suivant



et comme x_0, y_0, y_1 est un simplexe de X , le lacet L est homotope au lacet a, x_0, y_1, x_1, a dessiné en pointillé. Alors $\pi_1(Y)$ est engendré par $\pi_1(X)$ et par les lacets ayant un point hors de X .

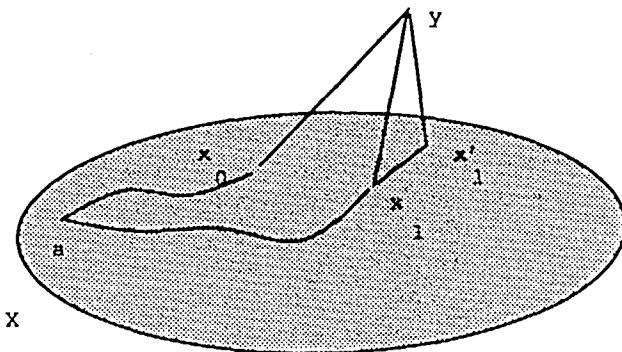
Si L est un tel lacet, et y son point hors de X , je peux choisir un élément maximal y_1 de Y plus grand que y . En choisissant x_0 dans X plus petit que y , j'ai le dessin suivant



et le lacet L est homotope au lacet a, y_1, x_0 dessiné en pointillés.

En d'autres termes, le groupe $\pi_1(Y)$ est engendré par $\pi_1(X)$, et par les lacets ayant un seul point y hors de X , qui soit de plus maximal dans Y .

Alors si pour chaque paire de points x_0 et x_1 de X inférieurs à un élément maximal y de Y n'appartenant pas à X , je choisis un chemin c_0 dans X de a à x_0 et un chemin c_1 dans X de x_1 à a , et si je note L_{x_0, y, x_1} le lacet obtenu en parcourant c_0 , puis en montant à y , en redescendant à x_1 , et en parcourant c_1 , il est clair que $\pi_1(Y)$ est engendré par les L_{x_0, y, x_1} et $\pi_1(X)$. (Les différents choix pour c_0 et c_1 ne modifient L_{x_0, y, x_1} que par un élément de $\pi_1(X)$. Le fait de permuter x_0 et x_1 change L_{x_0, y, x_1} en son inverse. Enfin si $x_0 = x_1$, alors L_{x_0, y, x_1} est homotope au lacet $c_0 c_1$, puisque x_0, y est un simplexe de Y .)



Si L_{x_0, y, x_1} est l'un de ces lacets, et si x'_1 est un élément de X plus grand que x_1 et plus petit que y , alors L_{x_0, y, x_1} est homotope à L_{x_0, y, x'_1} , puisque leur différence est le lacet a, x_1, x'_1, y, x_1, a , et puisque x_1, x'_1, y est un simplexe de Y . Le même raisonnement vaut si $x_1 > x'_1$.

Donc la classe d'homotopie de L_{x_0, y, x_1} ne dépend que des composantes connexes de x_0 et x_1 dans f^y .

Le raisonnement précédent suppose simplement que f^y est non-vide.

Si de plus f^y est connexe, alors tous les L_{x_0, y, x_1} sont homotopes à L_{x_0, y, x_0} , donc à des lacets de X , ce qui prouve le lemme.

J'applique les lemmes précédents en prenant pour X l'ensemble $d_2(n) - c_{1,2}(n)$, et pour Y l'ensemble $d_2(n)$, ces deux ensembles étant ordonnés pour l'ordre opposé à l'ordre considéré jusqu'ici, et pour f l'injection i de X dans Y . Alors X est contractile, donc connexe, et f^π est égal à i_π . Les éléments maximaux de Y sont les paires, et f^π est contractile si π est une paire de $d_2(n) - c_{1,2}(n)$, et homotope à $d_2(n - 3)$ sinon, et ce dernier est connexe et non-vide si $n \geq 8$. D'où la

PROPOSITION 2. *Si $n \geq 8$, alors $d_2(n)$ est simplement connexe.*

2.2.3. *Le cas $n = 7$*

Dans le cas $n = 7$, une partie du raisonnement précédent reste vraie: l'ensemble $X = d_2(7) - c_{1,2}(7)$ est toujours contractile, et si i est l'injection de X dans $Y = d_2(7)$, alors i_π est contractile si $\pi \notin c_{1,2}(7)$. Si π est une paire de type $\{1, i\}$ ou $\{2, j\}$ (avec $i, j \in \{3, \dots, 7\}$), alors i_π est homotope à $d_2(7 - 3) = d_2(4)$, qui est un ensemble discret de cardinal 3. Et si π est une partition de type $\{1, i\} \mid \{2, j\}$ (avec $i, j \in \{3, \dots, 7\}$), alors i_π est homotope à $d_2(7 - 4) = d_2(3)$, qui est aussi un ensemble discret à 3 éléments.

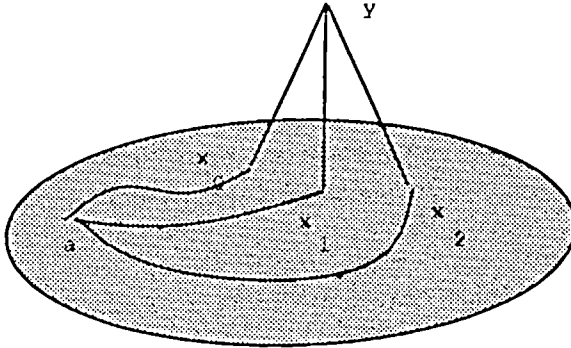
Le groupe fondamental de Y est encore engendré par $\pi_1(X)$, qui est trivial, et par les L_{x_0, y, x_1} , où y décrit les éléments minimaux de $Y - X$ (c'est-à-dire les paires $\{1, r\}$ et $\{2, s\}$), et $\{x_0, x_1\}$ est une paire de points (distincts) de i_y . Le lacet L_{x_0, y, x_1} ne dépendant que des composantes connexes k_0 et k_1 de x_0 et x_1 dans i_y , je peux le noter L_{k_0, y, k_1} .

Le groupe fondamental de $d_2(7)$ admet donc un système générateur indexé par de tels triplets $\{k_0, y, k_1\}$, et pour chaque y , j'ai trois paires $\{k_0, k_1\}$ possibles. Ces générateurs vérifient des relations évidentes: j'ai déjà noté que

$$L_{k_0, y, k_1} \cdot L_{k_1, y, k_0} = 1.$$

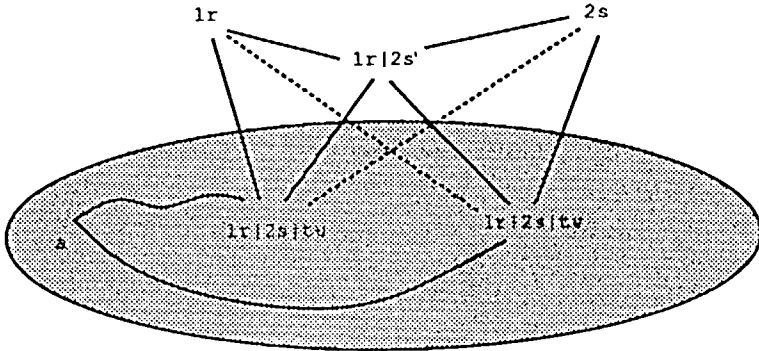
Le dessin suivant prouve que

$$L_{k_1, y, k_2} \cdot L_{k_0, y, k_1} = L_{k_0, y, k_2}.$$



En effet, le produit des lacets du premier membre fait apparaître le lacet y, x_1, a, x_1, y , qui est homotope au lacet constant.

De plus, si $\{1, r\}$ et $\{2, s\}$ sont deux paires disjointes hors de X , et si $\{1, \dots, 7\} = \{1, 2, r, s, t, u, v\}$, et si je note $[tu]_{1r}$ (resp. $[tu]_{2s}$) la composante connexe de $\{1, r\} \mid \{2, s\} \mid \{t, u\}$ dans $i_{\{1, r\}}$ (resp. dans $i_{\{2, s\}}$), le dessin suivant



montre que $L_{[tu]_{1r}, \{1, r\}, [tv]_{1r}}$ et $L_{[tu]_{2s}, \{2, s\}, [tv]_{2s}}$ sont tous deux homotopes au lacet $a, \{1, r\} \mid \{2, s\} \mid \{t, u\}, \{1, r\} \mid \{2, s\}, \{1, r\} \mid \{2, s\} \mid \{t, v\}, a$, ce qui donne la relation .

$$L_{[tu]_{1r}, \{1, r\}, [tv]_{1r}} = L_{[tu]_{2s}, \{2, s\}, [tv]_{2s}}$$

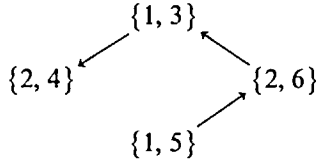
Cette relation est vraie dès que j'ai deux paires $\{1, r\}$ et $\{2, s\}$ disjointes. Elle est obtenue en identifiant la composante connexe $[tu]_{1r}$ de $i_{\{1, r\}}$ avec la composante connexe $[tu]_{2s}$ de $i_{\{2, s\}}$. Cette identification est elle-même induite par la permutation $(1, 2)(r, s)$.

Il est ainsi possible d'identifier deux à deux les trois générateurs associés à $\{1, r\}$ et les trois générateurs associés à $\{2, s\}$, pour $r \neq s$.

Soit alors Γ le graphe dont les sommets sont les paires $\{1, r\}$ et $\{2, s\}$

(pour $r, s \in \{3, \dots, 7\}$), deux paires étant liées dans Γ si et seulement si elles sont disjointes. Il est facile de voir que Γ est un graphe connexe (il existe toujours une paire $\{2, s\}$ disjointe de deux paires $\{1, r\}$ et $\{1, r'\}$). Donc le groupe $\pi_1(Y)$ est engendré par les trois générateurs associés à l'un quelconque d'entre eux, par exemple $\{1, 3\}$.

Or dans Γ , il y a des cycles, qui vont donner des relations supplémentaires sur ces trois générateurs: par exemple, le cycle



va induire sur les composantes connexes de $i_{\{1, 3\}}$ la permutation déduite de $(1, 2)(3, 6)(1, 2)(5, 6)(1, 2)(4, 5)(1, 2)(3, 4) = (4, 6, 5)$. Les trois générateurs de $\pi_1(Y)$ sont permutés circulairement par cette permutation, et doivent donc être identifiés. Donc le groupe $\pi_1(Y)$ est un quotient du groupe libre à trois générateurs α, β, γ quotienté par les relations $\alpha = \beta = \gamma$ et $\alpha\beta\gamma = 1$. Ce dernier groupe est cyclique d'ordre 3, donc $\pi_1(Y)$ est trivial ou cyclique d'ordre 3. (Il se pourrait en effet qu'il y ait d'autres relations dans $\pi_1(Y)$ que celles envisagées jusqu'ici.)

Pour prouver que $\pi_1(Y)$ est non-trivial, donc cyclique d'ordre 3, je vais exhiber un 1-cocycle sur Y à valeurs dans $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$: ceci revient à trouver une fonction $f(p, q)$ définie sur les couples de paires disjointes de $\{1, \dots, 7\}$, à valeurs dans $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$, telle que $f(q, p) = -f(p, q)$ pour tout couple (p, q) de paires disjointes, et telle que $f(p, q) + f(q, r) + f(r, p) = 0$ pour tout triplet (p, q, r) de paires deux à deux disjointes.

Je passerai honteusement sous silence les nombreuses heures de tâtonnements nécessaires à l'élaboration de la fonction f . Voici le résultat:

Le groupe $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ sera le groupe *multiplicatif* des éléments non-nuls du corps à 4 éléments $\mathbf{F}_4 = \mathbf{F}_2(\omega)$, avec $\omega^2 = \omega + 1$, de sorte que $\mathbf{F}_4 = \{0, 1, \omega, \omega^2\}$. Soit ϕ une bijection de $\{4, 5, 6, 7\}$ sur \mathbf{F}_4 , par exemple celle définie par

$$\phi(4) = 0, \quad \phi(5) = 1, \quad \phi(6) = \omega, \quad \phi(7) = \omega^2.$$

La fonction f est alors définie par les relations suivantes, où a, b, c désignent des éléments de $\{4, 5, 6, 7\}$

$$f(\{1, a\}, \{2, b\}) =$$

$$f(\{1, 3\}, \{a, b\}) = f(\{2, a\}, \{3, b\}) = f(\{2, c\}, \{a, b\}) = \phi(a) + \phi(b)$$

$$f(\{2, 3\}, \{a, b\}) = f(\{1, a\}, \{3, b\}) = f(\{1, c\}, \{a, b\}) = [\phi(a) + \phi(b)]^{-1}$$

avec de plus $f(q, p) = [f(p, q)]^{-1}$, les valeurs de $f(p, q)$ non encore définies étant égales à 1.

Ces définitions ont un sens car dans F_4 , la somme de deux éléments distincts est inversible.

Je dois vérifier que si p, q, r sont deux à deux disjointes, alors

$$f(p, q) f(q, r) f(r, p) = 1.$$

Les seuls cas non-triviaux sont ceux où l'une des paires p, q, r contient 1 ou 2, tout en étant différente de $\{1, 2\}$. En observant que f est changée en son inverse par l'échange de 1 et 2, il reste cinq cas à vérifier:

Cas 1. $p = \{1, 3\}$, $q = \{a, b\}$, $r = \{c, d\}$. Dans ce cas $f(p, q) = \phi(a) + \phi(b)$, $f(q, r) = 1$, et $f(r, p) = [f(p, r)]^{-1} = [\phi(c) + \phi(d)]^{-1}$. Or la somme des éléments de F_4 est nulle, donc

$$\phi(a) + \phi(b) = \phi(c) + \phi(d)$$

ce qui prouve l'égalité dans ce cas.

Cas 2. $p = \{1, 3\}$, $q = \{a, b\}$, $r = \{2, c\}$. Dans ce cas $f(p, q) = \phi(a) + \phi(b)$, $f(q, r) = [f(r, q)]^{-1} = [\phi(d) + \phi(b)]^{-1}$, et $f(r, p) = 1$, et le résultat est vrai.

Cas 3. $p = \{1, a\}$, $q = \{3, d\}$, $r = \{b, c\}$. Dans ce cas $f(p, q) = [\phi(a) + \phi(d)]^{-1}$, $f(q, r) = 1$, et $f(r, p) = [f(p, r)]^{-1} = \phi(b) + \phi(c)$, d'où le résultat par le raisonnement du cas 1.

Cas 4. $p = \{1, a\}$, $q = \{2, b\}$, $r = \{3, c\}$. Dans ce cas $f(p, q) = \phi(a) + \phi(b)$, $f(q, r) = \phi(b) + \phi(c)$ et $f(r, p) = [f(p, r)]^{-1} = \phi(a) + \phi(c)$. Comme $\phi(a)$, $\phi(b)$ et $\phi(c)$ sont deux à deux distincts, les éléments $f(p, q)$, $f(q, r)$, et $f(r, p)$ le sont aussi, et sont donc 1, ω , ω^2 dans un certain ordre, et leur produit vaut 1:

Cas 5. $p = \{1, a\}$, $q = \{2, b\}$, $r = \{c, d\}$. Dans ce cas $f(p, q) = \phi(a) + \phi(b)$, $f(q, r) = \phi(c) + \phi(d)$, et $f(r, p) = [f(p, r)]^{-1} = \phi(c) + \phi(d)$. Or $[\phi(c) + \phi(d)]^2 = [\phi(c) + \phi(d)]^{-1}$, et le résultat découle du raisonnement du cas 1.

Le produit des $f(p, q)$ sur tout "triangle" de $d_2(7)$ est donc égal à 1. En calculant ce produit sur le cycle $\{1, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{1, 5\}$, $\{2, 6\}$ utilisé plus haut, je trouve

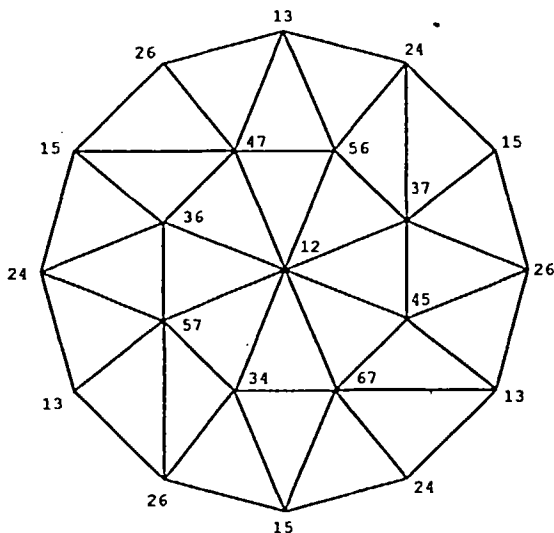
$$f(\{1, 3\}, \{2, 4\}) = 1, \quad f(\{2, 4\}, \{1, 5\}) = (0 + 1)^{-1} = 1$$

$$f(\{1, 5\}, \{2, 6\}) = 1 + \omega = \omega^2, \quad f(\{2, 6\}, \{1, 3\}) = 1$$

et le produit sur ce cycle est donc égal à ω^2 , ce qui prouve que ce cycle n'est pas une somme de triangles de $d_2(7)$, donc que $\pi_1(d_2(7))$ est non-trivial. D'où

PROPOSITION 3. *Le groupe fondamental de $d_2(7)$ est cyclique d'ordre 3.*

Le dessin suivant montre comment le triple du cycle précédent, qui en est le bord extérieur, peut être triangulé dans $d_2(7)$:



3. HOMOLOGIE

3.1. Une suite exacte

Soit A un anneau commutatif. Je vais établir ici l'existence d'une suite exacte longue reliant les modules d'homologie réduite $\tilde{H}_*(d_2(n), A)$, $\tilde{H}_*(d_2(n-1), A)$, et $\tilde{H}_*(d_2(n-2), A)$. Dans le cas où A sera un corps de caractéristique 0 ou $p > n$, cette suite déterminera entièrement les modules d'homologie $\tilde{H}_k(d_2(n), A)$.

Soit p_n l'ensemble des paires de $d_2(n)$ contenant n , et i l'injection de $d_2(n-1)$ dans $d_2(n) - p_n$, ces deux ensembles étant ordonnés par l'ordre opposé à l'ordre standard. Alors si $\pi \in d_2(n) - p_n$, l'ensemble i^π a un plus grand élément, formé des paires de π ne contenant pas n . Il est donc contractile, et i est une équivalence d'homotopie, compatible avec l'action du groupe S_{n-1} .

Soit alors j l'injection de $d_2(n) - p_n$ dans $d_2(n)$, ordonné pour l'ordre

opposé. Alors j^π a un plus grand élément π si π n'est pas une paire contenant n , et j^π est contractile dans ce cas. Et si π est une paire contenant n , alors j^π est l'ensemble des éléments de $d_2(n)$ contenant strictement π , qui s'identifie à $d_2(\{1, \dots, n\} - \pi)$, et dans ce cas, l'élément π est un élément maximal de $d_2(n)$ (pour l'ordre opposé). Alors (cf. [BO1]),

LEMME 7. *J'ai la suite exacte*

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \tilde{H}_k(d_2(n-1), A) \rightarrow \text{Res}_{S_{n-1}}^{S_n} \tilde{H}_k(d_2(n), A) \rightarrow \text{Ind}_{S_{n-2}}^{S_{n-1}} \tilde{H}_{k-1}(d_2(n-2), A) \\ \rightarrow \tilde{H}_{k-1}(d_2(n-1), A) \rightarrow \dots \end{aligned} \tag{1}$$

En effet, les paires contenant n sont deux à deux conjuguées par S_{n-1} .

Une autre façon de construire la suite exacte (1) est de considérer $d_2(n)$ comme la subdivision barycentrique du complexe simplicial dont les simplexes de dimension k sont les suites (p_0, \dots, p_k) de paires de $\{1, \dots, n\}$ deux à deux disjointes: le complexe de chaînes réduit de ce complexe simplicial est homotope à $\tilde{C}_*(d_2(n))$.

Le groupe S_n opère transitivement sur les simplexes de dimension k de $d_2(n)$, et le stabilisateur $Z_{n,k+1}$ dans S_n d'un tel simplexe est isomorphe au produit direct de S_{n-2k-2} et du produit en couronne $S_2 \sim S_{k+1}$.

Comme une permutation impaire des sommets p_0, \dots, p_k change l'orientation du simplexe (p_0, \dots, p_k) , je vois que le module $\tilde{C}_k(d_2(n))$ est isomorphe à $\text{Ind}_{Z_{n,k+1}}^{S_n} \eta_k$, où η_k est la représentation de degré 1 de $Z_{n,k+1}$ déduite de la signature de S_{k+1} .

Pour restreindre ce module à S_{n-1} , je dois par la formule de Mackey trouver les doubles classes $S_{n-1} \backslash S_n / Z_{n,k+1}$: celles-ci dépendent de la position relative du point n et d'une partition π de type 2^{k+1} de $\{1, \dots, n\}$, modulo S_{n-1} : il y a donc deux classes, suivant que n est dans une paire $\{i, n\}$ de π ou non. Dans le premier cas, l'intersection de S_{n-1} et du stabilisateur de π est isomorphe au stabilisateur de $\pi - \{i, n\}$ dans S_{n-2} . Dans le second, cette intersection est égale au stabilisateur de π dans S_{n-1} . La formule de Mackey s'écrit alors

$$\text{Res}_{S_{n-1}}^{S_n} \tilde{C}_k(d_2(n)) = \tilde{C}_k(d_2(n-1)) \oplus \text{Ind}_{S_{n-2}}^{S_{n-1}} \tilde{C}_{k-1}(d_2(n-2))$$

et en notant $T(\tilde{C}_*(d_2(n-2)))$ le translaté du complexe $\tilde{C}_*(d_2(n-2))$, il est facile de voir que l'égalité précédente conduit à une suite exacte de complexes

$$0 \rightarrow \tilde{C}_*(d_2(n-1)) \rightarrow \text{Res}_{S_{n-1}}^{S_n} \tilde{C}_*(d_2(n)) \rightarrow \text{Ind}_{S_{n-2}}^{S_{n-1}} T(\tilde{C}_*(d_2(n-2))) \rightarrow 0$$

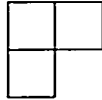
et la suite exacte (1) est la suite exacte longue d'homologie déduite de cette suite exacte courte.

Il faut noter cependant que le complexe $\text{Res}_{S_{n-1}}^{S_n} \tilde{C}_*(d_2(n))$ n'est pas la somme directe en tant que complexe de $\tilde{C}_*(d_2(n-1))$ et $\text{Ind}_{S_{n-2}}^{S_{n-1}} T(\tilde{C}_*(d_2(n-2)))$, ce qui est d'ailleurs bien dommage.

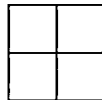
3.2. Homologie en caractéristique 0 ou $p > n$

Soit A un corps de caractéristique 0 ou $p > n$. Dans ce cas, tous les modules de Specht des groupes symétriques S_m , pour $m \leq n$, sont simples, et tous les AS_m -modules sont semi-simples. La suite exacte ci-dessus permet par récurrence sur n de déterminer l'homologie de $d_2(n)$.

Si $n = 3$, alors $d_2(n)$ est un ensemble discret de cardinal 3, et S_3 opère dessus transitivement. Le seul module d'homologie réduite non-nul de $d_2(3)$ est donc $\tilde{H}_0(d_2(3), A)$, qui est le plan de A^3 invariant par S_3 , c'est-à-dire le module de Specht de S_3 correspondant au diagramme de Young suivant



Pour le cas $n = 4$, la suite exacte précédente donne, puisque l'homologie réduite de $d_2(2)$ est nulle, un isomorphisme entre $\tilde{H}_k(d_2(3), A)$ et $\text{Res}_{S_3}^{S_4} \tilde{H}_k(d_2(4), A)$. Les modules d'homologie réduite de $d_2(4)$ sont donc nuls, sauf celui d'indice 0 (j'ai déjà noté que $d_2(4)$ est homotope à un ensemble discret de cardinal 3), dont la restriction à S_3 doit être le module de Specht précédent. L'utilisation du théorème de branchement ("branching theorem") permet de se convaincre aisément que $\tilde{H}_0(d_2(4), A)$ est isomorphe au module de Specht correspondant au diagramme de Young suivant

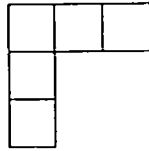


Pour le cas $n = 5$, puisque $d_2(5)$ est un graphe connexe, je sais que son seul module d'homologie réduite non-nul est celui d'indice 1. La suite exacte précédente donne alors

$$0 \rightarrow \text{Res}_{S_4}^{S_5} \tilde{H}_1(d_2(5), A) \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \rightarrow 0.$$

Puisque la flèche de droite est surjective, et puisque les modules du centre son deux à deux non-isomorphes, je vois que la restriction à S_4 du module $\tilde{H}_1(d_2(5), A)$ doit être la somme directe des modules correspondant aux

deux crochets du centre. La seule solution par le théorème de branchement est que $\tilde{H}_1(d_2(5), A)$ soit isomorphe au module de Specht associé au diagramme

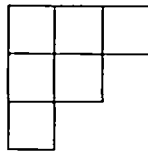


Pour $n = 6$, j'ai de même la suite exacte

$$0 \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \rightarrow \text{Res}_{S_5}^{S_6} \tilde{H}_1(d_2(6), A) \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \rightarrow 0.$$

Alors le crochet de gauche figure dans la restriction de $\tilde{H}_1(d_2(6), A)$ à S_5 .

Donc ou bien ce dernier contient un crochet de type $(4, 1^2)$, mais dans ce cas sa restriction contient un crochet de type $(4, 1)$, ce qui est faux, ou bien il contient un crochet de type $(3, 1^3)$, symétrique du précédent, et impossible pour la même raison, ou bien il contient un module de Specht associé au diagramme



dont la restriction à S_5 est justement la somme des modules de Specht figurant dans la suite exacte précédente. Donc $\tilde{H}_1(d_2(6), A)$ est isomorphe au module de Specht correspondant au diagramme de Young $(3, 2, 1)$ ci-dessus.

Il faut alors faire une hypothèse de récurrence hardie: les modules de Specht intervenant dans l'homologie de $d_2(n)$ sont tous associés à des diagrammes de Young symétriques (autour de la diagonale). Cette formulation n'est pas assez précise, et j'utiliserai la définition suivante,

DÉFINITION. Si D est un diagramme de Young, j'appelle diamètre de D le plus grand entier i tel que $(i, i) \in D$,

de sorte que, par exemple, les diagrammes crochet sont de diamètre 1, et les diagrammes $(2, 2)$ et $(3, 2, 1)$ de diamètre 2. Avec ces notations:

PROPOSITION 4. Soit A un corps de caractéristique 0 ou $p > n$. Le module $\tilde{H}_k(d_2(n), A)$ est la somme directe des modules de Specht de S_n correspondant aux différents diagrammes de Young symétriques de diamètre $n - 2k - 2$.

Remarque. Si D est un diagramme de Young symétrique de taille n et de diamètre d , alors $n - d^2$ est le nombre de cases de D non situées dans le carré diagonal, et ce nombre est pair, ce qui prouve que $n \equiv d \pmod{2}$

Dém. Je vais procéder par récurrence sur n , les cas $n \leq 6$ étant triviaux ou déjà étudiés.

Si M est un AS_n -module, alors M est semi-simple, somme directe de modules de Specht, et je note $\Delta_n(M)$ (resp. $\Sigma_n(M)$) la somme directe des facteurs simples de M correspondant à des diagrammes de Young disymétriques (resp. symétriques) par rapport à la diagonale. J'ai ainsi défini deux foncteurs de la catégorie des AS_n modules de type fini dans elle-même. Il est facile de voir que ces foncteurs sont exacts, puisque $\text{Hom}_{S_n}(\Delta_n(M), \Sigma_n(M')) = 0$ pour tous modules M et M' . En appliquant Δ_{n-1} à la suite exacte (1), et compte tenu de l'hypothèse de récurrence, j'obtiens l'isomorphisme

$$\Delta_{n-1}(\text{Res}_{S_{n-1}}^{S_n} \tilde{H}_k(d_2(n), A)) = \Delta_{n-1}(\text{Ind}_{S_{n-2}}^{S_{n-1}} \tilde{H}_{k-1}(d_2(n-2), A)).$$

Les diagrammes de Young intervenant au second membre sont des diagrammes de Young symétriques, auxquels est ajouté un sommet non-diagonal. Ceux qui interviennent au premier membre sont ceux intervenant dans $\tilde{H}_k(d_2(n), A)$, privés d'un sommet.

Alors si D est un diagramme de Young intervenant dans $\tilde{H}_k(d_2(n), A)$, et si je peux enlever un sommet s à D , le diagramme $D - \{s\}$ obtenu doit être un diagramme symétrique, ou un diagramme symétrique auquel j'ai rajouté un sommet (non-diagonal). Il y a alors trois cas:

- (a) Le diagramme D lui-même est symétrique.
- (b) Le diagramme D est symétrique plus un sommet.
- (c) Le diagramme D est symétrique plus deux sommets.

En notant ' D ' (resp. ' s ') le symétrique d'un diagramme D (resp. d'un sommet s) autour de la diagonale, je vois qu'il y a au plus deux sommets s de D tels que ' $s \notin D$ ', et que si je peux enlever un sommet s de D , alors il doit exister au plus un sommet t de $D - \{s\}$ tel que ' $t \notin D - \{s\}$ '.

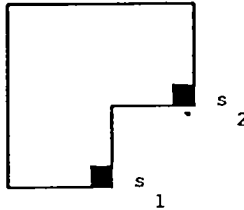
Alors si je suis dans le cas (c), en n'étant pas dans le cas (b), je peux écrire D sous la forme $D = \Delta \cup \{s_1\} \cup \{s_2\}$, où s_1 et s_2 sont deux sommets non-diagonaux. Si je peux enlever un sommet s à D , distinct de s_1 et s_2 , le diagramme $D' = D - \{s\}$ obtenu doit être symétrique ou symétrique plus un sommet.

Or D' s'écrit

$$D' = (\Delta - \{s\}) \cup \{s_1\} \cup \{s_2\}$$

et il y a au plus un sommet t de D' tel que ' $t \notin D'$ '. Donc ou bien ' $s_1 \in D'$ ', ou bien ' $s_2 \in D'$ '. Si par exemple ' $s_1 \in D'$ ', et si ' $s_1 \neq s_2$ ', alors comme ' $s_1 \neq s_1$ ', j'ai ' $s_1 \in \Delta$ ' qui est symétrique, et alors $s_1 \in \Delta$, ce qui est exclu.

Donc $'s_1 = s_2$, et alors D est symétrique. Donc si je suis dans le cas (c), et non dans les cas (a) ou (b), les seuls sommets que je peux éventuellement enlever à D sont s_1 et s_2 . Donc D a au plus deux "coins sortants": il est donc rectangulaire, ou du type suivant



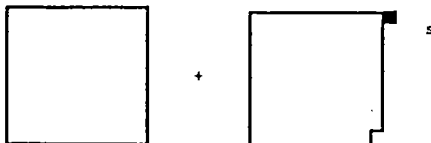
et s_1 et s_2 ont à l'ordre près dans les positions indiquées. Comme Δ est symétrique, et comme les seuls sommets non-diagonaux que je peux lui ajouter sont s_1 et s_2 , il est alors clair que $s_2 = 's_1$, et que je suis dans le cas (a). Et si D est rectangulaire, alors Δ doit être un carré de côté inférieur ou égal à deux, mais alors $n \leq 6$, et la proposition est vraie dans ces cas là.

Je peux donc supposer que je suis dans le cas (b), et non dans le cas (a). Alors D s'écrit $D = \Delta \cup \{s\}$, avec Δ symétrique, et s non-diagonal. Si je peux enlever à D un sommet t de Δ , alors le diagramme $D' = D - \{t\}$ s'écrit $D' = (\Delta - \{t\}) \cup \{s\}$. Si $'s \in D'$, alors $'s \in \Delta$, donc $s \in \Delta$, ce qui est exclu. Comme D' doit posséder au plus un sommet u tel que $'u \notin D'$, je vois que $\Delta - \{t\}$ est symétrique, donc que t est diagonal.

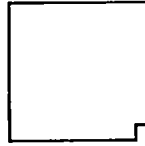
Le seul sommet de Δ que je peux enlever à D est donc diagonal. Donc je peux enlever au plus deux sommets à D , qui a donc au plus deux "coins sortants," comme ci-dessus, ou est rectangulaire. Dans ce dernier cas, si D n'est pas carré, alors Δ est vide ou réduit à une case, donc $n \leq 2$. Et dans le premier cas, puisque s n'est pas diagonal, le diagramme D est à symétrie près de la forme suivante



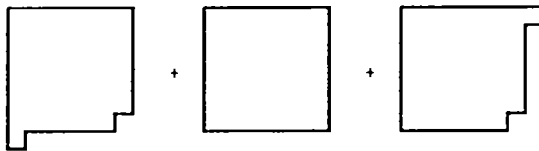
Par restriction le diagramme D se décompose alors en



et le seul diagramme symétrique de taille $n-2$ qui après induction contienne l'un de ces deux diagrammes est le suivant



qui après induction donne la somme



et dans ce cas le diagramme $'D$ doit aussi figurer dans $\tilde{H}_k(d_2(n), A)$. Le carré central figure alors deux fois dans sa restriction. Comme il ne peut figurer qu'une fois dans l'induit des termes de $\tilde{H}_{k-1}(d_2(n-2), A)$, il doit donc intervenir dans la décomposition de $\tilde{H}_k(d_2(n-1), A)$. Soit alors d le diamètre du carré. Par hypothèse de récurrence, j'ai pour les facteurs de $\tilde{H}_k(d_2(n-1), A)$

$$d = n - 1 - 2k - 2 = n - 2k - 3$$

et comme dans ce cas, le carré privé de son coin diagonal est de diamètre $d-1$, je dois avoir pour les facteurs de $\tilde{H}_{k-1}(d_2(n-2), A)$

$$d - 1 = n - 2 - 2(k - 1) - 2 \quad \text{soit } d = n - 2k - 1$$

et comme ces deux égalités sont contradictoires, je suis dans le cas (a), et $\tilde{H}_k(d_2(n), A)$ ne fait intervenir que des diagrammes de Young symétriques.

En enlevant un sommet à un diagramme symétrique de taille n et de diamètre d , j'obtiens un diagramme non-symétrique de diamètre d , ou un diagramme symétrique de diamètre $d-1$, qui ne peut pas être obtenu en rajoutant un sommet à un diagramme symétrique de taille $n-2$.

De même, en ajoutant un sommet à un diagramme symétrique de taille $n-2$ et de diamètre d , j'obtiens un diagramme non-symétrique de diamètre d , ou un diagramme symétrique de diamètre $d+1$, qui ne peut pas être obtenu en enlevant un sommet diagonal à un diagramme symétrique de taille n .

Soit alors D un diagramme symétrique de taille n et de diamètre d . Si je peux enlever le sommet diagonal s de D , alors $D - \{s\}$ intervient une fois

dans $\tilde{H}_k(d_2(n-1), A)$ si $d-1 = n-2k-3$, soit $d = n-2k-2$. Comme $D - \{s\}$ n'intervient pas dans $\text{Ind}_{S_{n-2}}^{S_{n-1}} \tilde{H}_k(d_2(n-2), A)$, je vois que D intervient une fois dans $\tilde{H}_k(d_2(n), A)$.

Et si je ne peux pas enlever le sommet diagonal de D , mais un sommet s non-diagonal, alors $D - \{s, 's\}$ est un diagramme symétrique de diamètre d , qui intervient une fois dans $\tilde{H}_{k-1}(d_2(n-2), A)$ pour $d = n-2-2(k-1)-2 = n-k-2$. Alors $D - \{s\}$ intervient une fois dans $\text{Ind}_{S_{n-2}}^{S_{n-1}} \tilde{H}_{k-1}(d_2(n-2), A)$, et n'intervient pas dans $\tilde{H}_{k-1}(d_2(n-1), A)$. Donc $D - \{s\}$ intervient une fois dans $\text{Res}_{S_{n-1}}^{S_n} \tilde{H}_k(d_2(n), A)$, et D intervient une fois dans $\tilde{H}_k(d_2(n), A)$.

Inversement, si D est un diagramme intervenant dans $\tilde{H}_k(d_2(n), A)$, et si je peux enlever le sommet diagonal s de D , alors $D - \{s\}$ intervient une fois dans $\tilde{H}_k(d_2(n-1), A)$, et non dans $\text{Ind}_{S_{n-2}}^{S_{n-1}} \tilde{H}_{k-1}(d_2(n-2), A)$. Donc D n'apparaît qu'une fois dans $\tilde{H}_k(d_2(n), A)$, et de plus, j'ai $d-1 = n-1-2k-2$, soit $d = n-2k-2$.

Et si je ne peux pas enlever le sommet diagonal de D , mais un sommet non-diagonal s , alors $D - \{s\}$ intervient une fois dans $\text{Ind}_{S_{n-2}}^{S_{n-1}} \tilde{H}_{k-1}(d_2(n-2), A)$, et n'intervient pas dans $\tilde{H}_k(d_2(n-1), A)$. Ce qui prouve que D n'apparaît qu'une fois dans $\tilde{H}_k(d_2(n), A)$, et que $d = n-2-2(k-1)-2 = n-2k-2$, d'où finalement la proposition.

Remarques et exemples. (1) La proposition 4 permet de déterminer les indicatrices d'Euler-Poincaré réduites de $d_2(5)$ et $d_2(6)$: le module de Specht $S^{(3, 1^2)}$ est de dimension 6, et le module $S^{(3, 2, 1)}$ est de dimension 16.

(2) Si n est impair, soit $n = 2k + 1$, alors $d_2(n)$ est de dimension $k-1$, et le groupe d'homologie $\tilde{H}_{k-1}(d_2(n), A)$ est simplement le module de Specht $S^{(k+1, 1^k)}$: le crochet symétrique est le seul diagramme de Young symétrique de diamètre 1.

(3) Si n est pair et $n \geq 8$, soit $n = 2k$, alors $d_2(n)$ est homotope à un ensemble de dimension $k-2$, et le module d'homologie $\tilde{H}_{k-2}(d_2(n), A)$ est la somme des modules $S^{(k-h, h+2, 2^h, 1^{k-2-2h})}$, pour $0 \leq h \leq (k-2)/2$, correspondant aux diagrammes de Young symétriques de diamètre 2.

(4) Puisqu'un diagramme de diamètre d est au moins de taille d^2 , le module d'homologie $\tilde{H}_k(d_2(n), A)$ est nul si $k < (n - \sqrt{n})/2 - 1$. Ce résultat est faux sans l'hypothèse sur la caractéristique de A , comme le montre l'exemple

$$\tilde{H}_1(d_2(7), \mathbf{F}_3) = \mathbf{F}_3$$

qui se déduit du calcul du groupe fondamental.

(5) Les tableaux de Young associés aux diagrammes symétriques de diamètre $n-2k-2$ sont exactement ceux pour lesquels il existe une involution de type 2^{k+1} de S_n qui échange les lignes et les colonnes: il est possible d'expliquer directement ce phénomène.

Je supposerai uniquement ici que A n'est pas de caractéristique 2.

J'utiliserai les résultats de James dans [JA1]. Si T est un tableau de Young pour D , je noterai C_T (resp. L_T) le sous-groupe de S_n stabilisant les colonnes (resp. les lignes) de T . Le module de Specht S^D associé au diagramme de Young D est défini comme le sous-espace de $\text{Ind}_{L_T}^{S_n}$ engendré par les "polytabloïdes" e_T : la seule propriété de e_T que j'utiliserai est que si $\sigma \in C_T$, alors $\sigma \cdot e_T = \varepsilon_\sigma e_T$.

Soit alors f un homomorphisme du module de Specht S^D dans $C_{n,k} = C_k(d_2(n), A)$. Il envoie e_T sur l'élément $x_s = \sum_s x_s s$ de $C_{n,k}$, la somme portant sur le simplexes de dimension k de $D_2(n)$, et je dois avoir

$$\sigma \cdot x = \varepsilon_\sigma x \quad \forall \sigma \in C_T.$$

Dans ces conditions, j'ai bien sûr $x_{\sigma(s)} = \varepsilon_\sigma x_s$. Comme en permutant les sommets de s par une permutation impaire, je change le signe de s , je vois que si $\sigma \in C_T$ stabilise s , et si je note η_σ la signature de σ comme permutation des sommets de s , je dois avoir $x_s = \varepsilon_\sigma \eta_\sigma x_s$.

Soit i_s l'involution de type 2^{k+1} définie par le simplexe s . Alors si j et k sont deux point fixes de i_s situés dans une même colonne de T , la transposition $\sigma = (j, k)$ est une permutation impaire de C_T , qui stabilise chaque sommet de s . Alors $\varepsilon_\sigma = -1$, mais $\eta_\sigma = +1$. Donc si A n'est pas de caractéristique 2, j'ai $x_s = 0$.

Le même raisonnement montre que si j et k sont échangés par i_s , et dans la même colonne de T , alors $x_s = 0$.

De même, si j et k sont deux points non-fixes et non échangés par i_s , et dans une même colonne de T , et si $i_s(j)$ et $i_s(k)$ sont dans une même colonne de T , alors $\sigma = (i_s(j), i_s(k))(j, k)$ est une permutation paire de C_T qui induit la transposition des sommets $\{j, i_s(j)\}$ et $\{k, i_s(k)\}$ de s . Donc $x_s = 0$ dans ce cas.

Alors si f n'est pas nul, il existe un simplexe s tel que si j et k sont dans une même colonne de T , alors $i_s(j)$ et $i_s(k)$ sont dans des colonnes différentes de T .

Dans [JA1], James utilise l'ordre suivant sur les diagrammes de Young: si D et D' sont deux diagrammes de Young, dont les lignes sont de longueur l_1, \dots, l_n (resp. l'_1, \dots, l'_n), alors

$$D \trianglelefteq D' \quad \text{si et seulement si } \forall k, l_1 + \dots + l_k \leq l'_1 + \dots + l'_k.$$

James montre (Lemme 3.7 de [JA1]) que si T et T' sont des tableaux de Young pour D et D' , et si les nombres d'une même ligne de D sont dans des colonnes différentes de D' , alors $D \trianglelefteq D'$.

Le raisonnement précédent et le lemme ci-dessus, appliqué aux diagrammes ' D et D , et aux tableaux ' T et $i_s(T)$, prouve alors que si f n'est pas nul, j'ai

$$'D \trianglelefteq D.$$

Si de plus ' $D = D$, alors un raffinement du lemme précédent montre qu'il existe $\sigma \in C_T$ et $\tau \in L_T$ tels qu'en notant θ_T la permutation induite par la symétrie de T autour de sa diagonale, j'ai

$$\theta_T = \tau \sigma i_s.$$

Or $\sigma i_s \sigma^{-1} = i_{\sigma(s)}$, donc $\theta_T = \tau i_{\sigma(s)} \sigma$, ou encore $i_{\sigma(s)} = \tau^{-1} \theta_T \sigma^{-1}$. Soit alors $n_{i,j}$ le nombre figurant à la i -ème ligne et la j -ème colonne de T , et τ_i (resp. σ_j) la permutation de la i -ème ligne (resp. de la j -ème colonne) de T induite par τ (resp. σ). Je dois avoir

$$i_{\sigma(s)}(n_{i,j}) = \tau^{-1} \theta_T \sigma^{-1}(n_{i,j}) = \tau^{-1} \theta_T(n_{\sigma_j^{-1}(i),j}) = \tau^{-1}(n_{j,\sigma_j^{-1}(i)}) = n_{j,\tau_j^{-1}\sigma_j^{-1}(i)}$$

et comme $i_{\sigma(s)}$ est une involution, ceci prouve que $\tau_j^{-1} \sigma_j^{-1} = 1$ pour tout j , ou encore que $\tau = \theta_T \sigma^{-1} \theta_T$. Dans ces conditions, j'ai $\theta_T = \theta_T \sigma^{-1} \theta_T i_{\sigma(s)} \sigma$, donc finalement

$$\theta_T = i_{\sigma(s)},$$

ce qui prouve que θ_T est de type 2^{k+1} , donc que D est de diamètre $n - 2k - 2$, le nombre de points fixes de $i_{\sigma(s)}$.

J'ai même un résultat plus précis: si s_T est le simplexe défini par θ_T (ses orbites de longueur 2), et si $x_s \neq 0$, alors il existe $\sigma \in C_T$ tel que $i_{s_T} = \theta_T = i_{\sigma(s)}$, ce qui prouve que $\sigma(s)$ est égal à s_T (à l'orientation près). En d'autres termes, l'élément x est un multiple de

$$x_T = \sum_{\sigma \in C_T} \varepsilon_\sigma \sigma(s_T)$$

et x_T est effectivement non-nul puisque le coefficient de s_T y est égal à 1 (le seul élément de C_T qui stabilise s_T est l'identité).

Je dois donc avoir $f(e_T) = \alpha \cdot x_T$. Comme f doit être compatible à l'action de S_n , je dois avoir $f(\rho(e_T)) = f(e_{\rho(T)}) = \alpha \cdot \rho(x_T) = \alpha \cdot x_{\rho(T)}$ pour tout $\rho \in S_n$, donc $f(e_T) = \alpha \cdot x_T$ pour tout tableau T de type D .

J'ai ainsi montré que si A est un corps de caractéristique différente de 2, si T un tableau de Young de type D , et f un homomorphisme non-nul du module de Specht S^D dans $C_k(d_2(n), A)$, alors ' $D \trianglelefteq D$, et que si de plus ' $D = D$, alors f est un multiple de l'application qui envoie e_T sur x_T .

Pour vérifier que cette application définit bien un homomorphisme de S^D dans $C_k(d_2(n), A)$, je dois vérifier que x_T est annulé par l'annulateur dans S_n de e_T . En montrant que les e_T , pour T tableau standard, forment

une base de S^D , James [JA1, th. 8.4] utilise les éléments de Garnir: si B et C sont deux colonnes adjacentes d'un tableau T de type D , si X est une partie de B et Y une partie de C , si S_Z est le sous-groupe de S_n fixant tous les points hors de la partie Z , l'élément de Garnir $G_{X,Y}$ est défini par

$$G_{X,Y} = \sum_{\sigma \in S_{X \cup Y} / (S_X \times S_Y)} \varepsilon_\sigma \sigma.$$

La démonstration de James prouve en fait que l'annulateur de e_T est l'idéal de S_n engendré par les $G_{X,Y}$, lorsque X est situé dans le bas de B , et Y dans le haut de C , et lorsque de plus $X \cup Y$ est égal à $l + 1$, en notant l la longueur de B .

Il suffit donc de vérifier que $G_{X,Y} \cdot x_T = 0$ dans ces conditions. La démonstration s'inspire de celle de James pour le théorème 7.2: soit

$$G_X^- = \sum_{\sigma \in S_X} \varepsilon_\sigma \sigma$$

alors $G_{X \cup Y}^- = G_{X,Y} G_X^- G_Y^-$, donc

$$G_{X \cup Y}^- \cdot x_T = |X|! |Y|! G_{X,Y} \cdot x_T$$

puisque S_X et S_Y sont des sous-groupes de C_T . Tout revient donc à montrer que $G_{X \cup Y}^- \cdot x_T = 0$ lorsque $A = Z$. Ce qui s'écrit encore

$$\sum_{\substack{\rho \in S_{X \cup Y} \\ \sigma \in C_T}} \varepsilon_\rho \varepsilon_\sigma \rho \sigma(s_T) = 0.$$

Comme $|X \cup Y| > l$, il y a deux nombres a et b dans $X \cup Y$ qui sont dans une même ligne de T , et donc envoyés par θ_T dans une même colonne de T . Si a et b ne sont pas diagonaux, soit $c = \theta_T(a)$ et $d = \theta_T(b)$. Alors la transposition $(\sigma(a), \sigma(b))$ est dans $S_{X \cup Y}$, et la transposition (c, d) dans C_T . Comme $\rho(\sigma(a), \sigma(b)) \sigma(c, d) = \rho \sigma(a, b)(c, d)$, et comme $(a, b)(c, d)$ stabilise s_T en changeant son orientation, je peux regrouper dans la somme ci-dessus les couples (ρ, σ) et $(\rho(\sigma(a), \sigma(b)), \sigma(c, d))$, et les termes correspondants s'annulent.

Et si par exemple a est diagonal, je peux supposer que $c = \theta(b)$ est dans $X \cup Y$, et regrouper dans la somme précédente les termes correspondants aux couples (ρ, σ) et $(\rho(\sigma(b), \sigma(c)), \sigma)$, qui s'annulent également. D'où le résultat dans les deux cas.

J'ai finalement montré le

LEMME 8. Soit A un corps de caractéristique différente de 2, et f un homomorphisme non-nul du module de Specht S^D dans $C_k(d_2(n), A)$. Alors $'D \trianglelefteq D$. Si de plus $'D = D$, alors D est de diamètre $n - 2k - 2$ et dans ce cas

$\text{Hom}_{AS_n}(S^D, C_k(d_2(n), A))$ est de dimension 1, engendré par l'application qui envoie e_T sur x_T .

Il est clair dans ces conditions que l'espace engendré par les x_T est contenu dans le noyau de la différentielle. Ce résultat reste d'ailleurs vrai quel que soit A , car il est vrai si $A = \mathbf{Z}$: les coefficients des simplexes intervenant dans la différentielle de x_T doivent être congrus à 0 modulo tous les nombres premiers supérieurs à n , donc ils sont nuls.

Si A est un corps de caractéristique 0 ou $p > n$, les modules de Specht sont tous simples et projectifs, ce qui prouve que leur image n'est pas dans l'image de la différentielle. Donc les images de ces différents modules de Specht sont en somme directe, et j'obtiens ainsi tout le module d'homologie correspondant.

PROPOSITION 5. *Si A est un corps de caractéristique 0 ou $p > n$, les éléments x_T , pour T tableau standard associé à un diagramme de Young symétrique de diamètre $n - 2k - 2$, forment une base de $H_k(d_2(n), A)$.*

La proposition précédente est fautive sans l'hypothèse sur la caractéristique de A , comme le montre facilement l'exemple $n = 5$, $k = 1$, $p = 2$, ou moins simplement le cas $n = 6$, $k = 1$, $p = 3$: dans ce cas la suite exacte (1) s'écrit

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \text{Res}_{S_6}^{S_7} \tilde{H}_2(d_2(7), A) \xrightarrow{\phi} \text{Ind}_{S_3}^{S_6} \tilde{H}_1(d_2(5), A) \longrightarrow \tilde{H}_1(d_2(6), A) \\ &\longrightarrow \text{Res}_{S_6}^{S_7} \tilde{H}_1(d_2(7), A) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

et il est facile de voir que si T est un tableau de type $(3, 2, 1)$, alors x_T est la différence $\phi(x_{T_1}) - \phi(x_{T_2})$, où T_1 et T_2 sont deux tableaux de type $(3, 1^2)$.

Les éléments x_T , pour T de type $(3, 2, 1)$, donnent donc tous 0 dans $\tilde{H}_1(d_2(7), A)$, égal à A , donc ils ne peuvent pas engendrer $\tilde{H}_1(d_2(6), A)$.

3.3. Homologie entière: Résultats partiels

Les modules d'homologie $H_k(d_2(n), \mathbf{Z})$ ont en général des éléments de torsion: j'ai vu par exemple que $H_1(d_2(7), \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$. Je montrerai comment ce résultat s'étend à $H_k(d_2(3k + 4), \mathbf{Z})$ pour $k \geq 1$. Il est possible de montrer que certains modules $H_k(d_2(n), \mathbf{Z})$ sont nuls, et que d'autres sont des modules de torsion non-nuls, très difficiles à calculer explicitement.

3.3.1. Une autre suite exacte

Soit X_n le complexe simplicial $d_2(n)$ privé des simplexes contenant une paire $\{1, i\}$ ou $\{2, j\}$, pour $i, j \geq 3$. Alors X_n est un sous-complexe simplicial de $d_2(n)$, et la proposition 1 permet d'affirmer que X_n est contractile.

Les simplexes de $d_2(n) - X_n$ sont de trois types: ceux qui contiennent une

paire $\{1, i\}$ et aucune paire $\{2, j\}$, ceux qui contiennent une paire $\{2, j\}$ et aucune paire $\{1, i\}$, et ceux qui contiennent une paire $\{1, i\}$ et une paire $\{2, j\}$.

Les simplexes de dimension k du premier type s'identifient aux simplexes de dimension $k-1$ du complémentaire $\overline{\{1, 2, i\}}$ de $\{1, 2, i\}$, ceux du second type aux simplexes de dimension $k-1$ du complémentaire de $\{1, 2, j\}$. Enfin ceux du troisième type s'identifient aux simplexes de dimension $k-2$ du complémentaire de $\{1, 2, i, j\}$.

La suite exacte de complexes

$$0 \rightarrow \tilde{C}_*(X_n) \rightarrow \tilde{C}_*(d_2(n)) \rightarrow \tilde{C}_*(d_2(n)/X_n) \rightarrow 0$$

peut alors s'écrire

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow & \tilde{C}_k(X_n) & \rightarrow & \tilde{C}_k(d_2(n)) & \rightarrow & \bigoplus_{1i} \tilde{C}_{k-1}(d_2(\overline{\{1, 2, i\}})) & \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \swarrow \\ 0 \rightarrow & \tilde{C}_{k-1}(X_n) & \rightarrow & \tilde{C}_{k-1}(d_2(n)) & \rightarrow & \bigoplus_{1i} \tilde{C}_{k-2}(d_2(\overline{\{1, 2, i\}})) & \cdots \\ & & & & & \downarrow & \swarrow \\ & & & \cdots \oplus \bigoplus_{1i|2j} \tilde{C}_{k-2}(d_2(\overline{\{1, 2, i, j\}})) & \oplus \bigoplus_{2j} \tilde{C}_{k-1}(d_2(\overline{\{1, 2, j\}})) & \rightarrow 0 \\ & & & \swarrow & \downarrow & \swarrow & \downarrow \\ & & & \cdots \oplus \bigoplus_{1i|2j} \tilde{C}_{k-3}(d_2(\overline{\{1, 2, i, j\}})) & \oplus \bigoplus_{2j} \tilde{C}_{k-2}(d_2(\overline{\{1, 2, j\}})) & \rightarrow 0 \end{array}$$

où les flèches entre la ligne du haut et celle du bas indiquent l'action des différentielles, les flèches verticales étant les différentielles ordinaires des complexes correspondants.

La somme directe des complexes $\tilde{C}_*(d_2(\overline{\{1, 2, i\}}))$ et $\tilde{C}_*(d_2(\overline{\{1, 2, j\}}))$ est ainsi un sous-complexe du complexe $\tilde{C}_*(d_2(n)/X_n)$, et le quotient par ce sous-complexe s'identifie à la somme directe des complexes $\tilde{C}_*(d_2(\overline{\{1, 2, i, j\}}))$ traduits d'un degré. Comme X_* est acyclique, l'homologie réduite de $d_2(n)$ est identique à celle du complexe quotient $d_2(n)/X_n$, et les remarques précédentes conduisent à la suite exacte longue du lemme suivant

LEMME 9. *J'ai la suite exacte*

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow & \bigoplus_{\substack{p=1i \\ p=2j}} \tilde{H}_{k-1}(d_2(\overline{p \cup \{1, 2\}})) \rightarrow \tilde{H}_k(d_2(n)) \rightarrow \bigoplus_{q=1i|2j} \tilde{H}_{k-2}(d_2(\bar{q})) \\ & \rightarrow \bigoplus_{\substack{p=1i \\ p=2j}} \tilde{H}_{k-2}(d_2(\overline{p \cup \{1, 2\}})) \rightarrow \cdots \end{aligned} \tag{2}$$

(les indices i et j sont distincts de 1 et 2).

3.3.2. *Quelques groupes $\tilde{H}_k(d_2(n))$*

Les groupes d'homologie $\tilde{H}_{k-1}(d_2(2k+1))$ et $\tilde{H}_{k-2}(d_2(2k))$ sont les groupes d'homologie d'indice maximum de $d_2(2k+1)$ et de $d'_2(2k)$ (lemme 4): ce sont donc des \mathbf{Z} -modules libres, dont le rang est égal à la dimension des modules de Specht indiqués dans les remarques (2) et (3) ci-dessus. Il faut noter cependant que l'application $e_{\mathcal{T}} \mapsto x_{\mathcal{T}}$ n'induit pas un isomorphisme de $\mathbf{Z}S_{2k+1}$ -modules de $S^{k+1, 1^k}$ sur $\tilde{H}_{k-1}(d_2(2k+1))$, comme le montre le cas $k=2$.

La suite exacte (2) permet d'autre part de trouver par récurrence certains des groupes $\tilde{H}_k(d_2(n))$. Par exemple:

PROPOSITION 6. *Le groupe $\tilde{H}_k(d_2(n))$ est nul si $3k+4 < n$.*

En effet, la proposition résulte si $k=0$ du fait que $d_2(n)$ est connexe pour $n > 4$, et pour $k=1$ du fait que $d_2(n)$ est simplement connexe si $n > 7$. L'hypothèse $n > 3k+4$ entraîne $n-3 > 3(k-1)+4$, et je peux supposer par récurrence que $\tilde{H}_{k-1}(d_2(n-3))=0$, donc que $\tilde{H}_{k-1}(d_2(\overline{p \cup \{1, 2\}}))=0$ pour $p=1i$ ou $p=2j$ dans la suite exacte (2).

De même, j'ai $n-4 > 3k > 3(k-2)+4$, donc je peux supposer $\tilde{H}_{k-2}(d_2(\bar{q}))=0$ pour $q=1i | 2j$. La suite exacte (2) permet alors de conclure.

La borne ci-dessus est certainement la meilleure possible pour k . En effet:

PROPOSITION 7. *Le groupe $\tilde{H}_k(d_2(3k+4))$ est cyclique d'ordre 3 si $k \geq 1$.*

Dém. Le résultat est vrai si $k=1$. D'après la proposition 6, l'extrémité droite de la suite exacte (2) s'écrit pour $n=3k+4$

$$\bigoplus_{q=1i | 2j} \tilde{H}_{k-1}(d_2(\bar{q})) \rightarrow \bigoplus_{\substack{p=1i \\ p=2j}} \tilde{H}_{k-1}(d_2(\overline{p \cup \{1, 2\}})) \rightarrow \tilde{H}_k(d_2(3k+4)) \rightarrow 0$$

et les morphismes de gauche se déduisent des inclusions de $\overline{\{1, 2, i, j\}}$ dans $\overline{\{1, 2, i\}}$ et $\overline{\{1, 2, j\}}$. Ainsi, le groupe $\tilde{H}_k(d_2(3k+4))$ s'identifie à la limite inductive sur ces inclusions des groupes $\tilde{H}_{k-1}(d_2(\overline{p \cup \{1, 2\}}))$ pour $p=1i$ et $p=2j$, tous isomorphes à $\tilde{H}_{k-1}(d_2(3k+1))$, donc à $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ par hypothèse de récurrence.

Or la suite exacte (1) donne

$$\dots \rightarrow \tilde{H}_{k-1}(d_2(3k)) \rightarrow \text{Res}_{S_{3k}^{S_{3k+1}}} \tilde{H}_{k-1}(d_2(3k+1)) \rightarrow 0$$

puisque $\tilde{H}_{k-2}(d_2(3k-1))=0$ par la proposition 6. Soit $f_{i,j}$ (resp. $g_{i,j}$) le morphisme $\tilde{H}_{k-1}(d_2(\bar{q})) \rightarrow \tilde{H}_{k-1}(d_2(\overline{p \cup \{1, 2\}}))$ pour $q=1i | 2j$ et $p=1i$ (resp. $p=2j$). Ces morphismes sont surjectifs par la remarque précédente, et de plus la permutation $(1, 2)(i, j)$ induit un isomorphisme $\phi_{i,j}$ de $\tilde{H}_{k-1}(\overline{\{1, 2, i\}})$ dans $\tilde{H}_{k-1}(\overline{\{1, 2, j\}})$ tel que $\phi_{i,j} f_{i,j} = g_{i,j}$.

Finalement, la limite inductive précédente est le quotient de la somme directe pour $p=1i$ et $p=2j$ des groupes $\tilde{H}_{k-1}(d_2(\overline{p \cup \{1, 2\}}))$ par les relations identifiant x et $\phi_{i,j}(x)$ pour tout $x \in \tilde{H}_{k-1}(\{1, 2, i\})$ et tout $j \neq i$.

Alors si Γ est le graphe dont les sommets sont les paires $\{1, i\}$ et $\{2, j\}$ (avec $i, j \geq 3$), le sommet $\{1, i\}$ étant lié au sommet $\{2, j\}$ si $i \neq j$, je vois que le groupe $\tilde{H}_k(d_2(3k+4))$ est isomorphe à la limite inductive sur les sommets p de Γ des groupes $\tilde{H}_{k-1}(d_2(\overline{p \cup \{1, 2\}}))$ prise sur les morphismes $\phi_{i,j}$, pour $i \neq j$.

Or Γ est connexe si $k \geq 1$, et n'a que des cycles de longueur paires (c'est un graphe biparti). Alors $\tilde{H}_k(d_2(3k+4))$ est le quotient d'un seul des groupes $\tilde{H}_{k-1}(d_2(\overline{p \cup \{1, 2\}}))$, isomorphe à $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$, par les relations déduites des morphismes $\phi_{i,j}$ et des cycles de Γ .

Le morphisme $\phi_{i,j}$ de déduisant de la permutation $(1, 2)(i, j)$, je dois donc identifier dans $\tilde{H}_{k-1}(d_2(\{1, 2, 3\}))$ un élément et son transformé par un produit de telles permutations, qui sera de toutes façons une permutation paire.

Or si le groupe S_n agit sur $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$, le groupe A_n y agit trivialement. Donc il n'y a aucune relation nouvelle, et la limite inductive cherchée est bien égale à $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$. D'où la proposition.

Remarque. Il n'est pas difficile de voir, en utilisant le 1-cocycle sur $d_2(7)$ défini plus haut, que S_7 agit par la signature sur $\tilde{H}_1(d_2(7))$, et donc qu'il en est de même de S_{3k+4} agissant sur $\tilde{H}_k(d_2(3k+4))$.

Le résultat suivant est malheureusement moins précis:

PROPOSITION 8. *Si $k \geq 3$, le groupe $\tilde{H}_k(d_2(3k+3))$ est un 3-groupe fini, annulé par 9, de rang supérieur ou égal à $3k+2$.*

Dém. L'extrémité droite de la suite exacte (2) s'écrit ici

$$\bigoplus_{q=1i|2j} \tilde{H}_{k-1}(d_2(\bar{q})) \rightarrow \bigoplus_{\substack{p=1i \\ p=2j}} \tilde{H}_{k-1}(d_2(\overline{p \cup \{1, 2\}})) \xrightarrow{\oplus_p \alpha_p} \tilde{H}_k(d_2(3k+4)) \rightarrow 0 \tag{3}$$

et il est facile de voir que le morphisme α_p se déduit de l'application qui au simplexe (p_0, \dots, p_{k-1}) de $C_{k-1}(d_2(\overline{p \cup \{1, 2\}}))$ associe la différence $(p_0, \dots, p_k, p) - (p_0, \dots, p_k, \{1, 2\})$.

Soit alors T un tableau de Young de type $(2k+2, k+1)$, dont la première ligne s'écrit $(a_0, \dots, a_k, b_0, \dots, b_k)$. Soit r_T le simplexe $\{a_0, b_0\} | \dots | \{a_k, b_k\}$, et y_T l'élément défini par

$$y_T = \sum_{\sigma \in C_T} \varepsilon_\sigma \sigma(r_T).$$

L'élément y_T est une somme algébrique de 2^{k+1} simplexes: c'est une différence de deux paires si $3k + 3 = 3$, un cycle de longueur 4 si $3k + 3 = 6$, un octaèdre si $3k + 3 = 9$, etc.

LEMME 10. *Les éléments y_T , lorsque T décrit les tableaux de Young de type $(2k + 2, k + 1)$, engendrent $\tilde{H}_k(d_2(3k + 3))$.*

Soit E_k l'espace engendré par les y_T . Je dois prouver que E_k est dans le noyau de la différentielle, et que E_k engendre $\tilde{H}_k(d_2(3k + 3))$.

C'est clair si $3k + 3 = 3$, puisque E_k est engendré par les différences de paires $\{a, b\} - \{a, c\}$, qui engendrent $\tilde{H}_0(d_2(3))$.

Le morphisme $\bigoplus_p \alpha_p$ ci-dessus étant surjectif, il suffit de vérifier qu'il envoie E_{k-1} dans E_k , ce qui est clair puisque si T est le tableau

4	...	$k + 3$	$k + 4$...	$2k + 3$
$2k + 4$...	$3k + 3$			

qui donne l'élément y_T de $H_{k-1}(\overline{d_2(\{1, 2\} \cup p)})$, pour $p = \{1, 3\}$, alors $\alpha_p(y_T)$ est égal à $y_{T'}$, où T' est le tableau

4	...	$k + 3$	3	$k + 4$...	$2k + 3$	1
$2k + 4$...	$3k + 3$	2				

D'où le lemme.

Comme dans la proposition 7, la suite exacte (1) devient ici

$$\begin{aligned} \dots &\rightarrow \tilde{H}_{k-1}(d_2(3k - 1)) \xrightarrow{\beta_k} \text{Res}_{S_{3k-1}}^{S_{3k}} \tilde{H}_{k-1}(d_2(3k)) \\ &\rightarrow \text{Ind}_{S_{3k-2}}^{S_{3k-1}} \tilde{H}_{k-2}(d_2(3k - 2)). \end{aligned}$$

Si $k \geq 3$, le module figurant à droite dans l'induction est isomorphe à $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ par la proposition 7. Donc si $y \in \tilde{H}_{k-1}(d_2(3k))$, je vois que $3y$ est dans l'image de β_k . La suite exacte (3) indique par ailleurs que le groupe $\tilde{H}_k(d_2(3k + 3))$ est comme dans la proposition 7 la limite inductive des groupes $\tilde{H}_{k-1}(d_2(\overline{p \cup \{1, 2\}}))$. Et si $y_p \in \tilde{H}_{k-1}(d_2(\overline{p \cup \{1, 2\}}))$, alors l'argument précédent prouve que $3y_p$ est dans l'image de $\tilde{H}_{k-1}(d_2(\bar{q}))$, pour tout q contenant p , et doit donc par le raisonnement de la proposition 7 être identifié dans la limite inductive à tous ses transformés par le groupe alterné.

Or si T est le tableau

4	...	$k + 3$	$k + 4$...	$2k + 3$
$2k + 4$...	$3k + 3$			

il est facile de voir que le 3-cycle $\rho = (4, k + 4, 2k + 4)$ est tel que

$$y_T + \rho(y_T) + \rho^2(y_T) = 0.$$

Si \bar{y}_T est l'image de y_T dans la limite inductive, j'ai donc $3\bar{y}_T = \rho(3\bar{y}_T) = \rho^2(3\bar{y}_T)$, donc $9\bar{y}_T = 0$. D'où les deux premières assertions de la proposition, puisque les conjugués de \bar{y}_T engendrent $\tilde{H}_k(d_2(3k + 3))$.

L'assertion sur le rang résulte alors de la suite exacte (1) qui donne la surjection

$$\text{Res}_{S_{3k+2}}^{S_{3k+3}} \tilde{H}_k(d_2(3k + 3)) \rightarrow \text{Ind}_{S_{3k+1}}^{S_{3k+2}} \tilde{H}_{k-1}(d_2(3k + 1)) \rightarrow 0$$

et du fait que le module de droite est isomorphe à $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^{3k+2}$.

Remarques. (1) Pour $k \geq 3$, j'ai $(3k + 3 - 2k - 2)^2 > 3k + 3$, et il n'y a aucun diagramme de Young symétrique de taille $3k + 3$ et de diamètre $3k + 3 - 2k - 2$.

(2) J'ai calculé sur ordinateur le rang de la torsion des groupes $\tilde{H}_2(d_2(9))$ et $\tilde{H}_3(d_2(11))$: ces deux groupes n'ont que de la 3-torsion, de rang 8 pour le premier, et 45 pour le second. Ce dernier calcul consiste à trouver le rang modulo 3 d'une matrice à 6584 lignes et 8960 colonnes, ce qui a pris environ 19 heures sur un Sun 3/60, avec un programme en langage C.

3.4. Modules de Lefschetz

Si l'homologie de $d_2(n)$ est difficile à connaître exactement, il est par contre facile de calculer son module de Lefschetz. J'utiliserai pour cela les notations et définitions de [BO2], où je définis l'anneau $\mathcal{B}(1)$ et l'exponentielle $\mathcal{E}xp$. Je note $b(S_n)$ l'anneau de Burnside de S_n .

PROPOSITION 9. Soit $\delta_n \in b(S_n)$ le module de Lefschetz réduit de $d_2(n)$. Alors

$$\sum_{n \geq 0} \delta_n \cdot T^n = -\mathcal{E}xp(T - T^2) \text{ dans } \mathcal{B}(1).$$

Dém. Si π est un élément de $d_2(n)$, soit $\bar{\pi}$ le complémentaire de la réunion des paires de π . Si π est de type 2^k , le stabilisateur $Z_{n,k}$ de π dans

S_n est isomorphe au produit direct $(S_2 \sim S_k) \times S_{n-2k}$. D'autre part $]\pi, \cdot[$ s'identifie à $d_2(\bar{\pi})$, et le module de Lefschetz réduit $A_{]\pi, \cdot[}^{Z_n, k}$ est égal à δ_{n-2k} . Donc

$$\delta_n = -S_n/S_n - \sum_{k \geq 1} \sum_{\substack{\pi \in d_2(n) \\ \text{de type } 2^k \\ \text{mod } S_n}} \text{Ind}_{Z_n, k}^{S_n} \delta_{n-2k}$$

ce qui s'écrit encore

$$\sum_{k \geq 0} \text{Ind}_{(S_2 \sim S_k) \times S_{n-2k}}^{S_n} \delta_{n-2k} = -S_n/S_n.$$

En multipliant cette égalité par T^n et en sommant sur n , il vient

$$\left(\sum_{k \geq 0} S_{2k}/(S_2 \sim S_k) \cdot T^{2k} \right) \left(\sum_{l \geq 0} \delta_l \cdot T^l \right) = - \sum_{n \geq 0} T^n.$$

Le facteur de gauche n'est autre que $\mathcal{E}xp(T^2)$, et le membre de droite est égal à $\mathcal{E}xp(T)$. D'où la proposition. En prenant les degrés des deux membres, il vient

COROLLAIRE. Soit $\tilde{\chi}(d_2(n))$ l'indicatrice d'Euler-Poincaré réduite de $d_2(n)$. Alors

$$\sum_n \tilde{\chi}(d_2(n)) \frac{T^n}{n!} = -Exp\left(T - \frac{T^2}{2}\right) \quad \text{dans } \mathbf{Q}[[T]].$$

Le corollaire se déduit aussi facilement du nombre de simplexes de dimension k de $d_2(n)$, égal à $n!/2^{k+1}(k+1)!(n-2k-2)!$, ce qui donne aussi

$$\tilde{\chi}(d_2(n)) = - \sum_{0 \leq k \leq n/2} (-1)^k \frac{n!}{2^k k!(n-2k)!}$$

BIBLIOGRAPHIE

[BO1] S. BOUC, Homologie de certains ensembles ordonnés, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I* 299, n° 2 (1984).
 [BO2] S. BOUC, Exponentielle et modules de Steinberg, *J. Algebra* 150 (1992), 118-157.
 [JA1] G. D. JAMES, The representation theory of the symmetric groups, in "Lecture Notes in Mathematics, Vol. 682," Springer-Verlag, Berlin/New York, 1978.
 [QU1] D. QUILLEN, Homotopy properties of the poset of non-trivial p -subgroups, *Adv. in Math.* 28, n° 2 (1978), 101-128.