Conjecture d'Alperin et équivalence fonctorielle de blocs

Serge Bouc

CNRS-LAMFA
Université de Picardie

avec

Deniz Yılmaz (Bilkent)

et

Deniz Yılmaz et Robert Boltje (UCSC)

Amiens

11 décembre 2025

Groupes finis

Groupes finis

Groupes finis

- « La » catégorie des groupes finis

Groupes finis

- « La » catégorie des groupes finis : les objets sont les groupes finis

Groupes finis

- « La » catégorie des groupes finis : les objets sont les groupes finis, et les morphismes sont les homomorphismes de groupes.

Groupes finis

- « La » catégorie des groupes finis : les objets sont les groupes finis, et les morphismes sont les homomorphismes de groupes. Conduit à la notion de groupe fini « simple »

Groupes finis

- « La » catégorie des groupes finis : les objets sont les groupes finis, et les morphismes sont les homomorphismes de groupes. Conduit à la notion de groupe fini « simple », et à la question de leur classification.

Groupes finis

- « La » catégorie des groupes finis : les objets sont les groupes finis, et les morphismes sont les homomorphismes de groupes. Conduit à la notion de groupe fini « simple », et à la question de leur classification.
- Une représentation d'un groupe G

Groupes finis

- « La » catégorie des groupes finis : les objets sont les groupes finis, et les morphismes sont les homomorphismes de groupes. Conduit à la notion de groupe fini « simple », et à la question de leur classification.
- Une représentation d'un groupe G est un homomorphisme de groupes $G \to \Gamma$

Groupes finis

- « La » catégorie des groupes finis : les objets sont les groupes finis, et les morphismes sont les homomorphismes de groupes. Conduit à la notion de groupe fini « simple », et à la question de leur classification.
- Une représentation d'un groupe G est un homomorphisme de groupes $G \to \Gamma$, où Γ est un groupe « connu », par exemple :

Groupes finis

- « La » catégorie des groupes finis : les objets sont les groupes finis, et les morphismes sont les homomorphismes de groupes. Conduit à la notion de groupe fini « simple », et à la question de leur classification.
- Une représentation d'un groupe G est un homomorphisme de groupes $G \to \Gamma$, où Γ est un groupe « connu », par exemple :
  - Un groupe de permutation $\mathfrak{S}_X$ d'un ensemble (fini) X

Groupes finis

- « La » catégorie des groupes finis : les objets sont les groupes finis, et les morphismes sont les homomorphismes de groupes. Conduit à la notion de groupe fini « simple », et à la question de leur classification.
- Une représentation d'un groupe G est un homomorphisme de groupes $G \to \Gamma$, où Γ est un groupe « connu », par exemple :
  - Un groupe de permutation $\mathfrak{S}_X$ d'un ensemble (fini) X (représentation de permutation).

Groupes finis

- « La » catégorie des groupes finis : les objets sont les groupes finis, et les morphismes sont les homomorphismes de groupes. Conduit à la notion de groupe fini « simple », et à la question de leur classification.
- Une représentation d'un groupe G est un homomorphisme de groupes $G \to \Gamma$, où Γ est un groupe « connu », par exemple :
  - Un groupe de permutation $\mathfrak{S}_X$ d'un ensemble (fini) X (représentation de permutation). Remonte à Galois ($\sim$1830)

Groupes finis

- « La » catégorie des groupes finis : les objets sont les groupes finis, et les morphismes sont les homomorphismes de groupes. Conduit à la notion de groupe fini « simple », et à la question de leur classification.
- Une représentation d'un groupe G est un homomorphisme de groupes $G \to \Gamma$, où Γ est un groupe « connu », par exemple :
  - Un groupe de permutation $\mathfrak{S}_X$ d'un ensemble (fini) X (représentation de permutation). Remonte à Galois ($\sim$1830), Jordan (1870)

Groupes finis

- « La » catégorie des groupes finis : les objets sont les groupes finis, et les morphismes sont les homomorphismes de groupes. Conduit à la notion de groupe fini « simple », et à la question de leur classification.
- Une représentation d'un groupe G est un homomorphisme de groupes $G \to \Gamma$, où Γ est un groupe « connu », par exemple :
  - Un groupe de permutation $\mathfrak{S}_X$ d'un ensemble (fini) X (représentation de permutation). Remonte à Galois ($\sim$1830), Jordan (1870), Sylow (1872)

Groupes finis

- « La » catégorie des groupes finis : les objets sont les groupes finis, et les morphismes sont les homomorphismes de groupes. Conduit à la notion de groupe fini « simple », et à la question de leur classification.
- Une représentation d'un groupe G est un homomorphisme de groupes $G \to \Gamma$, où Γ est un groupe « connu », par exemple :
  - Un groupe de permutation $\mathfrak{S}_X$ d'un ensemble (fini) X (représentation de permutation). Remonte à Galois ($\sim$1830), Jordan (1870), Sylow (1872), et plus tard Burnside (1897).

Groupes finis

- « La » catégorie des groupes finis : les objets sont les groupes finis, et les morphismes sont les homomorphismes de groupes. Conduit à la notion de groupe fini « simple », et à la question de leur classification.
- Une représentation d'un groupe G est un homomorphisme de groupes $G \to \Gamma$, où Γ est un groupe « connu », par exemple :
  - Un groupe de permutation $\mathfrak{S}_X$ d'un ensemble (fini) X (représentation de permutation). Remonte à Galois ($\sim$1830), Jordan (1870), Sylow (1872), et plus tard Burnside (1897).
  - Un groupe linéaire $GL(V)$, où V est un espace vectoriel (de dimension finie) sur un corps $\Bbbk$

Groupes finis

- « La » catégorie des groupes finis : les objets sont les groupes finis, et les morphismes sont les homomorphismes de groupes. Conduit à la notion de groupe fini « simple », et à la question de leur classification.
- Une représentation d'un groupe G est un homomorphisme de groupes $G \to \Gamma$, où Γ est un groupe « connu », par exemple :
  - Un groupe de permutation $\mathfrak{S}_X$ d'un ensemble (fini) X (représentation de permutation). Remonte à Galois (∼1830), Jordan (1870), Sylow (1872), et plus tard Burnside (1897).
  - Un groupe linéaire $GL(V)$, où V est un espace vectoriel (de dimension finie) sur un corps $\Bbbk$ (représentation linéaire).

Groupes finis

- « La » catégorie des groupes finis : les objets sont les groupes finis, et les morphismes sont les homomorphismes de groupes. Conduit à la notion de groupe fini « simple », et à la question de leur classification.
- Une représentation d'un groupe G est un homomorphisme de groupes $G \to \Gamma$, où Γ est un groupe « connu », par exemple :
  - Un groupe de permutation $\mathfrak{S}_X$ d'un ensemble (fini) X (représentation de permutation). Remonte à Galois ($\sim$1830), Jordan (1870), Sylow (1872), et plus tard Burnside (1897).
  - Un groupe linéaire $GL(V)$, où V est un espace vectoriel (de dimension finie) sur un corps $\Bbbk$ (représentation linéaire).
- Deux cas se présentent pour les représentations linéaires de G :

Groupes finis

- « La » catégorie des groupes finis : les objets sont les groupes finis, et les morphismes sont les homomorphismes de groupes. Conduit à la notion de groupe fini « simple », et à la question de leur classification.
- Une représentation d'un groupe G est un homomorphisme de groupes $G \to \Gamma$, où Γ est un groupe « connu », par exemple :
    - Un groupe de permutation $\mathfrak{S}_X$ d'un ensemble (fini) X (représentation de permutation). Remonte à Galois ($\sim$1830), Jordan (1870), Sylow (1872), et plus tard Burnside (1897).
    - Un groupe linéaire $GL(V)$, où V est un espace vectoriel (de dimension finie) sur un corps $\Bbbk$ (représentation linéaire).
- Deux cas se présentent pour les représentations linéaires de G :
    - $\Bbbk = \mathbb{C}$

Groupes finis

- « La » catégorie des groupes finis : les objets sont les groupes finis, et les morphismes sont les homomorphismes de groupes. Conduit à la notion de groupe fini « simple », et à la question de leur classification.
- Une représentation d'un groupe G est un homomorphisme de groupes $G \to \Gamma$, où Γ est un groupe « connu », par exemple :
  - Un groupe de permutation $\mathfrak{S}_X$ d'un ensemble (fini) X (représentation de permutation). Remonte à Galois ($\sim$1830), Jordan (1870), Sylow (1872), et plus tard Burnside (1897).
  - Un groupe linéaire $GL(V)$, où V est un espace vectoriel (de dimension finie) sur un corps $\mathbb{k}$ (représentation linéaire).
- Deux cas se présentent pour les représentations linéaires de G :
  - $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ (ou $car(\mathbb{k}) = 0$)

Groupes finis

- « La » catégorie des groupes finis : les objets sont les groupes finis, et les morphismes sont les homomorphismes de groupes. Conduit à la notion de groupe fini « simple », et à la question de leur classification.
- Une représentation d'un groupe G est un homomorphisme de groupes $G \to \Gamma$, où Γ est un groupe « connu », par exemple :
  - Un groupe de permutation $\mathfrak{S}_X$ d'un ensemble (fini) X (représentation de permutation). Remonte à Galois ($\sim$1830), Jordan (1870), Sylow (1872), et plus tard Burnside (1897).
  - Un groupe linéaire $GL(V)$, où V est un espace vectoriel (de dimension finie) sur un corps $\Bbbk$ (représentation linéaire).
- Deux cas se présentent pour les représentations linéaires de G :
  - $\Bbbk = \mathbb{C}$ (représentations ordinaires)

Groupes finis

- « La » catégorie des groupes finis : les objets sont les groupes finis, et les morphismes sont les homomorphismes de groupes. Conduit à la notion de groupe fini « simple », et à la question de leur classification.
- Une représentation d'un groupe G est un homomorphisme de groupes $G \to \Gamma$, où Γ est un groupe « connu », par exemple :
  - Un groupe de permutation $\mathfrak{S}_X$ d'un ensemble (fini) X (représentation de permutation). Remonte à Galois ($\sim$1830), Jordan (1870), Sylow (1872), et plus tard Burnside (1897).
  - Un groupe linéaire $GL(V)$, où V est un espace vectoriel (de dimension finie) sur un corps $\mathbb{k}$ (représentation linéaire).
- Deux cas se présentent pour les représentations linéaires de G :
  - $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ (représentations ordinaires), théorie des caractères (Frobenius, 1896)

Groupes finis

- « La » catégorie des groupes finis : les objets sont les groupes finis, et les morphismes sont les homomorphismes de groupes. Conduit à la notion de groupe fini « simple », et à la question de leur classification.
- Une représentation d'un groupe G est un homomorphisme de groupes $G \to \Gamma$, où Γ est un groupe « connu », par exemple :
  - Un groupe de permutation $\mathfrak{S}_X$ d'un ensemble (fini) X (représentation de permutation). Remonte à Galois ($\sim$1830), Jordan (1870), Sylow (1872), et plus tard Burnside (1897).
  - Un groupe linéaire $GL(V)$, où V est un espace vectoriel (de dimension finie) sur un corps $\Bbbk$ (représentation linéaire).
- Deux cas se présentent pour les représentations linéaires de G :
  - $\Bbbk = \mathbb{C}$ (représentations ordinaires), théorie des caractères (Frobenius, 1896), puis des représentations (Frobenius, Schur,

Groupes finis

- « La » catégorie des groupes finis : les objets sont les groupes finis, et les morphismes sont les homomorphismes de groupes. Conduit à la notion de groupe fini « simple », et à la question de leur classification.
- Une représentation d'un groupe G est un homomorphisme de groupes $G \to \Gamma$, où Γ est un groupe « connu », par exemple :
  - Un groupe de permutation $\mathfrak{S}_X$ d'un ensemble (fini) X (représentation de permutation). Remonte à Galois ($\sim$1830), Jordan (1870), Sylow (1872), et plus tard Burnside (1897).
  - Un groupe linéaire $GL(V)$, où V est un espace vectoriel (de dimension finie) sur un corps $\Bbbk$ (représentation linéaire).
- Deux cas se présentent pour les représentations linéaires de G :
  - $\Bbbk = \mathbb{C}$ (représentations ordinaires), théorie des caractères (Frobenius, 1896), puis des représentations (Frobenius, Schur, Burnside $\leq$ 1911).

Groupes finis

- « La » catégorie des groupes finis : les objets sont les groupes finis, et les morphismes sont les homomorphismes de groupes. Conduit à la notion de groupe fini « simple », et à la question de leur classification.
- Une représentation d'un groupe G est un homomorphisme de groupes $G \to \Gamma$, où Γ est un groupe « connu », par exemple :
  - Un groupe de permutation $\mathfrak{S}_X$ d'un ensemble (fini) X (représentation de permutation). Remonte à Galois ($\sim$1830), Jordan (1870), Sylow (1872), et plus tard Burnside (1897).
  - Un groupe linéaire $GL(V)$, où V est un espace vectoriel (de dimension finie) sur un corps $\mathbb{k}$ (représentation linéaire).
- Deux cas se présentent pour les représentations linéaires de G :
  - $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ (représentations ordinaires), théorie des caractères (Frobenius, 1896), puis des représentations (Frobenius, Schur, Burnside $\leq$ 1911).
  - $p = car(\mathbb{k}) > 0$

Groupes finis

- « La » catégorie des groupes finis : les objets sont les groupes finis, et les morphismes sont les homomorphismes de groupes. Conduit à la notion de groupe fini « simple », et à la question de leur classification.
- Une représentation d'un groupe G est un homomorphisme de groupes $G \to \Gamma$, où Γ est un groupe « connu », par exemple :
  - Un groupe de permutation $\mathfrak{S}_X$ d'un ensemble (fini) X (représentation de permutation). Remonte à Galois ($\sim$1830), Jordan (1870), Sylow (1872), et plus tard Burnside (1897).
  - Un groupe linéaire $GL(V)$, où V est un espace vectoriel (de dimension finie) sur un corps $\Bbbk$ (représentation linéaire).
- Deux cas se présentent pour les représentations linéaires de G :
  - $\Bbbk = \mathbb{C}$ (représentations ordinaires), théorie des caractères (Frobenius, 1896), puis des représentations (Frobenius, Schur, Burnside $\leq$ 1911).
  - $p = car(\Bbbk) > 0$ (en particulier $p||G|$)

Groupes finis

- « La » catégorie des groupes finis : les objets sont les groupes finis, et les morphismes sont les homomorphismes de groupes. Conduit à la notion de groupe fini « simple », et à la question de leur classification.
- Une représentation d'un groupe G est un homomorphisme de groupes $G \to \Gamma$, où Γ est un groupe « connu », par exemple :
  - Un groupe de permutation $\mathfrak{S}_X$ d'un ensemble (fini) X (représentation de permutation). Remonte à Galois ($\sim$1830), Jordan (1870), Sylow (1872), et plus tard Burnside (1897).
  - Un groupe linéaire $GL(V)$, où V est un espace vectoriel (de dimension finie) sur un corps $\Bbbk$ (représentation linéaire).
- Deux cas se présentent pour les représentations linéaires de G :
  - $\Bbbk = \mathbb{C}$ (représentations ordinaires), théorie des caractères (Frobenius, 1896), puis des représentations (Frobenius, Schur, Burnside $\leq$ 1911).
  - $p = car(\Bbbk) > 0$ (représentations modulaires).

Groupes finis

- « La » catégorie des groupes finis : les objets sont les groupes finis, et les morphismes sont les homomorphismes de groupes. Conduit à la notion de groupe fini « simple », et à la question de leur classification.
- Une représentation d'un groupe G est un homomorphisme de groupes $G \to \Gamma$, où Γ est un groupe « connu », par exemple :
  - Un groupe de permutation $\mathfrak{S}_X$ d'un ensemble (fini) X (représentation de permutation). Remonte à Galois ($\sim$1830), Jordan (1870), Sylow (1872), et plus tard Burnside (1897).
  - Un groupe linéaire $GL(V)$, où V est un espace vectoriel (de dimension finie) sur un corps $\mathbb{k}$ (représentation linéaire).
- Deux cas se présentent pour les représentations linéaires de G :
  - $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ (représentations ordinaires), théorie des caractères (Frobenius, 1896), puis des représentations (Frobenius, Schur, Burnside $\leq$ 1911).
  - $p = car(\mathbb{k}) > 0$ (représentations modulaires). Remonte à Dickson (1902, 1907)

Groupes finis

- « La » catégorie des groupes finis : les objets sont les groupes finis, et les morphismes sont les homomorphismes de groupes. Conduit à la notion de groupe fini « simple », et à la question de leur classification.
- Une représentation d'un groupe G est un homomorphisme de groupes $G \to \Gamma$, où Γ est un groupe « connu », par exemple :
  - Un groupe de permutation $\mathfrak{S}_X$ d'un ensemble (fini) X (représentation de permutation). Remonte à Galois ($\sim$1830), Jordan (1870), Sylow (1872), et plus tard Burnside (1897).
  - Un groupe linéaire $GL(V)$, où V est un espace vectoriel (de dimension finie) sur un corps $\mathbb{k}$ (représentation linéaire).
- Deux cas se présentent pour les représentations linéaires de G :
  - $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ (représentations ordinaires), théorie des caractères (Frobenius, 1896), puis des représentations (Frobenius, Schur, Burnside $\leq$ 1911).
  - $p = car(\mathbb{k}) > 0$ (représentations modulaires). Remonte à Dickson (1902, 1907), et plus tard Brauer ($\geq$ 1935).

Groupes finis

- « La » catégorie des groupes finis : les objets sont les groupes finis, et les morphismes sont les homomorphismes de groupes. Conduit à la notion de groupe fini « simple », et à la question de leur classification.
- Une représentation d'un groupe G est un homomorphisme de groupes $G \to \Gamma$, où Γ est un groupe « connu », par exemple :
  - Un groupe de permutation $\mathfrak{S}_X$ d'un ensemble (fini) X (représentation de permutation). Remonte à Galois ($\sim$1830), Jordan (1870), Sylow (1872), et plus tard Burnside (1897).
  - Un groupe linéaire $GL(V)$, où V est un espace vectoriel (de dimension finie) sur un corps $\mathbb{k}$ (représentation linéaire).
- Deux cas se présentent pour les représentations linéaires de G :
  - $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ (représentations ordinaires), théorie des caractères (Frobenius, 1896), puis des représentations (Frobenius, Schur, Burnside $\leq$ 1911).
  - $p = car(\mathbb{k}) > 0$ (représentations modulaires). Remonte à Dickson (1902, 1907), et plus tard Brauer ($\geq$ 1935).
- On suppose dans la suite $p = car(\mathbb{k}) > 0$.

Algèbres de groupes et blocs

Algèbres de groupes et blocs

- Représentations de G sur $\Bbbk$

Algèbres de groupes et blocs

- Représentations de G sur $\Bbbk \Leftrightarrow$

Algèbres de groupes et blocs

- Représentations de G sur $\mathbb{k}$ $\Leftrightarrow$ Modules sur l'algèbre de groupe $\mathbb{k}G$.

Algèbres de groupes et blocs

- Représentations de G sur $\mathbb{k}$ $\Leftrightarrow$ Modules sur l'algèbre de groupe $\mathbb{k}G$.
  - Si $p \nmid |G|$, alors $\mathbb{k}G$ est semi-simple.

Algèbres de groupes et blocs

- Représentations de G sur $\Bbbk$ $\Leftrightarrow$ Modules sur l'algèbre de groupe $\Bbbk G$.
  - Si $p \nmid |G|$, alors $\Bbbk G$ est semi-simple. Indécomposable $=$ simple.

Algèbres de groupes et blocs

- Représentations de G sur $\mathbb{k}$ $\Leftrightarrow$ Modules sur l'algèbre de groupe $\mathbb{k}G$.
  - Si $p \nmid |G|$, alors $\mathbb{k}G$ est semi-simple. Indécomposable $=$ simple.
  - Si $p \mid |G|$, alors $\mathbb{k}G$ n'est pas semi-simple.

Algèbres de groupes et blocs

- Représentations de G sur $\Bbbk$ $\Leftrightarrow$ Modules sur l'algèbre de groupe $\Bbbk G$.
  - Si $p \nmid |G|$, alors $\Bbbk G$ est semi-simple. Indécomposable = simple.
  - Si $p \mid |G|$, alors $\Bbbk G$ n'est pas semi-simple. Indécomposable $\neq$ simple.

Algèbres de groupes et blocs

- Représentations de G sur $\mathbb{k}$ $\Leftrightarrow$ Modules sur l'algèbre de groupe $\mathbb{k}G$.
  - Si $p \nmid |G|$, alors $\mathbb{k}G$ est semi-simple. Indécomposable $=$ simple.
  - Si $p \mid |G|$, alors $\mathbb{k}G$ n'est pas semi-simple. Indécomposable $\neq$ simple.
- Décomposer $\mathbb{k}G$ en somme directe d'algèbres

Algèbres de groupes et blocs

- Représentations de G sur $\Bbbk \Leftrightarrow$ Modules sur l'algèbre de groupe $\Bbbk G$.
  - Si $p \nmid |G|$, alors $\Bbbk G$ est semi-simple. Indécomposable = simple.
  - Si $p \mid |G|$, alors $\Bbbk G$ n'est pas semi-simple. Indécomposable $\neq$ simple.
- Décomposer $\Bbbk G$ en somme directe d'algèbres $\Leftrightarrow$

Algèbres de groupes et blocs

- Représentations de G sur $\Bbbk$ $\Leftrightarrow$ Modules sur l'algèbre de groupe $\Bbbk G$.
  - Si $p \nmid |G|$, alors $\Bbbk G$ est semi-simple. Indécomposable $=$ simple.
  - Si $p \mid |G|$, alors $\Bbbk G$ n'est pas semi-simple. Indécomposable $\neq$ simple.
- Décomposer $\Bbbk G$ en somme directe d'algèbres $\Leftrightarrow$ Décomposer $\Bbbk G$ comme $(\Bbbk G, \Bbbk G)$-bimodule

Algèbres de groupes et blocs

- Représentations de G sur $\Bbbk$ $\Leftrightarrow$ Modules sur l'algèbre de groupe $\Bbbk G$.
  - Si $p \nmid |G|$, alors $\Bbbk G$ est semi-simple. Indécomposable $=$ simple.
  - Si $p \mid |G|$, alors $\Bbbk G$ n'est pas semi-simple. Indécomposable $\neq$ simple.
- Décomposer $\Bbbk G$ en somme directe d'algèbres $\Leftrightarrow$ Décomposer $\Bbbk G$ comme $(\Bbbk G, \Bbbk G)$-bimodule $\Leftrightarrow$

Algèbres de groupes et blocs

- Représentations de G sur $\mathbb{k}$ $\Leftrightarrow$ Modules sur l'algèbre de groupe $\mathbb{k}G$.
  - Si $p \nmid |G|$, alors $\mathbb{k}G$ est semi-simple. Indécomposable $=$ simple.
  - Si $p \mid |G|$, alors $\mathbb{k}G$ n'est pas semi-simple. Indécomposable $\neq$ simple.
- Décomposer $\mathbb{k}G$ en somme directe d'algèbres $\Leftrightarrow$ Décomposer $\mathbb{k}G$ comme $(\mathbb{k}G, \mathbb{k}G)$-bimodule $\Leftrightarrow$ Trouver des idempotents centraux dans $\mathbb{k}G$.

Algèbres de groupes et blocs

- Représentations de G sur $\mathbb{k}$ $\Leftrightarrow$ Modules sur l'algèbre de groupe $\mathbb{k}G$.
  - Si $p \nmid |G|$, alors $\mathbb{k}G$ est semi-simple. Indécomposable = simple.
  - Si $p \mid |G|$, alors $\mathbb{k}G$ n'est pas semi-simple. Indécomposable $\neq$ simple.
- Décomposer $\mathbb{k}G$ en somme directe d'algèbres $\Leftrightarrow$ Décomposer $\mathbb{k}G$ comme $(\mathbb{k}G, \mathbb{k}G)$-bimodule $\Leftrightarrow$ Trouver des idempotents centraux dans $\mathbb{k}G$.
- Les idempotents centraux primitifs de $\mathbb{k}G$

Algèbres de groupes et blocs

- Représentations de G sur $\mathbb{k}$ $\Leftrightarrow$ Modules sur l'algèbre de groupe $\mathbb{k}G$.
  - Si $p \nmid |G|$, alors $\mathbb{k}G$ est semi-simple. Indécomposable = simple.
  - Si $p \mid |G|$, alors $\mathbb{k}G$ n'est pas semi-simple. Indécomposable $\neq$ simple.
- Décomposer $\mathbb{k}G$ en somme directe d'algèbres $\Leftrightarrow$ Décomposer $\mathbb{k}G$ comme $(\mathbb{k}G, \mathbb{k}G)$-bimodule $\Leftrightarrow$ Trouver des idempotents centraux dans $\mathbb{k}G$.
- Les idempotents centraux primitifs de $\mathbb{k}G$ s'appellent les idempotents blocs.

Algèbres de groupes et blocs

- Représentations de G sur $\Bbbk$ $\Leftrightarrow$ Modules sur l'algèbre de groupe $\Bbbk G$.
  - Si $p \nmid |G|$, alors $\Bbbk G$ est semi-simple. Indécomposable = simple.
  - Si $p \mid |G|$, alors $\Bbbk G$ n'est pas semi-simple. Indécomposable $\neq$ simple.
- Décomposer $\Bbbk G$ en somme directe d'algèbres $\Leftrightarrow$ Décomposer $\Bbbk G$ comme $(\Bbbk G, \Bbbk G)$-bimodule $\Leftrightarrow$ Trouver des idempotents centraux dans $\Bbbk G$.
- Les idempotents centraux primitifs de $\Bbbk G$ s'appellent les idempotents blocs. Si b est l'un d'entre eux

Algèbres de groupes et blocs

- Représentations de G sur $\Bbbk$ $\Leftrightarrow$ Modules sur l'algèbre de groupe $\Bbbk G$.
  - Si $p \nmid |G|$, alors $\Bbbk G$ est semi-simple. Indécomposable $=$ simple.
  - Si $p \mid |G|$, alors $\Bbbk G$ n'est pas semi-simple. Indécomposable $\neq$ simple.
- Décomposer $\Bbbk G$ en somme directe d'algèbres $\Leftrightarrow$ Décomposer $\Bbbk G$ comme $(\Bbbk G, \Bbbk G)$-bimodule $\Leftrightarrow$ Trouver des idempotents centraux dans $\Bbbk G$.
- Les idempotents centraux primitifs de $\Bbbk G$ s'appellent les idempotents blocs. Si b est l'un d'entre eux, l'algèbre $\Bbbk Gb$ est une algèbre de bloc.

Algèbres de groupes et blocs

- Représentations de G sur $\Bbbk$ $\Leftrightarrow$ Modules sur l'algèbre de groupe $\Bbbk G$.
  - Si $p \nmid |G|$, alors $\Bbbk G$ est semi-simple. Indécomposable = simple.
  - Si $p \mid |G|$, alors $\Bbbk G$ n'est pas semi-simple. Indécomposable $\neq$ simple.
- Décomposer $\Bbbk G$ en somme directe d'algèbres $\Leftrightarrow$ Décomposer $\Bbbk G$ comme $(\Bbbk G, \Bbbk G)$-bimodule $\Leftrightarrow$ Trouver des idempotents centraux dans $\Bbbk G$.
- Les idempotents centraux primitifs de $\Bbbk G$ s'appellent les idempotents blocs. Si b est l'un d'entre eux, l'algèbre $\Bbbk Gb$ est une algèbre de bloc. Le couple (G, b) est un couple groupe-bloc (sur $\Bbbk$).

Algèbres de groupes et blocs

- Représentations de G sur $\Bbbk$ $\Leftrightarrow$ Modules sur l'algèbre de groupe $\Bbbk G$.
  - Si $p \nmid |G|$, alors $\Bbbk G$ est semi-simple. Indécomposable $=$ simple.
  - Si $p \mid |G|$, alors $\Bbbk G$ n'est pas semi-simple. Indécomposable $\neq$ simple.
- Décomposer $\Bbbk G$ en somme directe d'algèbres $\Leftrightarrow$ Décomposer $\Bbbk G$ comme $(\Bbbk G, \Bbbk G)$-bimodule $\Leftrightarrow$ Trouver des idempotents centraux dans $\Bbbk G$.
- Les idempotents centraux primitifs de $\Bbbk G$ s'appellent les idempotents blocs. Si b est l'un d'entre eux, l'algèbre $\Bbbk Gb$ est une algèbre de bloc. Le couple (G, b) est un couple groupe-bloc (sur $\Bbbk$).
- La théorie des blocs de groupes finis

Algèbres de groupes et blocs

- Représentations de G sur $\mathbb{k}$ $\Leftrightarrow$ Modules sur l'algèbre de groupe $\mathbb{k}G$.
  - Si $p \nmid |G|$, alors $\mathbb{k}G$ est semi-simple. Indécomposable $=$ simple.
  - Si $p \mid |G|$, alors $\mathbb{k}G$ n'est pas semi-simple. Indécomposable $\neq$ simple.
- Décomposer $\mathbb{k}G$ en somme directe d'algèbres $\Leftrightarrow$ Décomposer $\mathbb{k}G$ comme $(\mathbb{k}G, \mathbb{k}G)$-bimodule $\Leftrightarrow$ Trouver des idempotents centraux dans $\mathbb{k}G$.
- Les idempotents centraux primitifs de $\mathbb{k}G$ s'appellent les idempotents blocs. Si b est l'un d'entre eux, l'algèbre $\mathbb{k}Gb$ est une algèbre de bloc. Le couple (G, b) est un couple groupe-bloc (sur $\mathbb{k}$).
- La théorie des blocs de groupes finis, initiée par Brauer et Nesbitt (1937)

Algèbres de groupes et blocs

- Représentations de G sur $\Bbbk$ $\Leftrightarrow$ Modules sur l'algèbre de groupe $\Bbbk G$.
  - Si $p \nmid |G|$, alors $\Bbbk G$ est semi-simple. Indécomposable $=$ simple.
  - Si $p \mid |G|$, alors $\Bbbk G$ n'est pas semi-simple. Indécomposable $\neq$ simple.
- Décomposer $\Bbbk G$ en somme directe d'algèbres $\Leftrightarrow$ Décomposer $\Bbbk G$ comme $(\Bbbk G, \Bbbk G)$-bimodule $\Leftrightarrow$ Trouver des idempotents centraux dans $\Bbbk G$.
- Les idempotents centraux primitifs de $\Bbbk G$ s'appellent les idempotents blocs. Si b est l'un d'entre eux, l'algèbre $\Bbbk Gb$ est une algèbre de bloc. Le couple (G, b) est un couple groupe-bloc (sur $\Bbbk$).
- La théorie des blocs de groupes finis, initiée par Brauer et Nesbitt (1937), est aujourd'hui une part essentielle de la théorie des représentations des groupes finis.

Algèbres de groupes et blocs

- Représentations de G sur $\Bbbk$ $\Leftrightarrow$ Modules sur l'algèbre de groupe $\Bbbk G$.
  - Si $p \nmid |G|$, alors $\Bbbk G$ est semi-simple. Indécomposable $=$ simple.
  - Si $p \mid |G|$, alors $\Bbbk G$ n'est pas semi-simple. Indécomposable $\neq$ simple.
- Décomposer $\Bbbk G$ en somme directe d'algèbres $\Leftrightarrow$ Décomposer $\Bbbk G$ comme $(\Bbbk G, \Bbbk G)$-bimodule $\Leftrightarrow$ Trouver des idempotents centraux dans $\Bbbk G$.
- Les idempotents centraux primitifs de $\Bbbk G$ s'appellent les idempotents blocs. Si b est l'un d'entre eux, l'algèbre $\Bbbk Gb$ est une algèbre de bloc. Le couple (G, b) est un couple groupe-bloc (sur $\Bbbk$).
- La théorie des blocs de groupes finis, initiée par Brauer et Nesbitt (1937), est aujourd'hui une part essentielle de la théorie des représentations des groupes finis.
  Brauer (1948) :

Algèbres de groupes et blocs

- Représentations de G sur $\Bbbk$ $\Leftrightarrow$ Modules sur l'algèbre de groupe $\Bbbk G$.
  - Si $p \nmid |G|$, alors $\Bbbk G$ est semi-simple. Indécomposable $=$ simple.
  - Si $p \mid |G|$, alors $\Bbbk G$ n'est pas semi-simple. Indécomposable $\neq$ simple.
- Décomposer $\Bbbk G$ en somme directe d'algèbres $\Leftrightarrow$ Décomposer $\Bbbk G$ comme $(\Bbbk G, \Bbbk G)$-bimodule $\Leftrightarrow$ Trouver des idempotents centraux dans $\Bbbk G$.
- Les idempotents centraux primitifs de $\Bbbk G$ s'appellent les idempotents blocs. Si b est l'un d'entre eux, l'algèbre $\Bbbk Gb$ est une algèbre de bloc. Le couple (G, b) est un couple groupe-bloc (sur $\Bbbk$).
- La théorie des blocs de groupes finis, initiée par Brauer et Nesbitt (1937), est aujourd'hui une part essentielle de la théorie des représentations des groupes finis.
  Brauer (1948) :
  "The blocks can be made the subject of an elaborate theory".

Invariants de blocs

Invariants de blocs

- Soit (G, b) un couple groupe-bloc (sur $\mathbb{k}$).

Invariants de blocs

- Soit (G, b) un couple groupe-bloc (sur $\mathbb{k}$). Alors $\mathbb{k}Gb$ est un facteur direct indécomposable de $\mathbb{k}G$ comme $(\mathbb{k}G, \mathbb{k}G)$-bimodule.

Invariants de blocs

- Soit (G, b) un couple groupe-bloc (sur $\Bbbk$). Alors $\Bbbk Gb$ est un facteur direct indécomposable de $\Bbbk G$ comme $(\Bbbk G, \Bbbk G)$-bimodule.
- Mais $\Bbbk G \cong \Bbbk G \otimes_{\Bbbk G} \Bbbk G$ comme $(\Bbbk G, \Bbbk G)$-bimodule.

Invariants de blocs

- Soit (G, b) un couple groupe-bloc (sur $\mathbb{k}$). Alors $\mathbb{k}Gb$ est un facteur direct indécomposable de $\mathbb{k}G$ comme $(\mathbb{k}G, \mathbb{k}G)$-bimodule.
- Mais $\mathbb{k}G \cong \mathbb{k}G \otimes_{\mathbb{k}G} \mathbb{k}G$ comme $(\mathbb{k}G, \mathbb{k}G)$-bimodule. Un groupe de défaut de (G, b)

Invariants de blocs

- Soit (G, b) un couple groupe-bloc (sur $\Bbbk$). Alors $\Bbbk Gb$ est un facteur direct indécomposable de $\Bbbk G$ comme $(\Bbbk G, \Bbbk G)$-bimodule.
- Mais $\Bbbk G \cong \Bbbk G \otimes_{\Bbbk G} \Bbbk G$ comme $(\Bbbk G, \Bbbk G)$-bimodule. Un groupe de défaut de (G, b) est un sous-groupe *minimal* D de G tel que $\Bbbk Gb$ soit facteur direct de $\Bbbk G \otimes_{kD} \Bbbk G$.

Invariants de blocs

- Soit (G,b) un couple groupe-bloc (sur $\mathbb{k}$). Alors $\mathbb{k}Gb$ est un facteur direct indécomposable de $\mathbb{k}G$ comme $(\mathbb{k}G,\mathbb{k}G)$-bimodule.
- Mais $\mathbb{k}G \cong \mathbb{k}G \otimes_{\mathbb{k}G} \mathbb{k}G$ comme $(\mathbb{k}G,\mathbb{k}G)$-bimodule. Un groupe de défaut de (G,b) est un sous-groupe *minimal* D de G tel que $\mathbb{k}Gb$ soit facteur direct de $\mathbb{k}G \otimes_{kD} \mathbb{k}G$. C'est un p-sous-groupe de G, bien défini à conjugaison près dans G.

Invariants de blocs

- Soit (G, b) un couple groupe-bloc (sur $\Bbbk$). Alors $\Bbbk Gb$ est un facteur direct indécomposable de $\Bbbk G$ comme $(\Bbbk G, \Bbbk G)$-bimodule.
- Mais $\Bbbk G \cong \Bbbk G \otimes_{\Bbbk G} \Bbbk G$ comme $(\Bbbk G, \Bbbk G)$-bimodule. Un groupe de défaut de (G, b) est un sous-groupe *minimal* D de G tel que $\Bbbk Gb$ soit facteur direct de $\Bbbk G \otimes_{kD} \Bbbk G$. C'est un p-sous-groupe de G, bien défini à conjugaison près dans G.
  Le défaut de (G, b) est l'entier $d \in \mathbb{N}$ tel que $|D| = p^d$.

Invariants de blocs

- Soit (G,b) un couple groupe-bloc (sur $\Bbbk$). Alors $\Bbbk Gb$ est un facteur direct indécomposable de $\Bbbk G$ comme $(\Bbbk G, \Bbbk G)$-bimodule.
- Mais $\Bbbk G \cong \Bbbk G \otimes_{\Bbbk G} \Bbbk G$ comme $(\Bbbk G, \Bbbk G)$-bimodule. Un groupe de défaut de (G,b) est un sous-groupe *minimal* D de G tel que $\Bbbk Gb$ soit facteur direct de $\Bbbk G \otimes_{kD} \Bbbk G$. C'est un p-sous-groupe de G, bien défini à conjugaison près dans G.
  Le défaut de (G,b) est l'entier $d \in \mathbb{N}$ tel que $|D| = p^d$.
- **Exemple.**

Invariants de blocs

- Soit (G,b) un couple groupe-bloc (sur $\mathbb{k}$). Alors $\mathbb{k}Gb$ est un facteur direct indécomposable de $\mathbb{k}G$ comme $(\mathbb{k}G,\mathbb{k}G)$-bimodule.
- Mais $\mathbb{k}G \cong \mathbb{k}G \otimes_{\mathbb{k}G} \mathbb{k}G$ comme $(\mathbb{k}G,\mathbb{k}G)$-bimodule. Un groupe de défaut de (G,b) est un sous-groupe *minimal* D de G tel que $\mathbb{k}Gb$ soit facteur direct de $\mathbb{k}G \otimes_{kD} \mathbb{k}G$. C'est un p-sous-groupe de G, bien défini à conjugaison près dans G.
  Le défaut de (G,b) est l'entier $d \in \mathbb{N}$ tel que $|D| = p^d$.
- **Exemple.** LASSE :

Invariants de blocs

- Soit (G, b) un couple groupe-bloc (sur $\mathbb{k}$). Alors $\mathbb{k}Gb$ est un facteur direct indécomposable de $\mathbb{k}G$ comme $(\mathbb{k}G, \mathbb{k}G)$-bimodule.
- Mais $\mathbb{k}G \cong \mathbb{k}G \otimes_{\mathbb{k}G} \mathbb{k}G$ comme $(\mathbb{k}G, \mathbb{k}G)$-bimodule. Un groupe de défaut de (G, b) est un sous-groupe *minimal* D de G tel que $\mathbb{k}Gb$ soit facteur direct de $\mathbb{k}G \otimes_{kD} \mathbb{k}G$. C'est un p-sous-groupe de G, bien défini à conjugaison près dans G.
  Le défaut de (G, b) est l'entier $d \in \mathbb{N}$ tel que $|D| = p^d$.
- **Exemple.** LASSE :
  - (G, b) est de défaut nul.

Invariants de blocs

- Soit (G, b) un couple groupe-bloc (sur $\Bbbk$). Alors $\Bbbk Gb$ est un facteur direct indécomposable de $\Bbbk G$ comme $(\Bbbk G, \Bbbk G)$-bimodule.
- Mais $\Bbbk G \cong \Bbbk G \otimes_{\Bbbk G} \Bbbk G$ comme $(\Bbbk G, \Bbbk G)$-bimodule. Un groupe de défaut de (G, b) est un sous-groupe *minimal* D de G tel que $\Bbbk Gb$ soit facteur direct de $\Bbbk G \otimes_{kD} \Bbbk G$. C'est un p-sous-groupe de G, bien défini à conjugaison près dans G.
  Le défaut de (G, b) est l'entier $d \in \mathbb{N}$ tel que $|D| = p^d$.
- **Exemple.** LASSE :
  - (G, b) est de défaut nul.
  - $J(\Bbbk Gb) = \{0\}$.

Invariants de blocs

- Soit (G, b) un couple groupe-bloc (sur $\mathbb{k}$). Alors $\mathbb{k}Gb$ est un facteur direct indécomposable de $\mathbb{k}G$ comme $(\mathbb{k}G, \mathbb{k}G)$-bimodule.
- Mais $\mathbb{k}G \cong \mathbb{k}G \otimes_{\mathbb{k}G} \mathbb{k}G$ comme $(\mathbb{k}G, \mathbb{k}G)$-bimodule. Un groupe de défaut de (G, b) est un sous-groupe *minimal* D de G tel que $\mathbb{k}Gb$ soit facteur direct de $\mathbb{k}G \otimes_{kD} \mathbb{k}G$. C'est un p-sous-groupe de G, bien défini à conjugaison près dans G.

  Le défaut de (G, b) est l'entier $d \in \mathbb{N}$ tel que $|D| = p^d$.
- **Exemple.** LASSE :
  - (G, b) est de défaut nul.
  - $J(\mathbb{k}Gb) = \{0\}$.
  - Il existe un $\mathbb{k}Gb$-module simple et projectif.

Invariants de blocs

- Soit (G, b) un couple groupe-bloc (sur $\Bbbk$). Alors $\Bbbk Gb$ est un facteur direct indécomposable de $\Bbbk G$ comme $(\Bbbk G, \Bbbk G)$-bimodule.
- Mais $\Bbbk G \cong \Bbbk G \otimes_{\Bbbk G} \Bbbk G$ comme $(\Bbbk G, \Bbbk G)$-bimodule. Un groupe de défaut de (G, b) est un sous-groupe *minimal* D de G tel que $\Bbbk Gb$ soit facteur direct de $\Bbbk G \otimes_{kD} \Bbbk G$. C'est un p-sous-groupe de G, bien défini à conjugaison près dans G.
  Le défaut de (G, b) est l'entier $d \in \mathbb{N}$ tel que $|D| = p^d$.
- Soit Q un p-sous-groupe de G.

Invariants de blocs

- Soit (G, b) un couple groupe-bloc (sur $\Bbbk$). Alors $\Bbbk Gb$ est un facteur direct indécomposable de $\Bbbk G$ comme $(\Bbbk G, \Bbbk G)$-bimodule.
- Mais $\Bbbk G \cong \Bbbk G \otimes_{\Bbbk G} \Bbbk G$ comme $(\Bbbk G, \Bbbk G)$-bimodule. Un groupe de défaut de (G, b) est un sous-groupe *minimal* D de G tel que $\Bbbk Gb$ soit facteur direct de $\Bbbk G \otimes_{kD} \Bbbk G$. C'est un p-sous-groupe de G, bien défini à conjugaison près dans G.
  Le défaut de (G, b) est l'entier $d \in \mathbb{N}$ tel que $|D| = p^d$.
- Soit Q un p-sous-groupe de G. La troncation

Invariants de blocs

- Soit (G, b) un couple groupe-bloc (sur $\mathbb{k}$). Alors $\mathbb{k}Gb$ est un facteur direct indécomposable de $\mathbb{k}G$ comme $(\mathbb{k}G, \mathbb{k}G)$-bimodule.
- Mais $\mathbb{k}G \cong \mathbb{k}G \otimes_{\mathbb{k}G} \mathbb{k}G$ comme $(\mathbb{k}G, \mathbb{k}G)$-bimodule. Un groupe de défaut de (G, b) est un sous-groupe *minimal* D de G tel que $\mathbb{k}Gb$ soit facteur direct de $\mathbb{k}G \otimes_{kD} \mathbb{k}G$. C'est un p-sous-groupe de G, bien défini à conjugaison près dans G.
  Le défaut de (G, b) est l'entier $d \in \mathbb{N}$ tel que $|D| = p^d$.
- Soit Q un p-sous-groupe de G. La troncation

$$\sum_{g \in G} \lambda_g g \in (\mathbb{k}G)^Q \mapsto$$

Invariants de blocs

- Soit (G, b) un couple groupe-bloc (sur $\Bbbk$). Alors $\Bbbk Gb$ est un facteur direct indécomposable de $\Bbbk G$ comme $(\Bbbk G, \Bbbk G)$-bimodule.
- Mais $\Bbbk G \cong \Bbbk G \otimes_{\Bbbk G} \Bbbk G$ comme $(\Bbbk G, \Bbbk G)$-bimodule. Un groupe de défaut de (G, b) est un sous-groupe *minimal* D de G tel que $\Bbbk Gb$ soit facteur direct de $\Bbbk G \otimes_{kD} \Bbbk G$. C'est un p-sous-groupe de G, bien défini à conjugaison près dans G.
  Le défaut de (G, b) est l'entier $d \in \mathbb{N}$ tel que $|D| = p^d$.
- Soit Q un p-sous-groupe de G. La troncation

$$\sum_{g \in G} \lambda_g g \in (\Bbbk G)^Q \mapsto \sum_{g \in C_G(Q)} \lambda_g g \in \Bbbk C_G(Q)$$

Invariants de blocs

- Soit (G, b) un couple groupe-bloc (sur $\mathbb{k}$). Alors $\mathbb{k}Gb$ est un facteur direct indécomposable de $\mathbb{k}G$ comme $(\mathbb{k}G, \mathbb{k}G)$-bimodule.
- Mais $\mathbb{k}G \cong \mathbb{k}G \otimes_{\mathbb{k}G} \mathbb{k}G$ comme $(\mathbb{k}G, \mathbb{k}G)$-bimodule. Un groupe de défaut de (G, b) est un sous-groupe *minimal* D de G tel que $\mathbb{k}Gb$ soit facteur direct de $\mathbb{k}G \otimes_{kD} \mathbb{k}G$. C'est un p-sous-groupe de G, bien défini à conjugaison près dans G.
  Le défaut de (G, b) est l'entier $d \in \mathbb{N}$ tel que $|D| = p^d$.
- Soit Q un p-sous-groupe de G. La troncation
  $$\sum_{g \in G} \lambda_g g \in (\mathbb{k}G)^Q \mapsto \sum_{g \in C_G(Q)} \lambda_g g \in \mathbb{k}C_G(Q)$$
  s'appelle le morphisme de Brauer (en Q)

Invariants de blocs

- Soit (G, b) un couple groupe-bloc (sur $\mathbb{k}$). Alors $\mathbb{k}Gb$ est un facteur direct indécomposable de $\mathbb{k}G$ comme $(\mathbb{k}G, \mathbb{k}G)$-bimodule.
- Mais $\mathbb{k}G \cong \mathbb{k}G \otimes_{\mathbb{k}G} \mathbb{k}G$ comme $(\mathbb{k}G, \mathbb{k}G)$-bimodule. Un groupe de défaut de (G, b) est un sous-groupe *minimal* D de G tel que $\mathbb{k}Gb$ soit facteur direct de $\mathbb{k}G \otimes_{kD} \mathbb{k}G$. C'est un p-sous-groupe de G, bien défini à conjugaison près dans G.
  Le défaut de (G, b) est l'entier $d \in \mathbb{N}$ tel que $|D| = p^d$.
- Soit Q un p-sous-groupe de G. La troncation

$$\sum_{g \in G} \lambda_g g \in (\mathbb{k}G)^Q \mapsto \sum_{g \in C_G(Q)} \lambda_g g \in \mathbb{k}C_G(Q)$$

s'appelle le morphisme de Brauer (en Q), dénoté Br_Q.

Invariants de blocs

- Soit (G,b) un couple groupe-bloc (sur $\Bbbk$). Alors $\Bbbk Gb$ est un facteur direct indécomposable de $\Bbbk G$ comme $(\Bbbk G,\Bbbk G)$-bimodule.
- Mais $\Bbbk G \cong \Bbbk G \otimes_{\Bbbk G} \Bbbk G$ comme $(\Bbbk G,\Bbbk G)$-bimodule. Un groupe de défaut de (G,b) est un sous-groupe *minimal* D de G tel que $\Bbbk Gb$ soit facteur direct de $\Bbbk G \otimes_{kD} \Bbbk G$. C'est un p-sous-groupe de G, bien défini à conjugaison près dans G.
  Le défaut de (G,b) est l'entier $d \in \mathbb{N}$ tel que $|D| = p^d$.
- Soit Q un p-sous-groupe de G. La troncation

$$\sum_{g\in G} \lambda_g g \in (\Bbbk G)^Q \mapsto \sum_{g\in C_G(Q)} \lambda_g g \in \Bbbk C_G(Q)$$

  s'appelle le morphisme de Brauer (en Q), dénoté Br_Q. C'est un homomorphisme d'algèbres.

Invariants de blocs

- Soit (G, b) un couple groupe-bloc (sur $\Bbbk$). Alors $\Bbbk Gb$ est un facteur direct indécomposable de $\Bbbk G$ comme $(\Bbbk G, \Bbbk G)$-bimodule.
- Mais $\Bbbk G \cong \Bbbk G \otimes_{\Bbbk G} \Bbbk G$ comme $(\Bbbk G, \Bbbk G)$-bimodule. Un groupe de défaut de (G, b) est un sous-groupe *minimal* D de G tel que $\Bbbk Gb$ soit facteur direct de $\Bbbk G \otimes_{kD} \Bbbk G$. C'est un p-sous-groupe de G, bien défini à conjugaison près dans G.
  Le défaut de (G, b) est l'entier $d \in \mathbb{N}$ tel que $|D| = p^d$.
- Soit Q un p-sous-groupe de G. La troncation

$$\sum_{g \in G} \lambda_g g \in (\Bbbk G)^Q \mapsto \sum_{g \in C_G(Q)} \lambda_g g \in \Bbbk C_G(Q)$$

  s'appelle le morphisme de Brauer (en Q), dénoté Br_Q. C'est un homomorphisme d'algèbres. De plus $Br_Q\big(Z(\Bbbk G)\big) \subseteq Z\big(\Bbbk N_G(Q)\big)$.

Invariants de blocs

- Soit (G, b) un couple groupe-bloc (sur $\Bbbk$). Alors $\Bbbk Gb$ est un facteur direct indécomposable de $\Bbbk G$ comme $(\Bbbk G, \Bbbk G)$-bimodule.
- Mais $\Bbbk G \cong \Bbbk G \otimes_{\Bbbk G} \Bbbk G$ comme $(\Bbbk G, \Bbbk G)$-bimodule. Un groupe de défaut de (G, b) est un sous-groupe *minimal* D de G tel que $\Bbbk Gb$ soit facteur direct de $\Bbbk G \otimes_{kD} \Bbbk G$. C'est un p-sous-groupe de G, bien défini à conjugaison près dans G.
  Le défaut de (G, b) est l'entier $d \in \mathbb{N}$ tel que $|D| = p^d$.
- Soit Q un p-sous-groupe de G. La troncation

$$\sum_{g \in G} \lambda_g g \in (\Bbbk G)^Q \mapsto \sum_{g \in C_G(Q)} \lambda_g g \in \Bbbk C_G(Q)$$

  s'appelle le morphisme de Brauer (en Q), dénoté Br_Q. C'est un homomorphisme d'algèbres. De plus $Br_Q\big(Z(\Bbbk G)\big) \subseteq Z\big(\Bbbk N_G(Q)\big)$.
- Un groupe de défaut de (G, b) est un p-sous-groupe *maximal* D de G tel que $Br_D(b) \neq 0$.

Invariants de blocs

Invariants de blocs

Soit G un groupe fini

Invariants de blocs

Soit G un groupe fini, et $b^2 = b \in Z(\mathbb{k}G)$.

Invariants de blocs

Soit G un groupe fini, et $b^2 = b \in Z(\mathbb{k}G)$.

- On note $\ell(G, b)$

Invariants de blocs

Soit G un groupe fini, et $b^2 = b \in Z(\Bbbk G)$.

- On note $\ell(G, b)$ (ou $\ell(G)$ si $b = 1$)

Invariants de blocs

Soit G un groupe fini, et $b^2 = b \in Z(\mathbb{k}G)$.

- On note $\ell(G, b)$ (ou $\ell(G)$ si $b = 1$) le nombre de $\mathbb{k}Gb$-modules simples (à iso. près)

Invariants de blocs

Soit G un groupe fini, et $b^2 = b \in Z(\Bbbk G)$.

- On note $\ell(G, b)$ (ou $\ell(G)$ si $b = 1$) le nombre de $\Bbbk Gb$-modules simples (à iso. près), *alias* le nombre de caractères de Brauer irréductibles de (G, b).

Invariants de blocs

Soit G un groupe fini, et $b^2 = b \in Z(\mathbb{k}G)$.

- On note $\ell(G, b)$ (ou $\ell(G)$ si $b = 1$) le nombre de $\mathbb{k}Gb$-modules simples (à iso. près), *alias* le nombre de caractères de Brauer irréductibles de (G, b).
- On note $w(G, b)$

Invariants de blocs

Soit G un groupe fini, et $b^2 = b \in Z(\Bbbk G)$.

- On note $\ell(G,b)$ (ou $\ell(G)$ si $b = 1$) le nombre de $\Bbbk Gb$-modules simples (à iso. près), *alias* le nombre de caractères de Brauer irréductibles de (G,b).
- On note $w(G,b)$ (ou $w(G)$ si $b = 1$)

Invariants de blocs

Soit G un groupe fini, et $b^2 = b \in Z(\Bbbk G)$.

- On note $\ell(G, b)$ (ou $\ell(G)$ si $b = 1$) le nombre de $\Bbbk Gb$-modules simples (à iso. près), *alias* le nombre de caractères de Brauer irréductibles de (G, b).
- On note $w(G, b)$ (ou $w(G)$ si $b = 1$) le nombre de $\Bbbk Gb$-modules simples et projectifs (à iso. près)

Invariants de blocs

Soit G un groupe fini, et $b^2 = b \in Z(\Bbbk G)$.

- On note $\ell(G, b)$ (ou $\ell(G)$ si $b = 1$) le nombre de $\Bbbk Gb$-modules simples (à iso. près), *alias* le nombre de caractères de Brauer irréductibles de (G, b).
- On note $w(G, b)$ (ou $w(G)$ si $b = 1$) le nombre de $\Bbbk Gb$-modules simples et projectifs (à iso. près).
- On note $k(G, b)$

Invariants de blocs

Soit G un groupe fini, et $b^2 = b \in Z(\Bbbk G)$.

- On note $\ell(G, b)$ (ou $\ell(G)$ si $b = 1$) le nombre de $\Bbbk Gb$-modules simples (à iso. près), *alias* le nombre de caractères de Brauer irréductibles de (G, b).
- On note $\mathscr{w}(G, b)$ (ou $\mathscr{w}(G)$ si $b = 1$) le nombre de $\Bbbk Gb$-modules simples et projectifs (à iso. près).
- On note $\mathscr{k}(G, b)$ (ou $\mathscr{k}(G)$ si $b = 1$)

Invariants de blocs

Soit G un groupe fini, et $b^2 = b \in Z(\Bbbk G)$.

- On note $\ell(G,b)$ (ou $\ell(G)$ si $b = 1$) le nombre de $\Bbbk Gb$-modules simples (à iso. près), *alias* le nombre de caractères de Brauer irréductibles de (G, b).
- On note $\mathscr{w}(G,b)$ (ou $\mathscr{w}(G)$ si $b = 1$) le nombre de $\Bbbk Gb$-modules simples et projectifs (à iso. près).
- On note $\mathscr{k}(G,b)$ (ou $\mathscr{k}(G)$ si $b = 1$) la dimension de $Z(\Bbbk Gb)$

Invariants de blocs

Soit G un groupe fini, et $b^2 = b \in Z(\Bbbk G)$.

- On note $\ell(G, b)$ (ou $\ell(G)$ si $b = 1$) le nombre de $\Bbbk Gb$-modules simples (à iso. près), *alias* le nombre de caractères de Brauer irréductibles de (G, b).
- On note $w(G, b)$ (ou $w(G)$ si $b = 1$) le nombre de $\Bbbk Gb$-modules simples et projectifs (à iso. près).
- On note $k(G, b)$ (ou $k(G)$ si $b = 1$) la dimension de $Z(\Bbbk Gb)$, *alias* le nombre de caractères ordinaires irréductibles de (G, b).

La conjecture (des poids) d'Alperin

La conjecture d'Alperin

La conjecture d'Alperin

On suppose $\mathbb{k}$ algébriquement clos

La conjecture d'Alperin

On suppose $\mathbb{k}$ algébriquement clos, de caractéristique $p > 0$.

La conjecture d'Alperin

On suppose $\mathbb{k}$ algébriquement clos, de caractéristique $p > 0$.

- (Alperin, 1987) Soit G un groupe fini.

La conjecture d'Alperin

On suppose $\Bbbk$ algébriquement clos, de caractéristique $p > 0$.

- (Alperin, 1987) Soit G un groupe fini. Alors

$$\ell(G) =$$

La conjecture d'Alperin

On suppose $\Bbbk$ algébriquement clos, de caractéristique $p > 0$.

- (Alperin, 1987) Soit G un groupe fini. Alors

$$\ell(G) = \sum_{Q \in [s_p(G)]}$$

La conjecture d'Alperin

On suppose $\mathbb{k}$ algébriquement clos, de caractéristique $p > 0$.

- (Alperin, 1987) Soit G un groupe fini. Alors

$$\ell(G) = \sum_{Q \in [s_p(G)]} w\big(N_G(Q)/Q\big),$$

On suppose $\mathbb{k}$ algébriquement clos, de caractéristique $p > 0$.

- (Alperin, 1987) Soit G un groupe fini. Alors

$$\ell(G) = \sum_{Q \in [s_p(G)]} w\big(N_G(Q)/Q\big),$$

où $[s_p(G)]$ est un ensemble de représentants des classes de conjugaison de p-sous-groupes de G.

La conjecture d'Alperin

On suppose $\Bbbk$ algébriquement clos, de caractéristique $p > 0$.

- (Alperin, 1987) Soit G un groupe fini. Alors

$$\ell(G) = \sum_{Q \in [s_p(G)]} w\big(N_G(Q)/Q\big),$$

  où $[s_p(G)]$ est un ensemble de représentants des classes de conjugaison de p-sous-groupes de G.
- (Version par blocs)

La conjecture d'Alperin

On suppose $\mathbb{k}$ algébriquement clos, de caractéristique $p > 0$.

- (Alperin, 1987) Soit G un groupe fini. Alors

$$\ell(G) = \sum_{Q \in [s_p(G)]} w\big(N_G(Q)/Q\big),$$

  où $[s_p(G)]$ est un ensemble de représentants des classes de conjugaison de p-sous-groupes de G.

- (Version par blocs) Soit G un groupe fini

La conjecture d'Alperin

On suppose $\Bbbk$ algébriquement clos, de caractéristique $p > 0$.

- (Alperin, 1987) Soit G un groupe fini. Alors

$$\ell(G) = \sum_{Q \in [s_p(G)]} w\big(N_G(Q)/Q\big),$$

  où $[s_p(G)]$ est un ensemble de représentants des classes de conjugaison de p-sous-groupes de G.
- (Version par blocs) Soit G un groupe fini, et $b^2 = b \in Z(\Bbbk G)$.

La conjecture d'Alperin

On suppose $\Bbbk$ algébriquement clos, de caractéristique $p > 0$.

- (Alperin, 1987) Soit G un groupe fini. Alors

$$\ell(G) = \sum_{Q \in [s_p(G)]} w\big(N_G(Q)/Q\big),$$

  où $[s_p(G)]$ est un ensemble de représentants des classes de conjugaison de p-sous-groupes de G.

- (Version par blocs) Soit G un groupe fini, et $b^2 = b \in Z(\Bbbk G)$. Alors

$$\ell(G, b) =$$

La conjecture d'Alperin

On suppose $\Bbbk$ algébriquement clos, de caractéristique $p > 0$.

- (Alperin, 1987) Soit G un groupe fini. Alors

$$\ell(G) = \sum_{Q \in [s_p(G)]} w\big(N_G(Q)/Q\big),$$

  où $[s_p(G)]$ est un ensemble de représentants des classes de conjugaison de p-sous-groupes de G.

- (Version par blocs) Soit G un groupe fini, et $b^2 = b \in Z(\Bbbk G)$. Alors

$$\ell(G, b) = \sum_{Q \in [s_p(G)]}$$

La conjecture d'Alperin

On suppose $\mathbb{k}$ algébriquement clos, de caractéristique $p > 0$.

- (Alperin, 1987) Soit G un groupe fini. Alors

$$\ell(G) = \sum_{Q \in [s_p(G)]} w\big(N_G(Q)/Q\big),$$

  où $[s_p(G)]$ est un ensemble de représentants des classes de conjugaison de p-sous-groupes de G.
- (Version par blocs) Soit G un groupe fini, et $b^2 = b \in Z(\mathbb{k}G)$. Alors

$$\ell(G, b) = \sum_{Q \in [s_p(G)]} w\big(N_G(Q)/Q, \overline{Br}_Q(b)\big),$$

La conjecture d'Alperin

On suppose $\Bbbk$ algébriquement clos, de caractéristique $p > 0$.

- (Alperin, 1987) Soit G un groupe fini. Alors

  $$\ell(G) = \sum_{Q \in [s_p(G)]} w\big(N_G(Q)/Q\big),$$

  où $[s_p(G)]$ est un ensemble de représentants des classes de conjugaison de p-sous-groupes de G.

- (Version par blocs) Soit G un groupe fini, et $b^2 = b \in Z(\Bbbk G)$. Alors

  $$\ell(G, b) = \sum_{Q \in [s_p(G)]} w\big(N_G(Q)/Q, \overline{Br}_Q(b)\big),$$

  où $\overline{Br}_Q(b) \in Z\big(\Bbbk N_G(Q)/Q\big)$ est l'image de $Br_Q(b)$ par la projection $\Bbbk N_G(Q) \to \Bbbk N_G(Q)/Q$.

Reformulation

Reformulation

- Knörr et Robinson (1989)

Reformulation

- Knörr et Robinson (1989) ont montré que la conjecture d'Alperin par blocs

Reformulation

- Knörr et Robinson (1989) ont montré que la conjecture d'Alperin par blocs est équivalente à l'énoncé suivant :

Reformulation

- Knörr et Robinson (1989) ont montré que la conjecture d'Alperin par blocs est équivalente à l'énoncé suivant :
  Si (G, b) est un couple groupe-bloc (sur $\mathbb{k}$), alors

Reformulation

- Knörr et Robinson (1989) ont montré que la conjecture d'Alperin par blocs est équivalente à l'énoncé suivant :
  Si (G, b) est un couple groupe-bloc (sur $\mathbb{k}$), alors
  $$\sum_{\sigma \in [\Sigma_p(G)]} (-1)^{|\sigma|} \ell(G_\sigma, b_\sigma) =$$

Reformulation

- Knörr et Robinson (1989) ont montré que la conjecture d'Alperin par blocs est équivalente à l'énoncé suivant :
  Si (G, b) est un couple groupe-bloc (sur $\mathbb{k}$), alors
  $$\sum_{\sigma\in[\Sigma_p(G)]} (-1)^{|\sigma|}\ell(G_\sigma, b_\sigma) = \begin{cases} 0 \text{ si } D(b) \neq \{1\} \\ 1 \text{ si } D(b) = \{1\}, \end{cases}$$

Reformulation

- Knörr et Robinson (1989) ont montré que la conjecture d'Alperin par blocs est équivalente à l'énoncé suivant :
  Si (G, b) est un couple groupe-bloc (sur $\mathbb{k}$), alors
  $$\sum_{\sigma\in[\Sigma_p(G)]} (-1)^{|\sigma|}\ell(G_\sigma, b_\sigma) = \begin{cases} 0 \text{ si } D(b) \neq \{1\} \\ 1 \text{ si } D(b) = \{1\}, \end{cases}$$
  où :

Reformulation

- Knörr et Robinson (1989) ont montré que la conjecture d'Alperin par blocs est équivalente à l'énoncé suivant :
  Si (G, b) est un couple groupe-bloc (sur $\mathbb{k}$), alors
  $$\sum_{\sigma\in[\Sigma_p(G)]} (-1)^{|\sigma|}\ell(G_\sigma, b_\sigma) = \begin{cases} 0 \text{ si } D(b) \neq \{1\} \\ 1 \text{ si } D(b) = \{1\}, \end{cases}$$
  où :
  - $[\Sigma_p(G)]$ est un ensemble de représentants des classes de conjugaison de chaînes $\sigma = \big(\{1\} = P_0 < P_1 < \ldots < P_n\big)$ de p-sous-groupes de G de dimension $|\sigma| = n$

Reformulation

- Knörr et Robinson (1989) ont montré que la conjecture d'Alperin par blocs est équivalente à l'énoncé suivant :
  Si (G, b) est un couple groupe-bloc (sur $\mathbb{k}$), alors
  $$\sum_{\sigma\in[\Sigma_p(G)]} (-1)^{|\sigma|}\ell(G_\sigma, b_\sigma) = \begin{cases} 0 \text{ si } D(b) \neq \{1\} \\ 1 \text{ si } D(b) = \{1\}, \end{cases}$$
  où :
  - $[\Sigma_p(G)]$ est un ensemble de représentants des classes de conjugaison de chaînes $\sigma = \big(\{1\} = P_0 < P_1 < \ldots < P_n\big)$ de p-sous-groupes de G de dimension $|\sigma| = n$,
  - $G_\sigma = N_G(\sigma)$

Reformulation

- Knörr et Robinson (1989) ont montré que la conjecture d'Alperin par blocs est équivalente à l'énoncé suivant :
  Si (G,b) est un couple groupe-bloc (sur $\mathbb{k}$), alors
  $$\sum_{\sigma\in[\Sigma_p(G)]}(-1)^{|\sigma|}\ell(G_\sigma,b_\sigma)=\left\{\begin{array}{l}0 \text{ si } D(b)\neq\{1\}\\ 1 \text{ si } D(b)=\{1\},\end{array}\right.$$
  où :
  - $[\Sigma_p(G)]$ est un ensemble de représentants des classes de conjugaison de chaînes $\sigma=\big(\{1\}=P_0<P_1<\ldots<P_n\big)$ de p-sous-groupes de G de dimension $|\sigma|=n$,
  - $G_\sigma=N_G(\sigma)$,
  - $b_\sigma=Br_{P_n}(b)$

Reformulation

- Knörr et Robinson (1989) ont montré que la conjecture d'Alperin par blocs est équivalente à l'énoncé suivant :
  Si (G, b) est un couple groupe-bloc (sur $\mathbb{k}$), alors
  $$\sum_{\sigma \in [\Sigma_p(G)]} (-1)^{|\sigma|} \ell(G_\sigma, b_\sigma) = \begin{cases} 0 \text{ si } D(b) \neq \{1\} \\ 1 \text{ si } D(b) = \{1\}, \end{cases}$$
  où :
  - $[\Sigma_p(G)]$ est un ensemble de représentants des classes de conjugaison de chaînes $\sigma = \big(\{1\} = P_0 < P_1 < \ldots < P_n\big)$ de p-sous-groupes de G de dimension $|\sigma| = n$,
  - $G_\sigma = N_G(\sigma)$,
  - $b_\sigma = Br_{P_n}(b)$,
  - $D(b)$ est un groupe de défaut de b.

Reformulation

- Knörr et Robinson (1989) ont montré que la conjecture d'Alperin par blocs est équivalente à l'énoncé suivant :
  Si (G, b) est un couple groupe-bloc (sur $\mathbb{k}$), alors
  $$\sum_{\sigma\in[\Sigma_p(G)]} (-1)^{|\sigma|}\ell(G_\sigma, b_\sigma) = \begin{cases} 0 \text{ si } D(b) \neq \{1\} \\ 1 \text{ si } D(b) = \{1\}, \end{cases}$$
  où :
  - $[\Sigma_p(G)]$ est un ensemble de représentants des classes de conjugaison de chaînes $\sigma = \big(\{1\} = P_0 < P_1 < \ldots < P_n\big)$ de p-sous-groupes de G de dimension $|\sigma| = n$,
  - $G_\sigma = N_G(\sigma)$,
  - $b_\sigma = Br_{P_n}(b)$,
  - $D(b)$ est un groupe de défaut de b.
- Cela suggère que la conjecture d'Alperin

Reformulation

- Knörr et Robinson (1989) ont montré que la conjecture d'Alperin par blocs est équivalente à l'énoncé suivant :
  Si (G, b) est un couple groupe-bloc (sur $\mathbb{k}$), alors
  $$\sum_{\sigma\in[\Sigma_p(G)]} (-1)^{|\sigma|}\ell(G_\sigma, b_\sigma) = \begin{cases} 0 \text{ si } D(b) \neq \{1\} \\ 1 \text{ si } D(b) = \{1\}, \end{cases}$$
  où :
  - $[\Sigma_p(G)]$ est un ensemble de représentants des classes de conjugaison de chaînes $\sigma = \big(\{1\} = P_0 < P_1 < \ldots < P_n\big)$ de p-sous-groupes de G de dimension $|\sigma| = n$,
  - $G_\sigma = N_G(\sigma)$,
  - $b_\sigma = Br_{P_n}(b)$,
  - $D(b)$ est un groupe de défaut de b.
- Cela suggère que la conjecture d'Alperin est l'ombre portée d'un phénomène plus structurel.

Blocs et foncteurs

Blocs et foncteurs

- Soit G un groupe fini

Blocs et foncteurs

- Soit G un groupe fini, et $b_1, \ldots, b_n$ les idempotents blocs de $\Bbbk G$.

Blocs et foncteurs

- Soit G un groupe fini, et $b_1, \ldots, b_n$ les idempotents blocs de $\Bbbk G$. Alors

$$\Bbbk G \cong \Bbbk G b_1 \oplus \ldots \oplus \Bbbk G b_n.$$

Blocs et foncteurs

- Soit G un groupe fini, et $b_1, \ldots, b_n$ les idempotents blocs de $\Bbbk G$. Alors
$$\Bbbk G \cong \Bbbk G b_1 \oplus \ldots \oplus \Bbbk G b_n.$$
Existe-t-il une catégorie

Blocs et foncteurs

- Soit G un groupe fini, et $b_1, \ldots, b_n$ les idempotents blocs de $\Bbbk G$. Alors

$$\Bbbk G \cong \Bbbk G b_1 \oplus \ldots \oplus \Bbbk G b_n.$$

  Existe-t-il une catégorie où cela correspondrait à une décomposition de G lui-même

Blocs et foncteurs

- Soit G un groupe fini, et $b_1, \ldots, b_n$ les idempotents blocs de $\Bbbk G$. Alors
$$\Bbbk G \cong \Bbbk G b_1 \oplus \ldots \oplus \Bbbk G b_n.$$
Existe-t-il une catégorie où cela correspondrait à une décomposition de G lui-même en somme directe d'objets associés aux idempotents blocs ?

Blocs et foncteurs

- Soit G un groupe fini, et $b_1, \ldots, b_n$ les idempotents blocs de $\mathbb{k}G$. Alors
$$\mathbb{k}G \cong \mathbb{k}Gb_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{k}Gb_n.$$
Existe-t-il une catégorie où cela correspondrait à une décomposition de G lui-même en somme directe d'objets associés aux idempotents blocs ?
- Propriétés de $\mathbb{k}Gb$, pour $b^2 = b \in Z(\mathbb{k}G)$:

Blocs et foncteurs

- Soit G un groupe fini, et $b_1, \ldots, b_n$ les idempotents blocs de $\mathbb{k}G$. Alors
$$\mathbb{k}G \cong \mathbb{k}Gb_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{k}Gb_n.$$
Existe-t-il une catégorie où cela correspondrait à une décomposition de G lui-même en somme directe d'objets associés aux idempotents blocs ?
- Propriétés de $\mathbb{k}Gb$, pour $b^2 = b \in Z(\mathbb{k}G)$:
  - $\mathbb{k}Gb$ est un $(\mathbb{k}G, \mathbb{k}G)$-bimodule.

Blocs et foncteurs

- Soit G un groupe fini, et $b_1, \ldots, b_n$ les idempotents blocs de $\Bbbk G$. Alors

$$\Bbbk G \cong \Bbbk G b_1 \oplus \ldots \oplus \Bbbk G b_n.$$

  Existe-t-il une catégorie où cela correspondrait à une décomposition de G lui-même en somme directe d'objets associés aux idempotents blocs ?

- Propriétés de $\Bbbk Gb$, pour $b^2 = b \in Z(\Bbbk G)$:
  - $\Bbbk Gb$ est un $(\Bbbk G, \Bbbk G)$-bimodule.
  - $\Bbbk Gb$ est facteur direct de $\Bbbk G$

Blocs et foncteurs

- Soit G un groupe fini, et $b_1, \ldots, b_n$ les idempotents blocs de $\mathbb{k}G$. Alors
$$\mathbb{k}G \cong \mathbb{k}Gb_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{k}Gb_n.$$
Existe-t-il une catégorie où cela correspondrait à une décomposition de G lui-même en somme directe d'objets associés aux idempotents blocs ?
- Propriétés de $\mathbb{k}Gb$, pour $b^2 = b \in Z(\mathbb{k}G)$:
  - $\mathbb{k}Gb$ est un $(\mathbb{k}G, \mathbb{k}G)$-bimodule.
  - $\mathbb{k}Gb$ est facteur direct de $\mathbb{k}G$, qui est un bimodule de *permutation*

Blocs et foncteurs

- Soit G un groupe fini, et $b_1, \ldots, b_n$ les idempotents blocs de $\mathbb{k}G$. Alors

$$\mathbb{k}G \cong \mathbb{k}Gb_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{k}Gb_n.$$

  Existe-t-il une catégorie où cela correspondrait à une décomposition de G lui-même en somme directe d'objets associés aux idempotents blocs ?
- Propriétés de $\mathbb{k}Gb$, pour $b^2 = b \in Z(\mathbb{k}G)$:
  - $\mathbb{k}Gb$ est un $(\mathbb{k}G, \mathbb{k}G)$-bimodule.
  - $\mathbb{k}Gb$ est facteur direct de $\mathbb{k}G$, qui est un bimodule de *permutation* ($\mathbb{k}Gb$ est un $(\mathbb{k}G, \mathbb{k}G)$-bimodule de p-permutation).

Blocs et foncteurs

- Soit G un groupe fini, et $b_1, \ldots, b_n$ les idempotents blocs de $\Bbbk G$. Alors
$$\Bbbk G \cong \Bbbk Gb_1 \oplus \ldots \oplus \Bbbk Gb_n.$$
Existe-t-il une catégorie où cela correspondrait à une décomposition de G lui-même en somme directe d'objets associés aux idempotents blocs ?
- Propriétés de $\Bbbk Gb$, pour $b^2 = b \in Z(\Bbbk G)$:
    - $\Bbbk Gb$ est un $(\Bbbk G, \Bbbk G)$-bimodule.
    - $\Bbbk Gb$ est facteur direct de $\Bbbk G$, qui est un bimodule de *permutation* ($\Bbbk Gb$ est un $(\Bbbk G, \Bbbk G)$-bimodule de p-permutation).
    - $\Bbbk Gb$ est *projectif à gauche et à droite*

Blocs et foncteurs

- Soit G un groupe fini, et $b_1, \ldots, b_n$ les idempotents blocs de $\Bbbk G$. Alors
$$\Bbbk G \cong \Bbbk G b_1 \oplus \ldots \oplus \Bbbk G b_n.$$
Existe-t-il une catégorie où cela correspondrait à une décomposition de G lui-même en somme directe d'objets associés aux idempotents blocs ?
- Propriétés de $\Bbbk Gb$, pour $b^2 = b \in Z(\Bbbk G)$:
  - $\Bbbk Gb$ est un $(\Bbbk G, \Bbbk G)$-bimodule.
  - $\Bbbk Gb$ est facteur direct de $\Bbbk G$, qui est un bimodule de *permutation* ($\Bbbk Gb$ est un $(\Bbbk G, \Bbbk G)$-bimodule de p-permutation).
  - $\Bbbk Gb$ est *projectif à gauche et à droite* ($\Bbbk Gb$ est un $(\Bbbk G, \Bbbk G)$-bimodule de p-permutation diagonal).

Blocs et foncteurs

- Soit G un groupe fini, et $b_1, \ldots, b_n$ les idempotents blocs de $\Bbbk G$. Alors
$$\Bbbk G \cong \Bbbk G b_1 \oplus \ldots \oplus \Bbbk G b_n.$$
Existe-t-il une catégorie où cela correspondrait à une décomposition de G lui-même en somme directe d'objets associés aux idempotents blocs ?
- Propriétés de $\Bbbk Gb$, pour $b^2 = b \in Z(\Bbbk G)$:
  - $\Bbbk Gb$ est un $(\Bbbk G, \Bbbk G)$-bimodule.
  - $\Bbbk Gb$ est facteur direct de $\Bbbk G$, qui est un bimodule de *permutation* ($\Bbbk Gb$ est un $(\Bbbk G, \Bbbk G)$-bimodule de p-permutation).
  - $\Bbbk Gb$ est *projectif à gauche et à droite* ($\Bbbk Gb$ est un $(\Bbbk G, \Bbbk G)$-bimodule de p-permutation diagonal).
  - $\Bbbk Gb \otimes_{kG} \Bbbk Gb \cong \Bbbk Gb$.

Blocs et foncteurs

- Soit G un groupe fini, et $b_1, \ldots, b_n$ les idempotents blocs de $\Bbbk G$. Alors
$$\Bbbk G \cong \Bbbk Gb_1 \oplus \ldots \oplus \Bbbk Gb_n.$$
Existe-t-il une catégorie où cela correspondrait à une décomposition de G lui-même en somme directe d'objets associés aux idempotents blocs ?
- Propriétés de $\Bbbk Gb$, pour $b^2 = b \in Z(\Bbbk G)$:
  - $\Bbbk Gb$ est un $(\Bbbk G, \Bbbk G)$-bimodule.
  - $\Bbbk Gb$ est facteur direct de $\Bbbk G$, qui est un bimodule de *permutation* ($\Bbbk Gb$ est un $(\Bbbk G, \Bbbk G)$-bimodule de p-permutation).
  - $\Bbbk Gb$ est *projectif à gauche et à droite* ($\Bbbk Gb$ est un $(\Bbbk G, \Bbbk G)$-bimodule de p-permutation diagonal).
  - $\Bbbk Gb \otimes_{kG} \Bbbk Gb \cong \Bbbk Gb$.
- Plus généralement

Blocs et foncteurs

- Soit G un groupe fini, et $b_1, \ldots, b_n$ les idempotents blocs de $\Bbbk G$. Alors

$$\Bbbk G \cong \Bbbk G b_1 \oplus \ldots \oplus \Bbbk G b_n.$$

  Existe-t-il une catégorie où cela correspondrait à une décomposition de G lui-même en somme directe d'objets associés aux idempotents blocs ?
- Propriétés de $\Bbbk Gb$, pour $b^2 = b \in Z(\Bbbk G)$:
  - $\Bbbk Gb$ est un $(\Bbbk G, \Bbbk G)$-bimodule.
  - $\Bbbk Gb$ est facteur direct de $\Bbbk G$, qui est un bimodule de *permutation* ($\Bbbk Gb$ est un $(\Bbbk G, \Bbbk G)$-bimodule de p-permutation).
  - $\Bbbk Gb$ est *projectif à gauche et à droite* ($\Bbbk Gb$ est un $(\Bbbk G, \Bbbk G)$-bimodule de p-permutation diagonal).
  - $\Bbbk Gb \otimes_{kG} \Bbbk Gb \cong \Bbbk Gb$.
- Plus généralement, pour des groupes finis G et H

Blocs et foncteurs

- Soit G un groupe fini, et $b_1, \ldots, b_n$ les idempotents blocs de $\Bbbk G$. Alors

$$\Bbbk G \cong \Bbbk Gb_1 \oplus \ldots \oplus \Bbbk Gb_n.$$

  Existe-t-il une catégorie où cela correspondrait à une décomposition de G lui-même en somme directe d'objets associés aux idempotents blocs ?

- Propriétés de $\Bbbk Gb$, pour $b^2 = b \in Z(\Bbbk G)$:
  - $\Bbbk Gb$ est un $(\Bbbk G, \Bbbk G)$-bimodule.
  - $\Bbbk Gb$ est facteur direct de $\Bbbk G$, qui est un bimodule de *permutation* ($\Bbbk Gb$ est un $(\Bbbk G, \Bbbk G)$-bimodule de p-permutation).
  - $\Bbbk Gb$ est *projectif à gauche et à droite* ($\Bbbk Gb$ est un $(\Bbbk G, \Bbbk G)$-bimodule de p-permutation diagonal).
  - $\Bbbk Gb \otimes_{kG} \Bbbk Gb \cong \Bbbk Gb$.

- Plus généralement, pour des groupes finis G et H, un $(\Bbbk H, \Bbbk G)$-bimodule de p-permutation diagonal

Blocs et foncteurs

- Soit G un groupe fini, et $b_1, \ldots, b_n$ les idempotents blocs de $\Bbbk G$. Alors
$$\Bbbk G \cong \Bbbk Gb_1 \oplus \ldots \oplus \Bbbk Gb_n.$$
Existe-t-il une catégorie où cela correspondrait à une décomposition de G lui-même en somme directe d'objets associés aux idempotents blocs ?
- Propriétés de $\Bbbk Gb$, pour $b^2 = b \in Z(\Bbbk G)$:
  - $\Bbbk Gb$ est un $(\Bbbk G, \Bbbk G)$-bimodule.
  - $\Bbbk Gb$ est facteur direct de $\Bbbk G$, qui est un bimodule de *permutation* ($\Bbbk Gb$ est un $(\Bbbk G, \Bbbk G)$-bimodule de p-permutation).
  - $\Bbbk Gb$ est *projectif à gauche et à droite* ($\Bbbk Gb$ est un $(\Bbbk G, \Bbbk G)$-bimodule de p-permutation diagonal).
  - $\Bbbk Gb \otimes_{kG} \Bbbk Gb \cong \Bbbk Gb$.
- Plus généralement, pour des groupes finis G et H, un $(\Bbbk H, \Bbbk G)$-bimodule de p-permutation diagonal est un facteur direct projectif à gauche et à droite d'un $(\Bbbk H, \Bbbk G)$-bimodule de permutation.

Foncteurs de p-permutation diagonaux (avec Deniz Yılmaz)

Foncteurs de p-permutation diagonaux (avec Deniz Yılmaz)

Soit R un anneau commutatif (unitaire)

Foncteurs de p-permutation diagonaux (avec Deniz Yılmaz)

Soit R un anneau commutatif (unitaire), et G, H, K des groupes finis.

Foncteurs de p-permutation diagonaux (avec Deniz Yılmaz)

Soit R un anneau commutatif (unitaire), et G, H, K des groupes finis.

- Soit $RT^{\Delta}(H, G)$ le R-module libre de base

Foncteurs de p-permutation diagonaux (avec Deniz Yılmaz)

Soit R un anneau commutatif (unitaire), et G, H, K des groupes finis.

- Soit $RT^{\Delta}(H, G)$ le R-module libre de base l'ensemble (fini)

Foncteurs de p-permutation diagonaux (avec Deniz Yılmaz)

Soit R un anneau commutatif (unitaire), et G, H, K des groupes finis.

- Soit $RT^{\Delta}(H, G)$ le R-module libre de base l'ensemble (fini) des classes d'isomorphisme de $(\Bbbk H, \Bbbk G)$-bimodules de p-permutation diagonaux indécomposables.

Foncteurs de p-permutation diagonaux (avec Deniz Yılmaz)

Soit R un anneau commutatif (unitaire), et G, H, K des groupes finis.

- Soit $RT^{\Delta}(H, G)$ le R-module libre de base l'ensemble (fini) des classes d'isomorphisme de $(\Bbbk H, \Bbbk G)$-bimodules de p-permutation diagonaux indécomposables.
  Un $(\Bbbk H, \Bbbk G)$-bimodule de p-permutation diagonal M (de type fini) se décompose en une somme directe de bimodules indécomposables.

Foncteurs de p-permutation diagonaux (avec Deniz Yılmaz)

Soit R un anneau commutatif (unitaire), et G, H, K des groupes finis.

- Soit $RT^{\Delta}(H,G)$ le R-module libre de base l'ensemble (fini) des classes d'isomorphisme de $(\Bbbk H, \Bbbk G)$-bimodules de p-permutation diagonaux indécomposables.
  Un $(\Bbbk H, \Bbbk G)$-bimodule de p-permutation diagonal M (de type fini) se décompose en une somme directe de bimodules indécomposables.
  On note $[M]$ l'élément correspondant de $RT^{\Delta}(H,G)$.

Foncteurs de p-permutation diagonaux (avec Deniz Yılmaz)

Soit R un anneau commutatif (unitaire), et G, H, K des groupes finis.

- Soit $RT^{\Delta}(H, G)$ le R-module libre de base l'ensemble (fini) des classes d'isomorphisme de $(\Bbbk H, \Bbbk G)$-bimodules de p-permutation diagonaux indécomposables.
- Pour des groupes finis G, H, K, il y a une application R-bilinéaire

Foncteurs de p-permutation diagonaux (avec Deniz Yılmaz)

Soit R un anneau commutatif (unitaire), et G, H, K des groupes finis.

- Soit $RT^\Delta(H,G)$ le R-module libre de base l'ensemble (fini) des classes d'isomorphisme de $(\Bbbk H, \Bbbk G)$-bimodules de p-permutation diagonaux indécomposables.
- Pour des groupes finis G, H, K, il y a une application R-bilinéaire
$$\circ : RT^\Delta(K,H) \times RT^\Delta(H,G) \to RT^\Delta(K,G)$$

Foncteurs de p-permutation diagonaux (avec Deniz Yılmaz)

Soit R un anneau commutatif (unitaire), et G, H, K des groupes finis.

- Soit $RT^\Delta(H, G)$ le R-module libre de base l'ensemble (fini) des classes d'isomorphisme de $(\Bbbk H, \Bbbk G)$-bimodules de p-permutation diagonaux indécomposables.
- Pour des groupes finis G, H, K, il y a une application R-bilinéaire
$$\circ : RT^\Delta(K, H) \times RT^\Delta(H, G) \to RT^\Delta(K, G)$$
induite par $([N], [M]) \mapsto [N \otimes_{kH} M]$.

Soit R un anneau commutatif (unitaire), et G, H, K des groupes finis.

- Soit $RT^\Delta(H, G)$ le R-module libre de base l'ensemble (fini) des classes d'isomorphisme de $(\mathbb{k}H, \mathbb{k}G)$-bimodules de p-permutation diagonaux indécomposables.
- Pour des groupes finis G, H, K, il y a une application R-bilinéaire
$$\circ : RT^\Delta(K, H) \times RT^\Delta(H, G) \to RT^\Delta(K, G)$$
induite par $([N], [M]) \mapsto [N \otimes_{kH} M]$.

Définition

Soit $Rpp_{\mathbb{k}}^\Delta$ la catégorie suivante :

Foncteurs de p-permutation diagonaux (avec Deniz Yılmaz)

Soit R un anneau commutatif (unitaire), et G, H, K des groupes finis.

- Soit $RT^{\Delta}(H, G)$ le R-module libre de base l'ensemble (fini) des classes d'isomorphisme de $(\mathbb{k}H, \mathbb{k}G)$-bimodules de p-permutation diagonaux indécomposables.
- Pour des groupes finis G, H, K, il y a une application R-bilinéaire
$$\circ : RT^{\Delta}(K, H) \times RT^{\Delta}(H, G) \to RT^{\Delta}(K, G)$$
induite par $([N], [M]) \mapsto [N \otimes_{kH} M]$.

Définition

Soit $Rpp_{\mathbb{k}}^{\Delta}$ la catégorie suivante :

- *Les objets de $Rpp_{\mathbb{k}}^{\Delta}$ sont les groupes finis.*

Foncteurs de p-permutation diagonaux (avec Deniz Yılmaz)

Soit R un anneau commutatif (unitaire), et G, H, K des groupes finis.

- Soit $RT^{\Delta}(H, G)$ le R-module libre de base l'ensemble (fini) des classes d'isomorphisme de $(\mathbb{k}H, \mathbb{k}G)$-bimodules de p-permutation diagonaux indécomposables.
- Pour des groupes finis G, H, K, il y a une application R-bilinéaire
$$\circ : RT^{\Delta}(K, H) \times RT^{\Delta}(H, G) \to RT^{\Delta}(K, G)$$
induite par $([N], [M]) \mapsto [N \otimes_{kH} M]$.

Définition

Soit $Rpp_{\mathbb{k}}^{\Delta}$ la catégorie suivante :

- *Les objets de $Rpp_{\mathbb{k}}^{\Delta}$ sont les groupes finis.*
- *Pour des groupes finis G et H*

Foncteurs de p-permutation diagonaux (avec Deniz Yılmaz)

Soit R un anneau commutatif (unitaire), et G, H, K des groupes finis.

- Soit $RT^\Delta(H,G)$ le R-module libre de base l'ensemble (fini) des classes d'isomorphisme de $(\mathbb{k}H, \mathbb{k}G)$-bimodules de p-permutation diagonaux indécomposables.
- Pour des groupes finis G, H, K, il y a une application R-bilinéaire
$$\circ : RT^\Delta(K,H) \times RT^\Delta(H,G) \to RT^\Delta(K,G)$$
induite par $([N],[M]) \mapsto [N \otimes_{kH} M]$.

Définition

Soit $Rpp_{\mathbb{k}}^\Delta$ la catégorie suivante :

- *Les objets de $Rpp_{\mathbb{k}}^\Delta$ sont les groupes finis.*
- *Pour des groupes finis G et H, soit $Hom_{Rpp_{\mathbb{k}}^\Delta}(G,H) := RT^\Delta(H,G)$.*

Foncteurs de p-permutation diagonaux (avec Deniz Yılmaz)

Soit R un anneau commutatif (unitaire), et G, H, K des groupes finis.

- Soit $RT^{\Delta}(H, G)$ le R-module libre de base l'ensemble (fini) des classes d'isomorphisme de $(\mathbb{k}H, \mathbb{k}G)$-bimodules de p-permutation diagonaux indécomposables.
- Pour des groupes finis G, H, K, il y a une application R-bilinéaire
$$\circ : RT^{\Delta}(K, H) \times RT^{\Delta}(H, G) \to RT^{\Delta}(K, G)$$
induite par $([N], [M]) \mapsto [N \otimes_{kH} M]$.

Définition

Soit $Rpp_{\mathbb{k}}^{\Delta}$ la catégorie suivante :

- *Les objets de $Rpp_{\mathbb{k}}^{\Delta}$ sont les groupes finis.*
- *Pour des groupes finis G et H, soit $\mathrm{Hom}_{Rpp_{\mathbb{k}}^{\Delta}}(G, H) := RT^{\Delta}(H, G)$.*
- *La composition dans $Rpp_{\mathbb{k}}^{\Delta}$ est l'application $\circ$ ci-dessus.*

Foncteurs de p-permutation diagonaux (avec Deniz Yılmaz)

Soit R un anneau commutatif (unitaire), et G, H, K des groupes finis.

- Soit $RT^\Delta(H,G)$ le R-module libre de base l'ensemble (fini) des classes d'isomorphisme de $(\mathbb{k}H, \mathbb{k}G)$-bimodules de p-permutation diagonaux indécomposables.
- Pour des groupes finis G, H, K, il y a une application R-bilinéaire
$$\circ : RT^\Delta(K,H) \times RT^\Delta(H,G) \to RT^\Delta(K,G)$$
induite par $([N],[M]) \mapsto [N \otimes_{kH} M]$.

Définition

Soit $Rpp_{\mathbb{k}}^\Delta$ la catégorie suivante :

- *Les objets de $Rpp_{\mathbb{k}}^\Delta$ sont les groupes finis.*
- *Pour des groupes finis G et H, soit $Hom_{Rpp_{\mathbb{k}}^\Delta}(G,H) := RT^\Delta(H,G)$.*
- *La composition dans $Rpp_{\mathbb{k}}^\Delta$ est l'application $\circ$ ci-dessus.*
- *Le morphisme identité de G est $[\mathbb{k}G] \in RT^\Delta(G,G)$.*

Foncteurs de p-permutation diagonaux (avec Deniz Yılmaz)

Soit R un anneau commutatif (unitaire), et G, H, K des groupes finis.

- Soit $RT^{\Delta}(H, G)$ le R-module libre de base l'ensemble (fini) des classes d'isomorphisme de $(\Bbbk H, \Bbbk G)$-bimodules de p-permutation diagonaux indécomposables.
- Pour des groupes finis G, H, K, il y a une application R-bilinéaire
$$\circ : RT^{\Delta}(K, H) \times RT^{\Delta}(H, G) \to RT^{\Delta}(K, G)$$
induite par $([N], [M]) \mapsto [N \otimes_{kH} M]$.

Définition

Soit $Rpp_{\Bbbk}^{\Delta}$ la catégorie suivante :

- *Les objets de $Rpp_{\Bbbk}^{\Delta}$ sont les groupes finis.*
- *Pour des groupes finis G et H, soit $Hom_{Rpp_{\Bbbk}^{\Delta}}(G, H) := RT^{\Delta}(H, G)$.*
- *La composition dans $Rpp_{\Bbbk}^{\Delta}$ est l'application $\circ$ ci-dessus.*
- *Le morphisme identité de G est $[\Bbbk G] \in RT^{\Delta}(G, G)$.*

*Un foncteur de p-permutation diagonal sur R est un foncteur R-linéaire de $Rpp_{\Bbbk}^{\Delta}$ vers R-***Mod***.*

Foncteurs de p-permutation diagonaux (avec Deniz Yılmaz)

Soit R un anneau commutatif (unitaire), et G, H, K des groupes finis.

- Soit $RT^\Delta(H,G)$ le R-module libre de base l'ensemble (fini) des classes d'isomorphisme de $(\Bbbk H, \Bbbk G)$-bimodules de p-permutation diagonaux indécomposables.
- Pour des groupes finis G, H, K, il y a une application R-bilinéaire
$$\circ : RT^\Delta(K,H) \times RT^\Delta(H,G) \to RT^\Delta(K,G)$$
induite par $([N],[M]) \mapsto [N \otimes_{kH} M]$.

Définition

Soit $Rpp_\Bbbk^\Delta$ la catégorie suivante :

- *Les objets de $Rpp_\Bbbk^\Delta$ sont les groupes finis.*
- *Pour des groupes finis G et H, soit $Hom_{Rpp_\Bbbk^\Delta}(G,H) := RT^\Delta(H,G)$.*
- *La composition dans $Rpp_\Bbbk^\Delta$ est l'application $\circ$ ci-dessus.*
- *Le morphisme identité de G est $[\Bbbk G] \in RT^\Delta(G,G)$.*

*Un foncteur de p-permutation diagonal sur R est un foncteur R-linéaire de $Rpp_\Bbbk^\Delta$ vers R-**Mod**. Ces foncteurs forment une catégorie abélienne $\mathcal{F}_{Rpp_\Bbbk}^\Delta$.*

Semi-simplicité

Semi-simplicité

Théorème

Semi-simplicité

Théorème

Soit $\mathbb{F}$ un corps algébriquement clos de caractéristique 0.

Semi-simplicité

Théorème

Soit $\mathbb{F}$ un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Alors la catégorie $\mathcal{F}^{\Delta}_{\mathbb{F}pp_{\mathbb{k}}}$ des foncteurs de p-permutation diagonaux sur $\mathbb{F}$

Semi-simplicité

Théorème

Soit $\mathbb{F}$ un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Alors la catégorie $\mathcal{F}^{\Delta}_{\mathbb{F}pp_{\Bbbk}}$ des foncteurs de p-permutation diagonaux sur $\mathbb{F}$ est semi-simple.

Semi-simplicité

Théorème

Soit $\mathbb{F}$ un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Alors la catégorie $\mathcal{F}^{\Delta}_{\mathbb{F}pp_{\mathbb{k}}}$ des foncteurs de p-permutation diagonaux sur $\mathbb{F}$ est semi-simple.

- Une D^{Δ}-paire (L, u) consiste

Semi-simplicité

Théorème

Soit $\mathbb{F}$ un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Alors la catégorie $\mathcal{F}^{\Delta}_{\mathbb{F}pp_{\mathbb{k}}}$ des foncteurs de p-permutation diagonaux sur $\mathbb{F}$ est semi-simple.

- Une D^{Δ}-paire (L, u) consiste en un p-groupe fini L et

Semi-simplicité

Théorème

Soit $\mathbb{F}$ un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Alors la catégorie $\mathcal{F}^{\Delta}_{\mathbb{F}pp_{\mathbb{k}}}$ des foncteurs de p-permutation diagonaux sur $\mathbb{F}$ est semi-simple.

- Une D^{Δ}-paire (L, u) consiste en un p-groupe fini L et un p'-automorphisme u de L.

Semi-simplicité

Théorème

Soit $\mathbb{F}$ un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Alors la catégorie $\mathcal{F}^{\Delta}_{\mathbb{F}pp_{\mathbb{k}}}$ des foncteurs de p-permutation diagonaux sur $\mathbb{F}$ est semi-simple.

- Une D^{Δ}-paire (L, u) consiste en un p-groupe fini L et un p'-automorphisme u de L.
- Un isomorphisme de D^{Δ}-paires $\varphi : (L, u) \to (M, v)$

Semi-simplicité

Théorème

Soit $\mathbb{F}$ un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Alors la catégorie $\mathcal{F}^{\Delta}_{\mathbb{F}pp_{\Bbbk}}$ des foncteurs de p-permutation diagonaux sur $\mathbb{F}$ est semi-simple.

- Une D^{Δ}-paire (L, u) consiste en un p-groupe fini L et un p'-automorphisme u de L.
- Un isomorphisme de D^{Δ}-paires $\varphi : (L, u) \to (M, v)$ est un isomorphisme de groupes $\varphi : L \rtimes \langle u \rangle \to M \rtimes \langle v \rangle$

Semi-simplicité

Théorème

Soit $\mathbb{F}$ un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Alors la catégorie $\mathcal{F}^{\Delta}_{\mathbb{F}pp_{\mathbb{k}}}$ des foncteurs de p-permutation diagonaux sur $\mathbb{F}$ est semi-simple.

- Une D^{Δ}-paire (L, u) consiste en un p-groupe fini L et un p'-automorphisme u de L.
- Un isomorphisme de D^{Δ}-paires $\varphi : (L, u) \to (M, v)$ est un isomorphisme de groupes $\varphi : L \rtimes \langle u \rangle \to M \rtimes \langle v \rangle$ tel que $\varphi(u)$ soit conjugué de v.

Semi-simplicité

Théorème

Soit $\mathbb{F}$ un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Alors la catégorie $\mathcal{F}^{\Delta}_{\mathbb{F}pp_{\mathbb{k}}}$ des foncteurs de p-permutation diagonaux sur $\mathbb{F}$ est semi-simple.

- Une D^{Δ}-paire (L, u) consiste en un p-groupe fini L et un p'-automorphisme u de L.
- Un isomorphisme de D^{Δ}-paires $\varphi : (L, u) \to (M, v)$ est un isomorphisme de groupes $\varphi : L \rtimes \langle u \rangle \to M \rtimes \langle v \rangle$ tel que $\varphi(u)$ soit conjugué de v.
- Soit $Aut(L, u)$ le groupe d'autmorphismes de la D^{Δ}-paire (L, u)

Semi-simplicité

Théorème

Soit $\mathbb{F}$ un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Alors la catégorie $\mathcal{F}^{\Delta}_{\mathbb{F}pp_{\mathbb{k}}}$ des foncteurs de p-permutation diagonaux sur $\mathbb{F}$ est semi-simple.

- Une D^{Δ}-paire (L, u) consiste en un p-groupe fini L et un p'-automorphisme u de L.
- Un isomorphisme de D^{Δ}-paires $\varphi : (L, u) \to (M, v)$ est un isomorphisme de groupes $\varphi : L \rtimes \langle u \rangle \to M \rtimes \langle v \rangle$ tel que $\varphi(u)$ soit conjugué de v.
- Soit $Aut(L, u)$ le groupe d'autmorphismes de la D^{Δ}-paire (L, u), et $Out(L, u) = Aut(L, u)/Inn(L \rtimes \langle u \rangle)$.

Semi-simplicité

Théorème

Soit $\mathbb{F}$ un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Alors la catégorie $\mathcal{F}^{\Delta}_{\mathbb{F}pp_{\mathbb{k}}}$ des foncteurs de p-permutation diagonaux sur $\mathbb{F}$ est semi-simple.

- Une D^{Δ}-paire (L,u) consiste en un p-groupe fini L et un p'-automorphisme u de L.
- Un isomorphisme de D^{Δ}-paires $\varphi : (L,u) \to (M,v)$ est un isomorphisme de groupes $\varphi : L \rtimes \langle u \rangle \to M \rtimes \langle v \rangle$ tel que $\varphi(u)$ soit conjugué de v.
- Soit $Aut(L,u)$ le groupe d'autmorphismes de la D^{Δ}-paire (L,u), et $Out(L,u) = Aut(L,u)/Inn(L \rtimes \langle u \rangle)$.

Théorème

Semi-simplicité

Théorème

Soit $\mathbb{F}$ un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Alors la catégorie $\mathcal{F}^{\Delta}_{\mathbb{F}pp_{\mathbb{k}}}$ des foncteurs de p-permutation diagonaux sur $\mathbb{F}$ est semi-simple.

- Une D^{Δ}-paire (L, u) consiste en un p-groupe fini L et un p'-automorphisme u de L.
- Un isomorphisme de D^{Δ}-paires $\varphi : (L, u) \to (M, v)$ est un isomorphisme de groupes $\varphi : L \rtimes \langle u \rangle \to M \rtimes \langle v \rangle$ tel que $\varphi(u)$ soit conjugué de v.
- Soit $Aut(L, u)$ le groupe d'autmorphismes de la D^{Δ}-paire (L, u), et $Out(L, u) = Aut(L, u)/Inn(L \rtimes \langle u \rangle)$.

Théorème

Les foncteurs de p-permutation diagonaux simples sur $\mathbb{F}$

Semi-simplicité

Théorème

Soit $\mathbb{F}$ un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Alors la catégorie $\mathcal{F}^{\Delta}_{\mathbb{F}pp_{\mathbb{k}}}$ des foncteurs de p-permutation diagonaux sur $\mathbb{F}$ est semi-simple.

- Une D^{Δ}-paire (L, u) consiste en un p-groupe fini L et un p'-automorphisme u de L.
- Un isomorphisme de D^{Δ}-paires $\varphi : (L, u) \to (M, v)$ est un isomorphisme de groupes $\varphi : L \rtimes \langle u \rangle \to M \rtimes \langle v \rangle$ tel que $\varphi(u)$ soit conjugué de v.
- Soit $Aut(L, u)$ le groupe d'autmorphismes de la D^{Δ}-paire (L, u), et $Out(L, u) = Aut(L, u)/Inn(L \rtimes \langle u \rangle)$.

Théorème

Les foncteurs de p-permutation diagonaux simples sur $\mathbb{F}$ (à iso. près)

Semi-simplicité

Théorème

Soit $\mathbb{F}$ un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Alors la catégorie $\mathcal{F}^{\Delta}_{\mathbb{F}pp_{\mathbb{k}}}$ des foncteurs de p-permutation diagonaux sur $\mathbb{F}$ est semi-simple.

- Une D^{Δ}-paire (L, u) consiste en un p-groupe fini L et un p'-automorphisme u de L.
- Un isomorphisme de D^{Δ}-paires $\varphi : (L, u) \to (M, v)$ est un isomorphisme de groupes $\varphi : L \rtimes \langle u \rangle \to M \rtimes \langle v \rangle$ tel que $\varphi(u)$ soit conjugué de v.
- Soit $Aut(L, u)$ le groupe d'autmorphismes de la D^{Δ}-paire (L, u), et $Out(L, u) = Aut(L, u)/Inn(L \rtimes \langle u \rangle)$.

Théorème

Les foncteurs de p-permutation diagonaux simples sur $\mathbb{F}$ sont paramétrés par les triplets (L, u, V)

Semi-simplicité

Théorème

Soit $\mathbb{F}$ un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Alors la catégorie $\mathcal{F}^{\Delta}_{\mathbb{F}pp_{\Bbbk}}$ des foncteurs de p-permutation diagonaux sur $\mathbb{F}$ est semi-simple.

- Une D^{Δ}-paire (L,u) consiste en un p-groupe fini L et un p'-automorphisme u de L.
- Un isomorphisme de D^{Δ}-paires $\varphi:(L,u)\to(M,v)$ est un isomorphisme de groupes $\varphi: L\rtimes\langle u\rangle\to M\rtimes\langle v\rangle$ tel que $\varphi(u)$ soit conjugué de v.
- Soit $Aut(L,u)$ le groupe d'autmorphismes de la D^{Δ}-paire (L,u), et $Out(L,u)=Aut(L,u)/Inn(L\rtimes\langle u\rangle)$.

Théorème

Les foncteurs de p-permutation diagonaux simples sur $\mathbb{F}$ sont paramétrés par les triplets (L,u,V) (à iso. près)

Semi-simplicité

Théorème

Soit $\mathbb{F}$ un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Alors la catégorie $\mathcal{F}^{\Delta}_{\mathbb{F}pp_{\mathbb{k}}}$ des foncteurs de p-permutation diagonaux sur $\mathbb{F}$ est semi-simple.

- Une D^{Δ}-paire (L, u) consiste en un p-groupe fini L et un p'-automorphisme u de L.
- Un isomorphisme de D^{Δ}-paires $\varphi : (L, u) \to (M, v)$ est un isomorphisme de groupes $\varphi : L \rtimes \langle u \rangle \to M \rtimes \langle v \rangle$ tel que $\varphi(u)$ soit conjugué de v.
- Soit $Aut(L, u)$ le groupe d'autmorphismes de la D^{Δ}-paire (L, u), et $Out(L, u) = Aut(L, u)/Inn(L \rtimes \langle u \rangle)$.

Théorème

Les foncteurs de p-permutation diagonaux simples sur $\mathbb{F}$ sont paramétrés par les triplets (L, u, V), où (L, u) est une D^{Δ}-paire

Semi-simplicité

Théorème

Soit $\mathbb{F}$ un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Alors la catégorie $\mathcal{F}^{\Delta}_{\mathbb{F}pp_{\mathbb{k}}}$ des foncteurs de p-permutation diagonaux sur $\mathbb{F}$ est semi-simple.

- Une D^{Δ}-paire (L, u) consiste en un p-groupe fini L et un p'-automorphisme u de L.
- Un isomorphisme de D^{Δ}-paires $\varphi : (L, u) \to (M, v)$ est un isomorphisme de groupes $\varphi : L \rtimes \langle u \rangle \to M \rtimes \langle v \rangle$ tel que $\varphi(u)$ soit conjugué de v.
- Soit $Aut(L, u)$ le groupe d'autmorphismes de la D^{Δ}-paire (L, u), et $Out(L, u) = Aut(L, u)/Inn(L \rtimes \langle u \rangle)$.

Théorème

Les foncteurs de p-permutation diagonaux simples sur $\mathbb{F}$ sont paramétrés par les triplets (L, u, V), où (L, u) est une D^{Δ}-paire, et V est un $\mathbb{F}Out(L, u)$-module simple.

Semi-simplicité

Théorème

Soit $\mathbb{F}$ un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Alors la catégorie $\mathcal{F}^{\Delta}_{\mathbb{F}pp_{\Bbbk}}$ des foncteurs de p-permutation diagonaux sur $\mathbb{F}$ est semi-simple.

- Une D^{Δ}-paire (L, u) consiste en un p-groupe fini L et un p'-automorphisme u de L.
- Un isomorphisme de D^{Δ}-paires $\varphi : (L, u) \to (M, v)$ est un isomorphisme de groupes $\varphi : L \rtimes \langle u \rangle \to M \rtimes \langle v \rangle$ tel que $\varphi(u)$ soit conjugué de v.
- Soit $Aut(L, u)$ le groupe d'autmorphismes de la D^{Δ}-paire (L, u), et $Out(L, u) = Aut(L, u)/Inn(L \rtimes \langle u \rangle)$.

Théorème

Les foncteurs de p-permutation diagonaux simples sur $\mathbb{F}$ sont paramétrés par les triplets (L, u, V), où (L, u) est une D^{Δ}-paire, et V est un $\mathbb{F}Out(L, u)$-module simple. **Notation :** $(L, u, V) \mapsto S_{L,u,V}$.

Les blocs comme idempotents

Les blocs comme idempotents

- Soit G un groupe fini

Les blocs comme idempotents

- Soit G un groupe fini et $b^2 = b \in Z(\Bbbk G)$.

Les blocs comme idempotents

- Soit G un groupe fini et $b^2 = b \in Z(\Bbbk G)$. Alors $[\Bbbk Gb] \in RT^\Delta(G,G)$ est un endomorphisme de G dans $Rpp_\Bbbk^\Delta$.

Les blocs comme idempotents

- Soit G un groupe fini et $b^2 = b \in Z(\mathbb{k}G)$. Alors $[\mathbb{k}Gb] \in RT^\Delta(G,G)$ est un endomorphisme de G dans $Rpp_\mathbb{k}^\Delta$.
- De plus, comme $\mathbb{k}Gb \otimes_{\mathbb{k}G} \mathbb{k}Gb \cong \mathbb{k}Gb$ comme $(\mathbb{k}G, \mathbb{k}G)$-bimodules

Les blocs comme idempotents

- Soit G un groupe fini et $b^2 = b \in Z(\Bbbk G)$. Alors $[\Bbbk Gb] \in RT^{\Delta}(G, G)$ est un endomorphisme de G dans $Rpp_{\Bbbk}^{\Delta}$.
- De plus, comme $\Bbbk Gb \otimes_{\Bbbk G} \Bbbk Gb \cong \Bbbk Gb$ comme $(\Bbbk G, \Bbbk G)$-bimodules, cet endomorphisme de G est idempotent.

Les blocs comme idempotents

- Soit G un groupe fini et $b^2 = b \in Z(\Bbbk G)$. Alors $[\Bbbk Gb] \in RT^\Delta(G,G)$ est un endomorphisme de G dans $Rpp_{\Bbbk}^\Delta$.
- De plus, comme $\Bbbk Gb \otimes_{\Bbbk G} \Bbbk Gb \cong \Bbbk Gb$ comme $(\Bbbk G, \Bbbk G)$-bimodules, cet endomorphisme de G est idempotent.
- Si b et b' sont des idempotents centraux orthogonaux de $\Bbbk G$

Les blocs comme idempotents

- Soit G un groupe fini et $b^2 = b \in Z(\Bbbk G)$. Alors $[\Bbbk Gb] \in RT^{\Delta}(G, G)$ est un endomorphisme de G dans $Rpp_{\Bbbk}^{\Delta}$.
- De plus, comme $\Bbbk Gb \otimes_{\Bbbk G} \Bbbk Gb \cong \Bbbk Gb$ comme $(\Bbbk G, \Bbbk G)$-bimodules, cet endomorphisme de G est idempotent.
- Si b et b' sont des idempotents centraux orthogonaux de $\Bbbk G$, alors $\Bbbk Gb \otimes_{\Bbbk G} \Bbbk Gb' = \{0\}$

Les blocs comme idempotents

- Soit G un groupe fini et $b^2 = b \in Z(\Bbbk G)$. Alors $[\Bbbk Gb] \in RT^\Delta(G,G)$ est un endomorphisme de G dans $Rpp_\Bbbk^\Delta$.
- De plus, comme $\Bbbk Gb \otimes_{\Bbbk G} \Bbbk Gb \cong \Bbbk Gb$ comme $(\Bbbk G, \Bbbk G)$-bimodules, cet endomorphisme de G est idempotent.
- Si b et b' sont des idempotents centraux orthogonaux de $\Bbbk G$, alors $\Bbbk Gb \otimes_{\Bbbk G} \Bbbk Gb' = \{0\}$, donc $[\Bbbk Gb]$ et $[\Bbbk Gb']$ sont des endomorphismes idempotents orthogonaux de G.

Les blocs comme idempotents

- Soit G un groupe fini et $b^2 = b \in Z(\Bbbk G)$. Alors $[\Bbbk Gb] \in RT^{\Delta}(G, G)$ est un endomorphisme de G dans $Rpp_{\Bbbk}^{\Delta}$.
- De plus, comme $\Bbbk Gb \otimes_{\Bbbk G} \Bbbk Gb \cong \Bbbk Gb$ comme $(\Bbbk G, \Bbbk G)$-bimodules, cet endomorphisme de G est idempotent.
- Si b et b' sont des idempotents centraux orthogonaux de $\Bbbk G$, alors $\Bbbk Gb \otimes_{\Bbbk G} \Bbbk Gb' = \{0\}$, donc $[\Bbbk Gb]$ et $[\Bbbk Gb']$ sont des endomorphismes idempotents orthogonaux de G.
- Si $b_1, \ldots, b_n$ sont les idempotents blocs de $\Bbbk G$

Les blocs comme idempotents

- Soit G un groupe fini et $b^2 = b \in Z(\Bbbk G)$. Alors $[\Bbbk Gb] \in RT^{\Delta}(G,G)$ est un endomorphisme de G dans $Rpp_{\Bbbk}^{\Delta}$.
- De plus, comme $\Bbbk Gb \otimes_{\Bbbk G} \Bbbk Gb \cong \Bbbk Gb$ comme $(\Bbbk G, \Bbbk G)$-bimodules, cet endomorphisme de G est idempotent.
- Si b et b' sont des idempotents centraux orthogonaux de $\Bbbk G$, alors $\Bbbk Gb \otimes_{\Bbbk G} \Bbbk Gb' = \{0\}$, donc $[\Bbbk Gb]$ et $[\Bbbk Gb']$ sont des endomorphismes idempotents orthogonaux de G.
- Si $b_1, \ldots, b_n$ sont les idempotents blocs de $\Bbbk G$, on obtient une décomposition orthogonale $[\Bbbk G] = [\Bbbk Gb_1] + \ldots + [\Bbbk Gb_n]$

Les blocs comme idempotents

- Soit G un groupe fini et $b^2 = b \in Z(\Bbbk G)$. Alors $[\Bbbk Gb] \in RT^\Delta(G,G)$ est un endomorphisme de G dans $Rpp_{\Bbbk}^{\Delta}$.
- De plus, comme $\Bbbk Gb \otimes_{\Bbbk G} \Bbbk Gb \cong \Bbbk Gb$ comme $(\Bbbk G, \Bbbk G)$-bimodules, cet endomorphisme de G est idempotent.
- Si b et b' sont des idempotents centraux orthogonaux de $\Bbbk G$, alors $\Bbbk Gb \otimes_{\Bbbk G} \Bbbk Gb' = \{0\}$, donc $[\Bbbk Gb]$ et $[\Bbbk Gb']$ sont des endomorphismes idempotents orthogonaux de G.
- Si $b_1, \ldots, b_n$ sont les idempotents blocs de $\Bbbk G$, on obtient une décomposition orthogonale $[\Bbbk G] = [\Bbbk Gb_1] + \ldots + [\Bbbk Gb_n]$ de l'identité de $RT^\Delta(G,G) = End_{Rpp_{\Bbbk}^{\Delta}}(G,G)$.

Les blocs comme foncteurs

Les blocs comme foncteurs

- Pour un groupe fini G et pour $b = b^2 \in Z(\mathbb{k}G)$

Les blocs comme foncteurs

- Pour un groupe fini G et pour $b = b^2 \in Z(\Bbbk G)$, soit $RT^{\Delta}_{G,b}$

Les blocs comme foncteurs

- Pour un groupe fini G et pour $b = b^2 \in Z(\Bbbk G)$, soit $RT^{\Delta}_{G,b}$ (ou RT^{Δ}_{G} si $b = 1$)

Les blocs comme foncteurs

- Pour un groupe fini G et pour $b = b^2 \in Z(\Bbbk G)$, soit $RT^{\Delta}_{G,b}$ (ou RT^{Δ}_{G} si $b = 1$) le foncteur de p-permutation diagonal

Les blocs comme foncteurs

- Pour un groupe fini G et pour $b = b^2 \in Z(\Bbbk G)$, soit $RT^{\Delta}_{G,b}$ (ou RT^{Δ}_{G} si $b = 1$) le foncteur de p-permutation diagonal

$$H \mapsto RT^{\Delta}(H, G)$$

Les blocs comme foncteurs

- Pour un groupe fini G et pour $b = b^2 \in Z(\Bbbk G)$, soit $RT^{\Delta}_{G,b}$ (ou RT^{Δ}_{G} si $b = 1$) le foncteur de p-permutation diagonal
$$H \mapsto RT^{\Delta}(H, G) \circ [\Bbbk Gb]$$

Les blocs comme foncteurs

- Pour un groupe fini G et pour $b = b^2 \in Z(\Bbbk G)$, soit $RT^{\Delta}_{G,b}$ (ou RT^{Δ}_{G} si $b = 1$) le foncteur de p-permutation diagonal
$$H \mapsto RT^{\Delta}(H, G) \circ [\Bbbk Gb] =: RT^{\Delta}(H, G)b.$$

Les blocs comme foncteurs

- Pour un groupe fini G et pour $b = b^2 \in Z(\Bbbk G)$, soit $RT^{\Delta}_{G,b}$ (ou RT^{Δ}_{G} si $b = 1$) le foncteur de p-permutation diagonal
$$H \mapsto RT^{\Delta}(H, G) \circ [\Bbbk Gb] =: RT^{\Delta}(H, G)b.$$
- Le foncteur $RT^{\Delta}_{G,b}$ est facteur direct du foncteur représentable RT^{Δ}_{G}

Les blocs comme foncteurs

- Pour un groupe fini G et pour $b = b^2 \in Z(\Bbbk G)$, soit $RT^{\Delta}_{G,b}$ (ou RT^{Δ}_{G} si $b = 1$) le foncteur de p-permutation diagonal
$$H \mapsto RT^{\Delta}(H, G) \circ [\Bbbk Gb] =: RT^{\Delta}(H, G)b.$$
- Le foncteur $RT^{\Delta}_{G,b}$ est facteur direct du foncteur représentable RT^{Δ}_{G}, donc c'est un objet projectif de $\mathcal{F}^{\Delta}_{Rpp_{\Bbbk}}$.

Les blocs comme foncteurs

- Pour un groupe fini G et pour $b = b^2 \in Z(\Bbbk G)$, soit $RT^{\Delta}_{G,b}$ (ou RT^{Δ}_{G} si $b = 1$) le foncteur de p-permutation diagonal
$$H \mapsto RT^{\Delta}(H, G) \circ [\Bbbk Gb] =: RT^{\Delta}(H, G)b.$$
- Le foncteur $RT^{\Delta}_{G,b}$ est facteur direct du foncteur représentable RT^{Δ}_{G}, donc c'est un objet projectif de $\mathcal{F}^{\Delta}_{Rpp_{\Bbbk}}$.
Si $b_1, \ldots, b_n$ sont les idempotents blocs de $\Bbbk G$

Les blocs comme foncteurs

- Pour un groupe fini G et pour $b = b^2 \in Z(\Bbbk G)$, soit $RT^{\Delta}_{G,b}$ (ou RT^{Δ}_{G} si $b = 1$) le foncteur de p-permutation diagonal

$$H \mapsto RT^{\Delta}(H,G) \circ [\Bbbk Gb] =: RT^{\Delta}(H,G)b.$$

- Le foncteur $RT^{\Delta}_{G,b}$ est facteur direct du foncteur représentable RT^{Δ}_{G}, donc c'est un objet projectif de $\mathcal{F}^{\Delta}_{Rpp_{\Bbbk}}$.
  Si $b_1, \ldots, b_n$ sont les idempotents blocs de $\Bbbk G$, alors

$$RT^{\Delta}(-,G) \cong$$

Les blocs comme foncteurs

- Pour un groupe fini G et pour $b = b^2 \in Z(\Bbbk G)$, soit $RT^{\Delta}_{G,b}$ (ou RT^{Δ}_{G} si $b = 1$) le foncteur de p-permutation diagonal
$$H \mapsto RT^{\Delta}(H, G) \circ [\Bbbk Gb] =: RT^{\Delta}(H, G)b.$$
- Le foncteur $RT^{\Delta}_{G,b}$ est facteur direct du foncteur représentable RT^{Δ}_{G}, donc c'est un objet projectif de $\mathcal{F}^{\Delta}_{Rpp_{\Bbbk}}$.
Si $b_1, \ldots, b_n$ sont les idempotents blocs de $\Bbbk G$, alors
$$RT^{\Delta}_{G} \cong$$

Les blocs comme foncteurs

- Pour un groupe fini G et pour $b = b^2 \in Z(\Bbbk G)$, soit $RT^{\Delta}_{G,b}$ (ou RT^{Δ}_{G} si $b = 1$) le foncteur de p-permutation diagonal
$$H \mapsto RT^{\Delta}(H,G) \circ [\Bbbk Gb] =: RT^{\Delta}(H,G)b.$$
- Le foncteur $RT^{\Delta}_{G,b}$ est facteur direct du foncteur représentable RT^{Δ}_{G}, donc c'est un objet projectif de $\mathcal{F}^{\Delta}_{Rpp_{\Bbbk}}$.
Si $b_1, \ldots, b_n$ sont les idempotents blocs de $\Bbbk G$, alors
$$RT^{\Delta}_{G} \cong RT^{\Delta}_{G,b_1} \oplus \ldots \oplus RT^{\Delta}_{G,b_n} \text{ dans } \mathcal{F}^{\Delta}_{Rpp_k}.$$

Les blocs comme foncteurs

- Pour un groupe fini G et pour $b = b^2 \in Z(\Bbbk G)$, soit $RT^{\Delta}_{G,b}$ (ou RT^{Δ}_{G} si $b = 1$) le foncteur de p-permutation diagonal

$$H \mapsto RT^{\Delta}(H,G) \circ [\Bbbk Gb] =: RT^{\Delta}(H,G)b.$$

- Le foncteur $RT^{\Delta}_{G,b}$ est facteur direct du foncteur représentable RT^{Δ}_{G}, donc c'est un objet projectif de $\mathcal{F}^{\Delta}_{Rpp_{\Bbbk}}$.
  Si $b_1, \ldots, b_n$ sont les idempotents blocs de $\Bbbk G$, alors

$$RT^{\Delta}_{G} \cong RT^{\Delta}_{G,b_1} \oplus \ldots \oplus RT^{\Delta}_{G,b_n} \text{ dans } \mathcal{F}^{\Delta}_{Rpp_k}.$$

Définition

Les blocs comme foncteurs

- Pour un groupe fini G et pour $b = b^2 \in Z(\Bbbk G)$, soit $RT^{\Delta}_{G,b}$ (ou RT^{Δ}_{G} si $b = 1$) le foncteur de p-permutation diagonal
$$H \mapsto RT^{\Delta}(H, G) \circ [\Bbbk Gb] =: RT^{\Delta}(H, G)b.$$
- Le foncteur $RT^{\Delta}_{G,b}$ est facteur direct du foncteur représentable RT^{Δ}_{G}, donc c'est un objet projectif de $\mathcal{F}^{\Delta}_{Rpp_{\Bbbk}}$.
Si $b_1, \ldots, b_n$ sont les idempotents blocs de $\Bbbk G$, alors
$$RT^{\Delta}_{G} \cong RT^{\Delta}_{G,b_1} \oplus \ldots \oplus RT^{\Delta}_{G,b_n} \text{ dans } \mathcal{F}^{\Delta}_{Rpp_k}.$$

Définition

Soit (G, b) et (H, c) des couples groupe-bloc (sur $\Bbbk$).

Équivalence fonctorielle de blocs

- Pour un groupe fini G et pour $b = b^2 \in Z(\Bbbk G)$, soit $RT^{\Delta}_{G,b}$ (ou RT^{Δ}_{G} si $b = 1$) le foncteur de p-permutation diagonal
$$H \mapsto RT^{\Delta}(H, G) \circ [\Bbbk Gb] =: RT^{\Delta}(H, G)b.$$
- Le foncteur $RT^{\Delta}_{G,b}$ est facteur direct du foncteur représentable RT^{Δ}_{G}, donc c'est un objet projectif de $\mathcal{F}^{\Delta}_{Rpp_{\Bbbk}}$.
Si $b_1, \ldots, b_n$ sont les idempotents blocs de $\Bbbk G$, alors
$$RT^{\Delta}_{G} \cong RT^{\Delta}_{G,b_1} \oplus \ldots \oplus RT^{\Delta}_{G,b_n} \text{ dans } \mathcal{F}^{\Delta}_{Rpp_k}.$$

Définition

Soit (G, b) et (H, c) des couples groupe-bloc (sur $\Bbbk$). Alors (G, b) et (H, c) sont fonctoriellement équivalents sur R

Équivalence fonctorielle de blocs

- Pour un groupe fini G et pour $b = b^2 \in Z(\Bbbk G)$, soit $RT^{\Delta}_{G,b}$ (ou RT^{Δ}_{G} si $b = 1$) le foncteur de p-permutation diagonal
$$H \mapsto RT^{\Delta}(H, G) \circ [\Bbbk Gb] =: RT^{\Delta}(H, G)b.$$
- Le foncteur $RT^{\Delta}_{G,b}$ est facteur direct du foncteur représentable RT^{Δ}_{G}, donc c'est un objet projectif de $\mathcal{F}^{\Delta}_{Rpp_{\Bbbk}}$.
Si $b_1, \ldots, b_n$ sont les idempotents blocs de $\Bbbk G$, alors
$$RT^{\Delta}_{G} \cong RT^{\Delta}_{G,b_1} \oplus \ldots \oplus RT^{\Delta}_{G,b_n} \text{ dans } \mathcal{F}^{\Delta}_{Rpp_k}.$$

Définition

Soit (G, b) et (H, c) des couples groupe-bloc (sur $\Bbbk$). Alors (G, b) et (H, c) sont fonctoriellement équivalents sur R si les foncteurs $RT^{\Delta}_{G,b}$ et $RT^{\Delta}_{H,c}$ sont isomorphes dans $\mathcal{F}^{\Delta}_{Rpp_{\Bbbk}}$.

Équivalence fonctorielle de blocs

- Pour un groupe fini G et pour $b = b^2 \in Z(\Bbbk G)$, soit $RT^{\Delta}_{G,b}$ (ou RT^{Δ}_{G} si $b = 1$) le foncteur de p-permutation diagonal
$$H \mapsto RT^{\Delta}(H, G) \circ [\Bbbk Gb] =: RT^{\Delta}(H, G)b.$$
- Le foncteur $RT^{\Delta}_{G,b}$ est facteur direct du foncteur représentable RT^{Δ}_{G}, donc c'est un objet projectif de $\mathcal{F}^{\Delta}_{Rpp_{\Bbbk}}$.
Si $b_1, \ldots, b_n$ sont les idempotents blocs de $\Bbbk G$, alors
$$RT^{\Delta}_{G} \cong RT^{\Delta}_{G,b_1} \oplus \ldots \oplus RT^{\Delta}_{G,b_n} \text{ dans } \mathcal{F}^{\Delta}_{Rpp_k}.$$

Définition

Soit (G, b) et (H, c) des couples groupe-bloc (sur $\Bbbk$). Alors (G, b) et (H, c) sont fonctoriellement équivalents sur R si les foncteurs $RT^{\Delta}_{G,b}$ et $RT^{\Delta}_{H,c}$ sont isomorphes dans $\mathcal{F}^{\Delta}_{Rpp_{\Bbbk}}$.

Cela revient à dire qu'il existe $\sigma \in cRT^{\Delta}(H, G)b$ et $\tau \in bRT^{\Delta}(G, H)c$ tels que $\sigma \circ \tau = [kHc]$ et $\tau \circ \sigma = [kGb]$.

Équivalences de blocs

Équivalences de blocs

- L'équivalence fonctorielle sur $\mathbb{Z}$ entraîne l'équivalence fonctorielle sur tout R.

Équivalences de blocs

- L'équivalence fonctorielle sur $\mathbb{Z}$ entraîne l'équivalence fonctorielle sur tout R.
- Il y a d'autres types d'équivalences de blocs.

Équivalences de blocs

- L'équivalence fonctorielle sur $\mathbb{Z}$ entraîne l'équivalence fonctorielle sur tout R.
- Il y a d'autres types d'équivalences de blocs. L'équivalence fonctorielle (sur $\mathbb{Z}$) est la plus faible dans la chaîne

Équivalences de blocs

- L'équivalence fonctorielle sur $\mathbb{Z}$ entraîne l'équivalence fonctorielle sur tout R.
- Il y a d'autres types d'équivalences de blocs. L'équivalence fonctorielle (sur $\mathbb{Z}$) est la plus faible dans la chaîne

Équivalence splendide de Rickard

Équivalences de blocs

- L'équivalence fonctorielle sur $\mathbb{Z}$ entraîne l'équivalence fonctorielle sur tout R.
- Il y a d'autres types d'équivalences de blocs. L'équivalence fonctorielle (sur $\mathbb{Z}$) est la plus faible dans la chaîne

Équivalence splendide de Rickard
[Rickard 1996]

Équivalences de blocs

- L'équivalence fonctorielle sur $\mathbb{Z}$ entraîne l'équivalence fonctorielle sur tout R.
- Il y a d'autres types d'équivalences de blocs. L'équivalence fonctorielle (sur $\mathbb{Z}$) est la plus faible dans la chaîne

Équivalence splendide de Rickard

$$\Downarrow$$

Équivalences de blocs

- L'équivalence fonctorielle sur $\mathbb{Z}$ entraîne l'équivalence fonctorielle sur tout R.
- Il y a d'autres types d'équivalences de blocs. L'équivalence fonctorielle (sur $\mathbb{Z}$) est la plus faible dans la chaîne

Équivalence splendide de Rickard

$$\Downarrow$$

Équivalence de p-permutation

Équivalences de blocs

- L'équivalence fonctorielle sur $\mathbb{Z}$ entraîne l'équivalence fonctorielle sur tout R.
- Il y a d'autres types d'équivalences de blocs. L'équivalence fonctorielle (sur $\mathbb{Z}$) est la plus faible dans la chaîne

Équivalence splendide de Rickard

$$\Downarrow$$

Équivalence de p-permutation
[Boltje-Xu 2008]

Équivalences de blocs

- L'équivalence fonctorielle sur $\mathbb{Z}$ entraîne l'équivalence fonctorielle sur tout R.
- Il y a d'autres types d'équivalences de blocs. L'équivalence fonctorielle (sur $\mathbb{Z}$) est la plus faible dans la chaîne

Équivalence splendide de Rickard

$\Downarrow$

Équivalence de p-permutation

$\Downarrow$

Équivalences de blocs

- L'équivalence fonctorielle sur $\mathbb{Z}$ entraîne l'équivalence fonctorielle sur tout R.
- Il y a d'autres types d'équivalences de blocs. L'équivalence fonctorielle (sur $\mathbb{Z}$) est la plus faible dans la chaîne

$$\begin{array}{c}\text{Équivalence splendide de Rickard}\\ \Downarrow \\ \text{Équivalence de } p\text{-permutation}\\ \Downarrow \\ \text{Équivalence fonctorielle sur } \mathbb{Z}\end{array}$$

Équivalences de blocs

- L'équivalence fonctorielle sur $\mathbb{Z}$ entraîne l'équivalence fonctorielle sur tout R.
- Il y a d'autres types d'équivalences de blocs. L'équivalence fonctorielle (sur $\mathbb{Z}$) est la plus faible dans la chaîne

$$\begin{array}{c}\text{Équivalence splendide de Rickard}\\ \Downarrow \\ \text{Équivalence de } p\text{-permutation}\\ \Downarrow \\ \text{Équivalence fonctorielle sur } \mathbb{Z}\end{array}$$

Proposition

Équivalences de blocs

- L'équivalence fonctorielle sur $\mathbb{Z}$ entraîne l'équivalence fonctorielle sur tout R.
- Il y a d'autres types d'équivalences de blocs. L'équivalence fonctorielle (sur $\mathbb{Z}$) est la plus faible dans la chaîne

$$\begin{array}{c}\text{Équivalence splendide de Rickard}\\ \Downarrow \\ \text{Équivalence de } p\text{-permutation}\\ \Downarrow \\ \text{Équivalence fonctorielle sur } \mathbb{Z}\end{array}$$

Proposition

Soient (G, b) et (H, c) couples groupe-bloc sur $\Bbbk$

Équivalences de blocs

- L'équivalence fonctorielle sur $\mathbb{Z}$ entraîne l'équivalence fonctorielle sur tout R.
- Il y a d'autres types d'équivalences de blocs. L'équivalence fonctorielle (sur $\mathbb{Z}$) est la plus faible dans la chaîne

$$\begin{array}{c}\text{Équivalence splendide de Rickard}\\ \Downarrow \\ \text{Équivalence de } p\text{-permutation}\\ \Downarrow \\ \text{Équivalence fonctorielle sur } \mathbb{Z}\end{array}$$

Proposition

Soient (G, b) et (H, c) couples groupe-bloc sur $\mathbb{k}$, fonctoriellement équivalents sur $\mathbb{F}$.

Équivalences de blocs

- L'équivalence fonctorielle sur $\mathbb{Z}$ entraîne l'équivalence fonctorielle sur tout R.
- Il y a d'autres types d'équivalences de blocs. L'équivalence fonctorielle (sur $\mathbb{Z}$) est la plus faible dans la chaîne

$$\begin{array}{c}\text{Équivalence splendide de Rickard}\\ \Downarrow \\ \text{Équivalence de } p\text{-permutation}\\ \Downarrow \\ \text{Équivalence fonctorielle sur } \mathbb{Z}\end{array}$$

Proposition

Soient (G, b) et (H, c) couples groupe-bloc sur $\mathbb{k}$, fonctoriellement équivalents sur $\mathbb{F}$. Alors :

Équivalences de blocs

- L'équivalence fonctorielle sur $\mathbb{Z}$ entraîne l'équivalence fonctorielle sur tout R.
- Il y a d'autres types d'équivalences de blocs. L'équivalence fonctorielle (sur $\mathbb{Z}$) est la plus faible dans la chaîne

$$\begin{gathered}\text{Équivalence splendide de Rickard}\\ \Downarrow \\ \text{Équivalence de } p\text{-permutation}\\ \Downarrow \\ \text{Équivalence fonctorielle sur } \mathbb{Z}\end{gathered}$$

Proposition

Soient (G,b) et (H,c) couples groupe-bloc sur $\Bbbk$, fonctoriellement équivalents sur $\mathbb{F}$. Alors :

1. *b et c ont des groupes de défaut isomorphes.*

Équivalences de blocs

- L'équivalence fonctorielle sur $\mathbb{Z}$ entraîne l'équivalence fonctorielle sur tout R.
- Il y a d'autres types d'équivalences de blocs. L'équivalence fonctorielle (sur $\mathbb{Z}$) est la plus faible dans la chaîne

$$\begin{array}{c}\text{Équivalence splendide de Rickard}\\ \Downarrow \\ \text{Équivalence de } p\text{-permutation}\\ \Downarrow \\ \text{Équivalence fonctorielle sur } \mathbb{Z}\end{array}$$

Proposition

Soient (G, b) et (H, c) couples groupe-bloc sur $\Bbbk$, fonctoriellement équivalents sur $\mathbb{F}$. Alors :

1. *b et c ont des groupes de défaut isomorphes.*
2. $\ell(G, b) = \ell(H, c)$

Équivalences de blocs

- L'équivalence fonctorielle sur $\mathbb{Z}$ entraîne l'équivalence fonctorielle sur tout R.
- Il y a d'autres types d'équivalences de blocs. L'équivalence fonctorielle (sur $\mathbb{Z}$) est la plus faible dans la chaîne

$$\begin{array}{c}\text{Équivalence splendide de Rickard}\\ \Downarrow \\ \text{Équivalence de } p\text{-permutation}\\ \Downarrow \\ \text{Équivalence fonctorielle sur } \mathbb{Z}\end{array}$$

Proposition

Soient (G, b) et (H, c) couples groupe-bloc sur $\mathbb{k}$, fonctoriellement équivalents sur $\mathbb{F}$. Alors :

1. *b et c ont des groupes de défaut isomorphes.*
2. $\ell(G, b) = \ell(H, c)$, *et* $k(G, b) = k(H, c)$.

Décomposition des blocs

Décomposition des blocs

Soit $\mathbb{F}$ comme plus haut.

Décomposition des blocs

Soit $\mathbb{F}$ comme plus haut. Si (G, b) est un couple groupe-bloc sur $\Bbbk$

Décomposition des blocs

Soit $\mathbb{F}$ comme plus haut. Si (G, b) est un couple groupe-bloc sur $\mathbb{k}$, le foncteur $\mathbb{F}T^{\Delta}_{G,b}$ se décompose en somme directe de foncteurs simples $S_{L,u,V}$ dans la catégorie $\mathcal{F}^{\Delta}_{\mathbb{F}pp_{\mathbb{k}}}$.

Décomposition des blocs

Soit $\mathbb{F}$ comme plus haut. Si (G, b) est un couple groupe-bloc sur $\mathbb{k}$, le foncteur $\mathbb{F}T^{\Delta}_{G,b}$ se décompose en somme directe de foncteurs simples $S_{L,u,V}$ dans la catégorie $\mathcal{F}^{\Delta}_{\mathbb{F}pp_{\mathbb{k}}}$. Comment ?

Décomposition des blocs

Soit $\mathbb{F}$ comme plus haut. Si (G, b) est un couple groupe-bloc sur $\mathbb{k}$, le foncteur $\mathbb{F}T^{\Delta}_{G,b}$ se décompose en somme directe de foncteurs simples $S_{L,u,V}$ dans la catégorie $\mathcal{F}^{\Delta}_{\mathbb{F}pp_{\mathbb{k}}}$. Comment ?
Nous avons trois formules pour la multiplicité de $S_{L,u,V}$ comme facteur direct de $\mathbb{F}T^{\Delta}_{G,b}$:

Décomposition des blocs

Soit $\mathbb{F}$ comme plus haut. Si (G,b) est un couple groupe-bloc sur $\mathbb{k}$, le foncteur $\mathbb{F}T^{\Delta}_{G,b}$ se décompose en somme directe de foncteurs simples $S_{L,u,V}$ dans la catégorie $\mathcal{F}^{\Delta}_{\mathbb{F}pp_{\mathbb{k}}}$. Comment ?
Nous avons trois formules pour la multiplicité de $S_{L,u,V}$ comme facteur direct de $\mathbb{F}T^{\Delta}_{G,b}$:

1. Une en termes de points fixes sur V de certains sous-groupes de $Out(L,u)$ sur V.

Décomposition des blocs

Soit $\mathbb{F}$ comme plus haut. Si (G, b) est un couple groupe-bloc sur $\Bbbk$, le foncteur $\mathbb{F}T^{\Delta}_{G,b}$ se décompose en somme directe de foncteurs simples $S_{L,u,V}$ dans la catégorie $\mathcal{F}^{\Delta}_{\mathbb{F}pp_{\Bbbk}}$. Comment ?
Nous avons trois formules pour la multiplicité de $S_{L,u,V}$ comme facteur direct de $\mathbb{F}T^{\Delta}_{G,b}$:

1. Une en termes de points fixes sur V de certains sous-groupes de $Out(L, u)$ sur V.
2. Une en termes de (G, b)-paires de Brauer « u-invariantes » (P, e).

Décomposition des blocs

Soit $\mathbb{F}$ comme plus haut. Si (G, b) est un couple groupe-bloc sur $\mathbb{k}$, le foncteur $\mathbb{F}T^{\Delta}_{G,b}$ se décompose en somme directe de foncteurs simples $S_{L,u,V}$ dans la catégorie $\mathcal{F}^{\Delta}_{\mathbb{F}pp_{\mathbb{k}}}$. Comment ?
Nous avons trois formules pour la multiplicité de $S_{L,u,V}$ comme facteur direct de $\mathbb{F}T^{\Delta}_{G,b}$:

1. Une en termes de points fixes sur V de certains sous-groupes de $Out(L, u)$ sur V.
2. Une en termes de (G, b)-paires de Brauer « u-invariantes » (P, e).
3. Une en termes de groupes pointés locaux « u-invariants » P_γ sur kGb.

Décomposition des blocs

Soit $\mathbb{F}$ comme plus haut. Si (G, b) est un couple groupe-bloc sur $\mathbb{k}$, le foncteur $\mathbb{F}T^{\Delta}_{G,b}$ se décompose en somme directe de foncteurs simples $S_{L,u,V}$ dans la catégorie $\mathcal{F}^{\Delta}_{\mathbb{F}pp_{\mathbb{k}}}$. Comment ?
Nous avons trois formules pour la multiplicité de $S_{L,u,V}$ comme facteur direct de $\mathbb{F}T^{\Delta}_{G,b}$:

1. Une en termes de points fixes sur V de certains sous-groupes de $Out(L, u)$ sur V.
2. Une en termes de (G, b)-paires de Brauer « u-invariantes » (P, e).
3. Une en termes de groupes pointés locaux « u-invariants » P_γ sur kGb.

Exemple :

Décomposition des blocs

Soit $\mathbb{F}$ comme plus haut. Si (G, b) est un couple groupe-bloc sur $\Bbbk$, le foncteur $\mathbb{F}T^{\Delta}_{G,b}$ se décompose en somme directe de foncteurs simples $S_{L,u,V}$ dans la catégorie $\mathcal{F}^{\Delta}_{\mathbb{F}pp_{\Bbbk}}$. Comment ?
Nous avons trois formules pour la multiplicité de $S_{L,u,V}$ comme facteur direct de $\mathbb{F}T^{\Delta}_{G,b}$:

1. Une en termes de points fixes sur V de certains sous-groupes de $Out(L, u)$ sur V.
2. Une en termes de (G, b)-paires de Brauer « u-invariantes » (P, e).
3. Une en termes de groupes pointés locaux « u-invariants » P_γ sur kGb.

Exemple : Soit G un groupe fini, et $b = b^2 \in Z(\Bbbk G)$.

Décomposition des blocs

Soit $\mathbb{F}$ comme plus haut. Si (G, b) est un couple groupe-bloc sur $\Bbbk$, le foncteur $\mathbb{F}T^{\Delta}_{G,b}$ se décompose en somme directe de foncteurs simples $S_{L,u,V}$ dans la catégorie $\mathcal{F}^{\Delta}_{\mathbb{F}pp_{\Bbbk}}$. Comment ?

Nous avons trois formules pour la multiplicité de $S_{L,u,V}$ comme facteur direct de $\mathbb{F}T^{\Delta}_{G,b}$:

1. Une en termes de points fixes sur V de certains sous-groupes de $Out(L, u)$ sur V.
2. Une en termes de (G, b)-paires de Brauer « u-invariantes » (P, e).
3. Une en termes de groupes pointés locaux « u-invariants » P_γ sur kGb.

Exemple : Soit G un groupe fini, et $b = b^2 \in Z(\Bbbk G)$. La multiplicité de $S_{1,1,\mathbb{F}}$ comme facteur de composition de $\mathbb{F}T^{\Delta}_{G,b}$

Soit $\mathbb{F}$ comme plus haut. Si (G, b) est un couple groupe-bloc sur $\Bbbk$, le foncteur $\mathbb{F}T^{\Delta}_{G,b}$ se décompose en somme directe de foncteurs simples $S_{L,u,V}$ dans la catégorie $\mathcal{F}^{\Delta}_{\mathbb{F}pp_{\Bbbk}}$. Comment ?
Nous avons trois formules pour la multiplicité de $S_{L,u,V}$ comme facteur direct de $\mathbb{F}T^{\Delta}_{G,b}$:

1. Une en termes de points fixes sur V de certains sous-groupes de $Out(L, u)$ sur V.
2. Une en termes de (G, b)-paires de Brauer « u-invariantes » (P, e).
3. Une en termes de groupes pointés locaux « u-invariants » P_γ sur kGb.

Exemple : Soit G un groupe fini, et $b = b^2 \in Z(\Bbbk G)$. La multiplicité de $S_{1,1,\mathbb{F}}$ comme facteur de composition de $\mathbb{F}T^{\Delta}_{G,b}$ est égale à $\ell(G, b)$.

Blocs nilpotents

Blocs nilpotents

Théorème

Blocs nilpotents

Théorème

Soit b un idempotent bloc de $\Bbbk G$ de groupe de défaut D.

Blocs nilpotents

Théorème

Soit b un idempotent bloc de $\Bbbk G$ de groupe de défaut D. LASSE :

Blocs nilpotents

Théorème

Soit b un idempotent bloc de $\Bbbk G$ de groupe de défaut D. LASSE :

1. *Le bloc b est nilpotent.*

Blocs nilpotents

Théorème

Soit b un idempotent bloc de $\Bbbk G$ de groupe de défaut D. LASSE :

1. *Le bloc b est nilpotent.* [Broué-Puig 1980]

Blocs nilpotents

Théorème

Soit b un idempotent bloc de $\Bbbk G$ de groupe de défaut D. LASSE :

1. *Le bloc b est nilpotent.*
2. *Si $S_{L,u,V}$ est un facteur direct simple de $\mathbb{F}T^{\Delta}_{G,b}$*

Blocs nilpotents

Théorème

Soit b un idempotent bloc de $\Bbbk G$ de groupe de défaut D. LASSE :

1. *Le bloc b est nilpotent.*
2. *Si $S_{L,u,V}$ est un facteur direct simple de $\mathbb{F}T^{\Delta}_{G,b}$, alors $u = 1$.*

Blocs nilpotents

Théorème

Soit b un idempotent bloc de $\Bbbk G$ de groupe de défaut D. LASSE :

1. *Le bloc b est nilpotent.*
2. *Si $S_{L,u,V}$ est un facteur direct simple de $\mathbb{F}T^{\Delta}_{G,b}$, alors $u = 1$.*
3. *Si $S_{L,u,\mathbb{F}}$ est un facteur direct simple de $\mathbb{F}T^{\Delta}_{G,b}$*

Blocs nilpotents

Théorème

Soit b un idempotent bloc de $\Bbbk G$ de groupe de défaut D. LASSE :

1. *Le bloc b est nilpotent.*
2. *Si $S_{L,u,V}$ est un facteur direct simple de $\mathbb{F}T^{\Delta}_{G,b}$, alors $u = 1$.*
3. *Si $S_{L,u,\mathbb{F}}$ est un facteur direct simple de $\mathbb{F}T^{\Delta}_{G,b}$, alors $u = 1$.*

Blocs nilpotents

Théorème

Soit b un idempotent bloc de $\Bbbk G$ de groupe de défaut D. LASSE :

1. *Le bloc b est nilpotent.*
2. *Si $S_{L,u,V}$ est un facteur direct simple de $\mathbb{F}T^{\Delta}_{G,b}$, alors $u=1$.*
3. *Si $S_{L,u,\mathbb{F}}$ est un facteur direct simple de $\mathbb{F}T^{\Delta}_{G,b}$, alors $u=1$.*
4. *Le foncteur $\mathbb{F}T^{\Delta}_{G,b}$ est isomorphe à $\mathbb{F}T^{\Delta}_{D}$.*

Blocs nilpotents

Théorème

Soit b un idempotent bloc de $\Bbbk G$ de groupe de défaut D. LASSE :

1. *Le bloc b est nilpotent.*
2. *Si $S_{L,u,V}$ est un facteur direct simple de $\mathbb{F}T^{\Delta}_{G,b}$, alors $u = 1$.*
3. *Si $S_{L,u,\mathbb{F}}$ est un facteur direct simple de $\mathbb{F}T^{\Delta}_{G,b}$, alors $u = 1$.*
4. *(G, b) est fonctoriellement équivalent à $(D, 1)$ sur $\mathbb{F}$.*

Un théorème de finitude

Un théorème de finitude

Rappel :

Conjecture (Donovan [$\leq$ 1980])

Un théorème de finitude

Rappel :

Conjecture (Donovan)

Soit D un p-groupe fini.

Un théorème de finitude

Rappel :

Conjecture (Donovan)

Soit D un p-groupe fini. Alors il y a un nombre fini de classes d'équivalence de catégories de modules sur des algèbres de blocs sur $\Bbbk$ de groupes de défaut isomorphes à D.

Rappel :

Conjecture (Donovan)

Soit D un p-groupe fini. Alors il y a un nombre fini de classes d'équivalence de catégories de modules sur des algèbres de blocs sur $\mathbb{k}$ de groupes de défaut isomorphes à D.

Théorème

Un théorème de finitude

Rappel :

Conjecture (Donovan)

Soit D un p-groupe fini. Alors il y a un nombre fini de classes d'équivalence de catégories de modules sur des algèbres de blocs sur $\Bbbk$ de groupes de défaut isomorphes à D.

Théorème

Soit D un p-groupe fini.

Un théorème de finitude

Rappel :

Conjecture (Donovan)

Soit D un p-groupe fini. Alors il y a un nombre fini de classes d'équivalence de catégories de modules sur des algèbres de blocs sur $\Bbbk$ de groupes de défaut isomorphes à D.

Théorème

Soit D un p-groupe fini. Alors il y a un nombre fini de couples groupe-bloc (G, b) sur $\Bbbk$

Un théorème de finitude

Rappel :

Conjecture (Donovan)

Soit D un p-groupe fini. Alors il y a un nombre fini de classes d'équivalence de catégories de modules sur des algèbres de blocs sur $\Bbbk$ de groupes de défaut isomorphes à D.

Théorème

Soit D un p-groupe fini. Alors il y a un nombre fini de couples groupe-bloc (G, b) sur $\Bbbk$ de groupes de défaut isomorphes à D

Un théorème de finitude

Rappel :

Conjecture (Donovan)

Soit D un p-groupe fini. Alors il y a un nombre fini de classes d'équivalence de catégories de modules sur des algèbres de blocs sur $\mathbb{k}$ de groupes de défaut isomorphes à D.

Théorème

Soit D un p-groupe fini. Alors il y a un nombre fini de couples groupe-bloc (G, b) sur $\mathbb{k}$ de groupes de défaut isomorphes à D, à équivalence fonctorielle près sur $\mathbb{F}$.

Back to BAWC (avec Deniz Yılmaz et Robert Boltje)

Back to BAWC (avec Deniz Yılmaz et Robert Boltje)

- La conjecture d'Alperin par blocs est équivalente à l'énoncé suivant :

Back to BAWC (avec Deniz Yılmaz et Robert Boltje)

- La conjecture d'Alperin par blocs est équivalente à l'énoncé suivant : Pour tout couple groupe-bloc (G, b) sur $\mathbb{k}$

- La conjecture d'Alperin par blocs est équivalente à l'énoncé suivant : Pour tout couple groupe-bloc (G, b) sur $\mathbb{k}$

$$(BAWC) \qquad \sum_{\sigma\in[\Sigma_p(G)]} (-1)^{|\sigma|}\ell(G_\sigma, b_\sigma) = \begin{cases} 0 \text{ si } D(b) \neq \{1\} \\ 1 \text{ si } D(b) = \{1\}. \end{cases}$$

Back to BAWC (avec Deniz Yılmaz et Robert Boltje)

- La conjecture d'Alperin par blocs est équivalente à l'énoncé suivant : Pour tout couple groupe-bloc (G,b) sur $\mathbb{k}$

$$(BAWC) \qquad \sum_{\sigma\in[\Sigma_p(G)]} (-1)^{|\sigma|}\ell(G_\sigma,b_\sigma) = \begin{cases} 0 \text{ si } D(b)\neq\{1\} \\ 1 \text{ si } D(b)=\{1\}. \end{cases}$$

- Rappelons que

Back to BAWC (avec Deniz Yılmaz et Robert Boltje)

- La conjecture d'Alperin par blocs est équivalente à l'énoncé suivant : Pour tout couple groupe-bloc (G, b) sur $\mathbb{k}$

$$(BAWC) \qquad \sum_{\sigma \in [\Sigma_p(G)]} (-1)^{|\sigma|} \ell(G_\sigma, b_\sigma) = \begin{cases} 0 \text{ si } D(b) \neq \{1\} \\ 1 \text{ si } D(b) = \{1\}. \end{cases}$$

- Rappelons que $\ell(G, b) = mult(S_{1,1,\mathbb{F}}, \mathbb{F}T^{\Delta}_{G,b})$, pour $b^2 = b \in Z(\mathbb{k}G)$.

Back to BAWC (avec Deniz Yılmaz et Robert Boltje)

- La conjecture d'Alperin par blocs est équivalente à l'énoncé suivant : Pour tout couple groupe-bloc (G, b) sur $\mathbb{k}$

$$(BAWC) \qquad \sum_{\sigma \in [\Sigma_p(G)]} (-1)^{|\sigma|} \ell(G_\sigma, b_\sigma) = \begin{cases} 0 \text{ si } D(b) \neq \{1\} \\ 1 \text{ si } D(b) = \{1\}. \end{cases}$$

- Rappelons que $\ell(G, b) = mult(S_{1,1,\mathbb{F}}, \mathbb{F}T^{\Delta}_{G,b})$, pour $b^2 = b \in Z(\mathbb{k}G)$.
- Il est alors tentant de considérer la somme

Back to BAWC (avec Deniz Yılmaz et Robert Boltje)

- La conjecture d'Alperin par blocs est équivalente à l'énoncé suivant : Pour tout couple groupe-bloc (G, b) sur $\mathbb{k}$

$$(BAWC) \qquad \sum_{\sigma\in[\Sigma_p(G)]} (-1)^{|\sigma|}\ell(G_\sigma, b_\sigma) = \begin{cases} 0 \text{ si } D(b) \neq \{1\} \\ 1 \text{ si } D(b) = \{1\}. \end{cases}$$

- Rappelons que $\ell(G, b) = mult(S_{1,1,\mathbb{F}}, \mathbb{F}T^{\Delta}_{G,b})$, pour $b^2 = b \in Z(\mathbb{k}G)$.
- Il est alors tentant de considérer la somme $\displaystyle\sum_{\sigma\in[\Sigma_p(G)]} (-1)^{|\sigma|}[\![\mathbb{F}T^{\Delta}_{G_\sigma,b_\sigma}]\!]$

Back to BAWC (avec Deniz Yılmaz et Robert Boltje)

- La conjecture d'Alperin par blocs est équivalente à l'énoncé suivant : Pour tout couple groupe-bloc (G, b) sur $\Bbbk$

$$(BAWC) \qquad \sum_{\sigma \in [\Sigma_p(G)]} (-1)^{|\sigma|} \ell(G_\sigma, b_\sigma) = \begin{cases} 0 \text{ si } D(b) \neq \{1\} \\ 1 \text{ si } D(b) = \{1\}. \end{cases}$$

- Rappelons que $\ell(G, b) = mult(S_{1,1,\mathbb{F}}, \mathbb{F}T^{\Delta}_{G,b})$, pour $b^2 = b \in Z(\Bbbk G)$.
- Il est alors tentant de considérer la somme $\sum\limits_{\sigma \in [\Sigma_p(G)]} (-1)^{|\sigma|} [\![\mathbb{F}T^{\Delta}_{G_\sigma, b_\sigma}]\!]$ dans le groupe de Grothendieck $K_0(\mathcal{F}^{\Delta}_{\mathbb{F}pp_{\Bbbk}})$

Back to BAWC (avec Deniz Yılmaz et Robert Boltje)

- La conjecture d'Alperin par blocs est équivalente à l'énoncé suivant : Pour tout couple groupe-bloc (G,b) sur $\mathbb{k}$

$$(BAWC) \qquad \sum_{\sigma\in[\Sigma_p(G)]}(-1)^{|\sigma|}\ell(G_\sigma,b_\sigma)=\begin{cases}0 \text{ si } D(b)\neq\{1\}\\ 1 \text{ si } D(b)=\{1\}.\end{cases}$$

- Rappelons que $\ell(G,b)=mult(S_{1,1,\mathbb{F}},\mathbb{F}T^{\Delta}_{G,b})$, pour $b^2=b\in Z(\mathbb{k}G)$.
- Il est alors tentant de considérer la somme $\displaystyle\sum_{\sigma\in[\Sigma_p(G)]}(-1)^{|\sigma|}[\![\mathbb{F}T^{\Delta}_{G_\sigma,b_\sigma}]\!]$ dans le groupe de Grothendieck $K_0\big(\mathcal{F}^{\Delta}_{\mathbb{F}pp_{\mathbb{k}}}\big)$, et de formuler la

Back to BAWC (avec Deniz Yılmaz et Robert Boltje)

- La conjecture d'Alperin par blocs est équivalente à l'énoncé suivant : Pour tout couple groupe-bloc (G, b) sur $\mathbb{k}$

$$(BAWC) \qquad \sum_{\sigma\in[\Sigma_p(G)]} (-1)^{|\sigma|}\ell(G_\sigma, b_\sigma) = \begin{cases} 0 \text{ si } D(b) \neq \{1\} \\ 1 \text{ si } D(b) = \{1\}. \end{cases}$$

- Rappelons que $\ell(G, b) = mult(S_{1,1,\mathbb{F}}, \mathbb{F}T^{\Delta}_{G,b})$, pour $b^2 = b \in Z(\mathbb{k}G)$.
- Il est alors tentant de considérer la somme $\sum\limits_{\sigma\in[\Sigma_p(G)]} (-1)^{|\sigma|}[\![\mathbb{F}T^{\Delta}_{G_\sigma,b_\sigma}]\!]$ dans le groupe de Grothendieck $K_0\big(\mathcal{F}^{\Delta}_{\mathbb{F}pp_{\mathbb{k}}}\big)$, et de formuler la

Conjecture (FBAWC)

Back to BAWC (avec Deniz Yılmaz et Robert Boltje)

- La conjecture d'Alperin par blocs est équivalente à l'énoncé suivant : Pour tout couple groupe-bloc (G,b) sur $\mathbb{k}$

$$(BAWC) \qquad \sum_{\sigma\in[\Sigma_p(G)]}(-1)^{|\sigma|}\ell(G_\sigma,b_\sigma)=\begin{cases}0 \text{ si } D(b)\neq\{1\}\\ 1 \text{ si } D(b)=\{1\}.\end{cases}$$

- Rappelons que $\ell(G,b)=mult(S_{1,1,\mathbb{F}},\mathbb{F}T^\Delta_{G,b})$, pour $b^2=b\in Z(\mathbb{k}G)$.
- Il est alors tentant de considérer la somme $\displaystyle\sum_{\sigma\in[\Sigma_p(G)]}(-1)^{|\sigma|}[\![\mathbb{F}T^\Delta_{G_\sigma,b_\sigma}]\!]$ dans le groupe de Grothendieck $K_0\big(\mathcal{F}^\Delta_{\mathbb{F}pp_{\mathbb{k}}}\big)$, et de formuler la

Conjecture (FBAWC)

Soit (G,b) un couple groupe-bloc sur $\mathbb{k}$.

Back to BAWC (avec Deniz Yılmaz et Robert Boltje)

- La conjecture d'Alperin par blocs est équivalente à l'énoncé suivant : Pour tout couple groupe-bloc (G, b) sur $\Bbbk$

$$(BAWC) \qquad \sum_{\sigma \in [\Sigma_p(G)]} (-1)^{|\sigma|} \ell(G_\sigma, b_\sigma) = \begin{cases} 0 \text{ si } D(b) \neq \{1\} \\ 1 \text{ si } D(b) = \{1\}. \end{cases}$$

- Rappelons que $\ell(G, b) = mult(S_{1,1,\mathbb{F}}, \mathbb{F}T^{\Delta}_{G,b})$, pour $b^2 = b \in Z(\Bbbk G)$.
- Il est alors tentant de considérer la somme $\sum\limits_{\sigma \in [\Sigma_p(G)]} (-1)^{|\sigma|} [\![\mathbb{F}T^{\Delta}_{G_\sigma, b_\sigma}]\!]$ dans le groupe de Grothendieck $K_0(\mathcal{F}^{\Delta}_{\mathbb{F}pp_{\Bbbk}})$, et de formuler la

Conjecture (FBAWC)

Soit (G, b) un couple groupe-bloc sur $\Bbbk$. Alors dans $K_0(\mathcal{F}^{\Delta}_{\mathbb{F}pp_{\Bbbk}})$

Back to BAWC (avec Deniz Yılmaz et Robert Boltje)

- La conjecture d'Alperin par blocs est équivalente à l'énoncé suivant : Pour tout couple groupe-bloc (G,b) sur $\mathbb{k}$

$$(BAWC) \qquad \sum_{\sigma\in[\Sigma_p(G)]} (-1)^{|\sigma|}\ell(G_\sigma,b_\sigma) = \begin{cases} 0 \text{ si } D(b)\neq\{1\} \\ 1 \text{ si } D(b)=\{1\}. \end{cases}$$

- Rappelons que $\ell(G,b) = mult(S_{1,1,\mathbb{F}}, \mathbb{F}T^{\Delta}_{G,b})$, pour $b^2=b\in Z(\mathbb{k}G)$.
- Il est alors tentant de considérer la somme $\displaystyle\sum_{\sigma\in[\Sigma_p(G)]} (-1)^{|\sigma|}[\![\mathbb{F}T^{\Delta}_{G_\sigma,b_\sigma}]\!]$ dans le groupe de Grothendieck $K_0\big(\mathcal{F}^{\Delta}_{\mathbb{F}pp_{\mathbb{k}}}\big)$, et de formuler la

Conjecture (FBAWC)

Soit (G,b) un couple groupe-bloc sur $\mathbb{k}$. Alors dans $K_0\big(\mathcal{F}^{\Delta}_{\mathbb{F}pp_{\mathbb{k}}}\big)$

$$\sum_{\sigma\in[\Sigma_p(G)]} (-1)^{|\sigma|}[\![\mathbb{F}T^{\Delta}_{G_\sigma,b_\sigma}]\!] =$$

Back to BAWC (avec Deniz Yılmaz et Robert Boltje)

- La conjecture d'Alperin par blocs est équivalente à l'énoncé suivant : Pour tout couple groupe-bloc (G, b) sur $\mathbb{k}$

$$(BAWC) \qquad \sum_{\sigma\in[\Sigma_p(G)]} (-1)^{|\sigma|}\ell(G_\sigma, b_\sigma) = \begin{cases} 0 \text{ si } D(b) \neq \{1\} \\ 1 \text{ si } D(b) = \{1\}. \end{cases}$$

- Rappelons que $\ell(G, b) = mult(S_{1,1,\mathbb{F}}, \mathbb{F}T^{\Delta}_{G,b})$, pour $b^2 = b \in Z(\mathbb{k}G)$.
- Il est alors tentant de considérer la somme $\sum\limits_{\sigma\in[\Sigma_p(G)]} (-1)^{|\sigma|}[\![\mathbb{F}T^{\Delta}_{G_\sigma,b_\sigma}]\!]$ dans le groupe de Grothendieck $K_0\big(\mathcal{F}^{\Delta}_{\mathbb{F}pp_{\mathbb{k}}}\big)$, et de formuler la

Conjecture (FBAWC)

Soit (G, b) un couple groupe-bloc sur $\mathbb{k}$. Alors dans $K_0\big(\mathcal{F}^{\Delta}_{\mathbb{F}pp_{\mathbb{k}}}\big)$

$$\sum_{\sigma\in[\Sigma_p(G)]} (-1)^{|\sigma|}[\![\mathbb{F}T^{\Delta}_{G_\sigma,b_\sigma}]\!] = \begin{cases} 0 & si\ D(b) \neq \{1\} \\ [\![S_{1,1,\mathbb{F}}]\!] & si\ D(b) = \{1\}. \end{cases}$$

BAWC versus FBAWC

BAWC versus FBAWC

Théorème

BAWC versus FBAWC

Théorème

FBAWC $\Longrightarrow$ *BAWC*.

BAWC versus FBAWC

Théorème

FBAWC $\implies$ *BAWC*.

Preuve :

BAWC versus FBAWC

Théorème

FBAWC $\Longrightarrow$ *BAWC.*

Preuve : En évaluant la multiplicité de $S_{1,1,\mathbb{F}}$ dans les deux membres de FBAWC

BAWC versus FBAWC

Théorème

FBAWC $\Longrightarrow$ *BAWC.*

Preuve : En évaluant la multiplicité de $S_{1,1,\mathbb{F}}$ dans les deux membres de FBAWC, on obtient BAWC. □

BAWC versus FBAWC

Théorème

FBAWC $\Longrightarrow$ *BAWC.*

Preuve : En évaluant la multiplicité de $S_{1,1,\mathbb{F}}$ dans les deux membres de FBAWC, on obtient BAWC. $\square$

Théorème

BAWC versus FBAWC

Théorème

FBAWC $\implies$ *BAWC.*

Preuve : En évaluant la multiplicité de $S_{1,1,\mathbb{F}}$ dans les deux membres de FBAWC, on obtient BAWC. $\square$

Théorème

Soit (G, b) *un couple groupe-bloc sur* $\mathbb{k}$.

BAWC versus FBAWC

Théorème

FBAWC $\implies$ *BAWC.*

Preuve : En évaluant la multiplicité de $S_{1,1,\mathbb{F}}$ dans les deux membres de FBAWC, on obtient BAWC. □

Théorème

Soit (G, b) *un couple groupe-bloc sur* $\mathbb{k}$.

1. *Il existe un entier* $n_{G,b}$ *tel que*

BAWC versus FBAWC

Théorème

FBAWC $\implies$ *BAWC.*

Preuve : En évaluant la multiplicité de $S_{1,1,\mathbb{F}}$ dans les deux membres de FBAWC, on obtient BAWC. □

Théorème

Soit (G, b) *un couple groupe-bloc sur* $\mathbb{k}$*.*

1. *Il existe un entier* $n_{G,b}$ *tel que*

$$\sum_{\sigma\in[\Sigma_p(G)]} (-1)^{|\sigma|} [\![\mathbb{F}T^{\Delta}_{G_\sigma,b_\sigma}]\!] =$$

BAWC versus FBAWC

Théorème

FBAWC $\implies$ BAWC.

Preuve : En évaluant la multiplicité de $S_{1,1,\mathbb{F}}$ dans les deux membres de FBAWC, on obtient BAWC. $\square$

Théorème

Soit (G, b) un couple groupe-bloc sur $\Bbbk$.

1. *Il existe un entier $n_{G,b}$ tel que*

$$\sum_{\sigma \in [\Sigma_p(G)]} (-1)^{|\sigma|} [\![\mathbb{F} T^{\Delta}_{G_\sigma, b_\sigma}]\!] = n_{G,b} [\![S_{1,1,\mathbb{F}}]\!]$$

BAWC versus FBAWC

Théorème

FBAWC $\Longrightarrow$ BAWC.

Preuve : En évaluant la multiplicité de $S_{1,1,\mathbb{F}}$ dans les deux membres de FBAWC, on obtient BAWC. □

Théorème

Soit (G,b) un couple groupe-bloc sur $\Bbbk$.

1. *Il existe un entier $n_{G,b}$ tel que*

$$\sum_{\sigma\in[\Sigma_p(G)]}(-1)^{|\sigma|}[\![\mathbb{F}T^{\Delta}_{G_\sigma,b_\sigma}]\!] = n_{G,b}\,[\![S_{1,1,\mathbb{F}}]\!] \text{ dans } K_0\big(\mathcal{F}^{\Delta}_{\mathbb{F}pp_{\Bbbk}}\big).$$

BAWC versus FBAWC

Théorème

FBAWC $\implies$ *BAWC.*

Preuve : En évaluant la multiplicité de $S_{1,1,\mathbb{F}}$ dans les deux membres de FBAWC, on obtient BAWC. □

Théorème

Soit (G, b) *un couple groupe-bloc sur* $\mathbb{k}$.

1. *Il existe un entier* $n_{G,b}$ *tel que*

$$\sum_{\sigma\in[\Sigma_p(G)]} (-1)^{|\sigma|} [\![\mathbb{F} T^{\Delta}_{G_\sigma, b_\sigma}]\!] = n_{G,b} [\![S_{1,1,\mathbb{F}}]\!] \text{ dans } K_0\big(\mathcal{F}^{\Delta}_{\mathbb{F}pp_{\mathbb{k}}}\big).$$

2. *FBAWC* $\iff$ *BAWC*

BAWC versus FBAWC

Théorème

FBAWC $\Longrightarrow$ *BAWC.*

Preuve : En évaluant la multiplicité de $S_{1,1,\mathbb{F}}$ dans les deux membres de FBAWC, on obtient BAWC. $\square$

Théorème

Soit (G, b) *un couple groupe-bloc sur* $\mathbb{k}$.

1. *Il existe un entier* $n_{G,b}$ *tel que*

$$\sum_{\sigma \in [\Sigma_p(G)]} (-1)^{|\sigma|} [\![\mathbb{F} T^{\Delta}_{G_\sigma, b_\sigma}]\!] = n_{G,b}\, [\![S_{1,1,\mathbb{F}}]\!] \text{ dans } K_0\big(\mathcal{F}^{\Delta}_{\mathbb{F}pp_{\mathbb{k}}}\big).$$

2. *FBAWC* $\Longleftrightarrow$ *BAWC* $\Longleftrightarrow$ $(n_{G,b} = 0 \text{ si } D(b) \neq \{1\})$.

BAWC versus FBAWC

Théorème

FBAWC $\implies$ *BAWC.*

Preuve : En évaluant la multiplicité de $S_{1,1,\mathbb{F}}$ dans les deux membres de FBAWC, on obtient BAWC. □

Théorème

Soit (G,b) *un couple groupe-bloc sur* $\Bbbk$*.*

1. *Il existe un entier* $n_{G,b}$ *tel que*

$$\sum_{\sigma\in[\Sigma_p(G)]}(-1)^{|\sigma|}[\![\mathbb{F}T^{\Delta}_{G_\sigma,b_\sigma}]\!]=n_{G,b}\,[\![S_{1,1,\mathbb{F}}]\!]\ \textit{dans}\ K_0\big(\mathcal{F}^{\Delta}_{\mathbb{F}pp_{\Bbbk}}\big).$$

2. *FBAWC* $\iff$ *BAWC* $\iff$ $(n_{G,b}=0$ *si* $D(b)\neq\{1\})$.

Preuve :

BAWC versus FBAWC

Théorème

FBAWC $\implies$ *BAWC.*

Preuve : En évaluant la multiplicité de $S_{1,1,\mathbb{F}}$ dans les deux membres de FBAWC, on obtient BAWC. $\square$

Théorème

Soit (G, b) un couple groupe-bloc sur $\Bbbk$.

1. *Il existe un entier $n_{G,b}$ tel que*

$$\sum_{\sigma\in[\Sigma_p(G)]} (-1)^{|\sigma|}[\![\mathbb{F}T^{\Delta}_{G_\sigma,b_\sigma}]\!] = n_{G,b}\,[\![S_{1,1,\mathbb{F}}]\!] \text{ dans } K_0\big(\mathcal{F}^{\Delta}_{\mathbb{F}pp_{\Bbbk}}\big).$$

2. *FBAWC* $\iff$ *BAWC* $\iff$ $(n_{G,b} = 0 \text{ si } D(b) \neq \{1\})$.

Preuve : Nous montrons que si $L \neq \{1\}$

BAWC versus FBAWC

Théorème

FBAWC $\implies$ *BAWC.*

Preuve : En évaluant la multiplicité de $S_{1,1,\mathbb{F}}$ dans les deux membres de FBAWC, on obtient BAWC. $\square$

Théorème

Soit (G,b) un couple groupe-bloc sur $\mathbb{k}$.

1. *Il existe un entier $n_{G,b}$ tel que*

$$\sum_{\sigma\in[\Sigma_p(G)]}(-1)^{|\sigma|}[\![\mathbb{F}T^{\Delta}_{G_\sigma,b_\sigma}]\!] = n_{G,b}\,[\![S_{1,1,\mathbb{F}}]\!] \text{ dans } K_0\big(\mathcal{F}^{\Delta}_{\mathbb{F}pp_{\mathbb{k}}}\big).$$

2. *FBAWC* $\iff$ *BAWC* $\iff$ *$(n_{G,b}=0$ si $D(b)\neq\{1\})$.*

Preuve : Nous montrons que si $L\neq\{1\}$, la multiplicité du foncteur simple $S_{L,u,V}$ dans la somme alternée est égale à 0. $\square$

MERCI !

Evaluations

Evaluations

- For a finite group G

Evaluations

- For a finite group G, let $\mathcal{Q}_{G,p}$ denote the set of pairs (P, s)

Evaluations

- For a finite group G, let $\mathcal{Q}_{G,p}$ denote the set of pairs (P, s), where P is a p-subgroup of G and s is a p'-element of $N_G(P)$.

Evaluations

- For a finite group G, let $\mathcal{Q}_{G,p}$ denote the set of pairs (P, s), where P is a p-subgroup of G and s is a p'-element of $N_G(P)$. Let $[\mathcal{Q}_{G,p}]$ be a set of representatives of $G\backslash\mathcal{Q}_{G,p}$.

Evaluations

- For a finite group G, let $\mathcal{Q}_{G,p}$ denote the set of pairs (P, s), where P is a p-subgroup of G and s is a p'-element of $N_G(P)$. Let $[\mathcal{Q}_{G,p}]$ be a set of representatives of $G\backslash\mathcal{Q}_{G,p}$.
- For $(P, s) \in \mathcal{Q}_{G,p}$

Evaluations

- For a finite group G, let $\mathcal{Q}_{G,p}$ denote the set of pairs (P, s), where P is a p-subgroup of G and s is a p'-element of $N_G(P)$. Let $[\mathcal{Q}_{G,p}]$ be a set of representatives of $G\backslash\mathcal{Q}_{G,p}$.
- For $(P, s) \in \mathcal{Q}_{G,p}$, set $(\tilde{P}, \tilde{s}) = (PC/C, sC/C)$

Evaluations

- For a finite group G, let $\mathcal{Q}_{G,p}$ denote the set of pairs (P,s), where P is a p-subgroup of G and s is a p'-element of $N_G(P)$. Let $[\mathcal{Q}_{G,p}]$ be a set of representatives of $G\backslash\mathcal{Q}_{G,p}$.
- For $(P,s) \in \mathcal{Q}_{G,p}$, set $(\tilde{P},\tilde{s}) = (PC/C, sC/C)$, where $C = C_{\langle s\rangle}(P)$.

Evaluations

- For a finite group G, let $\mathcal{Q}_{G,p}$ denote the set of pairs (P,s), where P is a p-subgroup of G and s is a p'-element of $N_G(P)$. Let $[\mathcal{Q}_{G,p}]$ be a set of representatives of $G\backslash\mathcal{Q}_{G,p}$.
- For $(P,s) \in \mathcal{Q}_{G,p}$, set $(\tilde{P},\tilde{s}) = (PC/C, sC/C)$, where $C = C_{\langle s\rangle}(P)$.
- Let moreover (L,u) be a D^{Δ}-pair.

Evaluations

- For a finite group G, let $\mathcal{Q}_{G,p}$ denote the set of pairs (P,s), where P is a p-subgroup of G and s is a p'-element of $N_G(P)$. Let $[\mathcal{Q}_{G,p}]$ be a set of representatives of $G\backslash\mathcal{Q}_{G,p}$.
- For $(P,s)\in\mathcal{Q}_{G,p}$, set $(\tilde{P},\tilde{s})=(PC/C,sC/C)$, where $C=C_{\langle s\rangle}(P)$.
- Let moreover (L,u) be a D^{Δ}-pair. If $(\tilde{P},\tilde{s})\cong(L,u)$

Evaluations

- For a finite group G, let $\mathcal{Q}_{G,p}$ denote the set of pairs (P,s), where P is a p-subgroup of G and s is a p'-element of $N_G(P)$. Let $[\mathcal{Q}_{G,p}]$ be a set of representatives of $G\backslash\mathcal{Q}_{G,p}$.
- For $(P,s) \in \mathcal{Q}_{G,p}$, set $(\tilde{P},\tilde{s}) = (PC/C, sC/C)$, where $C = C_{\langle s\rangle}(P)$.
- Let moreover (L,u) be a D^Δ-pair. If $(\tilde{P},\tilde{s}) \cong (L,u)$, then there exists

$$\varphi : P \overset{\cong}{\to} L$$

Evaluations

- For a finite group G, let $\mathcal{Q}_{G,p}$ denote the set of pairs (P,s), where P is a p-subgroup of G and s is a p'-element of $N_G(P)$. Let $[\mathcal{Q}_{G,p}]$ be a set of representatives of $G\backslash\mathcal{Q}_{G,p}$.
- For $(P,s)\in\mathcal{Q}_{G,p}$, set $(\tilde{P},\tilde{s})=(PC/C,sC/C)$, where $C=C_{\langle s\rangle}(P)$.
- Let moreover (L,u) be a D^Δ-pair. If $(\tilde{P},\tilde{s})\cong(L,u)$, then there exists

  $\varphi: P\overset{\cong}{\to}L$ such that the square

Evaluations

- For a finite group G, let $\mathcal{Q}_{G,p}$ denote the set of pairs (P,s), where P is a p-subgroup of G and s is a p'-element of $N_G(P)$. Let $[\mathcal{Q}_{G,p}]$ be a set of representatives of $G\backslash\mathcal{Q}_{G,p}$.
- For $(P,s)\in\mathcal{Q}_{G,p}$, set $(\tilde{P},\tilde{s})=(PC/C,sC/C)$, where $C=C_{\langle s\rangle}(P)$.
- Let moreover (L,u) be a D^Δ-pair. If $(\tilde{P},\tilde{s})\cong(L,u)$, then there exists

$\varphi : P \overset{\cong}{\to} L$ such that the square
$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "i_s"'] & L \arrow[d, "i_u"] \\ P \arrow[r, "\varphi"'] & L \end{tikzcd}$$

Evaluations

- For a finite group G, let $\mathcal{Q}_{G,p}$ denote the set of pairs (P,s), where P is a p-subgroup of G and s is a p'-element of $N_G(P)$. Let $[\mathcal{Q}_{G,p}]$ be a set of representatives of $G\backslash\mathcal{Q}_{G,p}$.
- For $(P,s)\in\mathcal{Q}_{G,p}$, set $(\tilde{P},\tilde{s})=(PC/C,sC/C)$, where $C=C_{\langle s\rangle}(P)$.
- Let moreover (L,u) be a D^Δ-pair. If $(\tilde{P},\tilde{s})\cong(L,u)$, then there exists

  $\varphi: P\overset{\cong}{\to} L$ such that the square $\begin{array}{ccc} P & \overset{\varphi}{\to} & L \\ {\scriptstyle i_s}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_u} \\ P & \underset{\varphi}{\to} & L \end{array}$ is commutative.

Evaluations

- For a finite group G, let $\mathcal{Q}_{G,p}$ denote the set of pairs (P,s), where P is a p-subgroup of G and s is a p'-element of $N_G(P)$. Let $[\mathcal{Q}_{G,p}]$ be a set of representatives of $G\backslash\mathcal{Q}_{G,p}$.
- For $(P,s)\in\mathcal{Q}_{G,p}$, set $(\tilde{P},\tilde{s})=(PC/C, sC/C)$, where $C=C_{\langle s\rangle}(P)$.
- Let moreover (L,u) be a D^Δ-pair. If $(\tilde{P},\tilde{s})\cong(L,u)$, then there exists $\varphi : P \overset{\cong}{\to} L$ such that the square $\begin{array}{ccc} P & \overset{\varphi}{\to} & L \\ {\scriptstyle i_s}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_u} \\ P & \underset{\varphi}{\to} & L \end{array}$ is commutative.

  This induces a group homomorphism $N_G(P,s)\to Aut(L,u)$.

Evaluations

- For a finite group G, let $\mathcal{Q}_{G,p}$ denote the set of pairs (P,s), where P is a p-subgroup of G and s is a p'-element of $N_G(P)$. Let $[\mathcal{Q}_{G,p}]$ be a set of representatives of $G\backslash\mathcal{Q}_{G,p}$.
- For $(P,s)\in\mathcal{Q}_{G,p}$, set $(\tilde{P},\tilde{s})=(PC/C, sC/C)$, where $C=C_{\langle s\rangle}(P)$.
- Let moreover (L,u) be a D^Δ-pair. If $(\tilde{P},\tilde{s})\cong(L,u)$, then there exists

$\varphi: P\overset{\cong}{\to} L$ such that the square $\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "i_s"'] & L \arrow[d, "i_u"] \\ P \arrow[r, "\varphi"'] & L \end{tikzcd}$ is commutative.

This induces a group homomorphism $N_G(P,s)\to Aut(L,u)$.

Proposition

Let (L,u) be a D^Δ-pair and V be a simple $\mathbb{F}Out(L,u)$-module.

Evaluations

- For a finite group G, let $\mathcal{Q}_{G,p}$ denote the set of pairs (P,s), where P is a p-subgroup of G and s is a p'-element of $N_G(P)$. Let $[\mathcal{Q}_{G,p}]$ be a set of representatives of $G\backslash\mathcal{Q}_{G,p}$.
- For $(P,s)\in\mathcal{Q}_{G,p}$, set $(\tilde{P},\tilde{s})=(PC/C, sC/C)$, where $C=C_{\langle s\rangle}(P)$.
- Let moreover (L,u) be a D^Δ-pair. If $(\tilde{P},\tilde{s})\cong(L,u)$, then there exists $\varphi: P\overset{\cong}{\to} L$ such that the square $\begin{array}{ccc} P & \overset{\varphi}{\to} & L \\ {\scriptstyle i_s}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_u} \\ P & \underset{\varphi}{\to} & L\end{array}$ is commutative.

  This induces a group homomorphism $N_G(P,s)\to Aut(L,u)$.

Proposition

Let (L,u) be a D^Δ-pair and V be a simple $\mathbb{F}Out(L,u)$-module. Then for a finite group G

Evaluations

- For a finite group G, let $\mathcal{Q}_{G,p}$ denote the set of pairs (P,s), where P is a p-subgroup of G and s is a p'-element of $N_G(P)$. Let $[\mathcal{Q}_{G,p}]$ be a set of representatives of $G\backslash\mathcal{Q}_{G,p}$.
- For $(P,s)\in\mathcal{Q}_{G,p}$, set $(\tilde{P},\tilde{s})=(PC/C,sC/C)$, where $C=C_{\langle s\rangle}(P)$.
- Let moreover (L,u) be a D^Δ-pair. If $(\tilde{P},\tilde{s})\cong(L,u)$, then there exists

  $\varphi: P\overset{\cong}{\to} L$ such that the square $\begin{array}{ccc} P & \overset{\varphi}{\to} & L \\ {\scriptstyle i_s}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_u} \\ P & \underset{\varphi}{\to} & L \end{array}$ is commutative.

  This induces a group homomorphism $N_G(P,s)\to Aut(L,u)$.

Proposition

Let (L,u) be a D^Δ-pair and V be a simple $\mathbb{F}Out(L,u)$-module. Then for a finite group G

$$S_{L,u,V}(G)\cong$$

Evaluations

- For a finite group G, let $\mathcal{Q}_{G,p}$ denote the set of pairs (P,s), where P is a p-subgroup of G and s is a p'-element of $N_G(P)$. Let $[\mathcal{Q}_{G,p}]$ be a set of representatives of $G\backslash\mathcal{Q}_{G,p}$.
- For $(P,s)\in\mathcal{Q}_{G,p}$, set $(\tilde{P},\tilde{s})=(PC/C,sC/C)$, where $C=C_{\langle s\rangle}(P)$.
- Let moreover (L,u) be a D^Δ-pair. If $(\tilde{P},\tilde{s})\cong(L,u)$, then there exists $\varphi:P\overset{\cong}{\to}L$ such that the square $\begin{array}{ccc} P & \overset{\varphi}{\to} & L\\ {\scriptstyle i_s}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_u}\\ P & \underset{\varphi}{\to} & L\end{array}$ is commutative.

  This induces a group homomorphism $N_G(P,s)\to Aut(L,u)$.

Proposition

Let (L,u) be a D^Δ-pair and V be a simple $\mathbb{F}Out(L,u)$-module. Then for a finite group G

$$S_{L,u,V}(G)\cong\bigoplus_{\substack{(P,s)\in[\mathcal{Q}_{G,p}]\\ (\tilde{P},\tilde{s})\cong(L,u)}} V^{N_G(P,s)}$$

Multiplicities (1)

Multiplicities (1)

Let $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}(G, L, u)$ be the set of triples (P, π, F) where

Multiplicities (1)

Let $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}(G, L, u)$ be the set of triples (P, π, F) where

- P is a p-subgroup of G.

Multiplicities (1)

Let $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}(G, L, u)$ be the set of triples (P, π, F) where

- P is a p-subgroup of G.
- $\pi : L \to P$ is a group isomorphism

Multiplicities (1)

Let $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}(G, L, u)$ be the set of triples (P, π, F) where

- P is a p-subgroup of G.
- $\pi : L \to P$ is a group isomorphism such that there exists a p'-element $s \in G$ with $\pi({}^u l) = {}^s\pi(l)$ for all $l \in L$.

Multiplicities (1)

Let $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}(G, L, u)$ be the set of triples (P, π, F) where

- P is a p-subgroup of G.
- $\pi : L \to P$ is a group isomorphism such that there exists a p'-element $s \in G$ with $\pi({}^u l) = {}^s\pi(l)$ for all $l \in L$.
- F is an u-invariant projective indecomposable $\mathbb{k}\mathrm{Br}_P(b)C_G(P)$-module.

Multiplicities (1)

Let $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}(G, L, u)$ be the set of triples (P, π, F) where

- P is a p-subgroup of G.
- $\pi : L \to P$ is a group isomorphism such that there exists a p'-element $s \in G$ with $\pi({}^u l) = {}^s\pi(l)$ for all $l \in L$.
- F is an u-invariant projective indecomposable $\Bbbk\mathrm{Br}_P(b)C_G(P)$-module.

The group $G \times L\langle u \rangle$ acts on $\mathcal{Y}$

Multiplicities (1)

Let $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}(G, L, u)$ be the set of triples (P, π, F) where

- P is a p-subgroup of G.
- $\pi : L \to P$ is a group isomorphism such that there exists a p'-element $s \in G$ with $\pi({}^u l) = {}^s\pi(l)$ for all $l \in L$.
- F is an u-invariant projective indecomposable $\Bbbk\mathrm{Br}_P(b)C_G(P)$-module.

The group $G \times L\langle u\rangle$ acts on $\mathcal{Y}$ by $(g, t) \cdot (P, \pi, F) := ({}^gP, i_g\pi i_{t^{-1}}, {}^gF)$ for $(g, t) \in G \times L\langle u\rangle$ and $(P, \pi, F) \in \mathcal{Y}$.

Multiplicities (1)

Let $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}(G, L, u)$ be the set of triples (P, π, F) where

- P is a p-subgroup of G.
- $\pi : L \to P$ is a group isomorphism such that there exists a p'-element $s \in G$ with $\pi({}^u l) = {}^s\pi(l)$ for all $l \in L$.
- F is an u-invariant projective indecomposable $\Bbbk\mathrm{Br}_P(b)C_G(P)$-module.

The group $G \times L\langle u\rangle$ acts on $\mathcal{Y}$ by $(g, t) \cdot (P, \pi, F) := ({}^g P, i_g \pi i_{t^{-1}}, {}^g F)$ for $(g, t) \in G \times L\langle u\rangle$ and $(P, \pi, F) \in \mathcal{Y}$. Here ${}^g F$ is the $\Bbbk C_G({}^g P)$-module equal to F as a $\Bbbk$-vector space and on which $c \in C_G({}^g P)$ acts by

Multiplicities (1)

Let $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}(G, L, u)$ be the set of triples (P, π, F) where

- P is a p-subgroup of G.
- $\pi : L \to P$ is a group isomorphism such that there exists a p'-element $s \in G$ with $\pi({}^u l) = {}^s\pi(l)$ for all $l \in L$.
- F is an u-invariant projective indecomposable $\mathbb{k}\mathrm{Br}_P(b)C_G(P)$-module.

The group $G \times L\langle u\rangle$ acts on $\mathcal{Y}$ by $(g, t) \cdot (P, \pi, F) := ({}^gP, i_g\pi i_{t^{-1}}, {}^gF)$ for $(g, t) \in G \times L\langle u\rangle$ and $(P, \pi, F) \in \mathcal{Y}$. Here ${}^gF$ is the $\mathbb{k}C_G({}^gP)$-module equal to F as a $\mathbb{k}$-vector space and on which $c \in C_G({}^gP)$ acts by $c \cdot {}^gf := c^gf$.

Multiplicities (1)

Let $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}(G, L, u)$ be the set of triples (P, π, F) where

- P is a p-subgroup of G.
- $\pi : L \to P$ is a group isomorphism such that there exists a p'-element $s \in G$ with $\pi({}^u l) = {}^s\pi(l)$ for all $l \in L$.
- F is an u-invariant projective indecomposable $\mathbb{k}\mathrm{Br}_P(b)C_G(P)$-module.

The group $G \times L\langle u\rangle$ acts on $\mathcal{Y}$ by $(g, t) \cdot (P, \pi, F) := ({}^gP, i_g\pi i_{t^{-1}}, {}^gF)$ for $(g, t) \in G \times L\langle u\rangle$ and $(P, \pi, F) \in \mathcal{Y}$. Here ${}^gF$ is the $\mathbb{k}C_G({}^gP)$-module equal to F as a $\mathbb{k}$-vector space and on which $c \in C_G({}^gP)$ acts by $c \cdot {}^gf := c^gf$.

Théorème

Multiplicities (1)

Let $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}(G, L, u)$ be the set of triples (P, π, F) where

- P is a p-subgroup of G.
- $\pi : L \to P$ is a group isomorphism such that there exists a p'-element $s \in G$ with $\pi({}^u l) = {}^s\pi(l)$ for all $l \in L$.
- F is an u-invariant projective indecomposable $\Bbbk\mathrm{Br}_P(b)C_G(P)$-module.

The group $G \times L\langle u\rangle$ acts on $\mathcal{Y}$ by $(g, t) \cdot (P, \pi, F) := ({}^gP, i_g \pi i_{t^{-1}}, {}^gF)$ for $(g, t) \in G \times L\langle u\rangle$ and $(P, \pi, F) \in \mathcal{Y}$. Here ${}^gF$ is the $\Bbbk C_G({}^gP)$-module equal to F as a $\Bbbk$-vector space and on which $c \in C_G({}^gP)$ acts by $c \cdot {}^gf := c^gf$.

Théorème

The multiplicity of $S_{L,u,V}$ in $\mathbb{F}T^{\Delta}_{G,b}$

Multiplicities (1)

Let $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}(G, L, u)$ be the set of triples (P, π, F) where

- P is a p-subgroup of G.
- $\pi : L \to P$ is a group isomorphism such that there exists a p'-element $s \in G$ with $\pi({}^u l) = {}^s\pi(l)$ for all $l \in L$.
- F is an u-invariant projective indecomposable $\Bbbk\mathrm{Br}_P(b)C_G(P)$-module.

The group $G \times L\langle u\rangle$ acts on $\mathcal{Y}$ by $(g, t) \cdot (P, \pi, F) := ({}^gP, i_g \pi i_{t^{-1}}, {}^gF)$ for $(g, t) \in G \times L\langle u\rangle$ and $(P, \pi, F) \in \mathcal{Y}$. Here ${}^gF$ is the $\Bbbk C_G({}^gP)$-module equal to F as a $\Bbbk$-vector space and on which $c \in C_G({}^gP)$ acts by $c \cdot {}^gf := c^gf$.

Théorème

The multiplicity of $S_{L,u,V}$ in $\mathbb{F}T^{\Delta}_{G,b}$ is the dimension of

$$\bigoplus_{\overline{(P,\pi,F)\in\mathcal{U}}} V^{Aut(L,u)_{\overline{(P,\pi,F)}}},$$

Multiplicities (1)

Let $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}(G, L, u)$ be the set of triples (P, π, F) where

- P is a p-subgroup of G.
- $\pi : L \to P$ is a group isomorphism such that there exists a p'-element $s \in G$ with $\pi({}^u l) = {}^s\pi(l)$ for all $l \in L$.
- F is an u-invariant projective indecomposable $\Bbbk\mathrm{Br}_P(b)C_G(P)$-module.

The group $G \times L\langle u\rangle$ acts on $\mathcal{Y}$ by $(g, t) \cdot (P, \pi, F) := ({}^gP, i_g\pi i_{t^{-1}}, {}^gF)$ for $(g, t) \in G \times L\langle u\rangle$ and $(P, \pi, F) \in \mathcal{Y}$. Here ${}^gF$ is the $\Bbbk C_G({}^gP)$-module equal to F as a $\Bbbk$-vector space and on which $c \in C_G({}^gP)$ acts by $c \cdot {}^gf := c^gf$.

Théorème

The multiplicity of $S_{L,u,V}$ in $\mathbb{F}T^{\Delta}_{G,b}$ is the dimension of

$$\bigoplus_{\overline{(P,\pi,F)}\in\mathcal{U}} V^{Aut(L,u)_{\overline{(P,\pi,F)}}},$$

where $\mathcal{U} = [(G \times L\langle u\rangle)\backslash\mathcal{Y}(G, L, u)/Aut(L, u)]$

Multiplicities (1)

Let $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}(G, L, u)$ be the set of triples (P, π, F) where

- P is a p-subgroup of G.
- $\pi : L \to P$ is a group isomorphism such that there exists a p'-element $s \in G$ with $\pi({}^u l) = {}^s\pi(l)$ for all $l \in L$.
- F is an u-invariant projective indecomposable $\Bbbk\mathrm{Br}_P(b)C_G(P)$-module.

The group $G \times L\langle u\rangle$ acts on $\mathcal{Y}$ by $(g, t) \cdot (P, \pi, F) := ({}^gP, i_g\pi i_{t^{-1}}, {}^gF)$ for $(g, t) \in G \times L\langle u\rangle$ and $(P, \pi, F) \in \mathcal{Y}$. Here ${}^gF$ is the $\Bbbk C_G({}^gP)$-module equal to F as a $\Bbbk$-vector space and on which $c \in C_G({}^gP)$ acts by $c \cdot {}^gf := c^gf$.

Théorème

The multiplicity of $S_{L,u,V}$ in $\mathbb{F}T^{\Delta}_{G,b}$ is the dimension of

$$\underline{\bigoplus_{(P,\pi,F)\in\mathcal{U}}} V^{Aut(L,u)_{\overline{(P,\pi,F)}}},$$

where $\mathcal{U} = [(G \times L\langle u\rangle)\backslash\mathcal{Y}(G, L, u)/Aut(L, u)]$, and $Aut(L, u)_{\overline{(P,\pi,F)}}$ is the stabilizer of $(G \times L\langle u\rangle)(P, \pi, F)$ in $Aut(L, u)$.

←

Multiplicities (2)

Multiplicities (2)

Let $\mathcal{F}_b$ denote the fusion system of $\Bbbk Gb$ with respect to a maximal b-Brauer pair (D, e_D).

Multiplicities (2)

Let $\mathcal{F}_b$ denote the fusion system of $\Bbbk Gb$ with respect to a maximal b-Brauer pair (D, e_D). For each subgroup $P \leq D$, let e_P denote the unique block of $\Bbbk C_G(P)$ with $(P, e_P) \leq (D, e_D)$.

Multiplicities (2)

Let $\mathcal{F}_b$ denote the fusion system of $\Bbbk Gb$ with respect to a maximal b-Brauer pair (D, e_D). For each subgroup $P \leq D$, let e_P denote the unique block of $\Bbbk C_G(P)$ with $(P, e_P) \leq (D, e_D)$.

For $(P, e_P) \in \mathcal{F}_b$

Multiplicities (2)

Let $\mathcal{F}_b$ denote the fusion system of $\Bbbk Gb$ with respect to a maximal b-Brauer pair (D, e_D). For each subgroup $P \leq D$, let e_P denote the unique block of $\Bbbk C_G(P)$ with $(P, e_P) \leq (D, e_D)$.
For $(P, e_P) \in \mathcal{F}_b$, let $\mathcal{P}_{(P,e_P)}(L, u)$ denote the set of group isomorphisms $\pi : L \to P$ with $\pi i_u \pi^{-1} \in Aut_{\mathcal{F}_b}(P, e_P)$.

Multiplicities (2)

Let $\mathcal{F}_b$ denote the fusion system of $\Bbbk Gb$ with respect to a maximal b-Brauer pair (D, e_D). For each subgroup $P \leq D$, let e_P denote the unique block of $\Bbbk C_G(P)$ with $(P, e_P) \leq (D, e_D)$.
For $(P, e_P) \in \mathcal{F}_b$, let $\mathscr{P}_{(P,e_P)}(L, u)$ denote the set of group isomorphisms $\pi : L \to P$ with $\pi i_u \pi^{-1} \in Aut_{\mathcal{F}_b}(P, e_P)$. The set $\mathscr{P}_{(P,e_P)}(L, u)$ is an $(N_G(P, e_P), Aut(L, u))$-biset via $g \cdot \pi \cdot \varphi = i_g \pi \varphi$,

Multiplicities (2)

Let $\mathcal{F}_b$ denote the fusion system of $\Bbbk Gb$ with respect to a maximal b-Brauer pair (D, e_D). For each subgroup $P \leq D$, let e_P denote the unique block of $\Bbbk C_G(P)$ with $(P, e_P) \leq (D, e_D)$.
For $(P, e_P) \in \mathcal{F}_b$, let $\mathcal{P}_{(P,e_P)}(L, u)$ denote the set of group isomorphisms $\pi : L \to P$ with $\pi i_u \pi^{-1} \in Aut_{\mathcal{F}_b}(P, e_P)$. The set $\mathcal{P}_{(P,e_P)}(L, u)$ is an $(N_G(P, e_P), Aut(L, u))$-biset via $g \cdot \pi \cdot \varphi = i_g \pi \varphi$, for $g \in N_G(P, e_P)$, $\pi \in \mathcal{P}_{(P,e_P)}(L, u)$ and $\varphi \in Aut(L, u)$.

Multiplicities (2)

Let $\mathcal{F}_b$ denote the fusion system of $\Bbbk Gb$ with respect to a maximal b-Brauer pair (D, e_D). For each subgroup $P \leq D$, let e_P denote the unique block of $\Bbbk C_G(P)$ with $(P, e_P) \leq (D, e_D)$.
For $(P, e_P) \in \mathcal{F}_b$, let $\mathcal{P}_{(P,e_P)}(L, u)$ denote the set of group isomorphisms $\pi : L \to P$ with $\pi i_u \pi^{-1} \in Aut_{\mathcal{F}_b}(P, e_P)$. The set $\mathcal{P}_{(P,e_P)}(L, u)$ is an $(N_G(P, e_P), Aut(L, u))$-biset via $g \cdot \pi \cdot \varphi = i_g \pi \varphi$, for $g \in N_G(P, e_P)$, $\pi \in \mathcal{P}_{(P,e_P)}(L, u)$ and $\varphi \in Aut(L, u)$. Let $[\mathcal{P}_{(P,e_P)}(L, u)]$ denote a set of representatives of orbits.

Multiplicities (2)

Let $\mathcal{F}_b$ denote the fusion system of $\Bbbk Gb$ with respect to a maximal b-Brauer pair (D, e_D). For each subgroup $P \leq D$, let e_P denote the unique block of $\Bbbk C_G(P)$ with $(P, e_P) \leq (D, e_D)$.
For $(P, e_P) \in \mathcal{F}_b$, let $\mathscr{P}_{(P,e_P)}(L, u)$ denote the set of group isomorphisms $\pi : L \to P$ with $\pi i_u \pi^{-1} \in Aut_{\mathcal{F}_b}(P, e_P)$. The set $\mathscr{P}_{(P,e_P)}(L, u)$ is an $(N_G(P, e_P), Aut(L, u))$-biset via $g \cdot \pi \cdot \varphi = i_g \pi \varphi$, for $g \in N_G(P, e_P)$, $\pi \in \mathscr{P}_{(P,e_P)}(L, u)$ and $\varphi \in Aut(L, u)$. Let $[\mathscr{P}_{(P,e_P)}(L, u)]$ denote a set of representatives of orbits.

Théorème

Multiplicities (2)

Let $\mathcal{F}_b$ denote the fusion system of $\Bbbk Gb$ with respect to a maximal b-Brauer pair (D, e_D). For each subgroup $P \leq D$, let e_P denote the unique block of $\Bbbk C_G(P)$ with $(P, e_P) \leq (D, e_D)$.
For $(P, e_P) \in \mathcal{F}_b$, let $\mathscr{P}_{(P,e_P)}(L, u)$ denote the set of group isomorphisms $\pi : L \to P$ with $\pi i_u \pi^{-1} \in Aut_{\mathcal{F}_b}(P, e_P)$. The set $\mathscr{P}_{(P,e_P)}(L, u)$ is an $(N_G(P, e_P), Aut(L, u))$-biset via $g \cdot \pi \cdot \varphi = i_g \pi \varphi$, for $g \in N_G(P, e_P)$, $\pi \in \mathscr{P}_{(P,e_P)}(L, u)$ and $\varphi \in Aut(L, u)$. Let $[\mathscr{P}_{(P,e_P)}(L, u)]$ denote a set of representatives of orbits.

Théorème

The multiplicity of $S_{L,u,V}$ in $\mathbb{F}T^{\Delta}_{G,b}$

Multiplicities (2)

Let $\mathcal{F}_b$ denote the fusion system of $\Bbbk Gb$ with respect to a maximal b-Brauer pair (D, e_D). For each subgroup $P \leq D$, let e_P denote the unique block of $\Bbbk C_G(P)$ with $(P, e_P) \leq (D, e_D)$.
For $(P, e_P) \in \mathcal{F}_b$, let $\mathcal{P}_{(P,e_P)}(L, u)$ denote the set of group isomorphisms $\pi : L \to P$ with $\pi i_u \pi^{-1} \in Aut_{\mathcal{F}_b}(P, e_P)$. The set $\mathcal{P}_{(P,e_P)}(L, u)$ is an $(N_G(P, e_P), Aut(L, u))$-biset via $g \cdot \pi \cdot \varphi = i_g \pi \varphi$, for $g \in N_G(P, e_P)$, $\pi \in \mathcal{P}_{(P,e_P)}(L, u)$ and $\varphi \in Aut(L, u)$. Let $[\mathcal{P}_{(P,e_P)}(L, u)]$ denote a set of representatives of orbits.

Théorème

The multiplicity of $S_{L,u,V}$ in $\mathbb{F}T^{\Delta}_{G,b}$ is the dimension of

$$\bigoplus_{(P,e_P)\in[\mathcal{F}_b]}$$

Multiplicities (2)

Let $\mathcal{F}_b$ denote the fusion system of $\Bbbk Gb$ with respect to a maximal b-Brauer pair (D, e_D). For each subgroup $P \leq D$, let e_P denote the unique block of $\Bbbk C_G(P)$ with $(P, e_P) \leq (D, e_D)$.
For $(P, e_P) \in \mathcal{F}_b$, let $\mathscr{P}_{(P,e_P)}(L, u)$ denote the set of group isomorphisms $\pi : L \to P$ with $\pi i_u \pi^{-1} \in Aut_{\mathcal{F}_b}(P, e_P)$. The set $\mathscr{P}_{(P,e_P)}(L, u)$ is an $(N_G(P, e_P), Aut(L, u))$-biset via $g \cdot \pi \cdot \varphi = i_g \pi \varphi$, for $g \in N_G(P, e_P)$, $\pi \in \mathscr{P}_{(P,e_P)}(L, u)$ and $\varphi \in Aut(L, u)$. Let $[\mathscr{P}_{(P,e_P)}(L, u)]$ denote a set of representatives of orbits.

Théorème

The multiplicity of $S_{L,u,V}$ in $\mathbb{F}T^{\Delta}_{G,b}$ is the dimension of

$$\bigoplus_{(P,e_P)\in[\mathcal{F}_b]} \ \bigoplus_{\pi\in[\mathscr{P}_{(P,e_P)}(L,u)]}$$

Multiplicities (2)

Let $\mathcal{F}_b$ denote the fusion system of $\Bbbk Gb$ with respect to a maximal b-Brauer pair (D, e_D). For each subgroup $P \leq D$, let e_P denote the unique block of $\Bbbk C_G(P)$ with $(P, e_P) \leq (D, e_D)$.
For $(P, e_P) \in \mathcal{F}_b$, let $\mathcal{P}_{(P,e_P)}(L, u)$ denote the set of group isomorphisms $\pi : L \to P$ with $\pi i_u \pi^{-1} \in Aut_{\mathcal{F}_b}(P, e_P)$. The set $\mathcal{P}_{(P,e_P)}(L, u)$ is an $(N_G(P, e_P), Aut(L, u))$-biset via $g \cdot \pi \cdot \varphi = i_g \pi \varphi$, for $g \in N_G(P, e_P)$, $\pi \in \mathcal{P}_{(P,e_P)}(L, u)$ and $\varphi \in Aut(L, u)$. Let $[\mathcal{P}_{(P,e_P)}(L, u)]$ denote a set of representatives of orbits.

Théorème

The multiplicity of $S_{L,u,V}$ in $\mathbb{F}T^{\Delta}_{G,b}$ is the dimension of

$$\bigoplus_{(P,e_P)\in[\mathcal{F}_b]} \; \bigoplus_{\pi\in[\mathcal{P}_{(P,e_P)}(L,u)]} \mathbb{F}\mathrm{Proj}(\Bbbk e_P C_G(P), u) \otimes_{Aut(L,u)_{\overline{(P,e_P,\pi)}}} V,$$

Multiplicities (2)

Let $\mathcal{F}_b$ denote the fusion system of $\Bbbk Gb$ with respect to a maximal b-Brauer pair (D, e_D). For each subgroup $P \leq D$, let e_P denote the unique block of $\Bbbk C_G(P)$ with $(P, e_P) \leq (D, e_D)$.

For $(P, e_P) \in \mathcal{F}_b$, let $\mathcal{P}_{(P,e_P)}(L, u)$ denote the set of group isomorphisms $\pi : L \to P$ with $\pi i_u \pi^{-1} \in Aut_{\mathcal{F}_b}(P, e_P)$. The set $\mathcal{P}_{(P,e_P)}(L, u)$ is an $(N_G(P, e_P), Aut(L, u))$-biset via $g \cdot \pi \cdot \varphi = i_g \pi \varphi$, for $g \in N_G(P, e_P)$, $\pi \in \mathcal{P}_{(P,e_P)}(L, u)$ and $\varphi \in Aut(L, u)$. Let $[\mathcal{P}_{(P,e_P)}(L, u)]$ denote a set of representatives of orbits.

Théorème

The multiplicity of $S_{L,u,V}$ in $\mathbb{F}T^{\Delta}_{G,b}$ is the dimension of

$$\bigoplus_{(P,e_P)\in[\mathcal{F}_b]} \ \bigoplus_{\pi\in[\mathcal{P}_{(P,e_P)}(L,u)]} \mathbb{F}\mathrm{Proj}(\Bbbk e_P C_G(P), u) \otimes_{Aut(L,u)_{\overline{(P,e_P,\pi)}}} V,$$

where $\mathrm{Proj}(\Bbbk e_P C_G(P), u) \leq \mathrm{Proj}(\Bbbk e_P C_G(P))$ is generated by u-invariant indecomposable modules

Multiplicities (2)

Let $\mathcal{F}_b$ denote the fusion system of $\Bbbk Gb$ with respect to a maximal b-Brauer pair (D, e_D). For each subgroup $P \leq D$, let e_P denote the unique block of $\Bbbk C_G(P)$ with $(P, e_P) \leq (D, e_D)$.

For $(P, e_P) \in \mathcal{F}_b$, let $\mathscr{P}_{(P,e_P)}(L, u)$ denote the set of group isomorphisms $\pi : L \to P$ with $\pi i_u \pi^{-1} \in Aut_{\mathcal{F}_b}(P, e_P)$. The set $\mathscr{P}_{(P,e_P)}(L, u)$ is an $(N_G(P, e_P), Aut(L, u))$-biset via $g \cdot \pi \cdot \varphi = i_g \pi \varphi$, for $g \in N_G(P, e_P)$, $\pi \in \mathscr{P}_{(P,e_P)}(L, u)$ and $\varphi \in Aut(L, u)$. Let $[\mathscr{P}_{(P,e_P)}(L, u)]$ denote a set of representatives of orbits.

Théorème

The multiplicity of $S_{L,u,V}$ in $\mathbb{F}T^{\Delta}_{G,b}$ is the dimension of

$$\bigoplus_{(P,e_P)\in[\mathcal{F}_b]} \ \bigoplus_{\pi\in[\mathscr{P}_{(P,e_P)}(L,u)]} \mathbb{F}\mathrm{Proj}(\Bbbk e_P C_G(P), u) \otimes_{Aut(L,u)_{\overline{(P,e_P,\pi)}}} V,$$

where $\mathrm{Proj}(\Bbbk e_P C_G(P), u) \leq \mathrm{Proj}(\Bbbk e_P C_G(P))$ is generated by u-invariant indecomposable modules, and $Aut(L, u)_{\overline{(P,e_P,\pi)}}$ is the stabilizer of $G(P, e_P, \pi)$.

$$Aut(L, u)_{\overline{(P,e_P,\pi)}} = \{\varphi \in Aut(L, u) \mid \exists g \in N_G(P, e_P),\ \pi\varphi\pi^{-1} = i_g\}.$$

Multiplicities (3)

Multiplicities (3)

Let $\mathscr{L}_b(G, L, u)$ denote the set of pairs (P_γ, π) where

Multiplicities (3)

Let $\mathcal{L}_b(G, L, u)$ denote the set of pairs (P_γ, π) where

- P_γ is a local pointed point group on $\mathbb{k}Gb$

Multiplicities (3)

Let $\mathcal{L}_b(G, L, u)$ denote the set of pairs (P_γ, π) where

- P_γ is a local pointed point group on $\Bbbk Gb$,
- $\pi : L \to P$ is a group isomorphism such that $\pi i_u \pi^{-1} = Res(i_s)$ for some $s \in N_G(P_\gamma)$.

Multiplicities (3)

Let $\mathcal{L}_b(G, L, u)$ denote the set of pairs (P_γ, π) where

- P_γ is a local pointed point group on $\Bbbk Gb$,
- $\pi : L \to P$ is a group isomorphism such that $\pi i_u \pi^{-1} = Res(i_s)$ for some $s \in N_G(P_\gamma)$.

The set $\mathcal{L}_b(G, L, u)$ is a $(G, Aut(L, u))$-biset

Multiplicities (3)

Let $\mathcal{L}_b(G, L, u)$ denote the set of pairs (P_γ, π) where

- P_γ is a local pointed point group on $\Bbbk Gb$,
- $\pi : L \to P$ is a group isomorphism such that $\pi i_u \pi^{-1} = Res(i_s)$ for some $s \in N_G(P_\gamma)$.

The set $\mathcal{L}_b(G, L, u)$ is a $(G, Aut(L, u))$-biset via $g \cdot (P_\gamma, \pi) \cdot \varphi = ({}^g P_{{}^g\gamma}, i_g \pi \varphi)$,

Multiplicities (3)

Let $\mathcal{L}_b(G, L, u)$ denote the set of pairs (P_γ, π) where

- P_γ is a local pointed point group on $\Bbbk Gb$,
- $\pi : L \to P$ is a group isomorphism such that $\pi i_u \pi^{-1} = Res(i_s)$ for some $s \in N_G(P_\gamma)$.

The set $\mathcal{L}_b(G, L, u)$ is a $(G, Aut(L, u))$-biset via $g \cdot (P_\gamma, \pi) \cdot \varphi = ({}^g P_{{}^g\gamma}, i_g \pi \varphi)$, for $g \in G$ and $\varphi \in Aut(L, u)$.

Multiplicities (3)

Let $\mathcal{L}_b(G, L, u)$ denote the set of pairs (P_γ, π) where

- P_γ is a local pointed point group on $\Bbbk Gb$,
- $\pi : L \to P$ is a group isomorphism such that $\pi i_u \pi^{-1} = Res(i_s)$ for some $s \in N_G(P_\gamma)$.

The set $\mathcal{L}_b(G, L, u)$ is a $(G, Aut(L, u))$-biset via $g \cdot (P_\gamma, \pi) \cdot \varphi = ({}^g P_{{}^g\gamma}, i_g \pi \varphi)$, for $g \in G$ and $\varphi \in Aut(L, u)$. Let $[\mathcal{L}_b(G, L, u)]$ be a set of representatives of orbits.

Multiplicities (3)

Let $\mathcal{L}_b(G, L, u)$ denote the set of pairs (P_γ, π) where

- P_γ is a local pointed point group on $\Bbbk Gb$,
- $\pi : L \to P$ is a group isomorphism such that $\pi i_u \pi^{-1} = Res(i_s)$ for some $s \in N_G(P_\gamma)$.

The set $\mathcal{L}_b(G, L, u)$ is a $(G, Aut(L, u))$-biset via $g \cdot (P_\gamma, \pi) \cdot \varphi = ({}^g P_{{}^g\gamma}, i_g \pi \varphi)$, for $g \in G$ and $\varphi \in Aut(L, u)$. Let $[\mathcal{L}_b(G, L, u)]$ be a set of representatives of orbits. For $(P_\gamma, \pi) \in \mathcal{L}_b(G, L, u)$, we set

$$Aut(L, u)_{\overline{(P_\gamma, \pi)}} = \{\varphi \in Aut(L, u) \mid \exists g \in N_G(P_\gamma),\ \pi\varphi\pi^{-1} = Res(i_g)\}.$$

Multiplicities (3)

Let $\mathcal{L}_b(G, L, u)$ denote the set of pairs (P_γ, π) where

- P_γ is a local pointed point group on $\Bbbk Gb$,
- $\pi : L \to P$ is a group isomorphism such that $\pi i_u \pi^{-1} = Res(i_s)$ for some $s \in N_G(P_\gamma)$.

The set $\mathcal{L}_b(G, L, u)$ is a $(G, Aut(L, u))$-biset via $g \cdot (P_\gamma, \pi) \cdot \varphi = ({}^g P_{{}^g\gamma}, i_g \pi \varphi)$, for $g \in G$ and $\varphi \in Aut(L, u)$. Let $[\mathcal{L}_b(G, L, u)]$ be a set of representatives of orbits. For $(P_\gamma, \pi) \in \mathcal{L}_b(G, L, u)$, we set

$$Aut(L, u)_{\overline{(P_\gamma, \pi)}} = \{\varphi \in Aut(L, u) \mid \exists g \in N_G(P_\gamma),\ \pi\varphi\pi^{-1} = Res(i_g)\}.$$

Théorème

Multiplicities (3)

Let $\mathcal{L}_b(G, L, u)$ denote the set of pairs (P_γ, π) where

- P_γ is a local pointed point group on $\mathbb{k}Gb$,
- $\pi : L \to P$ is a group isomorphism such that $\pi i_u \pi^{-1} = Res(i_s)$ for some $s \in N_G(P_\gamma)$.

The set $\mathcal{L}_b(G, L, u)$ is a $(G, Aut(L, u))$-biset via $g \cdot (P_\gamma, \pi) \cdot \varphi = ({}^g P_{{}^g\gamma}, i_g \pi \varphi)$, for $g \in G$ and $\varphi \in Aut(L, u)$. Let $[\mathcal{L}_b(G, L, u)]$ be a set of representatives of orbits. For $(P_\gamma, \pi) \in \mathcal{L}_b(G, L, u)$, we set

$$Aut(L, u)_{\overline{(P_\gamma,\pi)}} = \{\varphi \in Aut(L, u) \mid \exists g \in N_G(P_\gamma),\ \pi\varphi\pi^{-1} = Res(i_g)\}.$$

Théorème

The multiplicity of $S_{L,u,V}$ in $\mathbb{F}T^{\Delta}_{G,b}$

Multiplicities (3)

Let $\mathcal{L}_b(G, L, u)$ denote the set of pairs (P_γ, π) where

- P_γ is a local pointed point group on $\Bbbk Gb$,
- $\pi : L \to P$ is a group isomorphism such that $\pi i_u \pi^{-1} = Res(i_s)$ for some $s \in N_G(P_\gamma)$.

The set $\mathcal{L}_b(G, L, u)$ is a $(G, Aut(L, u))$-biset via $g \cdot (P_\gamma, \pi) \cdot \varphi = ({}^g P_{{}^g\gamma}, i_g \pi \varphi)$, for $g \in G$ and $\varphi \in Aut(L, u)$. Let $[\mathcal{L}_b(G, L, u)]$ be a set of representatives of orbits. For $(P_\gamma, \pi) \in \mathcal{L}_b(G, L, u)$, we set

$$Aut(L, u)_{\overline{(P_\gamma, \pi)}} = \{\varphi \in Aut(L, u) \mid \exists g \in N_G(P_\gamma),\ \pi\varphi\pi^{-1} = Res(i_g)\}.$$

Théorème

The multiplicity of $S_{L,u,V}$ in $\mathbb{F}T^{\Delta}_{G,b}$ is the dimension of

$$\bigoplus_{(P_\gamma,\pi) \in [\mathcal{L}_b(G,L,u)]} V^{Aut(L,u)_{\overline{(P_\gamma,\pi)}}}.$$

←