

THÈSE DE DOCTORAT

présentée par

ZHOU Guodong

pour obtenir

le grade de Docteur de l'Université de Picardie Jules Verne

Spécialité : MATHÉMATIQUES

ALGÈBRES COURTOISES ET BLOCS À DÉFAUT DIÉDRALE

Thèse présentée devant la commission d'examen :

Serge	BOUC	Examineur
Philippe	CALDÉRO	Examineur
Thorsten	HOLM	Rapporteur
Bernard	KELLER	Rapporteur
Alexander	ZIMMERMANN	Directeur de thèse

Introduction

D'après le fameux théorème de Yu. A. Drozd ([13]), toute algèbre de dimension finie sur un corps algébriquement clos est de type de représentation fini, docile ou sauvage et les trois types de représentation sont mutuellement exclusifs. Les algèbres de type de représentation fini sont intensivement étudiées dans la littérature et sont assez bien comprises si elles sont symétriques. La classe des algèbres de type de représentation docile est plus compliquée à comprendre. Bien que théoriquement il existe une bonne "paramétrisation" des modules indécomposables sur une algèbre de type de représentation docile, en pratique il est parfois difficile de trouver une classification complète des modules indécomposables sur une telle algèbre. Les algèbres bisérielles spéciales sont une classes d'algèbres de type de représentation docile pour lesquelles il existe une classification complète des modules indécomposables, ce qui attire des attentions depuis leur introduction.

Cette classe d'algèbres a ses origines dans les travaux de I.M. Gelfand et V.A. Ponomarev sur les représentations du groupe de Lorentz ([21]). Elle est étudiée depuis une vingtaine d'années par plusieurs auteurs, dont Schröer, Skowroński, Geiss, de la Peña, Crawley-Boevey, Ringel.

Définition 1 Soient k un corps algébriquement clos et A une algèbre sur k . On appelle A une algèbre bisérielle spéciale si elle est équivalente au sens de Morita à l'algèbre $kQ/\langle\rho\rangle$ définie par un carquois avec relations (Q, ρ) qui satisfait les propriétés suivantes:

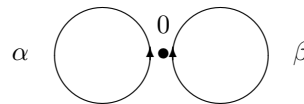
- (1) Chaque sommet est la source d'au plus deux flèches et est le but d'au plus deux flèches.
- (2) Étant donné une flèche α , il existe au plus une flèche β telle que le but de α coïncide avec la source de β et que leur concaténation $\alpha\beta$ ne soit pas dans $\langle\rho\rangle$, et il existe au plus une flèche γ telle que le but de γ coïncide avec la source de α et que leur concaténation $\gamma\alpha$ ne soit pas dans $\langle\rho\rangle$.
- (3) Tout chemin de longueur infinie contient un sous-chemin fini appartenant à $\langle\rho\rangle$.

Pour cette classe d'algèbres de type de représentation docile, il existe une description précise de la classification des modules indécomposables, i.e. les modules de type corde et les modules de type ruban ([11]).

Il est intéressant de voir quels exemples classiques, par exemple, les algèbres de groupe, sont des algèbres bisérielles spéciales. Dans [14] (voir aussi [15]), Karin Erdmann a classifié, à équivalences de Morita près, les blocs à défaut diédral sur un corps algébriquement clos de caractéristique 2. Thorsten Holm a ensuite classifié ces blocs à équivalences dérivées près ([23]). Il s'avère que les blocs à défaut diédral sont, modulo le socle, des algèbres bisérielles spéciales. Voici leur résultats en détail. Notons $\mathcal{D}^b(A)$ la catégorie dérivée des complexes bornés de A -modules (de dimension finie) pour une algèbre A .

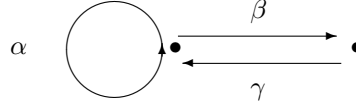
Théorème 1 ([14], [23]) Soit B un bloc de groupe de défaut diédral D d'ordre 2^n avec $n \geq 2$ sur un corps k algébriquement clos de caractéristique 2. Soit $l(B)$ le nombre des B -modules simples, à isomorphismes près. D'après un théorème de R. Brauer ([6]), $l(B) \leq 3$.

- (1) Si $l(B) = 1$, alors B est Morita équivalente à kD dont le carquois avec relation est $D(1A)^q$ avec $q = 2^{n-2}$.



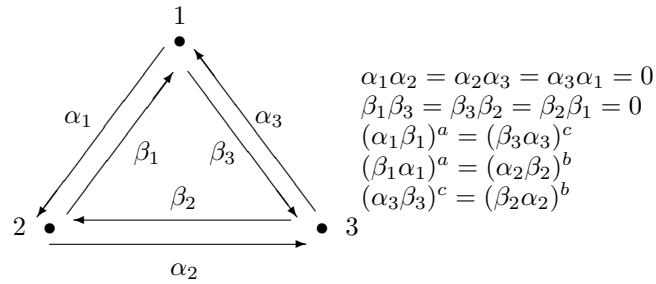
$$\alpha^2 = 0 = \beta^2, (\alpha\beta)^q = (\beta\alpha)^q$$

- (2) Si $l(B) = 2$, alors la catégorie dérivée bornée $\mathcal{D}^b(B)$ de B est équivalente à celle de l'algèbre $D(2A)^s(c)$ avec $s = 2^{n-2}$ et $c \in \{0, 1\}$ où $D(2A)^s(c)$ est l'algèbre définie par le carquois avec relations suivant:



$$\gamma\beta = 0, \alpha^2 = c(\alpha\beta\gamma)^s, (\alpha\beta\gamma)^s = (\beta\gamma\alpha)^s$$

- (3) Si $l(B) = 3$, alors la catégorie dérivée bornée $\mathcal{D}^b(B)$ de B est équivalente à celle de l'algèbre $D(3\mathcal{K})^{a,b,c}$ avec $b = 2^{n-2}$ et $a = c = 1$ où $D(3\mathcal{K})^{a,b,c}$ est l'algèbre définie par le carquois avec relations suivant:



Remarque 2 Dans la liste des algèbres du théorème précédent, les algèbres $D(2\mathcal{A})^s(1)$ avec $s \geq 1$ ne sont des algèbres bisérielles spéciales que modulo le socle. En revanche, toutes les autres le sont. Il est un problème intéressant de distinguer la catégorie dérivée de $D(2\mathcal{A})^s(1)$ et celle de $D(2\mathcal{A})^s(0)$. En effet, leur catégories dérivées ne sont pas équivalentes. Ce fait a été prouvé premièrement par M. Kauer dans sa thèse (voir [31] et [32]). Récemment Thorsten Holm et Alexander Zimmermann ont trouvé une autre preuve élémentaire dans [25] en se servant des idéaux de Reynolds généralisés qui sont des invariants de la catégorie dérivée pour les algèbres symétriques définies sur un corps algébriquement clos de caractéristique strictement positive ([46]).

Les algèbres courtoises, introduites par I. Assem et A. Skowroński ([3]), sont des algèbres bisérielles spéciales vérifiant des conditions de minimalité.

Définition 2 Une algèbre est courtoise si elle est équivalente au sens de Morita à l'algèbre $kQ/\langle \rho \rangle$ définie par un carquois avec relations (Q, ρ) qui, à part les conditions (1), (2) et (3) dans Définition 1, vérifie en outre les conditions suivantes:

- (4) Les éléments dans ρ sont des chemins de longueur 2.
- (5) Pour chaque flèche α , il existe au plus une flèche β telle que $\alpha\beta \in \rho$ et il existe au plus une flèche γ telle que $\gamma\alpha \in \rho$.

En 2003, Jan Schröer et Alexander Zimmermann ont montré le théorème suivant qui établit un lien entre les algèbres courtoises et les algèbres bisérielles spéciales.

Théorème 3 ([44, Theorem 1.1]) Soit A une algèbre bisérielle spéciale et M un A -module sans auto-extensions non-triviales (appelé module rigide). Alors l'algèbre des endomorphismes stable $\underline{\text{End}}_A(M)$, qui est par définition le quotient de l'algèbre des endomorphismes $\text{End}_A(M)$ divisée par l'idéal engendré par les endomorphismes se factorisant par des modules projectifs, est une algèbre courtoise.

Comme un corollaire, ils ont obtenu un résultat surprenant:

Corollaire 4 ([44, Corollary 1.2]) La classe des algèbres courtoises est stable sous les équivalences dérivées.

Il existe d'autres liens profonds entre les propriétés homologiques des algèbres bisérielles spéciales et des algèbres courtoises. Dans [40] (voir aussi [43]) C. M. Ringel a montré que l'algèbre répétitive d'une algèbre courtoise est une algèbre bisérielle spéciale. Ce théorème est un ingrédient de la preuve du corollaire précédent. Un théorème de D. Happel joue également un rôle dans cette preuve. Pour une algèbre A , désignons par $A\text{mod}$ la catégorie stable dont les objets sont les A -modules et dont l'espace des homomorphismes $\underline{\text{Hom}}_A(M, N)$ entre deux A -modules M et N est le quotient de l'espace des homomorphismes $\text{Hom}_A(M, N)$ par le sous-espace des homomorphismes se factorisant par des modules projectifs. D. Happel ([22]) a montré que la catégorie dérivée $\mathcal{D}^b(A)$ peut s'identifier à une sous-catégorie triangulée pleine de la catégorie stable $RA\text{mod}$ de son algèbre répétitive RA et que c'est une équivalence ssi A est de dimension globale finie.

Etant donné la classification des blocs à défaut diédral dans Théorème 1, il sera une question intéressante de voir si Théorème 3 est vrai sur tous les blocs à défaut diédral vu que les algèbres $D(2\mathcal{A})^s(1)$ avec $s \geq 1$ ne sont des algèbres bisérielles spéciales que modulo le socle. Une deuxième question est que si la réponse à la première question est oui, quelles algèbres courtoises apparaissent-elles comme l'algèbre des endomorphismes stable $\underline{\text{End}}_A(M)$ pour M un module sans auto-extensions sur un bloc A à défaut diédral? D'après un résultat de Keller-Vossieck [33] (aussi de J. Rickard [37]), deux algèbres symétriques ayant leur catégories dérivées bornées équivalentes ont également leur catégories stables équivalentes. Comme Théorème 3 ne concerne que la catégorie stable, il suffit de traiter les classes d'équivalences des blocs à défaut diédral, à équivalences dérivées près. C'est-à-dire que l'on n'a besoin de considérer que les algèbres explicitées dans Théorème 3. A titre d'exemple, Alexander Zimmermann a calculé dans [45] le cas où $A = kA_4$ avec A_4 étant le groupe alterné d'ordre 12, dont le carquois avec relations est $D(3\mathcal{K})^{1,1,1}$.

Cette thèse est une continuation de ses travaux. On montre que Théorème 3 est vrai sur tous les blocs à défaut diédral et on classifie toutes les algèbres courtoises qui apparaissent comme l'algèbre des endomorphismes stable $\underline{\text{End}}_A(M)$ pour M un module sans auto-extensions sur un bloc à défaut diédral. Voici le théorème principal:

Théorème 5 Soit A l'une des algèbres suivantes: $D(1\mathcal{A})^q$ avec $q \geq 1$, $D(2\mathcal{A})^s(c)$ avec $s \geq 1$ et $c \in \{0, 1\}$ et $D(3\mathcal{K})^{a,b,c}$ avec $a = 1 = c$ ou $b \geq 1$. Soit M un A -module tel que $\text{Ext}_A^1(M, M) = 0$.

1. L'algèbre des endomorphismes stable $\underline{\text{End}}_A(M)$ est une algèbre courtoise.
2. Le module rigide M a au plus 6 facteurs directes indécomposables non projectifs non isomorphes.
3. L'algèbre $\underline{\text{End}}_A(M)$ a au plus deux facteurs directes indécomposables.
4. Tout facteur directe indécomposable de $\underline{\text{End}}_A(M)$ est Morita équivalente à l'une des 65 algèbres courtoises et chaque algèbre apparaît.

Pour la liste des 65 algèbres courtoises, voir l'énoncé du théorème 4.0.5 dans le chapitre 4 de la partie I (Page). La table suivante donne précisément le nombre des algèbres courtoises obtenue pour chaque algèbre (ou bloc) A .

algèbre (ou bloc) A	nombre des algèbres courtoises obtenues
$D(1\mathcal{A})^1$	0
$D(1\mathcal{A})^q, q \geq 2$	0
$D(2\mathcal{A})^1(0)$	4
$D(2\mathcal{A})^1(1)$	4
$D(2\mathcal{A})^s(0), s \geq 2$	7
$D(2\mathcal{A})^s(1), s \geq 2$	7
$D(3\mathcal{K})^{1,1,1}$	23
$D(3\mathcal{K})^{1,b,1}, b \geq 2$	65

Une conséquence de cette classification est qu'un nombre très limité, plus précisément 65, d'algèbres courtoises apparaissent. Ceci est étonnant. Ce résultat est lié à un problème posé par O. Iyama dans ICRA XI qui demande s'il existe une algèbre artinienne telle que l'on puisse trouver une infinité de modules indécomposables M_i telle que pour tous i, j , $\text{Ext}_A^1(M_i, M_j) = 0$. D'après [26], ce problème a une réponse négative pour les algèbres bisérielle spéciales, puisqu'elles sont de dimension de représentation ≤ 3 ([17]). Nos calculs donnent une réponse négative pour les blocs à défaut diédral (vu que les algèbres $D(2\mathcal{A})^s(1)$ avec $s \geq 1$ ne sont pas des algèbres bisérielles spéciales). On montre de plus qu'il existe au plus six facteurs indécomposables non projectifs non isomorphes dans un module rigide, c'est-à-dire qu'il existe une borne supérieure, plus précisément 6, du nombre maximal des facteurs indécomposables non projectifs non isomorphes dans un module rigide.

D'ailleurs, les algèbres obtenues ont des propriétés particulières. Bien que si le nombre des modules simples est fixé, il existe un nombre fini d'algèbres courtoises, à équivalences de Morita près, le nombre des algèbres courtoises avec au plus 6 sommets est plus grand que 65 d'une part et d'autre part, les algèbres courtoises peuvent être certes de type de représentation docile. Par exemple, le carquois de Kronecker $\bullet \xrightarrow{\quad} \bullet$, qui est une algèbre courtoise, est de type de représentation docile. Or, on constate que toutes les 65 algèbres courtoises obtenues sont de type de représentation fini, car il n'existe pas cordes de type ruban ([15, II.8.1. LEMMA]). Ces propriétés sont liées, peut-être, à la nature des blocs à défaut diédral. Ce sera une tâche ultérieure d'exploiter les liens entre ces propriétés et la théorie modulaire des blocs et d'essayer d'interpréter les algèbres courtoises qui apparaissent ou plutôt qui n'apparaissent pas.

La partie II de cette thèse est consacrée à une approche de calculer les sommets des modules indécomposables sur un 2-groupe diédral. Notre résultat principal de cette partie est énoncé dans Problème 5.5.8 dans lequel on conjecture une forme explicite de

$$\text{Ind}_{T_0}^G M(C) = kG \otimes_{kT_0} M(C)$$

où

$$G = D_{2^n} = \langle x, y | x^{2^{n-1}} = e = y^2, yxy = x^{-1} \rangle$$

est le groupe diédral d'ordre 2^n avec $n \geq 2$, où $T_0 = \langle x^2, y \rangle \cong D_{2^{n-1}}$ est un sous-groupe diédral d'ordre 2^{n-1} et où $M(C)$ est un module de type corde sur kT_0 . Plus précisément, soit $C = C_1 C_2 \cdots C_n$ avec les C_i étant ses segments (Définition 1.2.3 de la partie I), on définit un ordre sophistiqué selon leur longueurs sur l'ensemble des segments $\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ tel que l'on puisse comparer deux segments voisins (voir Définition 5.5.1 pour les détails). Alors on fabrique une nouvelle corde $\tilde{C} = \tilde{C}_1 \tilde{C}_2 \cdots \tilde{C}_n$ sur kG telle que

- (1) Pour tout $1 \leq i \leq n$, $\tilde{C}_i$ est directe (resp. inverse) ssi C_i est directe (resp. inverse).
- (2) Si $C_i < C_{i-1}, C_{i+1}$, alors $|\tilde{C}_i| = 2|C_i| - 1$; si $C_i > C_{i-1}, C_{i+1}$, alors $|\tilde{C}_i| = 2|C_i| + 1$; sinon, $|\tilde{C}_i| = 2|C_i|$.
- (3) Si $C_i > C_{i-1}, C_{i+1}$, alors $\tilde{C}_i$ commence par β (donc termine aussi par β) où $\beta = 1 + yx$ est la flèche β dans $D(1\mathcal{A})^q$ avec $q = 2^{n-2}$ qui est le carquois avec relations de kG .

Nous pensons que le suivant est vrai.

Problème 6

$$\text{Ind}_{T_0}^G M(C) \cong M(\tilde{C})$$

Dans le deuxième chapitre de la partie II, on montre cet isomorphisme pour des cordes particulières en utilisant une méthode constructive. Nous remarquons que si ce problème était effectivement établie en général, cela donnerait une formule général pour le sommet d'un module indécomposable de type corde sur un 2-groupe diédral.

Fournissons maintenant un guide de lecture de cette these.

Dans la partie I, le premier chapitre est de nature préliminaire. Après avoir fixé des notations dans Section 1.1, on donne la notion d'algèbre bisérielle spéciale dans Section 1.2 et on étudie les formes possibles des relations sur une algèbre bisérielle spéciale dans Section 1.3. Dans Section 1.4, on décrit la classification des modules indécomposables sur une telle algèbre. Un théorème très utile de W. Crawley-Boevey est cité dans Section 1.5. Section 1.6 commence par une brève introduction à la théorie d'Auslander-Reiten et on décrit concrètement les suites d'Auslander-Reiten et le carquois d'Auslander-Reiten d'une algèbre bisérielle spéciale. Cette section termine par une étude des cordes minimales des composantes de type $\mathbb{Z}A_\infty$ due à C. Geiss ([20]). Dans les deux dernières sections de ce chapitre, on rappelle les résultats de Karin Erdmann et Thorsten Holm concernant la classification des blocs à défaut diédral et on décrit les carquois d'Auslander-Reiten de ces blocs .

Le deuxième chapitre contient une preuve du théorème de Jan Schröer et Alexander Zimmermann cité ci-dessus. Après avoir énoncé le théorème (Section 2.1), on étudie d'abord les formes explicites d'un morphisme qui se factorise par un module projectif indécomposable. Section 2.3 contient deux lemmes qui rectifient et complètent les lemmes 3.2 et 3.3 de [44] et la démonstration modifiée de Théorème 3([44, Theorem 1.1]) est esquissée dans Section 2.4.

Nos calculs occupent le troisième chapitre et le quatrième chapitre de cette partie.

Dans la première section du chapitre 3, on esquisse la stratégie de calcul. Etant donné un bloc à défaut diédral, on cherche d'abord tous les modules indécomposables qui sont rigides. Pour cela, le carquois d'Auslander-Reiten est un outil organisateur. On regarde chaque composante de son carquois d'Auslander-Reiten et y localise les modules rigides. Comme tout module de type ruban admet une auto-extension non scindée donnée par la suite d'Auslander-Reiten commençant par lui-même, on n'a besoin de considérer que les modules de type corde. Pour une corde C ,

$$\text{Ext}_A^1(M(C), M(C)) = 0 \iff \underline{\text{Hom}}_A(\Omega M(C), M(C)) = 0$$

et

$$\underline{\text{End}}_A(M(C)) = \underline{\text{Hom}}_A(M(C), M(C)),$$

notre problème est donc de calculer l'espace des homomorphismes stable entre deux modules de type corde. Pour cela, on va utiliser le théorème de W. Crawley-Boevey (Théorème 1.5.1) qui décrit de façon combinatoire une base de l'espace des homomorphismes entre deux modules de type corde et cela réduit le problème à montrer qu'un morphisme est projectif ou non. On en donne des critères simples dans Section 3.2 qui permet de voir quand un morphisme ne se factorise par aucun module projectif. Quand il est nécessaire de prouver qu'un morphisme se factorise par un module projectif, on construit souvent explicitement une factorisation par un module projectif. Ayant trouvé et localisé dans le carquois d'Auslander-Reiten tous les modules indécomposables rigides, on cherche tous les modules rigides qui possèdent plusieurs facteurs indécomposables. Soit $M = \oplus_{i=1}^n M(C_i)$ un module rigide. Alors

$$\text{Ext}_A^1(M, M) = 0 \iff \text{Ext}_A^1(M(C_i), M(C_j)) = \underline{\text{Hom}}_A(\Omega M(C_i), M(C_j)) = 0, \forall 1 \leq i, j \leq n$$

et

$$\underline{\text{End}}_A(M) = (\underline{\text{Hom}}_A(M(C_i), M(C_j)))_{1 \leq i, j \leq n}$$

On rencontre de nouveau la tâche de calculer l'espace des homomorphismes stable entre deux modules de type corde.

Les algèbres $D(1A)^q$ avec $q \geq 1$, abordées dans Section 3.3, sont faciles à traiter et les résultats principaux sont Proposition 3.3.1 et Proposition 3.3.2.

Le carquois d'Auslander-Reiten de l'algèbre $D(2A)^1(c)$ avec $c = 0$ est composé d'une infinité de 1-tubes, un 3-tube non régulier et une composante de type $\mathbb{Z}\bar{A}_{1,3}$ (Proposition 3.4.1). Théorème 3.4.2 montre qu'il existe deux types de modules rigides: les trois modules au bout du 3-tube (qu'on appelle de quasi-longueur 0, cf.

Définition 1.6.5) sont de type i et les trois modules just au-dessus des modules de type i sont de type ii (qui sont de quasi-longueur 1). Proposition 3.4.3 calcule les possibilités quand on peut avoir un module rigide de la forme $M_s \oplus M_t$ avec $s, t \in \{i, ii\}$ (on dit que ces modules sont de type **(s+t)**) et le résultat final est contenu dans Théorème 3.4.4 dans lequel on calcule les carquois avec relations des algèbres des endomorphismes stables de tous les modules rigides.

Le carquois d'Auslander-Reiten de l'algèbre $D(2\mathcal{A})^s(c)$ avec $s \geq 2$ et $c = 0$ est composé d'une infinité de 1-tubes, un 3-tube non régulier et une infinité de composantes de type $\mathbb{Z}A_\infty^\infty$ (Proposition 1.8.6). Théorème 3.5.2 énonce qu'il existe trois types de modules rigides: les trois modules de quasi-longueur 0 dans le 3-tube sont de type i , les trois modules de quasi-longueur 1 sont de type ii et les modules de type iii sont les syzygies de $M(\alpha)$ contenus dans $Q(\alpha) \cup Q(\Omega(\alpha))$ qui sont deux composantes régulières de type $\mathbb{Z}A_\infty^\infty$ (pour un module M ou une corde C , on note $Q(M)$ ou $Q(C)$ la composante qui le contient). La preuve de ce théorème 3.5.2 est achevée par une série de propositions 3.5.3, 3.5.4, 3.5.5 et 3.5.6. Surtout la preuve longue de Proposition 3.5.6 est reportée à la fin de Section 3.5, qui se décompose en la proposition 3.5.12 et les lemmes 3.5.13- 3.5.28. Ensuite les propositions 3.5.3(**i+i, ii+ii, i+ii**), 3.5.7(**iii+iii**), 3.5.8(**i+iii**), 3.5.9(**ii+iii**) et 3.5.10 (**i+ii+iii**) calculent les modules rigides à plusieurs facteurs et leur algèbres des endomorphismes stables. Le résultat final est résumé dans Théorème 3.5.11.

L'analyse des algèbres $D(2\mathcal{A})^s(c)$ avec $s \geq 1$ et $c = 1$ est analogue à celle de $D(2\mathcal{A})^s(c)$ avec $s \geq 1$ et $c = 0$. Les algèbres $D(2\mathcal{A})^s(c)$ avec $s \geq 1$ et $c = 1$ ne sont pas bisérielles spéciales et les arguments sont donc plus compliqués mais restent en gros les mêmes. Dans le cas des algèbres $D(2\mathcal{A})^s(c)$ avec $s \geq 1$ et $c = 0$, les lemmes 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3 et les propositions 1.4.6, 1.6.11 sont les énoncés clefs. On donne la forme modifiée de ces assertions, respectivement dans les lemmes 3.6.1, 3.6.2, 3.6.3 et les propositions 4.1.5 et 4.1.6 de Section 3.6.1 et 3.6.2. L'analyse des algèbres $D(2\mathcal{A})^s(c)$ avec $s \geq 1$ et $c = 1$ utilise ces assertions modifiées.

Le carquois d'Auslander-Reiten de l'algèbre $D(2\mathcal{A})^1(c)$ avec $c = 1$ est composé d'une infinité de 1-tubes, un 3-tube non régulier et une composante de type $\mathbb{Z}A_{1,3}$ (Proposition 3.6.6). Théorème 3.6.7 montre qu'il existe deux type de modules rigides: les trois modules de quasi-longueur 0 dans le 3-tube sont de type i et les trois modules de quasi-longueur 1 sont de type ii . Le résultat final est contenu dans Théorème 3.6.8 dans lequel on calcule les carquois avec relations des algèbres des endomorphismes stables de tous les modules rigides.

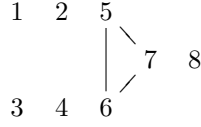
Le carquois d'Auslander-Reiten de l'algèbre $D(2\mathcal{A})^s(c)$ avec $s \geq 2$ et $c = 1$ est composé d'une infinité de 1-tubes, un 3-tube non régulier et une infinité de composantes de type $\mathbb{Z}A_\infty^\infty$. (Proposition 3.6.9). Théorème 3.6.10 énonce qu'il existe trois type de modules rigides: les trois modules de quasi-longueur 0 dans le 3-tube sont de type i , les trois modules de quasi-longueur 1 sont de type ii et les modules de type iii sont les syzygies de $M(\alpha)$. et le résultat final est énoncé dans Théorème 3.6.11.

Section 3.7 rappelle les calculs de Alexander Zimmermann pour l'algèbre $D(3\mathcal{K})^{1,1,1}$ ([45]).

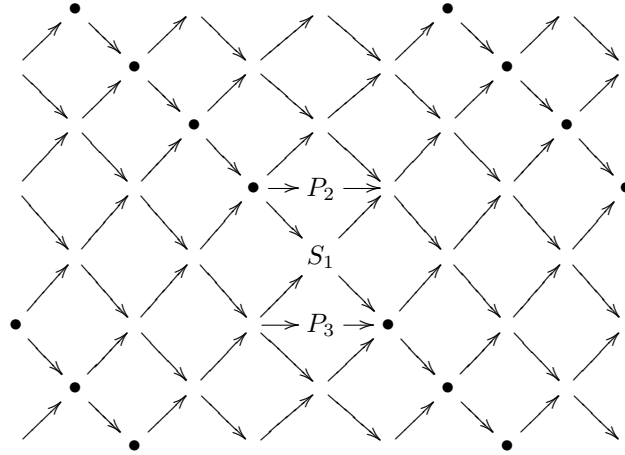
Le quatrième chapitre est consacré à l'étude de l'algèbre $D(3\mathcal{K})^{1,b,1}$ avec $b \geq 2$. Les calculs sont assez volumineux et augmentent largement la taille de cette thèse (comparer la taille de ce chapitre avec celle de tous les autres chapitres).

Le carquois d'Auslander-Reiten de $D(3\mathcal{K})^{1,b,1}$ avec $b \geq 2$ est composé d'une infinité de 1-tubes, deux 3-tubes Ω -stables, une composante non régulière de type $\mathbb{Z}A_\infty^\infty$ contenant S_1 (aussi P_2 et P_3), une composante non régulière de type $\mathbb{Z}A_\infty^\infty$ contenant S_2 (aussi S_3 et P_1) et une infinité de composantes régulières de type $\mathbb{Z}A_\infty^\infty$. Il existe 8 types de modules indécomposables rigides (Théorème 4.1.1). Les quatre premiers types sont les modules de quasi-longueur 0 ou 1 dans les deux 3-tubes où les types 1 et 3 sont de quasi-longueur 0 et où les types 2 et 4 de quasi-longueur 1. Le type 5 (resp le type 6) sont les syzygies d'une certaine corde qui forment une Ω -orbite dans les deux composantes régulières de type $\mathbb{Z}A_\infty^\infty$ $Q(\alpha_2) \cup \Omega Q(\alpha_2)$ (resp. $Q(\beta_2) \cup \Omega Q(\beta_2)$). Le type 7 (resp. type 8) sont tous les modules dans la composante $Q(S_1)$ (resp. $Q(S_2)$) non régulière de type $\mathbb{Z}A_\infty^\infty$ contenant S_1 (resp. S_2). Proposition 4.1.4 montre que tous les modules dans $Q(S_1) \cup Q(S_2)$ sont rigides. Dans cette proposition, on construit, pour chaque morphisme, une factorisation par un module projectif, qui est parfois très compliquée. La fin de Section 4.2 (Proposition 4.1.10 et Lemmes 4.1.11- 4.1.21) est consacrée à la preuve de Proposition 4.1.9 qui montre qu'il n'existe plus de modules rigides dans une composante régulière de type $\mathbb{Z}A_\infty^\infty$ autre que $Q(\alpha_2), \Omega Q(\alpha_2), Q(\beta_2), \Omega Q(\beta_2)$.

Section 4.3 étudie les modules rigides à deux facteurs. Le résultat de cette section peut être résumé par le graphe suivant:

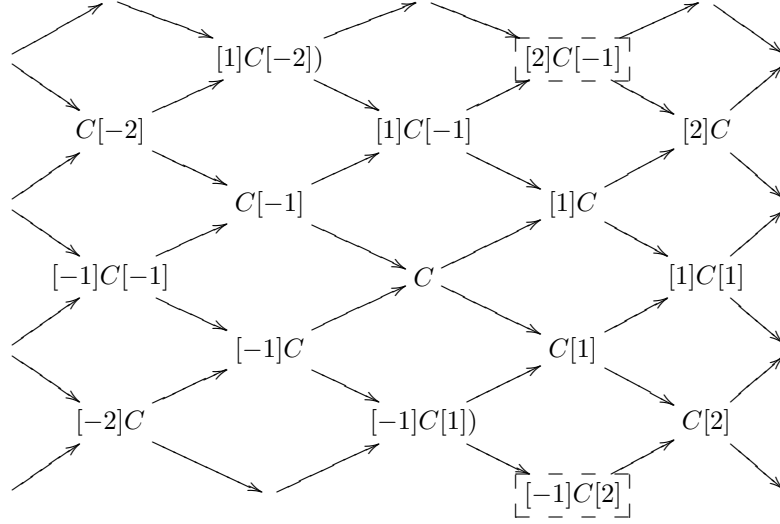


Dans ce diagramme, un trait reliant deux nombres i et j signifie que deux modules de type respectivement i et j n'apparaissent pas comme facteurs dans un module rigide; s'il n'existe pas de traits reliant i et j , un module de type i avec i étant dans la première ligne et un module de type j avec j étant dans la troisième ligne sont indépendants, i.e. tout morphisme entre ces deux modules se factorise par un module projectif. Le cas **(5+6)** est impossible d'après Lemme 4.2.11 et Lemme 4.2.20 et 4.2.22 montrent que **(5+7)** et **(6+7)** sont impossibles. Les lemmes 4.2.12- 4.2.23 étudie les possibilités $(i+j)$ pour $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$ et $j \in \{7, 8\}$. Prenons, par exemple, le cas **(1+7)** qui possède une configuration spéciale. Dans un module de type **(1+7)**, disons $M_1 \oplus M_7$, où M_1 (resp. M_7) est un module de type 1 (resp. de type 7). Si $M_1 = M(\alpha_1)$, alors M_7 se situe dans $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag}(S_1)$ où $\text{sdiag}(S_1)$ est la diagonale de nord-ouest à sud-est passant par S_1 et où $\Omega^{6n} \text{sdiag}(S_1)$ est la diagonale obtenue par déplacer $\text{sdiag}(S_1)$ de $3n$ pas vers le côté gauche. Voir le graphe suivant (les points noirs sont les positions possibles de M_7):



Les autres cas ont des configurations similaires. Le cas **(7+8)** est traité dans les lemmes 4.2.24- 4.2.26 et la proposition 4.2.27 dont les preuves sont compliquées. Si $M_7 = M(C) \in Q(S_1)$, alors $M_8 = \Omega M(D) \in Q(S_2)$

avec $D = [-1]C[2]$ ou $D = [2]C[-1]$. On peut visualiser la situation comme suit



Le premier chapitre de la partie II commence par des rappels sur les représentations modulaires des groupes finis (Section 1.1). Et puis, on calcule les sommets des modules indécomposables respectivement sur les groupes cycliques (Section 1.2), le groupe de Klein (Section 1.3), le groupe diédral d'ordre 8 (Section 1.4) et les groupes diédraux d'ordre 2^n avec $n \geq 4$. Dans les sous-sections 1.5.2 et 5.5.3, on définit l'ordre et énonce Problème 6.

Dans le deuxième chapitre, on développe une méthode constructive pour résoudre Problème 6. Les notions de suite indépendante et de suite indépendante canonique sont introduites dans les deux premières sections. Après avoir préparé des propriétés élémentaires de l'ordre (Section 1.3), on traite des cas particuliers dans les sections qui restent.

Contents

Introduction	i
I Algèbres courtoises et blocs à défaut diédral	1
1 Algèbres bisérielles spéciales	2
1.1 Carquois avec relations	2
1.2 Algèbres bisérielles spéciales	3
1.3 Relations sur une algèbre bisérielle spéciale	6
1.4 Modules indécomposables sur une algèbre bisérielle spéciale	7
1.5 Morphismes Explicites	13
1.6 Carquois d'Auslander-Reiten d'une algèbre bisérielle spéciale	17
1.6.1 Rappels sur la théorie d'Auslander-Reiten	17
1.6.2 Suites d'Auslander-Reiten	20
1.6.3 Carquois d'Auslander-Reiten d'une algèbre bisérielle spéciale	23
1.6.4 Composantes de type $\mathbb{Z}A_\infty$	24
1.7 Blocs à défaut diédral	26
1.8 Carquois d'Auslander-Reiten des bloc à défaut diédral	27
2 Théorème de base	30
2.1 Enoncé du théorème principal	30
2.2 Morphismes projectifs	31
2.3 Deux lemmes préparatoires	34
2.4 Preuve du théorème principal	41
3 Blocs à défaut diédral I	42
3.1 Stratégie	42
3.2 Préliminaires	43
3.3 Cas d'un seul module simple	44
3.4 $D(2A)^k(c)$ avec $k = 1$ et $c = 0$	47
3.5 $D(2A)^s(c)$ avec $s \geq 2$ et $c = 0$	56
3.6 $D(2A)^s(c)$ avec $s \geq 1$ et $c = 1$	87
3.6.1 Lemmes clés modifiés	87
3.6.2 Syzygies	90
3.6.3 $D(2A)^1(1)$	97
3.6.4 $D(2A)^s(1)$ avec $s \geq 2$	99
3.7 $D(3K)^{a,b,c}$ avec $a = b = c = 1$	101

4	Blocs à défaut diédral II	106
4.1	Modules indécomposables rigides	116
4.2	Deux facteurs	139
4.3	Trois facteurs	213
4.4	Quatre facteurs	268
4.5	Cinq facteurs	306
4.6	Six facteurs	336
II	Sommets des modules indécomposables	347
5	Sommets des modules	348
5.1	Préliminaires	348
5.2	Groupes cycliques	350
5.3	Groupe de Klein	351
5.4	Groupe diédral d'ordre 8	352
5.4.1	Induction de H à G	355
5.4.2	Induction de T_0 à G	355
5.4.3	Induction de T_1 à G	368
5.5	Groupes diédraux d'ordre ≥ 16	369
5.5.1	Induction de H à G	370
5.5.2	Définition d'un ordre sur l'ensemble des segments d'une corde	371
5.5.3	Une formule pour les cordes induites	373
6	Une méthode constructive	375
6.1	Suites indépendentes	375
6.2	Suites indépendentes canoniques	377
6.3	Propriétés élémentaires de l'ordre	382
6.4	Un cas particulier	386
6.5	Un cas plus compliqué	389
6.6	Nombre de vallées $v(C)$ et le cas $v(C) = 1$	392
6.6.1	Construire $\tilde{C}^{(0)}$	393
6.6.2	Construire $\tilde{C}^{(1)}$	399
6.6.3	Coller $\tilde{C}^{(0)}$ et $\tilde{C}^{(1)}$	402
	Bibliographie	405

Part I

Algèbres courtoises et blocs à défaut diédral

Chapter 1

Algèbres bisérielles spéciales

1.1 Carquois avec relations

Fixons un corps k . Un *carquois* $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ consiste en la donnée d'un ensemble de *sommets* Q_0 , d'un ensemble de *flèches* Q_1 , d'une application $s : Q_1 \rightarrow Q_0$ qui associe à une flèche la *source*, et d'une application $t : Q_1 \rightarrow Q_0$ le *but*.

Chaque sommet $i \in Q_0$ peut être considéré comme un chemin de longueur nulle, noté e_i . Un *chemin* C de longueur $n \geq 1$ dans Q est de la forme $C = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n$ avec $\alpha_j \in Q_1$ pour tout $1 \leq j \leq n$ et où $s(\alpha_{j+1}) = t(\alpha_j)$ pour tout $1 \leq j \leq n-1$ (on dit que α_j et α_{j+1} sont composables). On pose $s(C) = s(\alpha_1)$, $t(C) = t(\alpha_n)$ et $s(e_i) = i = t(e_i)$. Un chemin de longueur infinie est une suite infinie de flèches $\cdots \alpha_n \alpha_{n+1} \cdots$ telle que toutes deux flèches successives soient composables.

L'*algèbre des chemins* kQ est l'espace vectoriel ayant base l'ensemble des chemins de longueur finie (y compris les sommets les chemins de longueur 0) muni de la multiplication donnée par la concaténation des chemins: pour deux chemins C et D , le produit $C \cdot D$ est CD , si $t(C) = s(D)$ et est nul sinon.

Une *représentation* V de Q est la donnée d'un espace vectoriel $V(i)$ en chaque sommet $i \in Q_0$ et d'une application linéaire $V(\alpha) : V(i) \rightarrow V(j)$ pour toute flèche $(\alpha : i \rightarrow j) \in Q_1$. Soient V et W deux représentations de Q , un morphisme $f : V \rightarrow W$ est la donnée d'une application linéaire $f(i) : V(i) \rightarrow W(i)$ en chaque sommet $i \in Q_0$ telles que pour toute flèche $(\alpha : i \rightarrow j) \in Q_1$, on ait $f(j) \circ V(\alpha) = W(\alpha) \circ f(i)$. On voit facilement que la catégorie des représentations de Q est équivalente à celle des kQ -modules à droite.

Il existe un module simple, noté S_i , correspondant à chaque sommet $i \in Q_0$, qui associe l'espace nul à tout sommet différent de i et l'espace de dimension 1 à i . Il existe aussi en chaque sommet un module projectif indécomposable

$$P_i = e_i kQ = \oplus_{s(C)=i} kC$$

et un module injectif indécomposable

$$I_i = \oplus_{t(C)=i} kC.$$

On désigne par kQ^+ l'idéal de kQ engendré par Q_1 . Un idéal I est admissible s'il existe un entier $n \geq 2$ tel que $(kQ^+)^n \subseteq I \subseteq (kQ^+)^2$. Une *relation* est une combinaison linéaire de chemins de longueur ≥ 2 de même source et de même but, i.e. une relation $R = \sum_{j=1}^n \lambda_j C_j$ où pour tout $1 \leq j \leq n$, $\lambda_j \in k^*$ et où les C_j sont des chemins tels que pour tout $1 \leq j \leq n$, $|C_j| \geq 2$, $s(C_j) = s(C_1)$ et $t(C_j) = t(C_1)$. Soit ρ un ensemble de relations tel que l'idéal $\langle \rho \rangle$ engendré par ρ soit admissible. Le quotient $kQ/\langle \rho \rangle$ est dit *l'algèbre définie par le carquois avec relations* (Q, ρ) . Une représentation V de (Q, ρ) est une représentation de Q dont les applications linéaires $V(\alpha)$ avec $\alpha \in Q_1$ vérifient les relations contenues dans ρ . Evidemment, une représentation de (Q, ρ) (de dimension finie) équivaut à un $kQ/\langle \rho \rangle$ -module à droite (de dimension finie). Sur (Q, ρ) , le module simple S_i

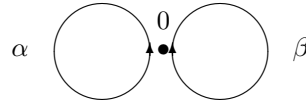
en chaque sommet $i \in Q_0$ reste le même et le module projectif indécomposable

$$P_i = e_i kQ = \sum_{s(C)=i} kC \subseteq kQ$$

qui est une somme mais pas nécessairement une somme directe. Dans la suite, on écrit souvent $R = 0$ qui signifie que $R \in \langle \rho \rangle$.

Dans cette thèse, on ne considère que les représentations de dimension finie, i.e. les représentations V telles que $\sum_{i \in Q_0} \dim_k V(i) < +\infty$.

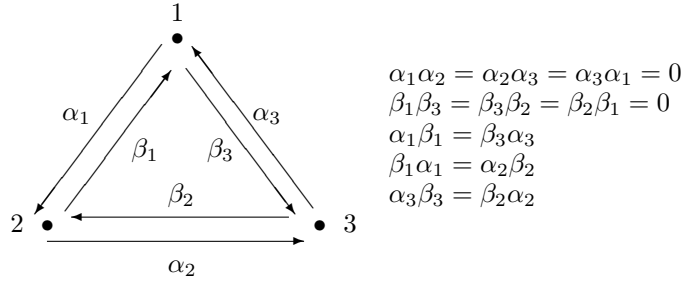
Exemple 1.1.1 Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique 2. Prenons le groupe $V_4 = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$. L'algèbre de groupe kV_4 est isomorphe à l'algèbre définie par le carquois avec relations suivant (voir par exemple [5, chapitre 4, section 4.3]), noté $D(1A)^1$:



$$\alpha^2 = 0 = \beta^2, \alpha\beta = \beta\alpha$$

Une représentation V de ce carquois avec relations est donc un espace vectoriel V_0 (de dimension finie) et deux automorphismes linéaires $V(\alpha)$ et $V(\beta)$ tels que $V(\alpha)^2 = 0 = V(\beta)^2$ et $V(\alpha) \circ V(\beta) = V(\alpha) \circ V(\beta)$.

Exemple 1.1.2 Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique 2. Soit A_4 le groupe alterné d'ordre 12. L'algèbre de groupe kA_4 est isomorphe à l'algèbre définie par le carquois avec relations suivant ([15, V2.4.1 COROLLARY]), noté $D(3K)^{1,1,1}$:



1.2 Algèbres bisérielles spéciales

Définition 1.2.1 Un carquois avec relations (Q, ρ) est dit bisériel spécial s'il satisfait les propriétés suivantes:

SB1 Chaque sommet est la source d'au plus deux flèches et est le but d'au plus deux flèches.

SB2 Étant donné une flèche α , il existe au plus une flèche β telle que $t(\alpha) = s(\beta)$ et que $\alpha\beta$ ne soit pas dans $\langle \rho \rangle$ et au plus une flèche γ telle que $t(\gamma) = s(\alpha)$ et que $\gamma\alpha$ ne soit pas dans $\langle \rho \rangle$.

SB3 Tout chemin de longueur infinie contient un sous-chemin fini appartenant à ρ .

Soit A une algèbre. On appelle A une *algèbre bisérielle spéciale* si elle est équivalente au sens de Morita à l'algèbre définie par un carquois avec relations (Q, ρ) qui est bisériel spécial.

Pour une algèbre bisérielle spéciale A , le carquois avec relations (Q, ρ) est définie de façon unique. L'algèbre $kQ/\langle \rho \rangle$ est son algèbre basique ([20] ou [5, Chapitre 4, Section 4.1]) et on dit que (Q, ρ) est le carquois avec relations associé à l'algèbre A .

Dans la suite, ρ^+ désigne l'ensemble des chemins le plus petit tel que tout élément de ρ est combinaison linéaire de chemins contenus dans ρ^+ .

Comme dans [42, Section 2], on définit deux fonctions $\sigma, \epsilon : Q_1 \rightarrow \{-1, 1\}$ telles que les conditions suivantes soient vérifiées

- (1) Si α et β sont deux flèches différentes avec $t(\alpha) = t(\beta)$, alors $\epsilon(\alpha) = -\epsilon(\beta)$.
- (2) Si α et β sont deux flèches différentes avec $s(\alpha) = s(\beta)$, alors $\sigma(\alpha) = -\sigma(\beta)$.
- (3) Si α et β sont deux flèches telles que $t(\alpha) = s(\beta)$ et $\alpha\beta \notin \rho^+$, alors $\epsilon(\alpha) = -\sigma(\beta)$.
- (4) Soit i un sommet tel qu'il y existe une unique flèche entrante α et une unique flèche sortante β . Alors si $\alpha\beta \in \rho^+$, définissons $\epsilon(\alpha) = \sigma(\beta)$.

Remarque 1.2.1 Les deux applications σ et ϵ se définissent localement, i.e. leur valeurs en un sommet sont indépendantes de celles en un autre sommet.

Pour définir la notion de corde, introduisons le carquois $\overline{Q}$ associé à un carquois $Q = (Q_0, Q_1)$. On pose $\overline{Q}_0 = Q_0$ et $\overline{Q}_1 = Q_1 \cup Q_1^{-1}$ où Q_1^{-1} est l'ensemble des flèches inverses formelles α^{-1} avec $\alpha \in Q_1$. Les deux fonctions s et t s'étendent sur Q_1^{-1} par la définition $s(\alpha^{-1}) = t(\alpha)$ et $t(\alpha^{-1}) = s(\alpha)$ pour tout $\alpha \in Q_1$. On pose par symétrie aussi $(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$. Désignons $\overline{\rho^+} := \{C|C \text{ ou } C^{-1} \in \rho^+\}$.

Définition 1.2.2 Soient A une algèbre bisérielle spéciale et (Q, ρ) son carquois avec relations.

- (1) Pour chaque sommet $i \in Q_0$, on définit deux cordes de longueur 0: $1_{(i,1)}$ et $1_{(i,-1)}$ avec $s(1_{(i,u)}) = t(1_{(i,u)}) = i$ pour tout $u \in \{-1, 1\}$. On pose également $1_{(i,1)}^{-1} = 1_{(i,-1)}$.
- (2) Une corde de longueur $n \geq 1$ est un chemin sur $\overline{Q}$, disons $c_1 c_2 \cdots c_n$, de telle sorte que les propriétés suivantes soient vérifiées:

St1 $t(c_i) = s(c_{i+1})$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$.

St2 $c_i \neq c_{i+1}^{-1}$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$.

St3 Pour tous i et j tels que $1 \leq i < j \leq n$, $c_i c_{i+1} \cdots c_j \notin \overline{\rho^+}$

L'entier n est par définition la longueur de $C = c_1 c_2 \cdots c_n$, notée $|C| = n$. Définissons $s(C) = s(c_1)$ et $t(C) = t(c_n)$ et $C^{-1} = c_n^{-1} \cdots c_1^{-1}$.

L'ensemble des cordes de longueur ≥ 0 est notée St .

Exemple 1.2.2 L'algèbre $D(1A)^1$ dans Exemple 1.1.1 est une algèbre bisérielle spéciale. Sur cette algèbre, $\alpha\beta^{-1}$ est une corde, en revanche $\alpha\beta$ ne l'est pas, puisque $\alpha\beta \in \rho^+$. On illustre souvent une corde de longueur n en utilisant un graphe A_{n+1} . On dessine un trait de nord-ouest à sud-est qui désigne une flèche directe et un trait de

nord-est à sud-ouest qui désigne une flèche inverse. Par exemple, $\alpha\beta^{-1}$ est illustrée par $\begin{array}{ccc} 0 & \alpha & 0 \\ & \searrow & \nearrow \\ & 0 & \beta \end{array}$.

On peut étendre les deux fonctions σ et ϵ sur St comme suit:

- (1) $\sigma(1_{(i,u)}) = u$ et $\epsilon(1_{(i,u)}) = -u$ pour tout $u \in \{-1, 1\}$.
- (2) Pour une flèche α , $\sigma(\alpha^{-1}) = \epsilon(\alpha)$ et $\epsilon(\alpha^{-1}) = \sigma(\alpha)$.
- (3) Si $C = c_1 c_2 \cdots c_n$ est une corde de longueur > 0 , $\sigma(C) = \sigma(c_1)$ et $\epsilon(C) = \epsilon(c_n)$.

Soient C et D deux cordes de longueur strictement positives telles que $t(C) = s(D)$. Le produit CD est définie si leur concaténation CD est encore une corde. Pour une corde C de longueur ≥ 0 , on définit $1_{(s(C),u)}C = C$ si $\sigma(C) = u$ pour $u \in \{-1, 1\}$ et $C1_{(t(C),u)} = C$ si $\epsilon(C) = -u$. Sinon, le produit d'une corde arbitraire avec une corde de longueur nulle n'est pas défini.

Remarque 1.2.3 Si C et D sont deux cordes (possiblement de longueur nulle) telles que CD soit une corde, alors $t(C) = s(D)$ et $\epsilon(C) = -\sigma(D)$.

Définition 1.2.3 On dit qu'une corde $C = c_1 \cdots c_n$ de longueur strictement positive est directe (resp. inverse) si tous les c_i sont dans Q_1 (resp. tous les c_i dans Q_1^{-1}). On se sert souvent de l'écriture suivante $C = C_1 C_2 \cdots C_s$ où les cordes C_i sont directes ou inverses et telle que pour $1 \leq i \leq s-1$, C_i est directe (resp. inverse) ssi C_{i+1} est inverse (resp. directe). Les sous-cordes C_i sont appelées *segments* de C .

Définition 1.2.4 Une corde C est de *type ruban* si toute puissance strictement positive de C est définie et si C n'est une puissance d'aucune sous-corde stricte. L'ensemble des cordes de type ruban est noté $\mathcal{B}d$.

Exemple 1.2.4 Sur l'algèbre $D(1A)^1$ dans Exemple 1.1.1, $\alpha\beta^{-1}$ est une corde de type ruban.

On dispose de deux relations d'équivalence: $\sim$ sur $\mathcal{S}t$ et $\sim_r$ sur $\mathcal{B}d$.

$\sim$ identifie une corde à son inverse et

$\sim_r$ identifie une corde de type ruban $C = c_1 c_2 \cdots c_n$ à toutes ses rotations $c_i c_{i+1} \cdots c_n c_1 \cdots c_{i-1}$ et leur inverses.

Définition 1.2.5 Une *algèbre de corde* est une algèbre bisérielle spéciale telle que dans son carquois avec relations (Q, ρ) , tout élément dans ρ soit un chemin.

Définition 1.2.6 Un carquois avec relations est dit *courtois* s'il est bisériel spécial et s'il vérifie en plus les conditions suivantes:

G1 Les éléments dans ρ sont des chemins de longueur 2.

G2 Pour chaque flèche α , il existe au plus une flèche β telle que $\alpha\beta \in \rho$ et au plus une flèche γ telle que $\gamma\alpha \in \rho$.

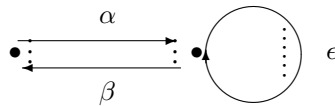
Une algèbre est *courtoise* si elle est équivalente au sens de Morita à l'algèbre définie par un carquois avec relations qui est courtois.

Lemme 1.2.5 ([42, Lemma 2.1]) Soit A une algèbre courtoise. Si C et D sont deux cordes telles que $t(C) = s(D)$. Alors

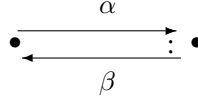
G1' CD est une corde ssi $\sigma(D) = -\epsilon(C)$.

On se sert souvent d'une écriture spéciale pour un carquois avec relations qui est courtois.

Exemple 1.2.6



Dans cet exemple, les points verticaux à gauche reliant β et α signifie que $\beta\alpha = 0$, $\alpha\beta = 0$ est indiquée par les points verticaux à droite reliant α et β et la ligne pointillée à droite dans la boucle veut dire que $\epsilon^2 = 0$.

Exemple 1.2.7

Dans cet exemple, la seule relation est $\alpha\beta = 0$ (comparer avec l'exemple précédent).

1.3 Relations sur une algèbre bisérielle spéciale

Soit $A = kQ/I$ une algèbre bisérielle spéciale.

Définition 1.3.1 Une relation de la forme $C = 0$ avec C un chemin de longueur ≥ 2 est dite une *zéro-relation*; une relation de la forme $\lambda C - \mu D = 0$ avec $\lambda, \mu \in k^*$, et C, D deux chemins de longueur ≥ 2 est dite une *relation binomiale*; une relation $\sum_{j=1}^n \lambda_j C_j = 0$ est *minimale*, si pour toute partie stricte $J \subset \{1, 2, \dots, n\}$, $\sum_{j \in J} \lambda_j C_j \neq 0$

Notre objectif est de montrer la proposition suivante:

Proposition 1.3.1 Soit $R = \sum_{u=1}^n \lambda_u C_u = 0$ une relation minimale où pour tout $1 \leq u \leq n$, $\lambda_u \in k^*$ et où les C_u sont des chemins de longueur ≥ 2 . Alors $n = 1$ ou 2 , i.e. R est une zéro-relation ou une relation binomiale.

Cette proposition permet de choisir ρ un ensemble formé de zéro-relations minimales et de relations binomiales minimales tel que $I = \langle \rho \rangle$. On a besoin d'un lemme.

Lemme 1.3.2 Soient $\alpha, \beta \in Q_1$ telles que $s(\alpha) = s(\beta)$. Soit E le cycle orienté (i.e. un chemin dont la source et le but coïncident et qui n'appartient pas à I) de longueur minimale tel que sa première flèche soit α et F le cycle orienté de longueur minimale tel que sa première flèche soit β (E et F sont uniques s'ils existent grâce à l'axiome SB2 de Définition 1.2.1). Soit γ (resp. δ) la dernière flèche de E (resp. de F). Étant donné C un cycle orienté de première flèche α , alors

- (i) Si $\gamma\alpha \neq 0$, $C = E^s$ une puissance de E avec $s \in \mathbb{N}^*$
- (ii) Si $\gamma\alpha = 0$ et $\delta\beta \neq 0$, $C = EF^s$ avec $s \in \mathbb{N}^*$
- (iii) Si $\gamma\alpha = 0$ et $\delta\beta = 0$, $C = EFE \dots$ dans lequel E et F apparaissent de façon alternée.

Démonstration Soient $E = \alpha_1 \dots \alpha_n$, $C = \beta_1 \dots \beta_m$ et $F = \gamma_1 \dots \gamma_u$ avec $\alpha_1 = \beta_1 = \alpha$, $\alpha_n = \gamma$, $\gamma_1 = \beta$ et $\gamma_u = \delta$. Alors il existe $1 \leq s \leq n, m$ tel que pour tout $1 \leq i \leq s$, $\alpha_i = \beta_i$. Si $s < n, m$, alors posons $\eta := \alpha_s = \beta_s$, on a $\eta\alpha_{s+1} \neq 0$ et $\eta\beta_{s+1} \neq 0$. Comme $\alpha_{s+1} \neq \beta_{s+1}$, cela contredit l'axiome SB2 de Définition 1.2.1. On obtient $s = n$ grâce à la minimalité de E et donc $C = EC_1$ pour un chemin C_1 . Supposons que $|C_1| > 0$.

- (1) Si $\gamma\alpha = \alpha_n\alpha_1 \neq 0$, comme $\gamma\beta_{n+1} = \beta_n\beta_{n+1} \neq 0$, $\beta_{n+1} = \alpha$. Alors en comparant C_1 et E , on obtient $C = E^2C_2$. Si $|C_2| > 0$, alors la première flèche de C_2 est encore α . Une récurrence sur $|C|$ montre que $C = E^s$ pour certain entier positif s .
- (2) Supposons que $\gamma\alpha = \alpha_n\alpha_1 = 0$. Alors comme $\gamma\beta_{n+1} = \beta_n\beta_{n+1} \neq 0$, $\beta_{n+1} = \beta$. L'axiome SB2 assure que $C_1 = FC_2$. On distingue ensuite deux cas.
 - (2.1) Supposons que $\delta\beta = \gamma_u\gamma_1 \neq 0$. En utilisant la même méthode que celle de (1), on montre que $C_1 = F^s$ et par conséquent que $C = EF^s$.

(2.2) Supposons que $\delta\beta = \gamma_u\gamma_1 = 0$. Si $|C_2| > 0$, alors comme $\delta\beta_{n+u+1} = \beta_{n+u}\beta_{n+u+1} \neq 0$, $\beta_{n+u+1} = \alpha$. L'axiome SB2 assure que $C_2 = EC_3$. Si $|C_3| > 0$, alors $\beta_{2n+u+1} = \beta$ et on a $C_3 = FC_4$. On obtient par récurrence que $C = EFE \cdots$ dans lequel E et F apparaissent de façon alternée.

□

Preuve de Proposition 1.3.1 Supposons que $n \geq 2$ et que $C_u \neq 0$ pour tout $1 \leq u \leq n$. on va montrer que c'est une relation binomiale.

On peut écrire $R = \sum_{u=1}^m \lambda_u C_u + \sum_{v=m+1}^n \lambda_v C_v$ où les C_u avec $1 \leq u \leq m$ ont même première flèche et où les C_v avec $m+1 \leq v \leq n$ ont même première flèche différente de celle de C_1 . Grâce à l'axiome SB2, pour tout $1 \leq u \leq m$ et pour tout $m+1 \leq v \leq n$, C_u et C_v n'ont pas de flèches communes. On peut supposer que $|C_1| < \cdots < |C_m|$ et que $|C_{m+1}| < \cdots < |C_n|$ quitte à reordonner les chemins en question.

Supposons que $m \geq 2$. On va en déduire une contradiction.

Soient γ (resp. δ) la dernière flèche de C_1 (resp. D_1). Alors tous les C_u avec $1 \leq u \leq m$ ont même dernière flèche γ et tous les C_u avec $m+1 \leq u \leq n$ ont même dernière flèche δ . Comparons C_1 et C_2 . On a $C_2 = C_1 C'_2$ avec C'_2 un cycle orienté de source $j = t(C_1)$. Soit α la première flèche de C'_2 et soit E le cycle orienté de longueur minimale de première flèche α . On a $C'_2 = EC''_2$. Si la dernière flèche de E est δ , alors $C_2 = C_1 EC''_2$ et D_1 ont même flèche δ . C'est une contradiction. On a montré donc que la dernière flèche de E est γ . D'après le lemme précédent, il existe des entiers positifs $s_1 = 0 < s_2 < \cdots < s_m$ tels que $C_u = C_1 E^{s_u}$ pour tout $1 \leq u \leq m$. Constatons que $\delta\alpha = 0$ et que pour tout $m+1 \leq v \leq n$, $C_v E = 0$. Soit s le plus petit entier positif tel que $C_1 E^s = 0$. Notre hypothèse assure que $s > 0$. Alors pour tout $v \geq 2$, $C_v E^{s-1} = 0$ et on obtient que

$$0 = RE^{s-1} = \sum_{u=1}^m \lambda_u C_u E^{s-1} + \sum_{v=m+1}^n \lambda_v C_v E^{s-1} = \lambda_1 C_1 E^{s-1}$$

Cela contredit la minimalité de s . C'est une contradiction. On a trouvé une contradiction à la condition $m \geq 2$ et cela implique donc $m = 1$. Similairement $n - m = 1$. La relation est bien une relation binomiale minimale.

□

Désormais, étant donné une algèbre bisérielle spéciale $A = kQ/\langle \rho \rangle$, on suppose toujours que ρ soit composé de zéro-relations minimales et de relations binomiales minimales. Alors tout chemin dans ρ^+ est soit une zéro-relation soit un terme d'une relation binomiale minimale.

Lemme 1.3.3 Soit C un chemin tel que $C \in \langle \rho^+ \rangle - \langle \rho \rangle$. Alors il existe une relation binomiale minimale de la forme $\lambda C - \mu D$ avec $\lambda, \mu \in k^*$ et D un chemin de longueur ≥ 2 .

Démonstration C'est évident grâce à la convention que ρ soit composé de zéro-relations minimales et de relations binomiales minimales.

□

1.4 Modules indécomposables sur une algèbre bisérielle spéciale

Dans cette section, fixons une algèbre bisérielle spéciale $A = kQ/\langle \rho \rangle$. On va décrire les modules indécomposables sur A . Pour les démonstrations techniques, on renvoie le lecteur à [39] [11, Section 3] ou [5, chapter 4, section 4.11].

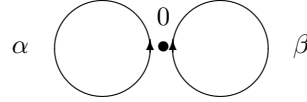
Soit d'abord Λ une algèbre de corde. On va décrire les modules indécomposables de type corde et de type ruban qui forment une liste complète des classes d'isomorphismes des modules indécomposables sur une algèbre de corde.

- (1) Soit $C = 1_{(i,u)}$ avec $i \in Q_0, u \in \{-1, 1\}$ une corde de longueur nulle. Alors on définit $M(C) = S_i$, le module simple correspondant au sommet i .
- (2) Soit $C = c_1 c_2 \cdots c_n$ une corde de longueur $n \geq 1$. Soit Q_C le carquois de graphe sous-jacent A_{n+1} :

$$e_0 \xrightarrow{c_1} e_1 \xrightarrow{c_2} e_2 \xrightarrow{c_3} \cdots \xrightarrow{c_{n-1}} e_{n-1} \xrightarrow{c_n} e_n$$

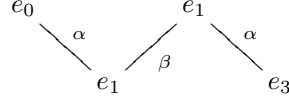
où les $e_0, \dots, e_n$ sont des sommets (non nécessairement différents) dans Q_0 tels que $e_{i-1} = s(c_i), e_i = t(c_i)$ pour toute flèche $c_i \in Q_1 \cup Q_1^{-1}$ avec $1 \leq i \leq n$ et où le trait marqué par c_i est une flèche directe (resp. inverse) ssi c_i l'est. Le module $M(C)$ a pour espace sous-jacent l'espace vectoriel de base les sommets e_i avec $0 \leq i \leq n$ et l'action est donnée par poser $c_s e_{s-1} = e_s$ si c_s est directe, et $c_s^{-1} e_s = e_{s-1}$, si c_s est inverse et nul sinon. On voit clairement $M(C) \simeq M(C^{-1})$.

Exemple 1.4.1 Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique 2. Regardons le carquois avec relation (Q, ρ) suivant (comaprere avec celui dans Exemple 1.1.1):



$$\alpha^2 = 0 = \beta^2, \alpha\beta = 0 = \beta\alpha$$

On voit facilement que c'est une algèbre de corde. Prenons une corde, par exemple, $C = \alpha\beta^{-1}\alpha$. En utilisant la notation introduite dans Exemple 1.2.2, Q_C est de la forme



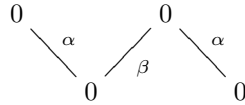
où les e_i sont tous le seul sommet 0. La représentation $M(C)$ est l'espace vectoriel $\oplus_{i=1}^4 k e_i$ avec $k e_i = k$ pour tout $0 \leq i \leq 3$ et l'action est donnée par

$$\alpha(e_0) = e_1, \alpha(e_1) = 0, \alpha(e_2) = e_3, \alpha(e_3) = 0$$

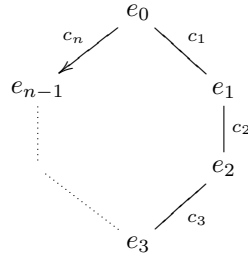
et

$$\beta(e_0) = 0, \beta(e_1) = 0, \beta(e_2) = e_1, \beta(e_3) = 0$$

Dans la pratique, par abus de notation, on illustre souvent aussi ce module par



- (3) Si $C = c_1 c_2 \cdots c_n$ une corde de type ruban. Quitte à remplacer C par son inverse ou une de ses rotations, on peut supposer que c_n soit une flèche inverse. Soit Q_C le carquois de graphe sous-jacent:



Comme ci-dessus, $e_{s-1} = s(c_s)$, $e_s = t(c_s)$ et l'arête marquée par c_i est à droite si c_i est directe, à gauche sinon. Soit (V, φ) où V est un espace vectoriel et où $\varphi : V \rightarrow V$ est une application linéaire indécomposable. On désigne par $M(C, V, \varphi)$ le module qui associe à un sommet $i \in Q_0$ l'espace $\oplus_{e_s=i} V_s$ avec $V_s = V$ et l'action est donnée par définir

- (1) $c_s : V_{s-1} \rightarrow V_s$ est l'identité, si $1 \leq s \leq n-1$ et si c_s est directe,
- (2) $c_s^{-1} : V_s \rightarrow V_{s-1}$ est l'identité, si $1 \leq s \leq n-1$ et si c_s est inverse,
- (3) $c_n^{-1} : V_n = V_0 \rightarrow V_{n-1}$ est φ

Exemple 1.4.2 Prenons encore l'algèbre Λ dans Exemple 1.4.1. On a vu que $C = \alpha\beta^{-1}$ est une corde de type ruban. Le carquois Q_C est de la forme

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\alpha} & \\ e_0 & \xrightarrow{\beta} & e_1 \end{array}$$

Soit (V, φ) où V est un espace vectoriel et où $\varphi : V \rightarrow V$ est une application linéaire indécomposable. Alors le module $M(C, V, \varphi)$ est l'espace vectoriel $V_0 \oplus V_1$ avec $V_0 = V = V_1$ tel que α y agisse comme $\begin{bmatrix} 0 & Id \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et β comme $\begin{bmatrix} 0 & \varphi \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Remarque 1.4.3 Si le corps de base k est algébriquement clos, étant donné (n, λ) avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in k^*$, on écrit souvent $M(C, n, \lambda)$ au lieu de $M(C, V, \varphi)$ avec $V = k^n$ et $\varphi = J_n(\lambda)$ où $J_n(\lambda)$ est le bloc de Jordan.

Théorème 1.4.4 ([11, page 161, Theorem])

Les modules $M(C)$ pour $C \in \mathcal{S}/\sim$ et les $M(C, n, \lambda)$ pour $C \in \mathcal{B}/\sim_r$ et avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in k^*$ forment une liste complète des classes d'isomorphismes des modules indécomposables sur une algèbre de corde Λ définie sur un corps algébriquement clos.

Pour l'algèbre bisérielle spéciale A , soit J l'ensemble des sommets i tel que P_i le module projectif indécomposable correspondant au sommet i est injectif et non-sériel, i.e. il existe au moins deux suites de composition pour P_i . Notons $I = \bigoplus_{i \in J} Soc(P_i)$ qui est un idéal bilatéral de A . L'algèbre quotient $\bar{A} = A/I$ est alors une algèbre de corde. Si on note $\text{ind}(\Gamma)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes des modules indécomposables sur une algèbre Γ , alors $\text{ind}(A) = \text{ind}(\bar{A}) \cup \{P_i, i \in J\}$. Voir [15, II.1.3] pour les détails.

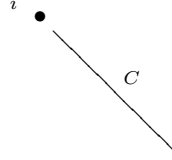
Définition 1.4.1 Dans un carquois avec relations (Q, ρ) , on dit qu'un chemin $C \notin \langle rho \rangle$ est maximale à droite (resp. à gauche) s'il n'existe pas de flèche $\beta \in Q_1$ telle que $C\beta \notin \langle \rho \rangle$ (resp. $\beta C \notin \langle \rho \rangle$).

Si (Q, ρ) est un carquois avec relations qui est bisérielle spéciale, une corde directe C est maximale à droite (resp. à gauche) s'il n'existe pas de flèche $\beta \in Q_1$ telle que $C\beta \notin \langle \rho^+ \rangle$ (resp. $\beta C \notin \langle \rho^+ \rangle$). Une corde inverse C est maximale à droite (resp. à gauche) s'il n'existe pas de flèche $\beta \in Q_1$ telle que $C\beta^{-1} \notin \langle \rho^+ \rangle$ (resp. $\beta^{-1}C \notin \langle \rho^+ \rangle$).

Constatons que dans une relation binomiale minimale $\lambda C - \mu D$ (voir Définition 1.3.1), les chemins C et D sont tous maximaux à droite. Soit $i \in Q_0$. On étudie les formes possibles du module projectif indécomposable P_i .

Cas 1 Supposons qu'il existe une seule flèche de source i . Il existe un unique chemin directe maximale à droite, noté C , grâce à l'axiome SB3 de Définition 1.2.1. On montre que C est une corde. En effet, si C n'était pas une corde, alors $C \in \langle \rho^+ \rangle - \langle \rho \rangle$, d'après Lemme 1.3.3, il existe une relation binomiale minimale $\lambda C - \mu D$ avec $\lambda, \mu \in k^*$ et D un chemin de longueur ≥ 2 . Or, en ce moment, comme cette relation est minimale, C et D ont de premières flèches différentes et il existe donc deux flèches différentes de source i . C'est une contradiction. On a montré que C est une corde et donc que C est une corde maximale à droite et

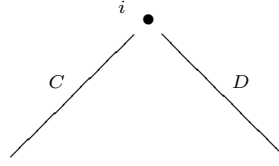
aussi un chemin maximal à droite. Soit $C = \alpha_1 \cdots \alpha_n$. Alors tout chemin de source i et qui n'appartient pas à $\langle \rho \rangle$ est de la forme $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ avec $0 \leq s \leq n$. Alors on en déduit que $M(C) = \sum_{s=0}^n k e_s = \sum_{s=0}^n k(e_0 \alpha_1 \cdots \alpha_s) \cong \sum_{D: s(D)=i} kD = P_i$, où $\{e_i\}$ est la base de $M(C)$ construite dans Section 1.4. Ce cas est illustré par le graphe suivant:



Ce module P_i est dit *un module indécomposable projectif unisériel* et C est le chemin maximal de P_i .

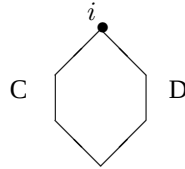
Cas 2 S'il existe deux flèches de source i , alors il existe deux chemins directs maximales à droite C et D de source i . Grâce à l'axiome SB2, C et D n'ont pas de flèches communes.

Cas 2.1 Si $t(C) \neq t(D)$, alors $P_i = M(C^{-1}D)$. En effet, on peut montrer que les deux chemins C et D sont des cordes et donc que $C^{-1}D$ est une corde. Car sinon, alors $C, D \in \langle \rho^+ \rangle - \langle \rho \rangle$ et il existe donc une relation binomiale minimale de la forme $\lambda C - \mu C'$ avec $\lambda, \mu \in k^*$ et C, C' deux chemins différents. C'est impossible, puisque les deux chemins maximaux à droite C' et D ont même première flèche et différents buts et cela contredit SB2. Soient $C = \alpha_1 \cdots \alpha_n$ et $D = \beta_1 \cdots \beta_m$, alors tout chemin de source i et qui n'appartient pas à $\langle \rho \rangle$ est de la forme $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ avec $0 \leq s \leq n$ ou $\beta_1 \cdots \beta_t$ avec $0 \leq t \leq m$. Cela montre que $P_i \cong M(C^{-1}D)$. Ce cas peut être illustré par le graphe suivant:



Dans ce cas, C et D sont des cordes maximales à droite et aussi des chemins maximaux à droite. Comme P_i n'est pas injectif, on dit que P_i est *un module indécomposable projectif non injectif non-sériel* et que C et D sont les chemins maximaux de P_i .

Cas 2.2 Si $t(C) = t(D)$, alors il existe $\lambda, \mu \in k^*$ tel que $\lambda C - \mu C' \in \rho^+ - \rho$. En effet, d'après Lemme 1.3.3, C fait partie d'une relation binomiale minimale $\lambda C - \mu C'$, alors $C' = D$, puisqu'ils ont même première flèche et sont tous maximaux à droite. Dans ce cas, C et D ne sont pas des cordes et $kC = kD$. On peut visualiser le module indécomposable projectif P_i comme suit:



Dans ce cas, P_i est aussi injectif. On dit que P_i est *un module indécomposable projectif-injectif non-sériel* et que C et D sont les chemins maximaux de P_i . Constatons que bien que P_i ne soit pas un module de type corde, $\text{Rad} P_i$ et $P_i / \text{Soc} P_i$ le sont. En effet, si $C = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n$ et $D = \beta_1 \cdots \beta_m$, alors $\text{Rad} P_i = M((\alpha_2 \cdots \alpha_n)(\beta_2 \cdots \beta_m)^{-1})$ et $P_i / \text{Soc} P_i = M((\alpha_1 \cdots \alpha_{n-1})^{-1}(\beta_1 \cdots \beta_{m-1}))$. Dans ce cas, C et D sont des chemins maximaux à droite et les cordes $\alpha_1 \cdots \alpha_{n-1}$ et $\beta_1 \cdots \beta_{m-1}$ sont des cordes maximales à droite et les cordes $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ et $\beta_2 \cdots \beta_m$ sont des cordes maximales à gauche.

Remarque 1.4.5 Soit A une algèbre bisérielle spéciale symétrique. Alors le but et la source de tout chemin maximal C d'un module indécomposable projectif P sont le même sommet, car $\text{Soc}(P) \cong P/\text{Rad}(P)$ ([5, Theorem 1.6.3]).

Définition 1.4.2 Soit A une algèbre bisérielle spéciale auto-injective. L'auto-injectivité implique que dans les discussions ci-dessus, le cas 2.1 est impossible. Soit $C = C_1 C_2 \cdots C_n$ avec les segments C_i pour $1 \leq i \leq n$. On va définir le premier syzygy de C , qui sera notée, par abus de notation,

$$\Omega(C) = D = D_0 D_1 \cdots D_n D_{n+1}$$

où D_i avec $0 \leq i \leq n+1$ sont les segments de D ou de longueur nulle.

Cas 1 C_1 est inverse et C_n est directe. Alors on pose $|D_0| = 0 = |D_{n+1}|$ et on demande les conditions suivantes:

- (i) $C_1^{-1} \alpha D_1$ et $C_2 D_2^{-1}$ sont les chemins maximaux de $P_{s(C_2)}$ où α est une certaine flèche.
- (ii) Pour tout $i \in \mathbb{Z}$ tel que $3 \leq 2i - 1 \leq n - 3$, $C_{2i-1}^{-1} D_{2i-1}$ et $C_{2i} D_{2i}^{-1}$ sont les chemins maximaux de $P_{s(C_{2i})}$.
- (iii) $C_{n-1}^{-1} D_{n-1}$ et $C_n \beta D_n^{-1}$ sont les chemins maximaux de $P_{s(C_n)}$ où β est une certaine flèche.

Cas 2 C_1 est directe et C_n est directe. On pose alors $|C_{n+1}| = 0$ et on demande les conditions suivantes:

- (i) Si $P_{s(C_1)}$ est unisériel, alors $|D_0| = 0$ et $C_1 D_1^{-1}$ est le chemin maximal de $P_{s(C_1)}$.
- (i') Si $P_{s(C_1)}$ est non-sériel, αD_0 et $C_1 D_1^{-1}$ sont les chemins maximaux de $P_{s(C_1)}$ où α est une certaine flèche.
- (ii) Pour tout $i \in \mathbb{Z}$ tel que $2 \leq 2i \leq n - 3$, $C_{2i}^{-1} D_{2i}$ et $C_{2i+1} D_{2i+1}^{-1}$ sont les chemins maximaux de $P_{s(C_{2i+1})}$.
- (iii) $C_{n-1}^{-1} D_{n-1}$ et $C_n \beta D_n^{-1}$ sont les chemins maximaux de $P_{s(C_n)}$ où β est une certaine flèche.

Cas 3 C_1 est inverse et C_n est inverse. Alors $C^{-1} = C_n^{-1} \cdots C_1^{-1}$ vérifie les conditions du cas 2 et on définit $\Omega(C) = (\Omega(C^{-1}))^{-1}$.

Cas 4 C_1 est directe et C_n est inverse. On demande les conditions suivantes:

- (i) Si $P_{s(C_1)}$ est unisériel, alors $|D_0| = 0$ et $C_1 D_1^{-1}$ est le chemin maximal de $P_{s(C_1)}$.
- (i') Si $P_{s(C_1)}$ est non-sériel, αD_0 et $C_1 D_1^{-1}$ sont les chemins maximaux de $P_{s(C_1)}$ où α est une certaine flèche.
- (ii) Pour tout $i \in \mathbb{Z}$ tel que $2 \leq 2i - 1 \leq n - 2$, $C_{2i}^{-1} D_{2i}$ et $C_{2i+1} D_{2i+1}^{-1}$ sont les chemins maximaux de $P_{s(C_{2i+1})}$.
- (iii) Si $P_{s(C_n)}$ est unisériel, alors $|D_{n+1}| = 0$ et $C_n^{-1} D_n$ est le chemin maximal de $P_{s(C_n)}$.
- (iii') Si $P_{s(C_n)}$ est non-sériel, βD_{n+1}^{-1} et $C_n^{-1} D_n$ sont les chemins maximaux de $P_{s(C_n)}$ où β est une certaine flèche.

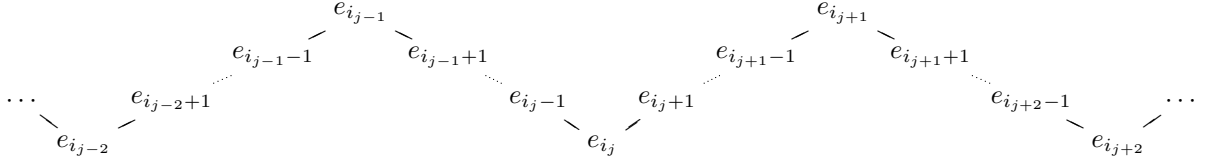
Proposition 1.4.6 Soit $C = C_1 \cdots C_n$ une corde sur A qui est une algèbre bisérielle spéciale auto-injective. Alors $\Omega(M(C)) \cong M(\Omega(C))$ où $\Omega(C)$ est définie dans Définition 1.4.2.

Démonstration Les modules projectifs indécomposables possèdent deux types, qui correspondent respectivement aux cas 1 et cas 2.2 dans la description des modules projectifs indécomposables donnée au début de cette section, puisque A est auto-injective. Le cas 2.1 est impossible en ce moment.

L'assertion découle de la construction de ΩC . Soit

$$C = \cdots C_{j-1} C_j C_{j+1} C_{j+2} \cdots$$

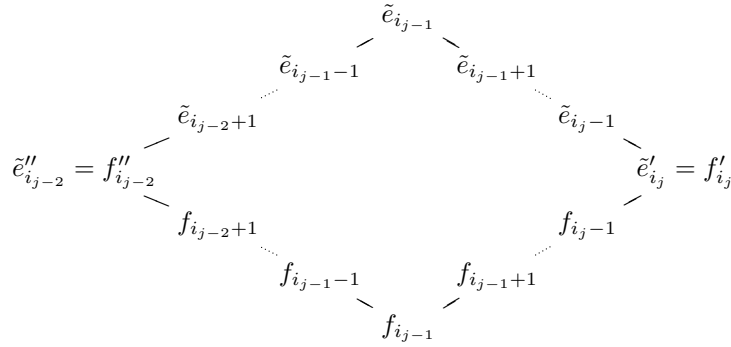
avec C_j directe. On visualise $M(C)$ sous une base $\{e_i\}$ comme suit:



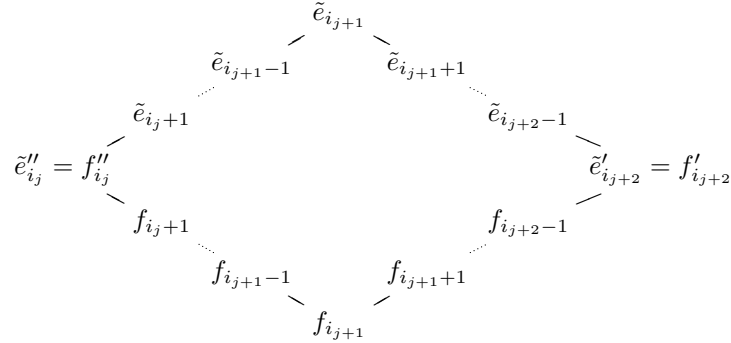
où $e_{i_{j-1}}, e_{i_{j-1}+1}, \dots, e_{i_j-1}, e_{i_j}$ correspond au segment C_j . L'enveloppe projective de $M(C)$ est de la forme

$$P = \cdots \oplus P_{s(C_j)} \oplus P_{t(C_{j+1})} \oplus \cdots$$

où les modules projectifs indécomposables $P_{s(C_j)}$ et $P_{t(C_{j+1})}$ sont de la forme



et



L'application surjective $P \twoheadrightarrow M(C)$ envoie respectivement

$$\tilde{e}''_{i_{j-2}}, \tilde{e}_{i_{j-2}+1}, \dots, \tilde{e}_{i_{j-1}-1}, \tilde{e}_{i_{j-1}}, \tilde{e}_{i_{j-1}+1}, \dots, \tilde{e}_{i_j-1}, \tilde{e}'_{i_j}$$

en

$$e_{i_{j-2}}, e_{i_{j-2}+1}, \dots, e_{i_{j-1}-1}, e_{i_{j-1}}, e_{i_{j-1}+1}, \dots, e_{i_j-1}, e_{i_j}$$

et envoie respectivement

$$\tilde{e}''_{i_j}, \tilde{e}_{i_j+1}, \dots, \tilde{e}_{i_{j+1}-1}, \tilde{e}_{i_{j+1}}, \tilde{e}_{i_{j+1}+1}, \dots, \tilde{e}_{i_{j+2}-1}, \tilde{e}'_{i_{j+2}}$$

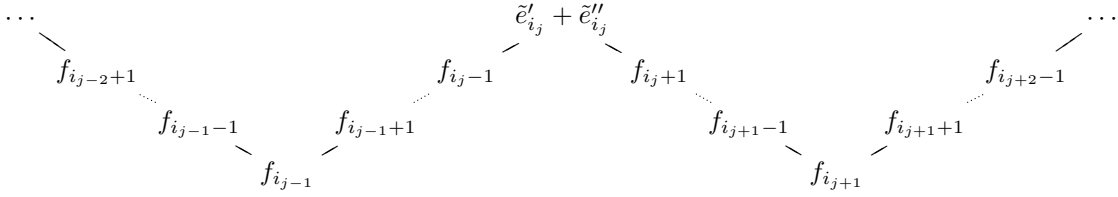
en

$$-e_{i_j}, -e_{i_j+1}, \dots, -e_{i_{j+1}-1}, -e_{i_{j+1}}, -e_{i_{j+1}+1}, \dots, -e_{i_{j+2}-1}, -e_{i_{j+2}}$$

Le noyau de $P \twoheadrightarrow M(C)$ est de la forme

$$\dots \oplus k f_{i_{j-2}+1} \oplus \dots \oplus k f_{i_{j-1}-1} \oplus k f_{i_{j-1}} \oplus f_{i_{j-1}+1} \oplus \dots \oplus k f_{i_j-1} \oplus k(f'_{i_j} + f''_{i_j-2}) \oplus k f_{i_j+1} \oplus \dots \oplus k f_{i_{j+1}-1} \oplus k f_{i_{j+1}} \oplus f_{i_{j+1}+1} \oplus \dots \oplus k f_{i_{j+2}-1} \oplus \dots$$

Alors on visualise $\Omega M(C)$ comme suit:



Cette présentation donne l'isomorphisme $\Omega M(C) \cong M(\Omega C)$.

□

1.5 Morphismes Explicites

Suivant Crawley-Boevey ([12]), on va décrire les morphismes entre deux modules de type corde. On utilise les notations de Jan Schröer ([42, Section 3]).

Définition 1.5.1 Soit C une corde. Notons $\mathcal{P}(C) = \{(D, E, F) | D, E, F \in \mathcal{St}, DEF = C\}$. Un élément $(D, E, F) \in \mathcal{P}(C)$ est une donnée de *quotient explicite* si les deux conditions suivantes sont vérifiées:

- (1) $|D| = 0$ ou $D = d_1 d_2 \dots d_n$ avec $d_n \in Q_1^{-1}$
- (2) $|F| = 0$ ou $F = f_1 f_2 \dots f_m$ avec $f_1 \in Q_1$.

Constatons qu'une donnée de quotient explicite donne un morphisme surjectif canonique $M(C) \twoheadrightarrow M(E)$. La corde E avec ce morphisme surjectif est dit un quotient explicite de C . L'ensemble des données de quotient explicite de C est noté $\text{fac}(C)$.

Un élément $(D, E, F) \in \mathcal{P}(C)$ est une donnée de *sous-corde explicite* si les deux conditions suivantes sont satisfaites,

- (1) $|D| = 0$ ou $D = d_1 d_2 \dots d_n$ avec $d_n \in Q_1$
- (2) $|F| = 0$ ou $F = f_1 f_2 \dots f_m$ avec $f_1 \in Q_1^{-1}$.

Evidemment, si l'on dispose d'une donnée de sous-corde explicite, on a un morphisme injectif canonique

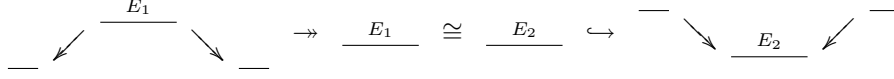
$$M(E) \hookrightarrow M(C).$$

La sous-corde E avec ce morphisme injectif canonique est dite une sous-corde explicite de C . L'ensemble des données de sous-corde explicite de C est noté $\text{sub}(C)$.

Si C_1, C_2 sont deux cordes, une paire $((D_1, E_1, F_1), (D_2, E_2, F_2)) \in \text{fac}(C_1) \times \text{sub}(C_2)$ est admissible (de C_1 à C_2) si $E_1 \sim E_2$, i.e. $E_1 = E_2$ ou $E_1 = E_2^{-1}$. L'ensemble des *paires admissibles* de C_1 à C_2 est noté $\mathcal{A}(C_1, C_2)$. Pour $a = ((D_1, E_1, F_1), (D_2, E_2, F_2)) \in \mathcal{A}(C_1, C_2)$, on définit un morphisme canonique $f_a : M(C_1) \rightarrow M(C_2)$, appelé *morphisme explicite*, comme étant le composé

$$M(C_1) \twoheadrightarrow M(E_1) \cong M(E_2) \hookrightarrow M(C_2)$$

qui peut être visualisé par



Dans ce morphisme, E_1 ou E_2 est appelée le *cœur* de ce morphisme explicite.

Théorème 1.5.1 ([12, page 261, Theorem]) Soient C_1 et C_2 deux cordes. Les morphismes f_a pour $a \in \mathcal{A}(C_1, C_2)$ forment une base de $\text{Hom}_A(M(C_1), M(C_2))$ en tant qu'espace vectoriel.

L'ensemble des morphismes explicites est stable par composition.

Lemme 1.5.2 Soient $f_a : M(C_1) \rightarrow M(C_2)$ et $f_b : M(C_2) \rightarrow M(C_3)$ deux morphismes explicites. Alors le composé $f_b \circ f_a$ est également un morphisme explicite ou le morphisme nul.

Définition 1.5.2 Soit $a = ((D_1, E_1, F_1), (D_2, E_2, F_2)) \in \mathcal{A}(C_1, C_2)$. On dit que a (ou f_a) est orientée si $E_1 = E_2$. Le morphisme f_a est *unilatéral à gauche* (resp. à droite) s'il est orienté et $|D_1| = |D_2| = 0$ (resp. $|F_1| = |F_2| = 0$). Le morphisme f_a est unilatéral s'il est unilatéral à gauche ou à droite. Il est *faiblement unilatéral* si a ou $((D_1, E_1, F_1), (F_2^{-1}, E_2^{-1}, D_2^{-1}))$ est unilatéral. Les a et f_a sont *bilatéraux* s'ils ne sont pas faiblement unilatéraux.

Soit $a = ((D_1, E_1, F_1), (D_2, E_2, F_2)) \in \mathcal{A}(C_1, C_2)$. Si a est orienté, on définit $a(l) = a = a(r)$. Si a n'est pas orientée, définissons

$$a(l) = ((F_1^{-1}, E_1^{-1}, D_1^{-1}), (D_2, E_2, F_2))$$

et

$$a(r) = ((D_1, E_1, F_1), (F_2^{-1}, E_2^{-1}, D_2^{-1})).$$

Evidemment

$$a(l) \text{ est unilatéral} \Leftrightarrow a \text{ est faiblement unilatéral} \Leftrightarrow a(r) \text{ est unilatéral.}$$

Le lemme suivant décrit le comportement de composition de morphismes explicites faiblement unilatéraux.

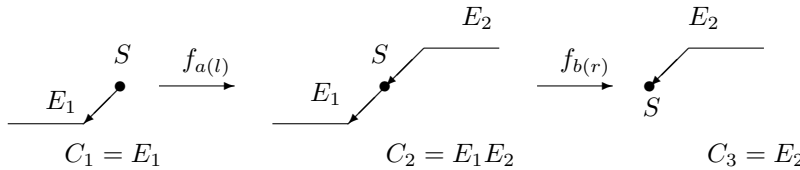
Lemme 1.5.3 Soient $f_a : M(C_1) \rightarrow M(C_2)$ et $f_b : M(C_2) \rightarrow M(C_3)$ deux morphismes explicites faiblement unilatéraux tel qu'aucun des deux ne soit un isomorphisme avec $a(l) = ((D_1, E_1, F_1), (D'_2, E_1, F'_2))$ et $b(r) = ((D_2, E_2, F_2), (D_3, E_2, F_3))$.

(i) Si $f_{a(l)}$ et $f_{b(r)}$ sont unilatéraux à gauche (resp. à droite), alors $f_{b(r)} \circ f_{a(l)}$ est unilatéral à gauche (resp. à droite) et $f_b \circ f_a$ est donc faiblement unilatéral.

(ii) On suppose que $|C_2| > 0$. Si $f_{a(l)}$ est unilatéral à gauche et si $f_{b(r)}$ est unilatéral à droite, i.e. $|D_1| = |D'_2| = 0$ et $|F'_2| = |F_3| = 0$, alors $f_{b(r)} \circ f_{a(l)}$ est faiblement unilatéral ssi

$$C_1 = E_1, C_3 = E_2, C_2 = E_1 E_2 \text{ et } |E_1 \cap E_2| = 0$$

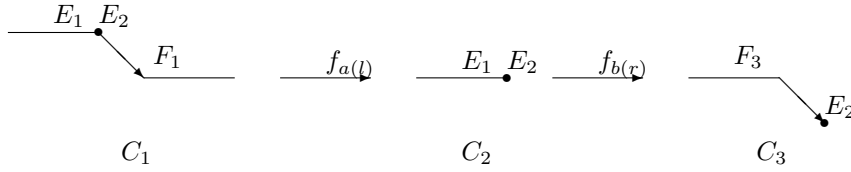
Ce cas exceptionnel peut être illustré comme suit:



où $f_{a(l)}$ (resp. $f_{b(r)}$) est l'injection évidente (resp. la surjection évidente) et où le point noir est $E_1 \cap E_2$ qui correspond au module simple S .

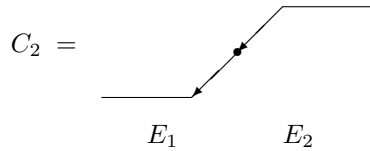
Démonstration La première assertion est triviale. Pour la deuxième assertion, on distingue des cas suivant $|E_1|$ et $|E_2|$.

- (1) Si $|E_1| = 0 = |E_2|$, alors $E_1 \cap E_2 = \phi$, puisque $C_2 = E_1 C_2 E_2$ et $|C_2| > 0$ et donc $f_{b(r)} \circ f_{a(l)} = 0$.
- (2) Si $|E_1| > 0$ et $|E_2| = 0$, alors $E_1 \cap E_2 \neq \phi \iff E_1 = C_2$. Dans ce cas, $|F_1| > 0$, car sinon $C_1 = E_1$, $f_{a(l)}$ serait un isomorphisme. On peut visualiser la situation par le graphe suivant:



où E_2 est le point noir. Le composé $f_{b(r)} \circ f_{a(l)}$ est donc un morphisme bilatéral, puisque $|E_1| = |C_2| > 0$ et $|F_1| > 0$.

- (3) On utilise un argument similaire que celui dans (2) pour le cas où $|E_1| = 0$ et $|E_2| > 0$.
- (4) Supposons maintenant $|E_1| > 0$, $|E_2| > 0$ et $|E_1 \cap E_2| \geq 0$.
 - (i) Si $E_1 \subseteq E_2$, alors $E_2 = C_2$ et $E_1 \cap E_2 = E_1$. On a alors comme dans (2) que $|D_3| > 0$, puisque $f_{b(r)}$ n'est pas un isomorphisme. Si $f_{b(r)} \circ f_{a(l)}$ est faiblement unilatéral et comme $|E_1| > 0$, on devrait avoir $|D_3| = 0$. C'est une contradiction. Le morphisme $f_{b(r)} \circ f_{a(l)}$ est donc bilatéral.
 - (ii) Le même argument s'applique au cas $E_2 \subseteq E_1$.
 - (iii) Supposons que $E_1 \not\subseteq E_2$ et que $E_2 \not\subseteq E_1$. Alors si $|E_1 \cap E_2| > 0$, $f_{b(r)} \circ f_{a(l)}$ est bilatéral, puisque $|E_1 - (E_1 \cap E_2)| > 0$ et $|E_2 - (E_1 \cap E_2)| > 0$. Si $|E_1 \cap E_2| = 0$, on a alors que $C_2 = E_1 E_2$, comme illustré:



On obtient facilement que $f_{b(r)} \circ f_{a(l)}$ est unilatéral ssi $|F_1| = |D_3| = 0$. Mais dans ce cas, on a forcément $C_1 = E_1$ et $C_3 = E_2$. On est bien dans le cas exceptionnel.

□

Remarque 1.5.4 Dans le cas exceptionnel du lemme 1.5.3, on a

$$\text{Ext}_A^1(M(C_3), M(C_1)) \neq 0,$$

puisqu'on dispose d'une suite exacte courte non scindée

$$0 \rightarrow M(C_1) \xrightarrow{(f_{a(l)}, g)^t} M(C_2) \oplus S \xrightarrow{(f_{b(r)}, h)} M(C_3) \rightarrow 0$$

où S est le module simple correspondant à $E_1 \cap E_2$ et où les morphismes $M(C_1) \xrightarrow{g} S$ et $S \xrightarrow{h} M(C_3)$ sont respectivement le morphisme surjectif évident et le morphisme injectif évident.

On va étudier les sous-cordes explicites et les quotients explicites d'une corde.

Soit $C = C_a C_{a+1} \cdots C_b$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$ et $a < b$ telle que C_i est directe (resp. inverse) ssi C_{i+1} est inverse (resp. directe) pour tout $a \leq i \leq b-1$, i.e. les C_i sont les segments de C . Soit $a \leq s < t \leq b$. On définit $C_{[s,t]} = C_{s+1} \cdots C_t$. On note aussi $C_{[s,s]} = C_s \cap C_{s+1}$. Pour le module simple $S = M(C_{[s,s]})$, on note s sa position dans C , notée $s = \text{Pos}_C(S)$ et pour une corde $E \subset C_s$ tel que $|E| > 0$, on note $\text{Pos}_C(E)$.

Proposition 1.5.5 Une sous-corde $D \subset C$ est une sous-corde explicite ssi D est parmi les sous-cordes suivantes:

- (1) une sous-corde de la forme $\tilde{C}_s C_{s+1} \cdots C_{t-1} \tilde{C}_t$ avec $a \leq s < t \leq b$ et $\tilde{C}_s \subset C_s, \tilde{C}_t \subset C_t$ telle que $|\tilde{C}_s| > 0 < |\tilde{C}_t|$ et vérifiant
 - (i) si C_s est directe, alors $\tilde{C}_s \neq C_s$, sauf si $s = a$.
 - (ii) si C_s est inverse, alors $\tilde{C}_s = C_s$
 - (iii) si C_t est directe, alors $\tilde{C}_t = C_t$
 - (iv) si C_t est inverse, alors $\tilde{C}_t \neq C_t$, sauf si $t = b$.
- (2) une sous-corde $\tilde{C}_s \subset C_s$ pour $a \leq s \leq b$ telle que
 - (i) si C_s est directe, alors $C_s = C'_s \tilde{C}_s$ pour une autre sous-corde C'_s dont la longueur est strictement positive si $s \neq a$
 - (ii) si C_s est inverse, alors $C_s = \tilde{C}_s C'_s$ pour une autre sous-corde C'_s dont la longueur est strictement positive si $s \neq b$

Démonstration La suffisance est évidente.

Pour la nécessité, Supposons d'abord que $|D| > 0$. Soit C_s le premier segment tel que $|C_s \cap D| > 0$ et soit C_t le dernier segment de C tel que $|C_t \cap D| > 0$. Posons $\tilde{C}_s = C_s \cap D$ et $\tilde{C}_t = C_t \cap D$. Si $s < t$, alors $D = \tilde{C}_s C_{s+1} \cdots \tilde{C}_t$ et on est dans le cas 1. Comme $M(D)$ s'injecte dans $M(C)$, il est facile de vérifier les conditions (i)-(iv). Si $s = t$, alors $D = \tilde{C}_s$ et les deux conditions du cas 2 sont faciles à vérifier. Supposons maintenant que $|D| = 0$. Alors il existe s tel que $D = C_s \cap C_{s+1}$ et en plus C_s est directe et C_{s+1} est inverse. $C_s = C_s D$ vérifie la condition (i) du cas 2.

□

Dualement, les quotients explicites admettent une description:

Proposition 1.5.6 tout quotient explicite est parmi

- (1) une sous-corde $\tilde{C}_s C_{s+1} \cdots C_{t-1} \tilde{C}_t$ avec $a \leq s < t \leq b$ telle que $|\tilde{C}_s| > 0 < |\tilde{C}_t|$ et vérifiant
 - (i) si C_s est directe, alors $\tilde{C}_s = C_s$
 - (ii) si C_s est inverse, alors $\tilde{C}_s \neq C_s$ sauf si $s = a$
 - (iii) si C_t est directe, alors $\tilde{C}_t \neq C_t$ sauf si $t = b$
 - (iv) si C_t est inverse, alors $\tilde{C}_t = C_t$
- (2) une sous-corde $\tilde{C}_s \subset C_s$ pour $a \leq s \leq b$ telle que
 - (i) Si C_s est directe, alors $C_s = \tilde{C}_s C'_s$ pour une autre sous-corde C'_s dont la longueur est strictement positive si $s \neq b$
 - (ii) Si C_s est inverse, alors $C_s = C'_s \tilde{C}_s$ pour une autre sous-corde C'_s dont la longueur est strictement positive si $s \neq a$

Définition 1.5.3 Soit $f : M(C) \rightarrow P$ un morphisme d'un module de type corde $M(C)$ vers P un module indécomposable projectif-injectif non-sériel. Le morphisme f est aussi dit un morphisme explicite, si f est le composé d'un morphisme explicite de $M(C)$ à $\text{Rad}(P)$ avec l'inclusion canonique $\text{Rad}(P) \hookrightarrow P$.

Soit $g : P \rightarrow M(D)$ un morphisme d'un module indécomposable projectif-injectif non-sériel P vers un module de type corde $M(D)$. Le morphisme g est aussi dit un morphisme explicite, si g est le composé de la surjection canonique $P \twoheadrightarrow P/\text{Soc}(P)$ avec un morphisme explicite de $P/\text{Soc}(P)$ à $M(D)$.

Remarque 1.5.7 Soit A une algèbre bisérielle spéciale auto-injective. Théorème 1.5.1 peut se généraliser. Si on a un morphisme $f : M(C) \rightarrow P$ avec P un module indécomposable projectif-injectif non-sériel, alors f factorise par $\text{rad}(P)$, car sinon f serait surjectif et donc P serait un facteur direct de $M(C)$, ce qui est absurde. On obtient donc que f est somme de morphismes explicites décrits dans Définition 1.5.3. Il en est de même pour un morphisme $g : P \rightarrow M(D)$.

1.6 Carquois d'Auslander-Reiten d'une algèbre bisérielle spéciale

Dans cette section, On résume des résultats connus sur le carquois d'Auslander-Reiten d'une algèbre bisérielle spéciale.

1.6.1 Rappels sur la théorie d'Auslander-Reiten

On rappelle dans cette sous-section des rudiments de la théorie d'Auslander-Reiten, pour les détails, on renvoie le lecteur à [5, chapter 4] and [4]. Fixons un corps algébriquement clos k et A une algèbre de dimension finie sur k .

Définition 1.6.1 Un morphisme $f : M \rightarrow N$ de A -modules est dit projectif s'il se factorise par un module projectif.

Pour une algèbre A , on écrit $A\text{mod}$ pour la catégorie des A -modules à gauche (de dimension finie sur k). La catégorie stable $\underline{A\text{mod}}$ est la catégorie ayant les mêmes objets que $A\text{mod}$ et dont l'espace des morphismes d'un A -module M vers un autre N , noté $\underline{\text{Hom}}_A(M, N)$, est par définition le quotient de $\text{Hom}_A(M, N)$ par le sous-espace des *morphismes projectifs* (i.e. les morphismes factorisant par des modules projectifs). Soit f un morphisme dans $A\text{mod}$, on écrit $\underline{f}$ son image dans $\underline{A\text{mod}}$.

Remarque 1.6.1 Si A est une algèbre auto-injective, la catégorie $\underline{A\text{mod}}$ est une catégorie triangulée de foncteur de translation $[1] = \Omega^{-1}$ (voir [22, Chapter 2, Section 2]). Dans ce cas, on a les formules suivantes utilisées souvent dans la suite:

$$\begin{aligned}\text{Ext}_A^1(M, N) &= \underline{\text{Hom}}_A(\Omega M, N) = \underline{\text{Hom}}_A(M, \Omega^{-1} N) \\ \text{Ext}_A^1(\Omega^n M, \Omega^n N) &= \text{Ext}_A^1(M, N) \\ \underline{\text{Hom}}_A(\Omega^n M, \Omega^n N) &= \underline{\text{Hom}}_A(M, N)\end{aligned}$$

quelques ce soient deux A -modules M et N et pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Définition 1.6.2 Etant donné un morphisme de A -morphisme $f : M \rightarrow N$ entre deux modules indécomposables, ce morphisme est dit irréductible s'il n'est pas un épimorphisme scindé ni un monomorphisme scindé et pour toute factorisation $f = g \circ h$, soit g est un épimorphisme scindé soit h est un monomorphisme scindé.

Définition 1.6.3 Une suite exacte courte $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ est dite une suite d'Auslander-Reiten si elle n'est pas scindée et si elle vérifie la condition suivante:

(AR) Pour tout morphisme $hX \rightarrow X'$ qui n'est pas un monomorphisme scindé, il existe un morphisme $h' : Y \rightarrow X'$ tel que $h' \circ f = h$.

ou équivalentement,

(AR') pour tout morphisme $u : X \rightarrow X'$ qui n'est pas un épimorphisme scindé, il existe un morphisme $u' : Z' \rightarrow Y$ tel que $g \circ u' = u$.

Théorème 1.6.2 Soit A une algèbre de dimension finie sur un corps k . Alors

- (i) Pour tout module indécomposable Z non projectif, il existe une suite d'Auslander-Reiten terminant par Z .
- (ii) Pour tout module indécomposable Z non injectif, il existe une suite d'Auslander-Reiten commençant par Z .

On écrit $X = \tau Z$, appelé le translaté d'Auslander de Z . Similairement $Z = \tau^{-1} X$. L'opération τ (resp. τ^{-1}) est définie sur l'ensemble des modules indécomposables non projectifs (resp. non injectifs).

Si A est une algèbre symétrique, il existe une description simple de τ :

Lemme 1.6.3 Si A est symétrique, alors $\tau = \Omega^2$.

On a la formule très importante due à Auslander et Reiten.

Théorème 1.6.4 (La formule d'Auslander-Reiten) Soient M et N deux A -modules indécomposables. Alors

$$\text{Ext}_A^1(M, N) = D\text{Hom}_A(N, \tau M)$$

où $D = \text{Hom}_k(, k)$ et où τ est le translaté d'Auslander-Reiten.

Le théorème suivant établit les liens entre la notion de morphisme irréductible et celle de suite d'Auslander-Reiten.

Théorème 1.6.5 Etant donné une suite d'Auslander-Reiten $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$,

- (i) Les morphismes irréductibles commençant par X sont de la forme $X \xrightarrow{f'} Y'$ où Y' est un facteur direct de Y , disons $Y = Y' \oplus Y''$ et où $f = [f', f'']^t$ pour certain f'' .
- (ii) Les morphismes irréductibles finissant par Z sont de la forme $Y' \xrightarrow{g'} Z$ où Y' est un facteur direct de Y , disons $Y = Y' \oplus Y''$ et où $g = [g', g'']^t$ pour certain g'' .

Pour les modules indécomposables projectif-injectifs, il existe des suites d'Auslander-Reiten canoniques.

Lemme 1.6.6 Soit P un module indécomposable projectif-injectif. Alors il existe une suite d'Auslander-Reiten de la forme suivante:

$$0 \rightarrow \text{Rad}P \rightarrow \text{Rad}P/\text{Soc}P \oplus P \rightarrow P/\text{Soc}P \rightarrow 0$$

Introduisons maintenant le carquois d'Auslander-Reiten qui joue un rôle important dans les problèmes de classification dans la théorie des représentations.

Soient X et Y deux A -modules et écrivons $X = \bigoplus X_j$ et $Y = \bigoplus Y_i$ avec tous les X_j et Y_i indécomposables. Fixons de telles décompositions et écrivons tout morphisme $f : X \rightarrow Y$ de la forme de matrice $[f_{ij}]$ où $f_{ij} : X_j \rightarrow Y_i$. Le radical de $\text{Hom}_A(X, Y)$ est par définition l'espace

$$\mathcal{R}(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y \mid \text{aucun des } f_{ij} \text{ n'est pas un isomorphisme}\}$$

Soit $\mathcal{R}^2(X, Y) = \sum_Z \mathcal{R}(Z, Y)\mathcal{R}(X, Z)$. Evidemment pour X et Y indécomposables, un morphisme $f : X \rightarrow Y$ est irréductible ssi $f \in \mathcal{R}(X, Y)$ et $f \notin \mathcal{R}^2(X, Y)$. Dans ce cas, le quotient $\text{Irr}(X, Y) = \mathcal{R}(X, Y)/\mathcal{R}^2(X, Y)$ est l'espace des morphismes irréductibles. Notons

$$a(X, Y) = \dim_k \text{Irr}(X, Y)$$

Définition 1.6.4 (i) Le carquois d'Auslander-Reiten $\Gamma(A)$ est le carquois dont les sommets sont les classes d'isomorphismes $[X]$ des modules indécomposables et dont le nombre de flèches de $[X]$ à $[Y]$ est $a(X, Y)$.

(ii) Le carquois d'Auslander-Reiten stable $\Gamma_s(A)$ est le sous-carquois de $\Gamma(A)$ en supprimant tous les modules $\tau^{-s}P$ et tous les $\tau^s(I)$ pour tout $s \in \mathbb{N}$ où P est indécomposable projectif et où I est indécomposable injectif.

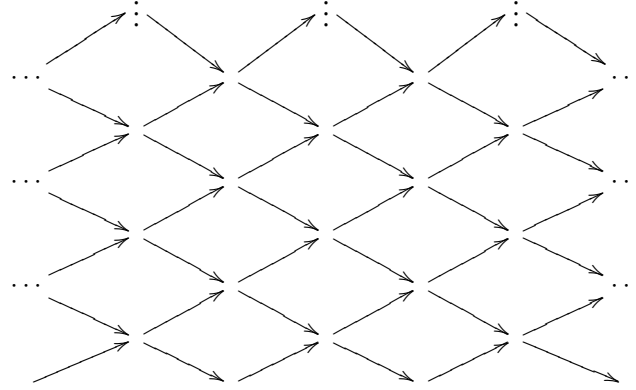
Le translaté d'Auslander-Reiten τ établit un automorphisme de chaque composante de $\Gamma_s(A)$

En général, le carquois $\Gamma_s(A)$ est union disjointe des composantes connexes. Il existe un théorème de Christine Reidtemann qui décrit la structure des composantes du carquois d'Auslander-Reiten stable.

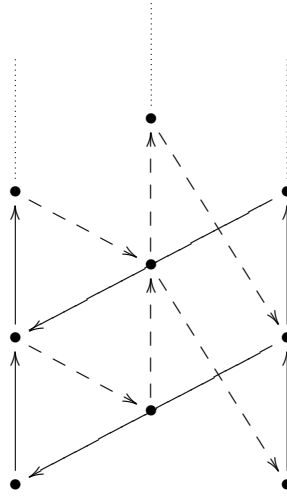
Théorème 1.6.7 ([38]) Soit Q une composante connexe de $\Gamma_s(A)$. Alors il existe un arbre directe T et un groupe admissible d'automorphismes $\Pi \subseteq \text{Aut } \mathbb{Z}T$ tels que $Q \cong \mathbb{Z}T/\Pi$. La classe d'arbre T est unique à isomorphismes près et Π est unique à conjugaisons dans $\text{Aut } \mathbb{Z}T$ près.

Dans cette thèse, on va rencontrer des composantes de type suivantes:

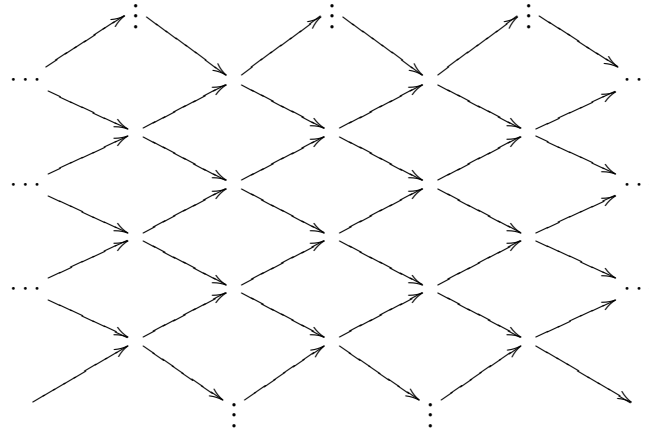
(1) $T = A_\infty = \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \cdots \infty$. Si $\Pi = 1$, alors $\mathbb{Z}A_\infty$ est la forme



Soit $\Pi = \langle \tau^s \rangle$ avec $s \in \mathbb{N} - \{0\}$. Alors $\mathbb{Z}T/\Pi$ est dit un s -tube. Un exemple de 3-tube



(2) $T = \mathbb{Z}_\infty^\infty = \infty \cdots \bullet \cdots \infty$. Soit $\Pi = 1$. $\mathbb{Z}A_\infty^\infty$ est de la forme



(3) La composante $\mathbb{Z}\tilde{A}_{pq}$ peut être visualisée en identifiant le sommet en position (n, m) pour tout $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$ au sommet en position $(n + p, m + q)$ dans une composante de type $\mathbb{Z}A_\infty^\infty$.

Définition 1.6.5 Une composante de type $\mathbb{Z}A_\infty$ ou $\mathbb{Z}A_\infty/\tau^n$ est appelée *quasi-sérielle*. Les modules à l'extrémité possèdent la *quasi-longueur* 0. Un module est de quasi-longueur n s'il apparaît dans le terme intermédiaire dans une suite d'Auslander-Reiten commençant par les modules de quasi-longueur $n - 1$ et s'il n'est pas de quasi-longueur $n - 2$.

1.6.2 Suites d'Auslander-Reiten

A partir de cette sous-section, on fixe A une algèbre bisérielle spéciale. On introduit des notations dues à Christof Geiss([20, Section 3]).

Définition 1.6.6 Soient $i \in Q_0$ et $u \in \{-1, 1\}$. Notons $\mathcal{S}_{(i,u)} = \{C \in \mathcal{S} \mid s(C) = i, \sigma(C) = u\}$. On désigne par $U_{(i,u)}$ l'unique corde directe de longueur maximale dans $\mathcal{S}_{(i,u)}$, et par $V_{(i,u)}$ l'unique corde inverse de longueur maximale dans $\mathcal{S}_{(i,u)}$.

(1) Pour $C \in \mathcal{S}_{(i,u)} - \{V_{(i,u)}\}$,

$$C[1] = \begin{cases} C\alpha^{-1}U_{(s(\alpha), -\sigma(\alpha))} & , \text{ si } \exists \alpha \in Q_1 \text{ telle que } C\alpha^{-1} \text{ soit une corde} \\ D & , \text{ où } C = D\beta V_{(t(\beta), -\epsilon(\beta))} \text{ avec } \beta \in Q_1 \end{cases}$$

On définit par récurrence $C[n] = (C[n-1])[1]$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(2) Pour $C \in \mathcal{S}_{(i,u)} - \{U_{(i,u)}\}$ en posant

$$C[-1] = \begin{cases} C\beta V_{(t(\beta), -\epsilon(\beta))} & , \text{ si } \exists \beta \in Q_1 \text{ telle que } C\beta \text{ soit une corde} \\ D & , \text{ où } C = D\alpha^{-1}U_{(s(\alpha), -\sigma(\alpha))} \text{ avec } \alpha \in Q_1 \end{cases}$$

On définit par récurrence $C[-n] = (C[-n+1])[-1]$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(3) Pour $C \in \mathcal{S}_{(i,u)} - \{V_{(i,u)}^{-1}\}$,

$$[1]C = \begin{cases} U_{(s(\alpha), -\sigma(\alpha))}^{-1}\alpha C & , \text{ si } \exists \alpha \in Q_1 \text{ telle que } \alpha C \text{ soit une corde} \\ D & , \text{ où } C = V_{(t(\beta), -\epsilon(\beta))}^{-1}\beta D \text{ avec } \beta \in Q_1 \end{cases}$$

On définit par récurrence $[n]C[n] = [1]([n-1]C)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(4) Pour $C \in \mathcal{S}_{(i,u)} - \{U_{(i,u)}^{-1}\}$ en posant

$$[-1]C = \begin{cases} V_{(t(\beta), -\epsilon(\beta))}^{-1}\beta^{-1}C & , \text{ si } \exists \beta \in Q_1 \text{ telle que } \beta^{-1}C \text{ soit une corde} \\ D & , \text{ où } C = U_{(s(\alpha), -\sigma(\alpha))}^{-1}\alpha D \text{ avec } \alpha \in Q_1 \end{cases}$$

On définit par récurrence $[-n]C = [-1]([-n+1]C)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Remarque 1.6.8 Il existe un morphisme irréductible canonique de $M(C)$ à $M(C[1])$ qui se définit comme suit:

(1) S'il existe $\alpha \in Q_1$ telle que $C\alpha^{-1}$ soit une corde, alors l'injection canonique

$$M(C) \hookrightarrow M(C\alpha^{-1}U_{(s(\alpha), -\sigma(\alpha))}) = M(C[1])$$

est irréductible;

(2) Si $C = D\beta V_{(t(\beta), -\epsilon(\beta))}$ avec $\beta \in Q_1$, alors la surjection canonique

$$M(C) = M(D\beta V_{(t(\beta), -\epsilon(\beta))}) \twoheadrightarrow M(D) = M(C[1])$$

est irréductible.

On peut définir similairement les morphismes irréductibles canoniques

$$M([-1]C) \rightarrow M(C), \quad M(C) \rightarrow M(C[1]) \quad \text{et} \quad M(C[-1]) \rightarrow M(C).$$

Remarque 1.6.9 La définition précédente possèdent un caractère local, i.e. si $C = C_1 \cdots C_n$ une corde avec les C_i étant ses segments, alors

(1) si $[1]C_1$ existe, alors $[1]C = ([1]C_1)C_2 \cdots C_n$

(2) si $[-1]C_1$ existe, alors $[-1]C = ([-1]C_1)C_2 \cdots C_n$

(3) si $C_n[1]$ existe, alors $C[1] = C_1 \cdots C_{n-1}(C_n[1])$

(3) si $C_n[-1]$ existe, alors $C[-1] = C_1 \cdots C_{n-1}(C_n[-1])$

Théorème 1.6.10 ([11, Page 172, Proposition])

Soit Λ une algèbre bisérielle spéciale. Alors

(1) Soit P un module projectif-injectif indécomposable. Alors

$$0 \rightarrow \text{Rad}P \rightarrow P \oplus \text{Rad}P/\text{Soc}P \rightarrow P/\text{Soc}P \rightarrow 0$$

est une suite d'Auslander-Reiten.

(2) Pour tout $\alpha \in Q_1$, il existe une suite d'Auslander-Reiten

$$0 \rightarrow M(V_{(t(\alpha), -\epsilon(\alpha))}^{-1}) \rightarrow M(V_{(t(\alpha), -\epsilon(\alpha))}^{-1} \alpha^{-1} U_{(s(\alpha), -\sigma(\alpha))}) \rightarrow M(U_{(s(\alpha), -\sigma(\alpha))}) \rightarrow 0$$

(3) Si pour $C \in \mathcal{St} - \{V_{(i,u)}^v : i \in Q_0, u, v \in \{-1, 1\}\}$, le module $M(C)$ n'est pas injectif, alors

$$0 \rightarrow M(C) \rightarrow M([1]C) \oplus M(C[1]) \rightarrow M([1]C[1]) \rightarrow 0$$

est une suite d'Auslander-Reiten dans laquelle les morphismes sont définis dans Remarque 1.6.8.

(4) Soient C une corde de type ruban, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in k^*$. Alors il existe une suite d'Auslander-Reiten.

$$0 \rightarrow M(C, n, \lambda) \rightarrow M(C, n-1, \lambda) \oplus M(C, n+1, \lambda) \rightarrow M(C, n, \lambda) \rightarrow 0$$

où $M(C, 0, \lambda) := 0$.

Lemme 1.6.11 Soit A une algèbre bisérielle spéciale symétrique. Soit C une corde telle que $C[1]$ soit définie. Alors $\Omega(C[1]) = (\Omega C)[1]$.

Démonstration Soient $C = C_1 \cdots C_n$ et $\Omega(C) = D = D_0 D_1 \cdots D_n D_{n+1}$.

Cas 1 C_n est directe. Alors d'après la construction de ΩC (Définition 1.4.2), $|D_{n+1}| = 0$. Soit $\alpha \in Q_1$ telle que $C_n \alpha D_n^{-1}$ soit un chemin maximal de $P_{s(C_n)}$.

Cas 1.1 S'il existe $\beta \in Q_1$ telle que $t(\beta) = t(C_n)$ et $\epsilon(\beta) = -\epsilon(C_n)$, i.e. β est la flèche de but $t(C_n)$ et qui est différente de la dernière flèche de C_n , d'après Définition 1.6.6,

$$C[1] = C_1 \cdots C_n \beta^{-1} U_{(s(\beta), -\sigma(\beta))}$$

et d'après Définition 1.4.2, on voit bien que

$$\Omega(C[1]) = D_0 \cdots D_n \alpha^{-1} U_{(s(\alpha), -\sigma(\alpha))} = D[1] = (\Omega(C))[1]$$

Cas 1.2 S'il n'existe pas de flèche $\beta \in Q_1$ telle que $t(\beta) = t(C_n)$ et $\epsilon(\beta) = -\epsilon(C_n)$, alors d'après Définition 1.6.6,

$$C[1] = C_1 \cdots C'_n$$

si on écrit $C_n = C'_n \gamma$ avec $\gamma \in Q_1$ et on a aussi que

$$\Omega(C)[1] = D_0 \cdots D_n \alpha^{-1} U_{(s(\alpha), -\sigma(\alpha))}.$$

En fait, $|U_{(s(\alpha), -\sigma(\alpha))}| = 0$, car sinon, il existerait une flèche δ de même source que α et le module indécomposable $P_{t(\gamma)} = P_{s(\alpha)}$ serait non-sériel. C'est-à-dire qu'il existe deux flèches de but $t(\gamma)$, ce qui contredit notre hypothèse. C'est une contradiction. On a montré donc que

$$\Omega(C)[1] = D_0 \cdots D_n \alpha^{-1} = D[1] = (\Omega(C))^{-1}.$$

Cas2 C_n est inverse. Si on écrit $D_n = D'_n \alpha$ avec $\alpha \in Q_1$, alors $D_{n+1} = V_{(t(\alpha), -\epsilon(\alpha))}$. En ce moment,

$$\Omega C = D = D_0 \cdots D'_n \alpha V_{(t(\alpha), -\epsilon(\alpha))}$$

et donc

$$D[1] = D_0 \cdots D'_n.$$

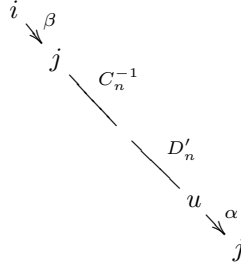
Cas 2.1 S'il existe $\beta \in Q_1$ telle que $C_n \beta^{-1}$ soit encore une corde, alors d'après Définition 1.6.6,

$$C[1] = C_1 \cdots C_n \beta^{-1} U_{(s(\beta), -\sigma(\beta))}.$$

On va montrer que $\beta C_n^{-1} D'_n$ est un chemin maximal de $P_{s(\alpha)}$ et donc que

$$\Omega(C[1]) = D_0 \cdots D'_n = D[1] = (\Omega(C))[1].$$

En effet, comme $C_n^{-1} D'_n \alpha$ est un chemin maximal de $P_{t(\alpha)}$, $\beta C_n^{-1} D'_n \alpha = 0$, alors $\beta C_n^{-1} D'_n$ contient un chemin maximal de $P_{s(\beta)}$ et il suffit de montrer que $\beta C_n^{-1} D'_n \notin \langle \rho \rangle$. Notons $u = s(\alpha)$, $i = s(\beta)$ et $j = t(\gamma)$. La situation peut être visualisée comme suit:



La corde $C_n^{-1} D'_n$ n'est pas le chemin maximal de P_u terminant par $C_n^{-1} D'_n$, car sinon, $C_n^{-1} D'_n \alpha \in \langle \rho \rangle$, ce qui est absurde. Le chemin $\beta C_n^{-1} D'_n$ est contenu dans ce chemin maximal et donc $\beta C_n^{-1} D'_n \notin \langle \rho \rangle$.

Cas 2.2 S'il n'existe pas de flèche, disons β , telle que $C_n \beta^{-1}$ soit encore une corde, alors $C_n = V_{(t(\gamma), -\epsilon(\gamma))}$ si on écrit $C_{n-1} = C'_{n-1} \gamma$, D'après la construction de ΩC , $D_{n+1} = V_{(t(\alpha), -\epsilon(\alpha))}$. On va montrer que $|D'_n| = 0$ et donc que $D_n = \alpha$. En effet, si $|D'_n| > 0$, écrivons $D'_n = \delta D''_n$ avec $\delta \in Q_1$. Regardons la corde $C_n^{-1} \delta \subsetneq C_n D'_n \alpha$. Comme pour toute flèche $\beta \in Q_1$ telle que $t(\beta) = s(C_n)$, on a $\beta C_n^{-1} \delta = 0$, alors $C_n^{-1} \delta$ est un chemin maximal de $P_{t(\delta)}$ et donc $0 = C_n^{-1} D'_n \alpha \supsetneq C_n^{-1} \delta$, ce qui est absurde. On a montré que $D_n = \alpha$. Alors

$$(\Omega C)[1] = D[1] = D_0 \cdots D_{n-1} = \Omega(C[1])$$

□

1.6.3 Carquois d'Auslander-Reiten d'une algèbre bisérielle spéciale

On rappelle des résultats de Karin Erdmann et Andrej Skowroński ([18]) qui décrivent les formes possibles des composantes du carquois d'Auslander-Reiten stable pour une algèbre bisérielle spéciale auto-injective.

Théorème 1.6.12 ([18, 2.1 Theorem]) Soit Λ une algèbre bisérielle spéciale auto-injective. Alors pour le carquois d'Auslander-Reiten stable $\Gamma_s \Lambda$, les conditions suivantes sont équivalentes:

- (i) $\Gamma_s \Lambda$ a une composante de type $\mathbb{Z} \tilde{A}_{p,q}$
- (ii) $\Gamma_s \Lambda$ est infinie mais n'a pas de composantes de type $\mathbb{Z}_\infty^\infty$.

- (iii) Il existe des entiers $m, p, q > 0$ tels que $\Gamma_s \Lambda$ soit union disjointe de m composantes de type $\mathbb{Z}\tilde{A}_{p,q}$, m composantes de type $\mathbb{Z}A_\infty/\langle\tau^p\rangle$, m composantes de type $\mathbb{Z}A_\infty/\langle\tau^q\rangle$ et une infinité de composante de tubes homogènes.
- (iv) Λ est de croissance polynomiale.

Remarque 1.6.13 D'après [13], une algèbre A est de type de représentation docile si, pour toute dimension d , il existe un nombre fini de $A - k[X]$ -bimodules Q_i , avec $1 \leq i \leq n_d$ qui sont de type fini et libre en tant que $k[X]$ -module à droite et qui satisfont la condition suivante: toutes les classes d'isomorphismes des A -modules indécomposables de dimension d sauf un nombre fini sont de la forme $Q_i \otimes_{k[X]} k[X]/(X - \lambda)$ pour certain $\lambda \in k$ et pour certain $1 \leq i \leq n_d$. Soit $\mu_A(d)$ le nombre minimal de bimodules Q_i satisfaisant la condition ci-dessus. L'algèbre A est dite de croissance polynomiale s'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\mu_A(d) \leq d^m$ pour tout $d \geq 1$.

Théorème 1.6.14 ([18, 2.2 Theorem])

Soit Λ une algèbre bisérielle spéciale auto-injective. Alors pour le carquois d'Auslander-Reiten stable $\Gamma_s \Lambda$, les conditions suivantes sont équivalentes:

- (i) $\Gamma_s \Lambda$ a une composante de type $\mathbb{Z}A_\infty^\infty$
- (ii) $\Gamma_s \Lambda$ est union disjointe d'un nombre fini de composantes de type $\mathbb{Z}A_\infty/\langle\tau^n\rangle$ avec $n > 1$, une infinité de 1-tubes et une infinité de composantes de type $\mathbb{Z}A_\infty^\infty$.
- (iii) Λ n'est pas de croissance polynomiale

1.6.4 Composantes de type $\mathbb{Z}A_\infty^\infty$

Définition 1.6.7 Une composante du carquois d'Auslander-Reiten est régulière s'elle ne contient aucun projectif ni injectif.

Dans une composante de type $\mathbb{Z}A_\infty^\infty$, les suites d'Auslander-Reiten sont de la forme (voir Théorème 1.6.10(1) et (2))

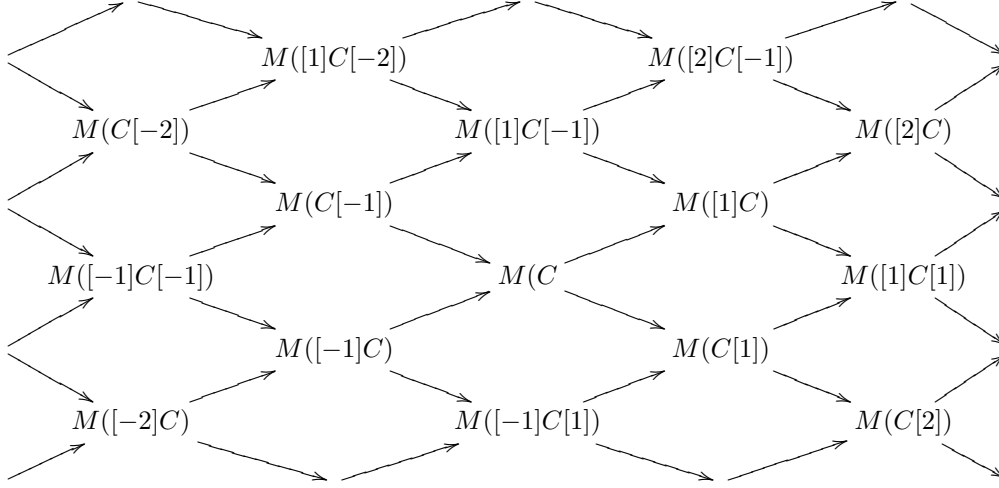
$$0 \rightarrow M(C) \rightarrow M([1]C) \oplus M(C[1]) \rightarrow M([1]C[1]) \rightarrow 0$$

ou

$$0 \rightarrow \text{Rad}P \rightarrow P \oplus \text{Rad}P/\text{Soc}P \rightarrow P/\text{Soc}P \rightarrow 0$$

pour P un module projectif-injectif. On illustre souvent une composante stable de type $\mathbb{Z}A_\infty^\infty$ contenant une corde C comme suit (en ajoutant éventuellement des modules projectifs ou injectifs si cette composante n'est pas

régulière):



Remarque 1.6.15 Une composante stable de type $\mathbb{Z}A_\infty^\infty$ contenant une corde C est régulière ssi pour tout $(s, t) \in \mathbb{Z}^2$,

$$\dim_k M([s]C) + \dim_k M(C[t]) = \dim_k M(C) + \dim_k M([s]C[t])$$

ou bien équivalentement

$$|[s]C| + |C[t]| = |C| + |[s]C[t]|$$

Définition 1.6.8 Soit Q une composante de type $\mathbb{Z}A_\infty^\infty$. et soit C une corde dans Q . Alors on pose

$$\text{diag}(C) = \{[n]C : n \in \mathbb{Z}\}$$

qui est une diagonale passant par C et les cordes $C[n]$ avec $n\mathbb{Z}$ forment une sous-diagonale passant par C , notée

$$\text{sdiag}(C) = \{C[n] : n \in \mathbb{Z}\}.$$

En 1998, Christof Geiss a montré le théorème suivant :

Théorème 1.6.16 [20, Section 4 Corollary] Soit Λ une algèbre de corde. Alors toute composante régulière de type $\mathbb{Z}A_\infty^\infty$ contient un unique module de dimension minimale parmi tous les modules de cette composante..

Il a pu aussi donner un critère pour qu'une corde soit la corde minimale d'une composante régulière de type $\mathbb{Z}A_\infty^\infty$.

Proposition 1.6.17 ([20, Proposition 3]) Soient Λ une algèbre de corde et C une corde. Les conditions suivantes sont équivalentes:

- (i) $M(C)$ est le module de dimension minimale dans une composante régulière de type $\mathbb{Z}A_\infty^\infty$
- (ii) Pour tous $i, j \in \mathbb{Z}$, $C(i, j) = [i]1_{(s(C), -\sigma(C))} \cdot C \cdot 1_{(t(C), \epsilon(C))}[j]$ est défini.

On généralise le théorème de Geiss aux algèbres bisérielles spéciales .

Proposition 1.6.18 Soit A une algèbre bisérielle spéciale. Soit Q une composante de type $\mathbb{Z}A_\infty^\infty$ telle qu'aucun module projectif et aucun module injectif ne soit contenu dans Q ni dans ΩQ . Alors Q contient un unique module de dimension minimale. Cette corde est appelée *corde minimale* de Q .

Démonstration La condition assure que Q est une composante régulière de l'algèbre de corde $\overline{A}$ correspondante (voir la fin de Section 1.4). Alors le théorème de Geiss s'applique.

□

D'après cette proposition, l'ensemble des composantes Q de type $\mathbb{Z}A_\infty$ telle qu'aucun module projectif ni aucun module injectif soit contenu dans Q ni dans ΩQ est en bijection avec l'ensemble des cordes minimales modulo la relation d'équivalence qui identifie une corde à son inverse.

1.7 Blocs à défaut diédral

On cite d'abord le fameux théorème suivant

Théorème 1.7.1 (Bondarenko-Drozd [7]) Soient G un groupe fini et k un corps infini de caractéristique p . Soit B un bloc de kG . Alors

- (1) B est de type de représentation fini ssi son groupe de défaut est cyclique.
- (2) B est de type de représentation docile ssi $p = 2$ et son groupe de défaut est diédral, semi-diédral ou de quaternion généralisé.
- (3) Dans tous les autres cas, B est de type de représentation sauvage.

Théorème 1.7.2 (R. Brauer [6]) Un bloc à défaut diédral sur un corps algébriquement clos de caractéristique 2 admet au plus trois modules simples, à isomorphismes près.

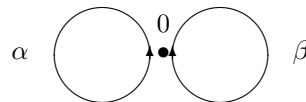
Dans [14], Karin Erdmann a introduit la classe des algèbres de type diédral comme une généralisation des blocs des algèbres de groupe à défaut diédral.

Définition 1.7.1 [14, 2.1 Definition] Soit A une algèbre. Elle est de type diédral si

- (1) A est de type de représentation docile, symétrique et indécomposable.
- (2) La matrice de Cartan de A est non-singulière.
- (3) Le carquois d'Auslander-Reiten stable $\Gamma_s A$ est composé des composantes suivantes: une infinité de 1-tubes, au plus deux 3-tubes, et tous les autres composantes non périodiques sont de classe d'arbre $\mathbb{Z}A_\infty$.

Dans [14], Karin Erdmann a classifié les algèbres de type diédral à équivalences de Morita près et elle a donnée une liste d'algèbres en termes de carquois avec relations. Pour sa classification, voir [14] ou [15]. On s'intéresse à la classification à équivalences dérivées près due à Thorsten Holm ([23]). On désignera par $\mathcal{D}^b(\Lambda)$ la catégorie dérivée des complexes bornés de Λ -modules de dimension finie pour une algèbre Λ sur le corps de base k .

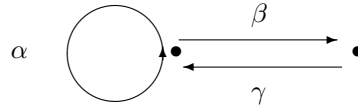
Pour une algèbre possédant un unique module simple, à isomorphismes près, la notion d'équivalence dérivée s'identifie à celle d'équivalence de Morita (voir par exemple [41, Corollary 2.13]). Donc un bloc à défaut diédral d'un seul module simple sur un corps algébriquement clos de caractéristique 2 est Morita-équivalente à kD pour D le groupe de défaut diédral. Son carquois avec relations est $D(1A)^q$ avec $q = 2^{n-2}$.



$$\alpha^2 = 0 = \beta^2, (\alpha\beta)^q = (\beta\alpha)^q$$

Pour les blocs à défaut diédral possédant deux ou trois modules simples, la notion d'équivalence dérivée ne s'identifie plus à celle d'équivalence de Morita. Plus précisément, Thorsten Holm a montré les théorèmes suivants:

Théorème 1.7.3 ([23]) Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique 2. Soit A un bloc à défaut diédral d'ordre 2^n avec $n \geq 2$ qui possède deux modules simples, à isomorphisme près. Alors il existe $s = 2^{n-2}$ et $c \in \{0, 1\}$ tel que la catégorie dérivée des A -modules soit équivalente à celle des $D(2\mathcal{A})^s(c)$ -modules, où $D(2\mathcal{A})^s(c)$ est l'algèbre définie par le carquois avec relations:

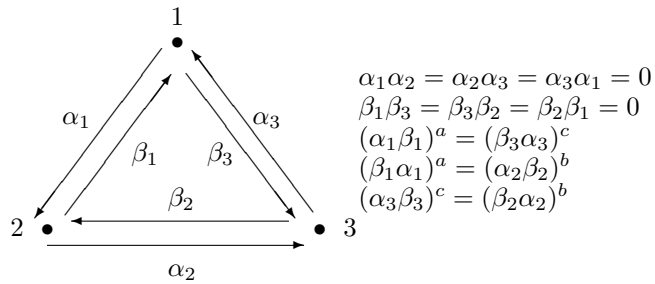


$$\gamma\beta = 0, \alpha^2 = c(\alpha\beta\gamma)^s, (\alpha\beta\gamma)^s = (\beta\gamma\alpha)^s$$

Remarque 1.7.4 (1) Dans la liste des algèbres du théorème précédent, les algèbres $D(2\mathcal{A})^s(1)$ avec $s \geq 1$ ne sont des algèbres bisérielles spéciales que modulo le socle. Il est un problème intéressant de distinguer les catégories dérivées de $D(2\mathcal{A})^s(1)$ et de $D(2\mathcal{A})^s(0)$. En effet, leur catégories dérivées ne sont pas équivalentes. Ce fait a été prouvé premièrement par M. Kauer dans sa thèse (voir [31] et [32]). Récemment Thorsten Holm et Alexander Zimmermann ont trouvé une autre preuve élémentaire dans [25] en se servant des idéaux de Reynolds généralisés qui sont des invariants de la catégorie dérivée pour les algèbres symétriques définies sur un corps algébriquement clos de caractéristique strictement positive ([46]).

(2) Dans le théorème précédent, la constante $c \in \{0, 1\}$ n'est pas connue. Il est un problème ouvert de déterminer si $c = 0$ ou $c = 1$.

Théorème 1.7.5 ([23]) Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique 2. Soit A un bloc à défaut diédral d'ordre 2^n avec $n \geq 2$ qui possède, à isomorphismes près, trois modules simples. Alors la catégorie dérivée des A -modules est équivalente à celle des $D(3\mathcal{K})^{a,b,c}$ -modules avec $a = c = 1$ et $b = 2^{n-2}$, où $D(3\mathcal{K})^{a,b,c}$ est l'algèbre définie par le carquois avec relations.



1.8 Carquois d'Auslander-Reiten des bloc à défaut diédral

On s'intéresse dans cette section à donner le carquois d'Auslander-Reiten des algèbres $D(1\mathcal{A})^q$ avec $q \geq 1$, $D(2\mathcal{A})^s(c)$ avec $s \geq 1$ et $c \in \{0, 1\}$ et $D(3\mathcal{K})^{1,b,1}$ avec $b \geq 1$.

Lemme 1.8.1 ([18, 4.7 Corollary])

- (i) L'algèbre $D(1\mathcal{A})^q$ avec $q \geq 1$ est de croissance polynomiale ssi $q = 1$.

(ii) L'algèbre $D(2\mathcal{A})^s(c)$ avec $s \geq 1$ et $c \in \{0, 1\}$ est de croissance polynomiale ssi $s = 1$.

(i) L'algèbre $D(3\mathcal{K})^{1,b,1}$ avec $b \geq 2$ est de croissance polynomiale ssi $b = 1$.

En combinant avec Théorème 1.6.12, Théorème 1.6.14, Lemme 1.8.1 et Définition 1.7.1, on obtient

Proposition 1.8.2 ([15, II 7.3 LEMMA])

Le carquois d'Auslander-Reiten de $D(1\mathcal{A})^q$ avec $q = 1$ est composé de

- une infinité de 1-tubes
- une composante de type $\mathbb{Z}\tilde{A}_{12}$

Proposition 1.8.3 ([18, 4.7 Corollary])

Le carquois d'Auslander-Reiten stable de $D(2\mathcal{A})^s(c)$ avec $s = 1$ et $c \in \{0, 1\}$ est composé de

- une infinité de 1-tubes
- un 3-tube non régulier
- une composante de type $\mathbb{Z}\tilde{A}_{1,3}$

Proposition 1.8.4 ([18, 4.8 Corollary] ou [15, II.7.4 LEMMA])

Le carquois d'Auslander-Reiten stable de $D(3\mathcal{K})^{1,b,1}$ avec $b = 1$ est composé de

- une infinité de 1-tubes
- deux 3-tubes réguliers
- une composante de type $\mathbb{Z}\tilde{A}_{3,3}$

Proposition 1.8.5 ([5, Chapitre 4, Section 4.17, Page 164] ou [15, II.7.4 LEMMA])

Le carquois d'Auslander-Reiten de $D(1\mathcal{A})^q$ avec $q \geq 2$ est composé de

- une infinité de 1-tubes.
- une infinité de composante de type $\mathbb{Z}A_\infty^\infty$.

Proposition 1.8.6 ([18, 4.7 Corollary])

Le carquois d'Auslander-Reiten de $D(2\mathcal{A})^s(c)$ avec $s \geq 2$ et $c \in \{0, 1\}$ est composé de

- une infinité de 1-tubes.
- un 3-tube.
- une infinité de composante de type $\mathbb{Z}A_\infty^\infty$.

Proposition 1.8.7 ([18, 4.7 Corollary])

Le carquois d'Auslander-Reiten de $D(3\mathcal{K})^{1,b,1}$ avec $b \geq 2$ est composé de

- une infinité de 1-tubes.
- deux 3-tubes.
- une infinité de composante de type $\mathbb{Z}A_\infty^\infty$.

Dans Chapitre 3 et 4, on va calculer concrètement les composantes formées des modules de type corde dans les carquois d'Auslander-Reiten de ces algèbres. La méthode est la suivante:

On cherche d'abord les suites d'Auslander-Reiten de terme intermédiaire indécomposable, car ce sont les extrémités de tous les 3-tubes (s'ils existent) et éventuellement les extrémités de certains 1-tubes. Ces suites possèdent une forme simple, i.e. pour chaque flèche α , il existe une suite d'Auslander-Reiten donnée dans (2) de Théorème 1.6.10. Et puis on peut calculer d'autres composantes en utilisant Théorème 1.6.10. Pour les composantes de type $\mathbb{Z}A_\infty^\infty$, on détermine toutes les cordes minimales en utilisant Proposition 1.6.17.

Chapter 2

Théorème de Jan Schröer et Alexander Zimmermann

2.1 Enoncé du théorème principal

Dans ce chapitre, nous révisons la preuve (avec des modifications mineures) du théorème de Jan Schröer et Alexander Zimmermann qui sert à la base de nos travaux dans cette thèse.

Définition 2.1.1 Un module M sur une algèbre A est dit rigide, si $\text{Ext}_A^1(M, M) = 0$.

Rappelons d'abord le théorème principal:

Théorème 2.1.1 ([44, Theorem 1.1]) Soit A une algèbre bisérielle spéciale et M un A -module rigide. Alors $\underline{\text{End}}_A(M)$ est une algèbre courtoise.

Ce théorème possède une conséquence surprenante:

Corollaire 2.1.2 ([44, Corollary 1.2]) La classe des algèbres courtoises est stable sous les équivalences dérivées.

Il existe une généralisation facile du théorème principal.

Proposition 2.1.3 Soit A une algèbre auto-injective stablement équivalente à une algèbre bisérielle spéciale auto-injective B , i.e. leur catégories stables sont équivalentes en tant que catégories triangulées. Alors pour tout A -module rigide M , $\underline{\text{End}}_A(M)$ est une algèbre courtoise.

Démonstration Soit le foncteur $F : A\text{mod} \rightarrow B\text{mod}$ qui établit l'équivalence. Alors comme A et B sont auto-injectives, $\text{Ext}_A^1(M, M) = \underline{\text{Hom}}_A(\Omega M, M) = \underline{\text{Hom}}_A(M[-1], M)$, où $[1] = \Omega^{-1}$ est le foncteur de translation dans $A\text{mod}$. On en déduit que $\text{Ext}_A^1(M, M) = 0 \iff \text{Ext}_B^1(FM, FM) = 0$. □

Corollaire 2.1.4 Soient A et B deux algèbres auto-injectives. Si leur catégories dérivées sont équivalentes: $F : D^b(A) \cong D^b(B)$, alors un A -module M est rigide ssi FM est rigide et $\underline{\text{End}}_A(M) \cong \underline{\text{End}}_B(FM)$.

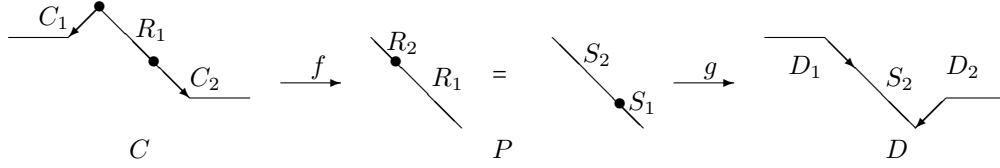
Démonstration D'après un théorème de Jeremy Rickard([37]), une équivalence entre les catégories dérivées de deux algèbres auto-injective induit une équivalence entre leur catégories stables. Ce corollaire déduit immédiatement de la proposition précédente. □

Fixons dans ce chapitre une algèbre bisérielle spéciale $A = kQ/\langle \rho \rangle$.

2.2 Morphismes projectifs

On va étudier en détail le composé de deux morphismes explicites $f : M(C) \rightarrow P$ et $g : P \rightarrow M(D)$ où C et D sont deux cordes et où P est un module projectif indécomposable. On suppose qu'aucun des f et g n'est un isomorphisme.

Considérons d'abord le cas où P est unisérielle de forme $M(R)$ pour R une corde. La situation peut être illustrée par le graphe suivant:



Dans ce graphe, $C = C_1 R_1 C_2$ où C_1 est de longueur nulle ou termine par une flèche inverse et où C_2 est de longueur nulle ou commence par une flèche directe, $D = D_1 S_2 D_2$ où D_1 est de longueur nulle ou termine par une flèche directe et où D_2 est de longueur nulle ou commence par une flèche inverse et $P = M(R_2 R_1) = M(S_2 S_1)$ avec $R_2 R_1 = S_2 S_1$ et où R_2, R_1, S_2, S_1 sont directes. Le morphisme f est de cœur R_1 et g de cœur S_2 . Le composé $g \circ f$ est nul si $R_1 \cap S_2 = \emptyset$ et est le morphisme explicite de cœur $R_1 \cap S_2$ si $R_1 \cap S_2 \neq \emptyset$. Ce composé est faiblement unilatéral ssi

- (i) Si $|R_1 \cap S_2| > 0$, $R_1 \subsetneq R_1 R_2 = S_2$ et $|C_2| = 0 = |D_2|$
- (ii) Si $|R_1 \cap S_2| = 0$, $|C_1| = 0 = |D_2|$ ou $|C_2| = 0 = |D_2| = |R_1|$

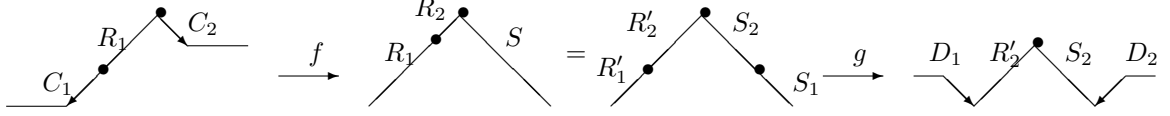
En effet, supposons d'abord que $|R_1 \cap S_2| > 0$. Alors

- (1) $g \circ f$ est unilatéral à gauche ssi $|C_1| = 0 = |D_1|$ et $R_1 \cap S_2 = S_2$. On en déduit que $R_1 = R_2 R_1 \supset S_2$ et donc que f est surjectif. Comme P est projectif, $M(C) \xrightarrow{f} P$ et cela contredit l'hypothèse que f ne soit pas un isomorphisme.
- (2) $g \circ f$ est unilatéral à droite ssi $|C_2| = 0 = |D_2|$ et $R_1 \cap S_2 = R_1$. On en déduit que $S_2 = S_2 S_1 \supset R_1$ et $M(S_2) = P$.
- (3) $M(C) \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} M(D) \cong M(D^{-1})$ n'est pas unilatéral, puisque $|R_1 \cap S_2| > 0$.

Supposons que $|R_1 \cap S_2| = 0$. Alors

- (1) $g \circ f$ est unilatéral à gauche ssi $|C_1| = 0 = |D_1 S_2|$. On en déduit que $R_1 = R_1 R_2 \supsetneq S_2$ et donc que f est surjectif. Comme P est projectif, $M(C) \xrightarrow{f} P$ et cela contredit l'hypothèse que f ne soit pas un isomorphisme.
- (2) $g \circ f$ est unilatéral à droite ssi $|R_1 C_2| = 0 = |D_2|$.
- (3) $M(C) \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} M(D) \cong M(D^{-1})$ est unilatéral à gauche ssi $|C_1| = 0 = |D_2|$.
- (4) $M(C) \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} M(D) \cong M(D^{-1})$ est unilatéral à droite ssi $|R_1 C_2| = 0 = |D_2|$.

Soit P un module indécomposable projectif non injectif non-sériel. Alors on visualise la situation à l'aide du graphe suivant:



Dans ce graphe, $C = C_1 R_1 C_2$ où C_1 est de longueur nulle ou termine par une flèche inverse et où C_2 est de longueur nulle ou commence par une flèche directe et où R_1 est inverse, et $D = D_1 R'_2 S_2 D_2$ où D_1 est de longueur nulle ou termine par une flèche directe et où D_2 est de longueur nulle ou commence par une flèche inverse, et $P = M(R_1 R_2 S) = M(R'_1 R'_2 S_2 S_1)$ avec $R_1 R_2 = R'_1 R'_2$ et $S = S_2 S_1$, où les cordes $R_1^{-1}, R_2^{-1}, R'_1^{-1}, R'_2^{-1}, S, S_1, S_2$ sont directes et où R'_1 ou S_1 peut être vide mais pas toutes. Le morphisme f est de cœur R_1 et g de cœur $R'_2 S_2$. Le composé $g \circ f$ est nul si $R_1 \cap R'_2 = \emptyset$ et est le morphisme explicite de cœur $R_1 \cap R'_2$ si $R_1 \cap R'_2 \neq \emptyset$. Ce morphisme est faiblement unilatéral ssi

- (i) Si $|R_1 \cap R'_2| > 0$, $R_1 \subsetneq R_1 R_2 = R'_2$ et $|C_1| = 0 = |D_1|$
- (ii) Si $|R_1 \cap R'_2| = 0$, $(R_1 \subsetneq R_1 R_2 = R'_2$ et $|C_1 R_1| = 0 = |D_1|$) ou $|C_1| = 0 = |D_2|$

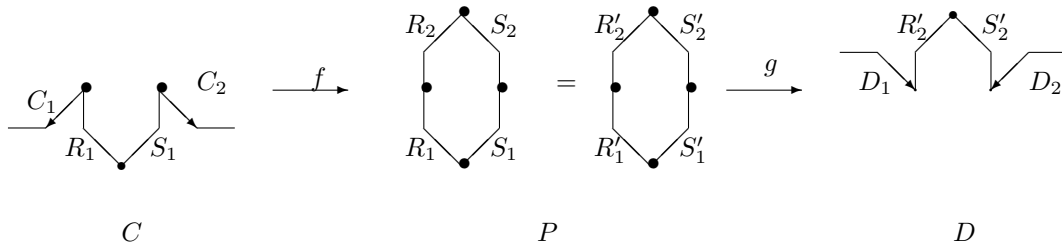
En effet, supposons d'abord que $|R_1 \cap R'_2| > 0$. Alors

- (1) $g \circ f$ est unilatéral à gauche ssi $|C_1| = 0 = |D_1|$ et $R_1 \cap R'_2 = R_1$.
- (2) $g \circ f$ est unilatéral à droite ssi $|C_2| = 0 = |S_2 D_2|$ et $R_1 \cap R'_2 = R'_2$. On en déduit que $R_1 = R'_1 R'_2 \supset R'_2$. C'est impossible car $\text{im}(f) = M(R_1)$ est un sous-module de P .
- (3) $M(C) \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} M(D) \cong M(D^{-1})$ n'est pas unilatéral.

supposons que $|R_1 \cap R'_2| = 0$. Alors

- (1) $g \circ f$ est unilatéral à gauche ssi $|C_1 R_1| = 0 = |D_1|$.
- (2) $g \circ f$ est unilatéral à droite ssi $|C_2| = 0 = |R'_2 S_2 D_2|$. Cela montre que $R_1 = R'_1 R'_2$ qui est impossible, car $\text{im}(f) = M(R_1)$ est un sous-module de P .
- (3) $M(C) \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} M(D) \cong M(D^{-1})$ est unilatéral à gauche ssi $|C_1 R_1| = 0 = |R'_2 S_2 D_2|$. Cela montre que $R_1 = R'_1 R'_2$ qui est impossible, car $\text{im}(f) = M(R_1)$ est un sous-module de P .
- (4) $M(C) \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} M(D) \cong M(D^{-1})$ est unilatéral à droite ssi $|C_2| = 0 = |D_1|$, car $M(R'_1 R'_2)$ n'est pas un sous-module de P .

Soit maintenant P un module indécomposable projectif-injectif non-sériel. Dans ce cas, voir le graphe suivant:



Dans ce graphe, $C = C_1 R_1 S_1 C_2$ où C_1 est de longueur nulle ou termine par une flèche inverse et où C_2 est de longueur nulle ou commence par une flèche directe et où les cordes R_1 et S_1^{-1} sont directes. $D = D_1 R'_2 S'_2 D_2$ où D_1 est de longueur nulle ou termine par une flèche directe et où D_2 est de longueur nulle ou commence par

une flèche inverse. Les cordes $R_1, R_2^{-1}, R'_1, R_2'^{-1}, S_1^{-1}, S_2, S_1'^{-1}, S_2'$ sont directes et R_1, S_1, R'_1, S'_1 peuvent être de longueur nulle. Le morphisme f est de cœur $R_1 S_1$ et g de cœur $R'_2 S'_2$.

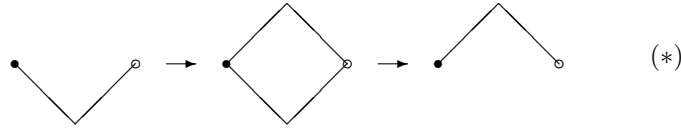
On distingue les cas suivants:

Cas 1: $R_1 \cap R'_2 = \emptyset = S_1 \cap S'_2$. Alors $g \circ f = 0$.

Cas 2: $|R_1 \cap R'_2| = 0, S_1 \cap S'_2 = \emptyset$. Alors $|R_1| > 0 < |R'_2|$ et $g \circ f$ est le morphisme explicite de cœur $R_1 \cap R'_2$ qui est de longueur nulle. Le composé $g \circ f$ est unilatéral (à gauche) ssi $|C_1| = 0 = |D_1|$.

Cas 2': $R_1 \cap R'_2 = \emptyset, |S_1 \cap S'_2| = 0$. Alors $|S_1| > 0 < |S'_2|$ et $g \circ f$ le morphisme explicite de cœur $S_1^{-1} \cap S'_2$ qui est de longueur nulle. Le composé $g \circ f$ est unilatéral (à droite) ssi $|C_2| = 0 = |D_2|$.

Cas 3: $|R_1 \cap R'_2| = 0 = |S_1 \cap S'_2|$. Alors $g \circ f$ est la somme des deux morphismes explicites de cœur (de longueur nulle) respectivement $R_1 \cap R'_2$ et $S_1 \cap S'_2$. Le premier morphisme est unilatéral ssi $|C_1| = 0 = |D_1|$ et le deuxième l'est ssi $|C_2| = 0 = |D_2|$. La situation où les deux sont tous unilatéraux peut être visualisée comme suit:



où $R_1 \cap R'_2$ est représenté par un point noir, et $S_1 \cap S'_2$ par un point blanc.

Cas 4: $|R_1 \cap R'_2| > 0, S_1 \cap S'_2 = \emptyset$. Alors $g \circ f$ est le morphisme explicite de cœur $R_1 \cap R'_2$. Ce morphisme est bilatéral puisque $|R_1 \cap R'_2| > 0$ et $|R_1| > |R_1 \cap R'_2| < |R'_2|$.

Cas 4': $R'_2 \cap R_1 = \emptyset, |S'_2 \cap S_1| > 0$. Alors $g \circ f$ est le morphisme explicite de cœur $S_1 \cap S'_2$. Ce morphisme est bilatéral puisque $|S_1 \cap S'_2| > 0$ et $|S_1| > |S_1 \cap S'_2| < |S'_2|$.

Cas 5: $|R_1 \cap R'_2| > 0, |S_1 \cap S'_2| = 0$ Alors $g \circ f$ est la somme des deux morphismes explicites de cœur respectivement $R_1 \cap R'_2$ et $S_1 \cap S'_2$. Le premier est bilatéral, grâce au fait que son cœur est de longueur strictement positive, et le deuxième est unilatéral à droite ssi $|C_2| = 0 = |D_2|$.

Cas 5': $|R'_2 \cap R_1| = 0, |S'_2 \cap S_1| > 0$. Alors $g \circ f$ est la somme des deux morphismes explicites de cœur respectivement $R_1 \cap R'_2$ et $S_1 \cap S'_2$. Le premier est unilatéral (à gauche) ssi $|C_1| = 0 = |D_1|$ et le deuxième est bilatéral, grâce au fait que son cœur est de longueur strictement positive.

Cas 6: $|R'_2 \cap R_1| > 0, |S'_2 \cap S_1| > 0$. Alors $g \circ f$ est la somme des deux morphismes explicites de cœur respectivement $R_1 \cap R'_2$ et $S_1 \cap S'_2$, tous les deux étant bilatéraux.

Remarque 2.2.1 Les discussions de 6 cas ci-dessus donne le fait suivant: soient $f : M(C) \rightarrow P$ et $g : P \rightarrow M(D)$ deux morphismes explicites avec P un module indécomposable projectif-injectif non sériel. Alors le composé $g \circ f$ est un morphisme explicite ou somme de deux morphismes explicites. Ces nouveaux morphismes explicites sont bilatéraux ou faiblement unilatéraux de cœur de longueur nulle et leur cœurs sont disjoints l'un à l'autre.

Remarque 2.2.2 Soit $f : M(C) \rightarrow M(D)$ un morphisme explicite projectif de cœur E qui est une corde directe ou inverse. Alors les discussions ci-dessus implique qu'il existe un module indécomposable projectif P et deux morphismes explicites $g : M(C) \rightarrow P$ et $h : P \rightarrow M(D)$ tels que $g \circ h = f + f'$ pour f' étant un autre morphisme explicite de cœur disjoint de celui de f ou le morphisme nul. En effet, comme f est projectif, il existe un module projectif $P = \oplus P_j$ avec P_j des modules indécomposables projectifs et des morphismes $g_j : M(C) \rightarrow P_j$ et $h_j : P_j \rightarrow M(D)$ tels que $\sum_j h_j \circ g_j = f$. Les morphismes g_j et h_j peuvent s'écrire en somme de morphismes explicites en vertu du théorème de Crawley-Boevey (Théorème 1.5.1) et sa généralisation Remarque 1.5.7. Sans perdre de généralité, on peut supposer que les morphismes g_j et h_j sont explicites. D'après Remarque 2.2.1, $h_j \circ g_j$ est un morphisme explicite ou somme de deux morphismes explicites de cœur disjoint. Comme différents morphismes explicites sont linéairement indépendants, alors il existe un j tel que $h_j \circ g_j = f$ ou $h_j \circ g_j = f + f'$ tel que le cœur de f' soit disjoint de celui de f .

Plus généralement, si $f : M(C) \rightarrow M(D)$ est projectif, alors il existe des modules indécomposables projectifs $P_1, P_2, \dots, P_r$ et des morphismes explicites $g_i : M(C) \rightarrow P_i$ et $h_i : P_i \rightarrow M(D)$ avec $1 \leq i \leq r$ tels que pour tout $1 \leq i < r$, $h_i \circ g_i = f_i + f_{i+1}$ et $h_r \circ g_r = f_r$ où les f_i sont des morphismes explicites distincts non nuls de $M(C)$ à $M(D)$ avec $f_1 = f$. En effet, d'après ce qui précède, il existe un module indécomposable projectif P_1 et deux morphismes explicites $g_1 : M(C) \rightarrow P_1$ et $h : P_1 \rightarrow M(D)$ tels que $h_1 \circ g_1 = f_1 + f_2$ pour f_2 étant un autre morphisme explicite de cœur disjoint de celui de $f_1 = f$ ou le morphisme nul. Si $f_2 = 0$, c'est fait. Si $f_2 \neq 0$, alors il existe un module indécomposable projectif P_2 et deux morphismes explicites $g_2 : M(C) \rightarrow P_2$ et $h : P_2 \rightarrow M(D)$ tels que $h_2 \circ g_2 = f_2 + f_3$ pour f_3 étant un autre morphisme explicite de cœur disjoint de celui de f_2 ou le morphisme nul. Comme f est projectif, on construit par récurrence une suite finie de modules indécomposables projectifs P_i avec $1 \leq i \leq r$ et des morphismes explicites $g_i : M(C) \rightarrow P_i$ et $h_i : P_i \rightarrow M(D)$ avec $1 \leq i \leq r$ tels que pour tout $1 \leq i \leq r$, $h_i \circ g_i = f_i + f_{i+1}$ et $h_r \circ g_r = f_r$ où les f_i sont des morphismes explicites non nuls de $M(C)$ à $M(D)$ avec $f_1 = f$. S'il existe $1 \leq i < j \leq r$ tel que $f_i = f_j$. Alors on peut supprimer les modules $P_i, P_{i+1}, \dots, P_{j-1}$ et les morphismes explicites $g_s : M(C) \rightarrow P_i$ et $h_s : P_i \rightarrow M(D)$ avec $i \leq s \leq j-1$. Ce qui reste vérifie encore les conditions et on peut supposer donc que les f_i sont distincts deux à deux.

Lemme 2.2.3 Soit $f : M(C) \rightarrow M(D)$ un morphisme qui factorise par une somme de modules indécomposables projectif-injectifs non-sériels. Alors f est combinaison linéaire de morphismes bilatéraux et de morphismes faiblement unilatéraux de cœur de longueur nulle.

Démonstration Il suffit de traiter le cas où f factorise par un module projectif-injectif indécomposable. Ecrivons $f = h \circ g$ où $g : M(C) \rightarrow P$ et $h : P \rightarrow M(D)$ pour un module indécomposable projectif-injectif non-sériel P . Le théorème de Crawley-Boevey (Théorème 1.5.1) implique que g et h sont combinaisons linéaires de morphismes explicites. Le morphisme f est donc somme de composés déjà discutés dans les 6 cas ci-dessus. Ce lemme découle de Remarque 2.2.1.

□

Remarque 2.2.4 Ce lemme remplace Lemma 3.1 de [44], qui néglige l'existence des morphismes unilatéraux de cœur de longueur nulle. Nous allons en donner un contre-exemple dans Remarque 3.7.2.

2.3 Deux lemmes préparatoires

Donnons d'abord une propriété importante.

Proposition 2.3.1 ([44, Proposition 3.7]) Soit $f_a : M(C_1) \rightarrow M(C_2)$ un morphisme explicite. Si on suppose que $\text{Ext}_A^1(M(C_2), M(C_1)) = 0$, alors $\underline{f}_a = 0$ ou f_a est faiblement unilatéral

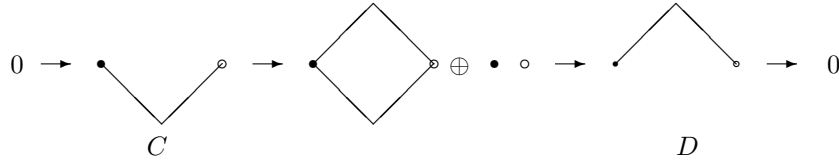
Le lemme suivant est une version stable du théorème de Crawley-Boevey (Théorème 1.5.1).

Lemme 2.3.2 Soient $f_j : M(C) \rightarrow M(D)$, $1 \leq j \leq l$ tous les morphismes explicites différents tels que $f_j \neq 0$ pour tout $1 \leq j \leq l$ dans $\underline{\text{Hom}}_A(M(C), M(D))$. Si on suppose $\text{Ext}_A^1(M(D), M(C)) = 0$, alors les $\underline{f}_j$ avec $1 \leq j \leq l$ forment une base de $\underline{\text{Hom}}_A(M(C), M(D))$ en tant qu'espace vectoriel.

Démonstration D'après Proposition 2.3.1, les f_j sont faiblement unilatéraux. Supposons que $\Sigma \lambda_j f_j = 0$, où les λ_j ne sont pas tous nuls. Notons $f = \Sigma \lambda_j f_j$. Alors il existe des constantes $\mu_i \in k^*$ et un A -module projectif $P = \sum_{i=1}^l P(i)$ avec $P(i)$ indécomposable projectif pour tout i et des homomorphismes $g = [g_1, \dots, g_l] : M(C) \rightarrow P$ et $h = [h_1, \dots, h_l]^t : P \rightarrow M(D)$ tels que $f = h \circ g$. Le composé $\Sigma \lambda_i f_i = f = h \circ g = \mu_i \sum h_i \circ g_i$. On peut supposer que les g_i et h_i soient des morphismes explicites en vertu du théorème de Crawley-Boevey (Théorème 1.5.1) et sa généralisation (Remarque 1.5.7). D'après Remarque 2.2.2, $g_i \circ h_i$ est un morphisme explicite

ou somme de deux morphismes explicites. Dans le premier cas, $g_i \circ h_i = 0$. Dans le deuxième cas, écrivons $g_i \circ h_i = f_a + f_b$ pour deux paires admissibles a et b . Alors si l'un des f_a et f_b est projectif, l'autre l'est aussi. On pose J l'ensemble des indices i tels que $h_i \circ g_i$ est un morphisme explicite ou $h_i \circ g_i = f_a + f_b$ avec f_a et f_b tous projectifs. On écrit $\sum \lambda_j f_j = \sum \mu_i h_i \circ g_i = \sum_{i \in J} \mu_i h_i \circ g_i + \sum_{i \notin J} \mu_i h_i \circ g_i$. Alors $\sum_{i \in J} \mu_i h_i \circ g_i = 0$, puisque les morphismes explicites sont linéairement indépendants. On peut donc supprimer tous les $P(i)$, g_i et h_i pour $i \in J$. Maintenant ce qui nous reste sont les facteurs $P(i)$ projectif-injectifs non-sériels tel que $g_i \circ h_i = f'_i + f''_i$, où aucun des f'_i et f''_i n'est projectif. En ce moment, comme $\sum_j \lambda_j f_j = \sum_i \mu_i h_i \circ g_i = \sum_i \mu_i (f'_i + f''_i)$, chaque f_j est égale à certain f'_i ou f''_i . Comme f_j est faiblement unilatéral, Remarque 2.2.1 implique que $f_j = f'_i$ ou $f_j = f''_i$ est faiblement unilatéral de cœur de longueur nulle. On admette pour l'instant la déclaration suivante: *supposons qu'il existe i et j tels que $g_i \circ h_i = f'_i + f''_i$ et $g_j \circ h_j = f'_j + f''_j$ avec $f'_i = f'_j$ et $f''_i \neq f''_j$. Alors $|f'_i| = 0$.*

Supposons que $\lambda_1 \neq 0$. Il existe i_1 tel que $h_{i_1} \circ g_{i_1} = f'_{i_1} + f''_{i_1}$ avec $f'_{i_1} = f_1$. Si f''_{i_1} est l'un des f_j , $1 \leq j \leq l$, alors comme f'_{i_1} et f''_{i_1} sont faiblement unilatéraux, on est dans la situation (*) de Section 2.2. Or, dans ce cas, on a une suite exacte courte non-scindée dont les morphismes sont évidents



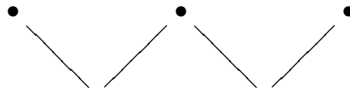
Dans cette suite, le terme intermédiaire est somme directe de $P(i)$ avec les deux modules simples qui correspondent respectivement aux cœurs de f'_{i_1} et f''_{i_1} . On en résulte que $\text{Ext}_A^1(M(D), M(C)) \neq 0$. C'est une contradiction. Si f''_{i_1} n'est pas parmi les f_j , il existe i_2 tel que $h_{i_2} \circ g_{i_2} = f'_{i_2} + f''_{i_2}$ tel que $f'_{i_2} = f'_{i_1}$ et avec f''_{i_2} un autre morphisme explicite. La déclaration montre que $|f'_{i_2}| = 0$, alors C est de la forme



dans lequel le premier point noir est le cœur de $f_1 = f'_{i_1}$ et le deuxième est celui de f'_{i_2} . D est de la forme



dans lequel le premier point noir est le cœur de f'_{i_1} et le deuxième est celui de f'_{i_2} . Si f''_{i_2} est l'un des f_j avec $1 \leq j \leq l$, alors comme f''_{i_2} est faiblement unilatéral, C est de la forme



dans lequel les points noirs sont respectivement le cœur de f'_{i_1} , f'_{i_2} et f''_{i_2} et D est de la forme



dans lequel les points noirs sont respectivement le cœur de f'_{i_1} , f'_{i_2} et f''_{i_2} . En ce moment, il existe une suite exacte courte non scindée

$$0 \rightarrow \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array} \rightarrow P_{i_1} \oplus P_{i_2} \oplus S_1 \oplus S_2 \oplus S_3 \rightarrow \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \end{array} \rightarrow 0$$

où les modules S_1, S_2 et S_3 sont respectivement les modules simples correspondant aux cœurs de f'_{i_1}, f'_{i_2} et f''_{i_2} . Cela implique que $\text{Ext}_A^1(M(D), M(C)) \neq 0$, ce qui est absurde..

En utilisant la déclaration, on montre par récurrence qu'il existe des entiers $i_1, i_2, \dots, i_s$ tels que $h_{i_u} \circ g_{i_u} = f'_{i_u} + f''_{i_u}$, $1 \leq u \leq s$ où les f'_{i_u} et f''_{i_u} sont des morphismes explicites différents de cœur de longueur nulle avec $f'_{i_u} = f'_{i_{u+1}}$ pour tout $1 \leq u \leq s-1$ et où aucun des f''_{i_u} , $1 \leq u \leq s-1$ n'est parmi les f_j pour $1 \leq j \leq l$ et que $f''_{i_s} \in \{f_1, \dots, f_l\}$. En ce moment, comme f''_{i_s} est unilatéral à droite, C est de la forme



dans lequel le u -ième point noir est le cœur de f'_{i_u} pour $1 \leq u \leq s$ et le dernier point noir est celui de f''_{i_s} . D est de la forme

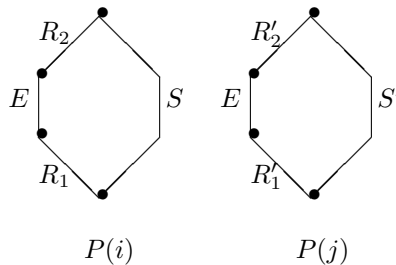


dans lequel le u -ième point noir est le cœur de f'_{i_u} pour $1 \leq u \leq s$ et le dernier point noir est celui de f''_{i_s} . En ce moment, il existe une suite exacte courte non-scindée similaire à celle ci-dessus.

$$0 \rightarrow M(C) \rightarrow \bigoplus_{1 \leq u \leq s} P(i_u) \oplus (\bigoplus_{1 \leq u \leq s+1} S_u) \rightarrow M(D) \rightarrow 0$$

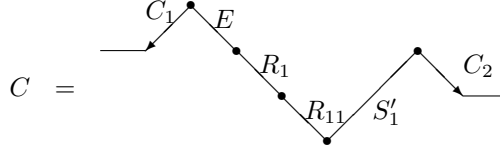
dans lequel les modules simples S_u pour $1 \leq u \leq s+1$ correspondent respectivement aux cœurs de $f'_{i_1}, \dots, f'_{i_s}$ et f''_{i_s} et les morphismes sont des morphismes évidents. On aurait donc que $\text{Ext}_A^1(M(D), M(C)) \neq 0$, ce qui est absurde.

On montre maintenant la déclaration. Supposons le contraire, i.e. $|E| > 0$, où E est le cœur de f_a . Les $P(i)$ et $P(j)$ sont de la forme



Comme $|E| > 0$ et ER_1 et ER'_1 sont des cordes, l'axiome SB2 implique que $R_1 \subseteq R'_1$ ou $R'_1 \subseteq R_1$. On peut supposer $R_1 \subseteq R'_1$. Si $R_1 = R'_1$, alors $P(i) = P(j)$ et on a $f_b = f_c$. En effet, supposons $\text{im}(g_i) = M(ER_1S_1)$ et $\text{im}(g_j) = M(ER_1S'_1)$ où $S_1 \subsetneq S \supsetneq S'_1$. On écrit $C = C_1ER_1S_1C_2$ et $C = C_1ER_1S'_1C'_2$ où C_2 (aussi C'_2)

est de longueur nulle ou commence par une flèche directe. On a alors $S_1 C_2 = S'_1 C'_2$, cela implique $S_1 = S'_1$, car sinon, on peut supposer $S_1 \subsetneq S'_1$, alors S_1 est suivie d'une flèche directe dans $S_1 C_2$ et d'une flèche inverse dans $S'_1 C'_2$. C'est absurde. On a montré donc que $R_1 \neq R'_1$ et donc $P(i) \not\cong P(j)$. Supposons dès maintenant que $R'_1 = R_1 R_{11}$ avec $|R_{11}| > 0$. Ce cas peut être illustré comme suit:



où $C = C_1 E R_1 R_{11} S'_1 C_2$ avec $S'_1 \subset S'$, où C_1 est de longueur nulle ou termine par une flèche inverse et où C_2 est de longueur nulle ou commence par une flèche directe. Cependant, on voit que dans ce cas, $h_i \circ g_i$ est un morphisme explicite de cœur E , car en ce moment $\text{im}(g_i) = M(E R_1)$. Cela contredit notre hypothèse, car on a supprimé tous les morphismes de ce type.

□

Remarque 2.3.3 Ce lemme remplace Lemma 3.2 de [44], dans lequel il manque la condition de nullité de Ext^1 . Cette condition est pourtant nécessaire comme montre un exemple donné dans Remarque 3.7.2.

Lemme 2.3.4 Soient $f_a : M(C_1) \rightarrow M(C_2)$ et $f_b : M(C_2) \rightarrow M(C_3)$ deux morphismes explicites unilatéraux à gauche tels que $\underline{f_a} \neq 0 \neq \underline{f_b}$. Si on suppose que $|C_2| > 0$ et que $\text{Ext}_A^1(M(C_i), M(C_j)) = 0$, pour $1 \leq i, j \leq 3$. Alors $f_b \circ f_a \neq 0$ entraîne $\underline{f_b} \circ \underline{f_a} \neq 0$.

Démonstration Supposons que $\underline{f_b} \circ \underline{f_a} = 0$. On va montrer que $\underline{f_a} = 0$ ou $\underline{f_b} = 0$.

Supposons

$$a = ((D_1, E_1, F_1), (D_2, E_1, F_2))$$

et

$$b = ((D'_2, E_2, F'_2), (D_3, E_2, F_3))$$

avec $|D_1| = |D_2| = |D'_2| = |D_3| = 0$.

Cas 1: $|E_1| = 0$ et $|E_2| = 0$

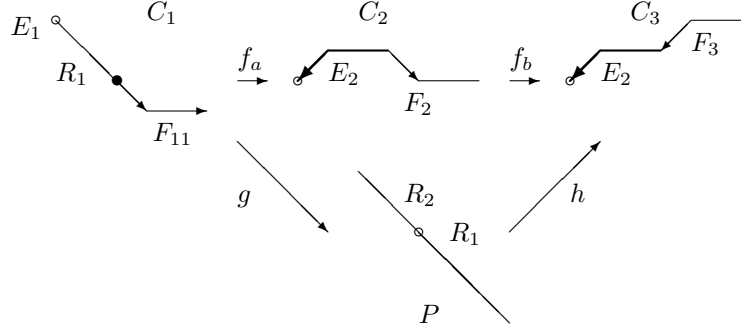
Dans ce cas, $E_1 = E_2$. Comme $|E_1| = 0$ et $|C_2| > 0$, E_1 est suivi d'une flèche inverse dans C_2 ; comme $|E_2| = 0$ et $|C_2| > 0$, E_2 est suivi d'une flèche directe dans C_2 . Vu que $E_1 = E_2$, c'est absurde. Ce cas est donc impossible.

Cas 2: $|E_1| = 0$ et $|E_2| > 0$

Comme différents morphismes explicites sont linéairement indépendants, d'après les discussions dans Remarque 2.2.2, on peut trouver P un module indécomposable projectif et deux morphismes explicites $g : M(C_1) \rightarrow P$ et $h : P \rightarrow M(C_3)$ tels que $h \circ g$ soit $f_b \circ f_a$ ou la somme de $f_b \circ f_a$ avec un autre morphisme explicite f_c .

Cas 2.1 P projectif unisériel.

Alors $h \circ g = f_b \circ f_a$.



Dans ce graphe, les points blancs sont E_1 . Les segments epais sont E_2 . L'image de g est $M(R_1)$ et $\text{im}(h) \simeq M(R_2^{-1})$. Ecrivons $C_1 = E_1 R_1 F_{11}$ où F_{11} est de longueur nulle ou commence par une flèche directe, $C_2 = E_2 F_2$ où F_2 est de longueur nulle ou commence par une flèche directe et $C_3 = E_2 F_3$ où F_3 est de longueur nulle ou commence par une flèche inverse.

Si $|R_1| = 0$, alors $P = M(R_2)$, $\ker(h) = 0$ et h est injectif. On compare R_2^{-1} et E_2 dans C_3 . Si $E_2 \subseteq R_2^{-1}$, f_a factorise par P via $M(C_2) \twoheadrightarrow M(E_2) \hookrightarrow P = M(R_2) \xrightarrow{h} M(C_3)$. Si $R_2^{-1} \subsetneq E_2$, $E_2 = R_2^{-1} \beta^{-1} E_{21}$ avec $\beta \in Q_1$ et $P = M(R_2^{-1})$ est un sous-module de $M(C_2)$. f_a factorise par P via $M(C_1) \xrightarrow{g} P \hookrightarrow M(C_2)$.

Supposons maintenant que $|R_1| > 0$. Soit $R_1 = \alpha R_{11}$ où α est une flèche directe. Alors on peut écrire $C_1 = E_1 \alpha R_{11} F_{11} F_{12}$, où F_{11} est directe ou de longueur nulle et où F_{12} est de longueur nulle ou commence par une flèche inverse. Comparons E_2 et R_2^{-1} .

Si $E_2 \subseteq R_2^{-1}$, alors $\alpha^{-1} E_2 \subseteq \alpha^{-1} R_2^{-1} \subset (R_2 R_1)^{-1}$ est encore une corde et donc $\alpha^{-1} C_2 = \alpha^{-1} E_2 F_2$ l'est aussi puisque F_2 est de longueur nulle ou commence par une flèche directe. On obtient que f_a factorise par $\tau M(C_2)$ via

$$M(C_1) \twoheadrightarrow M(\alpha) \hookrightarrow \tau M(C_2) \rightarrow M(C_2)$$

où les deux premiers morphismes sont évidents et où le troisième est le composé des morphismes irréductibles $\tau M(C_2) = M([-1]C_2[-1]) \rightarrow M([-1]C_2) \rightarrow M(C_2)$. Comme la formule d'Auslander-Reiten donne que

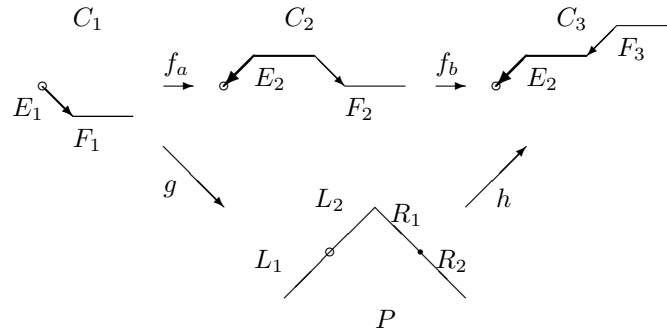
$$\underline{\text{Hom}}_A(M(C_1), \tau M(C_2)) = D\text{Ext}_A^1(M(C_2), M(C_1)) = 0$$

on a alors que $f_a = 0$. C'est une contradiction à l'hypothèse du lemme.

Si $R_2^{-1} \subsetneq E_2$, alors $E_2 = R_2^{-1} E_{21} E_{22}$ avec E_{21} inverse de longueur strictement positive et où E_{22} commence par une flèche directe ou est de longueur nulle. Ici $|E_{21}| > 0$, car $M(R_1)$ est un sous-module de $M(C_3)$. Le morphisme f_a est projectif via

$$M(C_1) \xrightarrow{g} P \twoheadrightarrow M(R_2) \hookrightarrow M(C_2)$$

Cas 2.2 P non-sériel projectif non-injectif



Dans ce graphe, les points blancs sont E_1 qui est réduit à un point et les segments épais sont E_2 , $C_1 = E_1F_1$ où F_1 est de longueur nulle ou commence par une flèche directe, $C_2 = E_2F_2$ où F_2 est de longueur nulle ou commence par une flèche directe et $C_3 = E_2F_3$ où F_3 est de longueur nulle ou commence par une flèche inverse. Et puis $P = M(L_1L_2R_1R_2)$ avec $L_1^{-1}, L_2^{-1}, R_1, R_2$ directes. Le cœur de f_a est E_1 et celui de f_b est E_2 . $\text{im}(g) = M(L_1)$ et $\text{im}(h) = M(L_2R_1)$.

Cas 2.2.1: $|L_1| = 0$.

Comparons E_2 et $L_1L_2R_1$. Si $E_2 \subsetneq L_1L_2R_1$, alors $M(E_2)$ est un sous-module de P et f_b factorise par P via

$$M(C_2) \rightarrow M(E_2) \subset P \xrightarrow{h} M(C_3)$$

Si $L_1L_2 \subset E_2 \subset L_1L_2R_1$, alors comme F_3 est de longueur nulle ou commence par une flèche inverse, $E_2 = L_1L_2R_1$, alors f_a factorise par P , car écrivons $F_2 = F_{21}F_{22}$ avec F_{21} directe et où F_{22} est de longueur nulle ou commence par une flèche inverse. On a que $R_1F_{21} \subseteq R_1R_2$ et que f_a est le composé

$$M(C_1) \xrightarrow{g} P \rightarrow M(E_2F_{21}) \hookrightarrow M(C_2)$$

Si $E_2 = L_1L_2R_1\alpha^{-1}E_{21}$ où α est une flèche directe, dans ce cas, $M(L_1L_2R_1)$ est un sous-module de $M(C_2)$. On obtient que f_a est projectif via

$$M(C_1) \xrightarrow{g} P \rightarrow M(L_1L_2R_1) \hookrightarrow M(C_2)$$

Cas 2.2.2: $|L_1| > 0$

Écrivons $L_1 = L_{11}\alpha^{-1}$ avec $\alpha \in Q_1$ et où L_{11} est de longueur nulle ou est inverse et $F_1 = L_1^{-1}F_{11}$ où F_{11} est de longueur nulle ou commence par une flèche directe. Comparons L_2R_1 et E_2 .

Si $E_2 \subseteq L_2R_1$, alors $\alpha^{-1}E_2 \subseteq \alpha^{-1}L_2R_1$ est une corde et donc $\alpha^{-1}C_2 = \alpha^{-1}E_2F_2$ l'est aussi. Le morphisme f_a factorise par $\tau M(C_2)$ via

$$M(C_1) \rightarrow M(\alpha^{-1}) \hookrightarrow \tau M(C_2) \rightarrow M(C_2)$$

On obtient comme avant que $\underline{f}_a = 0$ à l'aide de la formule d'Auslander-Reiten.

Supposons que $E_2 \not\subseteq L_2R_1$. Si $|R_1| > 0$, alors $\alpha^{-1}E$ est une corde, et donc $\alpha^{-1}C_2 = \alpha^{-1}E_2F_2$ l'est aussi. Le morphisme f_a factorise par $\tau M(C_2)$ via

$$M(C_1) \rightarrow M(\alpha^{-1}) \hookrightarrow \tau M(C_2) \rightarrow M(C_2)$$

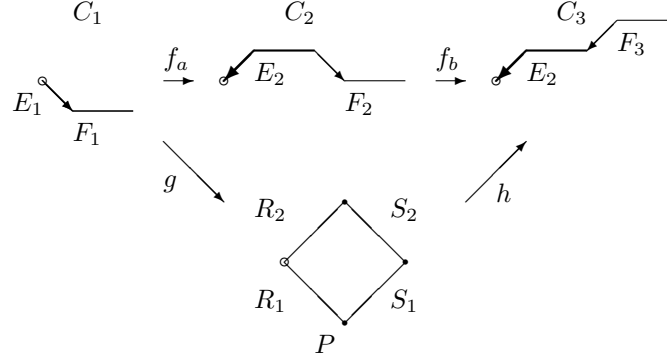
On obtient comme avant que $\underline{f}_a = 0$ à l'aide de la formule d'Auslander-Reiten. Supposons que $|R_1| = 0$. Écrivons $E_2 = L_2E_{21}E_{22}$ avec E_{21} inverse et où E_{22} est de longueur nulle ou commence par une flèche directe. Si $|E_{21}| = 0$, $\alpha^{-1}E$ est une corde, et donc $\alpha^{-1}C_2 = \alpha^{-1}E_2F_2$ l'est aussi. Le morphisme f_a factorise par $\tau M(C_2)$ via

$$M(C_1) \rightarrow M(\alpha^{-1}) \hookrightarrow \tau M(C_2) \rightarrow M(C_2)$$

On obtient comme avant que $\underline{f}_a = 0$ à l'aide de la formule d'Auslander-Reiten. Si $|E_{21}| > 0$, $M(L_2)$ est un sous-module de $M(C_2)$ et f_a factorise par P via

$$M(C_1) \xrightarrow{g} P \rightarrow M(L_2) \hookrightarrow M(C_2)$$

Cas 2.3: P projectif-injectif non sériel



Dans ce graphe, les points blancs sont E_1 , le cœur de f_b , et les segments noirs sont E_2 , le cœur de f_b . $C_1 = E_1 F_1$ où F_1 est de longueur nulle ou commence par une flèche directe, $C_2 = E_2 F_2$ où F_2 est de longueur nulle ou commence par une flèche directe, $C_3 = E_2 F_3$ où F_3 est de longueur nulle ou commence par une flèche inverse. Dans P , les chemins maximaux sont $R_2 R_1$ et $S_2 S_1$. L'image $\text{im } g = R_1 S_1$ où l'on peut supposer que $|R_1| > 0$ et que $R_1 = E_1 R_1$. En ce cas, l'image de g ne peut pas être simple, car sinon $h \circ g = 0$. Notons $R_1 = \alpha R_{11}$ avec α une flèche et $F_1 = R_1 S_1 F_{11}$ où F_{11} est de longueur nulle ou commence par une flèche directe. $\text{im } h = M(R_2 S_3)$ où $S_3 \subset S_2 S_1$.

Supposons d'abord $|R_{11}| > 0$. Comparons $R_2 S_3$ et E_2 . Si $E_2 \subset R_2 S_3$, $\alpha^{-1} E_2$ est une corde et $\alpha^{-1} C_2$ l'est aussi. Le morphisme explicite f_a factorise par $\tau M(C_2)$ et la formule d'Auslander-Reiten entraîne que $\underline{f}_a = 0$. Supposons $E_2 \not\subset R_2 S_3$. Si $|S_3| > 0$, alors $\alpha^{-1} E_2$ est une corde et $\alpha^{-1} C_2$ l'est aussi. Le morphisme explicite f_a factorise par $\tau M(C_2)$ et la formule d'Auslander-Reiten entraîne que $\underline{f}_a = 0$. Supposons $|S_3| = 0$ et écrivons $E_2 = R_2 E_{21} E_{22}$ avec E_{21} inverse et où E_{22} est de longueur nulle ou commence par une flèche directe. Si $|E_{21}| = 0$, alors $\alpha^{-1} E_2$ est une corde et $\alpha^{-1} C_2$ l'est aussi. Le morphisme explicite f_a factorise par $\tau M(C_2)$ et la formule d'Auslander-Reiten entraîne que $\underline{f}_a = 0$. Si $|E_{21}| > 0$, alors $M(R_2)$ est un sous-module de $M(C_2)$ et f_a factorise par P via $M(C_1) \xrightarrow{g} P \twoheadrightarrow M(R_2) \hookrightarrow M(C_2)$.

Supposons que $|R_{11}| = 0$ et que $R_1 = \alpha$. Maintenant comparons E_2 et $R_2 S_3$. (i) Si $E_2 \subsetneq R_2$, alors $\alpha^{-1} C_2$ est une corde et comme ci-dessus, on utilise la formule d'Auslander-Reiten. (ii) Si $R_2 \subset E_2 \subset R_2 S_3$, comme F_3 est de longueur nulle ou commence par une flèche inverse, $E_2 = R_2 S_3$. Alors écrivons $F_2 = F_{21} F_{22}$ avec F_{21} directe et où F_{22} commence par une flèche inverse ou est de longueur nulle. Notons $S_4 = S_1 \cap S_3$, alors écrivons $S_3 = S_{31} S_4$ et $C_2 = E_2 F_2 = R_2 S_{31} S_4 F_{21} F_{22}$. On voit que $R_2 S_{31} S_4 F_{21}$ est un quotient explicite de P . Le composé $M(C_1) \xrightarrow{g} P \twoheadrightarrow M(R_2 S_{31} S_4 F_{21}) \hookrightarrow M(C_2)$ est la somme de f_a avec un morphisme de cœur $S_4 F_{21}$, noté f_c . Comme $\underline{f}_a \neq 0$, $\underline{f}_c \neq 0$, alors Proposition 2.3.1 et Remarque 2.2.1 impliquent que f_c est faiblement unilatéral de cœur de longueur nulle. En ce moment, on obtient $|S_4 F_{21}| = 0 = |F_{11}| = |F_{22}|$, $C_1 = R_1 S_1 = \alpha S_1$, $S_2 = S_3$ et $C_2 = R_2 S_2$, mais dans ce cas, on a une suite exacte courte non scindée (comme dans la preuve du lemme 2.3.2)

$$0 \rightarrow M(C_1) \rightarrow M(E_1) \oplus P \oplus M(S_4 F_{21}) \rightarrow M(C_2) \rightarrow 0$$

dans lequel les morphismes sont évidents. On en déduit une contradiction au fait que $\text{Ext}_A^1(M(C_2), M(C_1)) = 0$.

(iii) Si $E_2 = R_2 S_3 \alpha^{-1} E_{22}$ avec α une flèche directe. Notons f_c le morphisme explicite évident de cœur $S_3 \cap S_1$ tel que $h \circ g = f_a + f_c$. Maintenant f_c est bilatéral puisque $|R_2| > 0 < |\alpha^{-1} E_{22}|$ et d'après Proposition 2.3.1, $\underline{f}_c = 0$. On en déduit que $\underline{f}_a = 0$.

Cas 3: $|E_1| > 0$ et $|E_2| = 0$

Ce cas se démontre de même façon que Cas 2.

□

Remarque 2.3.5 Ce lemme remplace Lemma 3.3 de [44], dans lequel il manque la condition de nullité des groupes Ext^1 et la condition $|C_2| > 0$. Nous allons en donner un contre-exemple dans Remarque 3.7.3.

2.4 Preuve du théorème principal

Pour la preuve modifiée du théorème principal, il suffit de remplacer Lemma 3.1 de [44] par Lemme 2.2.3, Lemma 3.2 de [44] par Lemme 2.3.2 et Lemma 3.3 de [44] par Lemme 2.3.4. Le reste de la preuve de Proposition 3.4 et de Theorem 1.1 de [44] se transforme à l'identique.

On esquisse ici la preuve du théorème principal.

Soit $M = \oplus M_i$ avec les M_i indécomposables tel que $\text{Ext}_A^1(M, M) = 0$. Comme tout module de type ruban admet une auto-extension non triviale, i.e. la suite d'Auslander-Reiten commençant par lui-même, on peut supposer que les $M_i = M(C_i)$ sont tous des modules non projectifs de type corde. On peut supposer en plus que les M_i sont non-isomorphes deux à deux, à équivalence de Morita près. Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des morphismes explicites $f : M(C_i) \rightarrow M(C_j)$ tel que $\underline{f} \neq 0$. Proposition 2.3.1 implique que les éléments de $\mathcal{B}$ sont tous faiblement unilatéraux. Lemme 2.3.2 montre que $\underline{\mathcal{B}} = \{\underline{f} : f \in \mathcal{B}\}$ est une base de $\underline{\text{End}}_A(M)$. Cette base se comporte multiplicativement, i.e. soient $f, g \in \mathcal{B}$, alors $\underline{f \circ g} = 0$ ou $\underline{f \circ g} \in \underline{\mathcal{B}}$. On peut calculer le carquois avec relations de l'algèbre $\underline{\text{End}}_A(M)$. Les sommets sont les applications identiques $M(C_i) \xrightarrow{Id} M(C_i)$ et les flèches sont les $\underline{f} \in \underline{\mathcal{B}}$ qui ne sont pas de la forme $\underline{g \circ h}$ en tant qu'applications ($\underline{hg}$ en tant que flèches) avec $\underline{g}$ et $\underline{h}$ non inversibles dans $\underline{\mathcal{B}}$. On montre ensuite les axiomes pour une algèbre courtoise (Définition 1.2.6) en utilisant Lemme 2.3.4 et le fait qu'étant donné un morphisme explicite orienté unilatéral, alors il est unilatéral à gauche ou à droite et il n'existe pas une troisième direction.

Chapter 3

Blocs à défaut diédral I

3.1 Stratégie

L'objectif de ce chapitre et du chapitre qui le suit est de classer, à équivalences de Morita près, les algèbres courtoises qui apparaissent comme $\underline{\text{End}}_A M$ pour M un module sans auto-extensions non triviales sur A un bloc à défaut diédral sur un corps algébriquement clos de caractéristique 2.

En vertu de Proposition 2.1.4, il suffit de considérer les classes d'équivalences des blocs à défaut diédral, à équivalences dérivées près. D'après Section 1.7, la catégorie dérivée d'un bloc à défaut diédral est équivalente à celle de l'une des algèbres suivantes: $D(1\mathcal{A})^q$ avec $q \geq 1$, $D(2\mathcal{A})^s(c)$ avec $s \geq 1$ et $c \in \{0, 1\}$ et $D(3\mathcal{K})^{1,b,1}$ avec $b \geq 1$. Dans la suite, on va étudier en détail ces algèbres. Constatons que chacune de ces algèbres est, modulo le socle, une algèbre bisérielle spéciale dont la classification des modules indécomposables est connue (voir Section 1.4). C'est ce point qui permet d'achever la tâche de la classification.

Etant donné une telle algèbre, on cherche d'abord tous les modules indécomposables qui sont rigides. Pour cela, le carquois d'Auslander-Reiten est un outil organisateur. On regarde chaque composante et y localise les modules rigides. Comme tout module de type ruban admet une auto-extension non scindée donnée par la suite d'Auslander-Reiten commençant par lui-même, on n'a que besoin de considérer les modules de type corde. Pour une corde C ,

$$\text{Ext}_A^1(M(C), M(C)) = 0 \iff \underline{\text{Hom}}_A(\Omega M(C), M(C)) = 0$$

et

$$\underline{\text{End}}_A(M(C)) = \underline{\text{Hom}}_A(M(C), M(C))$$

notre problème est donc de calculer l'espace des homomorphismes stable entre deux modules de type corde. Pour cela, on va utiliser le théorème de Crawley-Boevey (Théorème 1.5.1) qui décrit une base de l'espace des homomorphismes entre deux modules de type corde et cela réduit le problème à montrer qu'un morphisme explicite est projectif ou non. On va donner des critères simples dans la prochaine section pour montrer qu'un morphisme explicite est non projectif. Quand il est nécessaire de prouver qu'un morphisme explicite est projectif, on construit souvent explicitement une factorisation par un module projectif.

Ayant trouvé tous les modules indécomposables rigides, on cherche ensuite tous les modules rigides qui possèdent plusieurs facteurs indécomposables. Comme un facteur projectif devient nul dans la catégorie stable et comme on s'intéresse à classer les algèbres des endomorphismes stables, à équivalences de Morita près, on peut supposer que les facteurs indécomposables sont non projectifs et non isomorphes. L'étape la plus difficile est de trouver les modules rigides à deux facteurs $M = M(C_1) \oplus M(C_2)$, car on rencontre de nouveau la tâche de montrer que

$$\text{Ext}_A^1(M(C_1), M(C_2)) = \underline{\text{Hom}}_A(\Omega M(C_1), M(C_2)) = 0$$

et que

$$\text{Ext}_A^1(M(C_2), M(C_1)) = \underline{\text{Hom}}_A(\Omega M(C_2), M(C_1)) = 0$$

Une fois que c'est fait, il sera facile de trouver les modules rigides à plus de 2 facteurs, car si $M = \bigoplus_{i=1}^n M(C_i)$ est un module rigide à n facteurs indécomposables non projectifs et non isomorphes, alors

$$\text{Ext}_A^1(M, M) = 0 \iff \text{Ext}_A^1(M_i \oplus M_j, M_i \oplus M_j) = 0, \forall 1 \leq i, j \leq n$$

Soit $M = \bigoplus M(C_i)$ un module rigide. D'après Proposition 2.3.1, tout morphisme explicite non projectif de $M(C_i)$ à $M(C_j)$ est faiblement unilatéral et cela permet de déterminer une base de $\text{End}_A(M(C_i), M(C_j))$. Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des morphismes explicites faiblement unilatéraux non projectifs entre les $M(C_i)$. Alors $\underline{\mathcal{B}} = \{f : f \in \mathcal{B}\}$ est une base de $\text{End}_A(M)$. On peut calculer le carquois avec relations de l'algèbre $\text{End}_A(M)$ dont les sommets sont les applications identiques $M(C_i) \xrightarrow{Id} M(C_i)$ et dont les flèches sont les $\underline{f} \in \underline{\mathcal{B}}$ qui ne sont pas de la forme $\underline{h}\underline{g}$ en tant que flèches ($\underline{g} \circ \underline{h}$ en tant qu'applications) avec $\underline{g}$ et $\underline{h}$ non inversibles dans $\underline{\mathcal{B}}$.

3.2 Préliminaires

Cette section contient des lemmes simples mais fortement utiles, car on rencontre souvent le problème de déterminer si un morphisme devient non nul dans la catégorie stable.

Soit $A = kQ/\langle \rho \rangle$ une algèbre bisérielle spéciale *auto-injective*. Comme A est auto-injective, il existe deux type de modules projectifs indécomposables: les modules indécomposables projectif-injectifs unisériels et les modules indécomposables projectif-injectifs non-sériels. Constatons que dans les deux cas, $\text{Soc}(P)$ est un module simple (voir Section 1.4).

Lemme 3.2.1 Soit A une algèbre bisérielle spéciale auto-injective. Soit $f : M(C) \rightarrow M(D)$ un morphisme explicite entre deux modules de type corde tels qu'aucun des deux ne soit projectif.

- (1) Si le composé $\text{Soc}(M(C)) \rightarrow M(C) \rightarrow M(D)$ n'est pas nul, alors $\underline{f} \neq 0$.
- (2) Si le composé $M(C) \rightarrow M(D) \rightarrow M(D)/\text{Rad}(M(D))$ n'est pas nul, alors $\underline{f} \neq 0$.

Démonstration On montre (1), la preuve de (2) étant duale. Si $\underline{f} = 0$, alors il existe un module projectif $P = \sum P(j)$ et des morphismes explicites $g_j : M(C) \rightarrow \text{Rad}(P(j))$ et $h_j : P(j)/\text{Soc}(P(j)) \rightarrow M(D)$ tels que $f = \sum h_j \circ \eta_j \circ g_j$ où η_j est le composé $\text{Rad}(P(j)) \hookrightarrow P(j) \rightarrow P(j)/\text{Soc}(P(j))$. Comme pour tout j (Remarque 2.2.1), η_j est la somme d'au plus deux morphismes explicites, $g_j \circ \eta_j \circ h_j$ est la somme d'au plus deux morphismes explicites. Comme les morphismes explicites sont linéairement indépendants, il existe i tel que f soit un facteur de $g_i \circ \eta_i \circ h_i$. Comme $\text{Soc}(P(i))$ est simple, $\text{Soc}(P(i)) \subseteq \text{Ker}(\eta_i)$ et comme le composé $\text{Soc}(M(C)) \hookrightarrow M(C) \xrightarrow{g_i} \text{Rad}(P(i))$ a pour image contenue dans $\text{Soc}(P(i))$, le composé $\text{Soc}(M(C)) \hookrightarrow M(C) \xrightarrow{g_i} \text{Rad}(P(i)) \xrightarrow{\eta_i} P(i)/\text{Soc}(P(i))$ est nul, et donc $f = 0$, ce qui est absurde.

□

Lemme 3.2.2 Soit A une algèbre bisérielle spéciale auto-injective. Soient $C = C_1 C_2 \cdots C_n$ et $D = D_1 D_2 \cdots D_m$ deux cordes. Soit $f : M(C) \rightarrow M(D)$ un morphisme explicite de cœur E qui est une corde directe de longueur strictement positive. Supposons que $E \subset C_i$ et $E \subset D_j$ et écrivons $C_i = EC'_i$ et $D_j = D'_j E$. Si $D'_j EC_i$ ne contient aucun chemin maximal (voir Définition 1.4.1), alors $\underline{f} \neq 0$.

Démonstration Si $\underline{f} = 0$, alors d'après Remarque 2.2.2 il existe un module projectif indécomposable P et deux morphismes explicites $g : M(C) \rightarrow P$ et $h : P \rightarrow M(D)$ tels que $g \circ h = f + f'$ avec f' un autre morphisme explicite ou le morphisme nul. On va montrer que $D'_j EC_i$ contient un chemin maximal. On distingue deux cas.

Si P est unisériel, la situation peut être illustrée comme suit.

$$M(C) = \begin{array}{c} \dots \diagup \diagdown E \\ \diagdown C'_i \diagup \dots \end{array} \xrightarrow{g} P = \begin{array}{c} D''_j \diagdown \diagup E \\ \diagdown C''_i \diagup \end{array} \xrightarrow{h} M(D) = \begin{array}{c} \dots \diagup \diagdown D'_j \\ \diagdown E \diagup \dots \end{array}$$

où $\text{im}(g) \cong M(EC''_i)$ avec $C''_i \subseteq C'_i$ et où $\text{im}(h) \cong M(D''_j E)$ avec $D''_j \subseteq D'_j$. On voit donc que $D''_j EC''_i$ est un chemin maximal (même une corde maximale) et on en déduit que $D'_j EC'_i \supseteq D''_j EC''_i$ contient un chemin maximal, cela contredit les conditions.

Si P est non-sériel, on visualise la situation comme suit:

$$M(C) = \begin{array}{c} \dots \diagup \diagdown E \\ \diagdown C'_i \diagup \dots \end{array} \xrightarrow{g} P = \begin{array}{c} D''_j \diagdown \diagup \\ E \diagdown \diagup C''_i \\ \diagdown \diagup \end{array} F \xrightarrow{h} M(D) = \begin{array}{c} \dots \diagup \diagdown D'_j \\ \diagdown E \diagup \dots \end{array}$$

où $D''_j EC''_i$ et F sont les deux chemins maximaux de P , où $\text{im}(g) \cong M(EC''_i R)$ avec $R \subseteq F$ et $C''_i \subseteq C'_i$ et où $\text{im}(h) \cong M(SD''_j E)$ avec $D''_j \subseteq D'_j$. On voit donc que $D'_j EC'_i$ contient le chemin maximal $D''_j EC''_i$.

□

Lemme 3.2.3 Soit A une algèbre bisérielle spéciale auto-injective. Soit $f : M(C) \rightarrow M(D)$ un morphisme explicite de cœur E avec $|E| = 0$. Supposons que $E = C_i \cap C_{i+1}$ (i.e. $\text{Pos}_C(E) = i$ voir sa définition avant Proposition 1.5.5) et $E = D_j \cap D_{j+1}$ (i.e. $\text{Pos}_D(E) = j$). Notons

$$C_i = C'_i \alpha^{-1}, C_{i+1} = \beta C'_{i+1}, D_j = D'_j \gamma, D_{j+1} = \delta^{-1} D'_{j+1}$$

où α, β, γ et δ sont des flèches (directes). Si tous les $\gamma\alpha, \delta\alpha, \gamma\beta$ et $\delta\beta$ sont dans l'idéal admissible $\langle \rho \rangle$, alors $\underline{f} \neq 0$.

Démonstration Si $\underline{f} = 0$, alors il existe un module projectif indécomposable P et deux morphismes explicites $g : M(C) \rightarrow \text{Rad}(P)$ et $h : P/\text{Soc}(P) \rightarrow M(D)$ tels que f soit un facteur de $g \circ \eta_P \circ h$ où η_P est le composé $\text{Rad}(P) \hookrightarrow P \twoheadrightarrow P/\text{Soc}(P)$. Or, comme dans la preuve du lemme précédent, il existe une corde $F \subset C_i$ ou $F \subset C_{i+1}$ qui contient E et une sous-corde $G \subset D_j$ ou $G \subset D_{j+1}$ qui contient E tel que, par exemple, si on suppose que $F \subset C_i$ et $G \subset D_j$ (les autres cas étant similaires), alors GF^{-1} est un chemin maximal. Comme G termine par γ et F^{-1} commence par α , $\gamma\alpha \notin \langle \rho \rangle$.

□

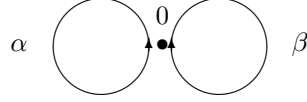
3.3 Cas d'un seul module simple

A partir de cette section, on suppose que k soit un corps algébriquement clos de caractéristique 2.

Un bloc à défaut diédral avec un seul module simple, à isomorphismes près, est équivalent à kD où D est le groupe de défaut (voir [41, Corollary 2.13]). On distingue deux cas.

Cas 1: $D = V_4 = C_2 \times C_2$

Le carquois avec relations de kV_4 est $D(1\mathcal{A})^q$ avec $q = 1$.



$$\alpha^2 = 0 = \beta^2, \alpha\beta = \beta\alpha$$

Proposition 3.3.1 Si $D = V_4 = C_2 \times C_2$, alors tout module M non projectif sur $kV_4 = D(1\mathcal{A})^1$ vérifie $\text{Ext}_A^1(M, M) \neq 0$.

Démonstration Le seul module indécomposable projectif est

$$kG = P_0 = \begin{array}{ccc} & \beta & 0 \\ & \nearrow & \searrow \\ 0 & & \alpha \\ & \nwarrow & \nearrow \\ & \alpha & 0 \\ & \searrow & \nearrow \\ & 0 & \beta \end{array}$$

Le carquois d'Auslander-Reiten de $D(1\mathcal{A})^1$ est composé d'une infinité de 1-tubes homogènes et d'une composante de type $\mathbb{Z}\tilde{A}_{12}$ (voir Proposition 1.8.2). On calcule concrètement ces composantes.

La corde $\alpha\beta^{-1}$ est l'unique corde de type ruban sur $D(1\mathcal{A})^1$, modulo la relation d'équivalence $\sim_r$, et il existe donc, pour tout $\lambda \in k^*$, un 1-tube $Q(\alpha\beta^{-1}, \lambda)$ composé des modules de type ruban $M(\alpha\beta^{-1}, n, \lambda)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. D'après Théorème 1.6.10 (2), les suites d'Auslander-Reiten de terme intermédiaire indécomposable sont

$$0 \rightarrow M(\alpha) \rightarrow M(\alpha\beta^{-1}\alpha) \rightarrow M(\alpha) \rightarrow 0$$

et

$$0 \rightarrow M(\beta) \rightarrow M(\beta\alpha^{-1}\beta) \rightarrow M(\beta) \rightarrow 0$$

Les modules $M(\alpha)$ et $M(\beta)$ forment donc les extrémités de deux 1-tubes: la composante $Q(\alpha)$ formé des modules de type corde $M((\alpha\beta^{-1})^n\alpha)$ et la composante $Q(\beta)$ formés des modules de type corde $M((\beta\alpha^{-1})^n\beta)$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Il est facile de voir que tous les autres modules de type corde sont de la forme $M((\alpha\beta^{-1})^n)(= \Omega^n(k))$ ou $M((\alpha^{-1}\beta)^n)(= \Omega^{-n}(k))$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ où k est le module simple de dimension 1 avec l'action triviale de G . D'après Théorème 1.6.10 (3), Ces modules appartiennent aux suites d'Auslander-Reiten suivantes:

$$0 \rightarrow M((\alpha\beta^{-1})^n) \rightarrow M((\alpha\beta^{-1})^{n+1}) \oplus M((\alpha\beta^{-1})^{n+1}) \rightarrow M((\alpha\beta^{-1})^{n+2}) \rightarrow 0$$

et

$$0 \rightarrow M((\alpha^{-1}\beta)^n) \rightarrow M((\alpha^{-1}\beta)^{n+1}) \oplus M((\alpha^{-1}\beta)^{n+1}) \rightarrow M((\alpha^{-1}\beta)^{n+2}) \rightarrow 0$$

On obtient donc que ces modules forment une composante de type $\mathbb{Z}\tilde{A}_{12}$:

$$\cdots \rightrightarrows \Omega^{-2}(k) \rightrightarrows \Omega^{-1}(k) \rightrightarrows k \rightrightarrows \Omega^1(k) \rightrightarrows \Omega^2(k) \rightrightarrows \cdots$$

Comme les modules dans les 1-tubes admettent des auto-extensions non triviales, il suffit de considérer les modules $\Omega^n(k)$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Or,

$$\text{Ext}_A^1(\Omega^n(k), \Omega^n(k)) = \text{Ext}_A^1(k, k) = \underline{\text{Hom}}_A(\Omega^1(k), k) \neq 0$$

car il existe une surjection

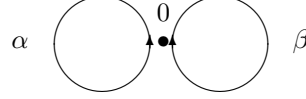
$$\Omega^1(k) = M(\alpha^{-1}\beta) = \begin{array}{ccc} & \beta & 0 \\ & \nearrow & \searrow \\ 0 & & \alpha \\ & \nwarrow & \nearrow \\ & 0 & \beta \end{array} \twoheadrightarrow S_0 = k$$

qui n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.1.

□

Cas 2: D un groupe diédral d'ordre $2^n \geq 8$

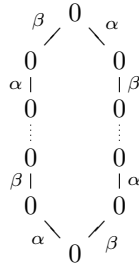
Le carquois avec relations de kD est $D(1A)^q$ avec $q = 2^{n-2}$.



$$\alpha^2 = 0 = \beta^2, (\alpha\beta)^q = (\beta\alpha)^q$$

Proposition 3.3.2 Soit $A = D(1A)^q$ avec $q \geq 2$. Alors tout A -module non projectif admet des auto-extensions non-triviales.

Avant de donner la preuve de cette proposition, on décrit la première syzygy d'un module de type corde $M(C)$. Le seul module projectif indécomposable $kD = P_0$ est de la forme



dont les deux chemins maximaux sont $(\alpha\beta)^q$ et $(\beta\alpha)^q$. Soit $C = C_1C_2 \cdots C_n$ une corde avec les C_i étant ses segments (Définition 1.2.3). On va décrire $\Omega C = D = D_0D_1 \cdots D_nD_{n+1}$ où les D_j avec $0 \leq j \leq n+1$ sont les segments de D ou de longueur nulle (voir Proposition 1.4.6).

- (1) C_1 est inverse. Alors $|D_0| = 0$, D_1 est directe et $|D_1| = 2q - 1 - |C_1|$ (constatons que si $|C_1| = 2q - 1$, alors $|D_1| = 0$ et D_2 sera le premier segment de D). De plus si C_1 commence par α^{-1} (resp. β^{-1}), D_1 commence par α (resp. β).
- (1') C_1 est directe. Alors $|D_0| = 2q - 1$ et D_0 est directe. D_1 est inverse et $|D_1| = 2q - |C_1|$. De plus si C_1 commence par α (resp. β), D_0 commence par α (resp. β), i.e. $D_0 = \alpha(\beta\alpha)^{q-1}$ (resp. $D_0 = \beta(\alpha\beta)^{q-1}$).
- (2) Pour $1 < i < n$, $|D_i| = 2q - |C_i|$. Si C_i est inverse et commence par α^{-1} (resp. β^{-1}), D_i est directe et commence par β (resp. α). Si C_i est directe et termine par α (resp. β), D_i est inverse et termine par β^{-1} (resp. α^{-1}).
- (3) C_n est directe. Alors $|D_{n+1}| = 0$, D_n est inverse et $|D_n| = 2q - 1 - |C_n|$ (constatons que si $|C_n| = 2q - 1$, alors $|D_n| = 0$ et D_{n-1} sera le dernier segment de D). De plus si C_n termine par α (resp. β), D_n termine par α^{-1} (resp. β^{-1}), i.e. $D_0 = (\alpha(\beta\alpha)^{q-1})^{-1}$ (resp. $D_0 = (\beta(\alpha\beta)^{q-1})^{-1}$).
- (3') C_n est inverse. Alors $|D_{n+1}| = 2q - 1$ et D_{n+1} est inverse. D_n est directe et $|D_n| = 2q - |C_n|$. De plus si C_n termine par α^{-1} (resp. β^{-1}), D_{n+1} termine par α^{-1} (resp. β^{-1}).

Démonstration Le carquois d'Auslander-Reiten de $D(1A)^q$ avec $q \geq 2$ est composé d'une infinité de 1-tubes homogènes et d'une infinité de composantes de type $\mathbb{Z}A_\infty^\infty$ (voir Proposition 1.8.5). D'après Théorème 1.6.10 (2), les suites d'Auslander-Reiten de terme intermédiaire indécomposable sont

$$0 \rightarrow M((\alpha\beta)^{q-1}\alpha) \rightarrow M((\alpha\beta)^{q-1}\alpha\beta^{-1}(\alpha\beta)^{q-1}\alpha) \rightarrow M((\alpha\beta)^{q-1}\alpha) \rightarrow 0$$

et

$$0 \rightarrow M((\beta\alpha)^{q-1}\beta) \rightarrow M((\beta\alpha)^{q-1}\beta)\alpha^{-1}(\beta\alpha)^{q-1}\beta) \rightarrow M((\beta\alpha)^{q-1}\beta) \rightarrow 0$$

Donc $M((\alpha\beta)^{q-1}\alpha)$ (resp. $M((\beta\alpha)^{q-1}\beta)$) forme l'extrémité d'un 1-tube $Q((\alpha\beta)^{q-1}\alpha)$ (resp. $Q((\beta\alpha)^{q-1}\beta)$).

On va montrer que pour une corde $C = C_1 C_2 \cdots C_n$,

$$\text{Ext}_A^1(M(C), M(C)) = \underline{\text{Hom}}_A(\Omega^1(M(C)), M(C)) \neq 0$$

(1) C_1 est inverse et $|C_1| < 2q - 1$. Alors $\Omega C = D = D_1 D_2 \cdots D_{n+1}$ avec D_1 directe de longueur $2q - 1 - |D_1| > 0$, alors le morphisme explicite

$$M(D) = M(1_{(0,\sigma(D_1))} D_1 \cdots D_m) \twoheadrightarrow M(1_{(0,\sigma(D_1))}) \cong S_0 \cong M(1_{(0,\sigma(C_1))}) \hookrightarrow M(1_{(0,\sigma(C_1))} C_1 \cdots C_n) = M(C)$$

n'est pas projectif, d'après Lemme 3.2.3, car C_1 et D_1 ont même première flèche et leur composé est nulle.

(2) C_1 est inverse et de longueur $2q - 1$. Supposons que $\text{Ext}_A^1(M(C), M(C)) = 0$. Si $|C_2| > 1$ ou $n = 2$, alors $\Omega(C) = D_1 D_2 \cdots D_m$ vérifie les conditions de (1), i.e. le premier segment D_2 est inverse et de longueur $2q - |C_2| < 2q - 1$, et on a forcément

$$\text{Ext}_A^1(M(C), M(C)) = \text{Ext}_A^1(\Omega M(C), \Omega M(C)) \neq 0.$$

On a donc que $|C_2| = 1$ et $n > 2$. Pour $\Omega(C) = D_2 \cdots D_{n+1}$, $|D_2| = 2q - 1$ et D_2 est inverse. Alors par l'argument de (1) ci-dessus appliqué à ΩC , on obtient que $|D_2| = 1$ et D a au moins deux segments, car sinon, l'argument ci-dessus entraîne que

$$\text{Ext}_A^1(M(C), M(C)) = \text{Ext}_A^1(\Omega^2 M(C), \Omega^2 M(C)) \neq 0.$$

Cela entraîne que C_3 est de longueur $2q - 1$. On a nécessairement que $n > 4$, puisque si $n = 3$,

$$C = (\alpha\beta)^{q-1}\alpha\beta^{-1}(\alpha\beta)^{q-1}\alpha$$

ou

$$C = (\beta\alpha)^{q-1}\beta\alpha^{-1}(\beta\alpha)^{q-1}\beta,$$

C est contenue dans le 1-tube $Q(\alpha\beta)^{q-1}\alpha$ (ou $Q((\beta\alpha)^{q-1}\beta)$). On obtient par récurrence que $|C_{2i+1}| = 2^{n-1} - 1$ et $|C_{2i}| = 1$ pour tout $i \geq 1$. Cela implique que $|C| = +\infty$ qui est absurde.

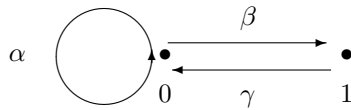
(3) C_1 est directe et $|C_1| < 2q - 1$. Alors $\Omega^{-1}C$ vérifie les conditions de (1), car D_1 est inverse et de longueur $2q - 1 - |C_1| < 2q - 1$.

(4) C_1 est directe et $|C_1| = 2q - 1$. On raisonne comme dans (ii), mais au lieu de regarder les $\Omega^n C$, $n > 0$, on examine $\Omega^n C$, $n < 0$.

□

3.4 $D(2\mathcal{A})^k(c)$ avec $k = 1$ et $c = 0$

Rappelons l'algèbre $D(2\mathcal{A})^1(0)$.



$$\gamma\beta = 0, \alpha^2 = 0, \alpha\beta\gamma = \beta\gamma\alpha$$

Les fonctions σ et ϵ sont définies comme suit (voir Section 1.2):

	α	β	γ
σ	1	-1	1
ϵ	1	-1	-1

Proposition 3.4.1 (voir Proposition 1.8.3) Le carquois d'Auslander-Reiten stable de $D(2\mathcal{A})^1(0)$ est composé de

- une infinité de 1-tubes
- un 3-tube non régulier
- une composante de type $\mathbb{Z}\tilde{A}_{1,3}$

On va calculer concrètement les composantes formées des modules de type corde.

Les modules projectifs indécomposables sont (voir Section 2.2)

$$P_0 = \begin{array}{c} \beta \quad 0 \quad \alpha \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \quad 0 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 0 \quad 1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \alpha \quad 0 \quad \gamma \end{array} \quad P_1 = \begin{array}{c} 1 \quad \gamma \\ \swarrow \quad \searrow \\ 0 \quad \alpha \\ \swarrow \quad \searrow \\ 0 \quad \beta \\ \swarrow \quad \searrow \\ 0 \quad 1 \end{array}$$

Comme P_1 est projectif-injectif, selon Théorème 1.6.10(1) il existe une suite d'Auslander-Reiten dont le terme intermédiaire ne contient qu'un facteur indécomposable non projectif:

$$0 \rightarrow \text{Rad}(P_1) \rightarrow P_1 \oplus \text{Rad}(P_1)/\text{Soc}(P_1) \rightarrow P_1/\text{Soc}(P_1) \rightarrow 0, \quad (1)$$

$$\text{où } \text{Rad}(P_1) = \begin{array}{c} 0 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 0 \quad 1 \end{array} \quad \text{et } \text{Rad}(P_1)/\text{Soc}(P_1) = \begin{array}{c} 0 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 0 \end{array} \quad \text{et } P_1/\text{Soc}(P_1) = \begin{array}{c} 1 \quad \gamma \\ \swarrow \quad \searrow \\ 0 \quad \alpha \\ \swarrow \quad \searrow \\ 0 \quad \beta \\ \swarrow \quad \searrow \\ 0 \quad 1 \end{array}$$

D'après Théorème 1.6.10(2), les suites d'Auslander-Reiten de terme intermédiaire indécomposable sont

$$0 \rightarrow M(V_{(0,-1)}^{-1}) \rightarrow M(V_{(0,-1)}^{-1}\alpha^{-1}U_{(0,-1)}) \rightarrow M(U_{(0,-1)}) \rightarrow 0$$

$$\text{où } M(V_{(0,-1)}^{-1}) = \begin{array}{c} 0 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 0 \quad 1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 0 \end{array} = M(U_{(0,-1)}) \quad \text{et } M(V_{(0,-1)}^{-1}\alpha^{-1}U_{(0,-1)}) = \begin{array}{c} 0 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \quad 0 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 0 \quad 1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 0 \quad 0 \end{array}$$

$$0 \rightarrow M(1_{(1,-1)}) \rightarrow M(1_{(1,-1)}\beta^{-1}U_{(0,1)}) = M(\beta^{-1}U_{(0,1)}) \rightarrow M(U_{(0,1)}) \rightarrow 0 \quad (2)$$

$$\text{où } M(1_{(1,-1)}) = S_1, \quad M(\beta^{-1}U_{(0,1)}) = \begin{array}{c} 0 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \quad 0 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \end{array} \quad \text{et } M(U_{(0,1)}) = \begin{array}{c} 0 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 0 \quad 1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 0 \quad 1 \end{array}$$

$$0 \rightarrow M(V_{(0,1)}^{-1}) \rightarrow M(V_{(0,1)}^{-1}\gamma^{-1}1_{(1,-1)}) = M(V_{(0,1)}^{-1}\gamma^{-1}) \rightarrow M(1_{(1,-1)}) \rightarrow 0 \quad (3)$$

où $M(V_{(0,1)}^{-1}) = \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 0 \\ \diagup \\ 0 \end{array}$, $M(V_{(0,1)}^{-1}\gamma^{-1}1_{(1,-1)}) = \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 0 \\ \diagup \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 0 \end{array}$ et $M(1_{(1,-1)}) = S_1$. La première suite appartient à un 1-tube et $M(U_{(0,-1)})$ forme l'extrémité de cet 1-tube, puisque

$$\tau M(U_{(0,-1)}) = \Omega^2 M(U_{(0,-1)}) = M(V_{(0,-1)}^{-1}) \cong M(U_{(0,-1)})$$

Les deux dernières suites avec celle induite par P_1 donnent les modules à l'extrémité d'un 3-tube. On pose

$$C = \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 0 \\ \diagup \\ 0 \end{array}, \quad D = 1_{(1,1)} \text{ et } E = \begin{array}{c} 0 \\ \diagdown \\ 0 \\ \diagup \\ 1 \end{array}$$

Alors (pour les notations, voir Définition 1.6.6)

$$C[1] = \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 0 \\ \diagup \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 0 \end{array}, \quad D[1] = \begin{array}{c} 0 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ \diagdown \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 0 \end{array}, \quad E[1] = \begin{array}{c} 0 \\ \diagdown \\ 0 \end{array}.$$

On montre facilement, en utilisant Proposition 1.6.11, que $\Omega(C[n]) = D[n]$, $\Omega(D[n]) = E[n]$ et $\Omega(E[n]) = C[n]$. Alors les notations ci-dessus, les suites d'Auslander-Reiten deviennent

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow M(E) \rightarrow M(E[1]) \oplus P_1 \rightarrow M(C) \rightarrow 0 \\ 0 &\rightarrow M(D) \rightarrow M(D[1]) \rightarrow M(D) \rightarrow 0 \\ 0 &\rightarrow M(C) \rightarrow M(C[1]) \rightarrow M(C) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Il existe des suites d'Auslander-Reiten de la forme

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow M(C[n]) \rightarrow M(C[n-1]) \oplus M(D[n-1]) \rightarrow M(D[n]) \rightarrow 0 \\ 0 &\rightarrow M(D[n]) \rightarrow M(D[n-1]) \oplus M(E[n-1]) \rightarrow M(E[n]) \rightarrow 0 \\ 0 &\rightarrow M(E[n]) \rightarrow M(E[n-1]) \oplus M(C[n-1]) \rightarrow M(C[n]) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

A commutative diagram illustrating the relationships between various modules. The diagram is organized into three vertical columns. The left column contains $M(C)$ at the bottom, $M(C[1])$ in the middle, and $M(C[2])$ at the top. The middle column contains $M(D)$ at the bottom, $M(D[1])$ in the middle, and $M(D[2])$ at the top. The right column contains $M(E)$ at the bottom, $M(E[1]) \oplus P_1$ in the middle, and $M(E[2])$ at the top. Solid arrows point upwards from $M(C)$ to $M(C[1])$ to $M(C[2])$, from $M(D)$ to $M(D[1])$ to $M(D[2])$, and from $M(E)$ to $M(E[1]) \oplus P_1$ to $M(E[2])$. Dashed arrows point from $M(C[2])$ to $M(D[1])$, from $M(D[2])$ to $M(E[1]) \oplus P_1$, from $M(C[1])$ to $M(D)$, from $M(D[1])$ to $M(E)$, and from $M(E[2])$ to $M(D[2])$. Additionally, solid arrows point from $M(D[1])$ to $M(C[1])$ and from $M(D)$ to $M(E)$. Vertical dotted lines extend upwards from $M(C[2])$, $M(D[2])$, and $M(E[2])$.

$$1_{(0,-1)}[1] = \begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \\ 0 \end{array}, \quad 1_{(0,-1)}[2] = \begin{array}{ccc} & 0 & \\ \swarrow & & \searrow \\ 1 & & 0 \\ \swarrow & & \searrow \\ 0 & & 1 \end{array}, \quad 1_{(0,-1)}[3] = \begin{array}{ccc} & & 0 \\ & \swarrow & \searrow \\ & 1 & 0 \\ \swarrow & & \\ 0 & & \end{array}$$

et

$$[-1]1_{(0,-1)}[1] = \begin{array}{c} 0 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 0 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 0 \end{array} = \Omega(1_{(0,-1)}), \quad [-1]1_{(0,-1)}[3] = 1_{(0,-1)}$$

Dans cette composante non régulière,

$$[i]1_{(0,-1)}[j] = [i-1]1_{(0,-1)}[j+3]$$

pour $i, j \in \mathbb{Z}$ et donc c'est une composante de type $\mathbb{Z}\tilde{A}_{1,3}$. En effet, on a vu que $[-1]1_{(0,-1)}[3] = 1_{(0,-1)}$ et donc

$$[i]1_{(0,-1)}[j] = [i]([-1]1_{(0,-1)}[3])[j] = [i-1]1_{(0,-1)}[j+3]$$

On a aussi que

$$\Omega([i]1_{(0,-1)}[j]) = [i-1]1_{(0,-1)}[j+1],$$

en effet, d'après Proposition 1.6.11,

$$[i-1]1_{(0,-1)}[j+1] = [i]([-1]1_{(0,-1)}[1])[j] = [i](\Omega(1_{(0,-1)}))[j] = \Omega([i]1_{(0,-1)}[j])$$

Théorème 3.4.2 Soit M un module indécomposable sur $D(2\mathcal{A})^1(0)$. Alors $\text{Ext}_A^1(M, M) = 0$ ssi M est un module de quasi-longueur (voir Définition 1.6.5) 0 ou 1 dans le 3-tube. En outre, si $M \in \{M(C), M(D), M(E)\}$, on a $\underline{\text{End}}_A(M) = k$ et si $M \in \{M(C[1]), M(D[1]), M(E[1])\}$, on obtient $\underline{\text{End}}_A(M) = k[\epsilon]/\epsilon^2$.

Démonstration Chaque module dans les 1-tubes admet une auto-extension non triviale et on n'a besoin que de considérer les modules de type corde.

Pour les modules dans la composante de type $\mathbb{Z}\tilde{A}_{1,3}$, grâce aux formules $[i]1_{(0,-1)}[j] = [i-1]1_{(0,-1)}[j+3]$, $\Omega([i]1_{(0,-1)}[j]) = [i-1]1_{(0,-1)}[j+1]$ et $\Omega^2([i]1_{(0,-1)}[j]) = [i-1]1_{(0,-1)}[j-1]$ quelques soient $i, j \in \mathbb{Z}$, il suffit de regarder les modules $M(1_{(0,-1)}[1])$ et $M(1_{(0,-1)}[2])$.

Pour $M = M(1_{(0,-1)}[1]) = \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 0 \end{array}$, $\Omega M = \begin{array}{c} 0 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array}$. On voit que

$$\text{Ext}_A^1(M, M) = \underline{\text{Hom}}_A(\Omega M, M) = \underline{\text{Hom}}_A\left(\begin{array}{c} 0 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array}, \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 0 \end{array}\right) \neq 0,$$

car le morphisme explicite $\begin{array}{c} [0] \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ [0] \end{array}$ n'est pas projectif, d'après Lemme 3.2.3. Notons ici les parties en case sont le cœur du morphisme explicite. Nous utiliserons souvent cette méthode de présentation.

Pour $M = M(1_{(0,-1)}[2]) = \begin{array}{c} 0 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 0 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 0 \quad 1 \end{array}$, $\Omega M = S_0$. Alors

$$\text{Ext}_A^1(M, M) = \underline{\text{Hom}}_A(S_0, \begin{array}{c} 0 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 0 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 0 \quad 1 \end{array}) \neq 0,$$

car il existe une injection évidente qui n'est pas projectif d'après Lemme 3.2.1.

Il reste à traiter le 3-tube. Comme $\Omega(C[n]) = D[n]$, $\Omega(D[n]) = E[n]$ et $\Omega(E[n]) = C[n]$, il suffit de regarder $\text{Ext}_A^1(M(C[n]), M(C[n])) = \underline{\text{Hom}}_A(M(D[n]), M(C[n]))$ pour $n \in \mathbb{N}$.

(i) Si $n = 0$, $\text{Ext}_A^1(M(C), M(C)) = \underline{\text{Hom}}_A(M(D), M(C)) = \underline{\text{Hom}}_A(S_1, \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 0 \end{array}) = 0$, puisque il n'existe pas de morphismes explicites du premier module au deuxième. On voit aussi que $\underline{\text{End}}_A(M(C)) = \underline{\text{End}}_A(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 0 \end{array}) = k$, car il n'y pas de morphismes explicites de $M(C)$ à lui-même autres que l'identité.

(ii) Si $n = 1$,

$$\text{Ext}_A^1(M(C[1]), M(C[1])) = \text{Ext}_A^1(M(D[1]), M(D[1])) = \underline{\text{Hom}}_A(M(E[1]), M(D[1])) = 0$$

car il n'existe pas de morphismes explicites de $M(E[1]) = \begin{array}{c} 0 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 0 \end{array}$ à $M(D[1]) = \begin{array}{c} 0 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \quad 0 \quad 1 \end{array}$. L'algèbre des endomorphismes stable $\underline{\text{End}}_A(M(C[1]))$ est $k[\epsilon]/\epsilon^2$, car à part l'identité, il n'y existe que le morphisme explicite

$$\begin{array}{c} \boxed{1} \quad \boxed{0} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{0} \quad \boxed{0} \end{array} \xrightarrow{\epsilon} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 0 \quad 0 \end{array}$$

qui n'est pas projectif d'après Lemme 3.2.1 et on vérifie que $\epsilon^2 = 0$.

(iii) Si $n = 2$, le morphisme explicite

$$f : M(D[2]) = \begin{array}{c} \boxed{0} \quad \boxed{0} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad \boxed{0} \end{array} \rightarrow M(C[2]) = \begin{array}{c} 1 \quad 0 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{0} \quad \boxed{0} \end{array}$$

n'est pas projectif, d'après Lemme 3.2.1, puisque $\text{Soc}(M(D[2])) \xrightarrow{\eta} M(D[2]) \xrightarrow{f} M(C[2])$ n'est pas nul, où η est l'inclusion canonique de $\text{Soc}(M(D[2]))$ à $M(D[2])$.

(iv) Si $n = 3$, le morphisme explicite

$$f : M(D[3]) = \begin{array}{c} \boxed{0} \quad \boxed{0} \quad \boxed{1} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad \boxed{0} \quad \boxed{0} \end{array} \rightarrow M(C[3]) = \begin{array}{c} 1 \quad 0 \quad 0 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{0} \quad \boxed{0} \quad \boxed{0} \end{array}$$

n'est pas projectif, d'après Lemme 3.2.1, puisque $\text{Soc}(M(D[3])) \xrightarrow{\eta} M(D[3]) \xrightarrow{f} M(C[3])$ n'est pas nul, où η est l'inclusion canonique de $\text{Soc}(M(D[3]))$ à $M(D[3])$.

(v) Si $n = 4$, le morphisme explicite

$$M(D[4]) = \begin{array}{c} \boxed{0} \quad \boxed{0} \quad \boxed{0} \quad \boxed{0} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad \boxed{0} \quad \boxed{0} \quad \boxed{0} \end{array} \rightarrow M(C[4]) = \begin{array}{c} 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{0} \quad \boxed{0} \quad \boxed{0} \quad \boxed{0} \end{array}$$

n'est pas projectif, d'après Lemme 3.2.1.

(vi) Si $n \geq 5$ et $n \equiv 2 \pmod{3}$, alors le morphisme explicite

$$M(D[n]) = \cdots \begin{array}{c} \nearrow 1 \\ \searrow 0 \end{array} \begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{cc} 0 & - \\ \nearrow & \searrow \\ 1 & 0 \end{array}} \rightarrow M(C[n]) = \begin{array}{c} 1 \\ \searrow 0 \end{array} \begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{cc} 0 & - \\ \nearrow & \searrow \\ 1 & 0 \end{array}} \begin{array}{c} \nearrow 0 \\ \searrow \cdots \end{array}$$

n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.1.

(vii) Si $n \geq 5$ et $n \equiv 0 \pmod{3}$, alors

$$M(D[n]) = \cdots \begin{array}{c} \nearrow 1 \\ \searrow 0 \end{array} \begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{cc} 0 & - \\ \nearrow & \searrow \\ 1 & 0 \end{array}} \rightarrow M(C[n]) = \begin{array}{c} 1 \\ \searrow 0 \end{array} \begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{cc} 0 & - \\ \nearrow & \searrow \\ 1 & 0 \end{array}} \begin{array}{c} \nearrow 0 \\ \searrow \cdots \end{array},$$

n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.1.

(viii) Si $n \geq 2$ et $n \equiv 1 \pmod{3}$, alors

$$M(D[n]) = \cdots \begin{array}{c} \nearrow 1 \\ \searrow 0 \end{array} \begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{cc} 0 & - \\ \nearrow & \searrow \\ 1 & 0 \end{array}} \begin{array}{c} \nearrow 0 \\ \searrow 1 \end{array} \begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{cc} 0 & - \\ \nearrow & \searrow \\ 1 & 0 \end{array}} \rightarrow M(C[n]) = \begin{array}{c} 1 \\ \searrow 0 \end{array} \begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{cc} 0 & - \\ \nearrow & \searrow \\ 1 & 0 \end{array}} \begin{array}{c} \nearrow 0 \\ \searrow 1 \end{array} \begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{cc} 0 & - \\ \nearrow & \searrow \\ 1 & 0 \end{array}} \begin{array}{c} \nearrow 0 \\ \searrow \cdots \end{array}$$

n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.1.

□

Proposition 3.4.3 Soient M et N deux A -modules indécomposables sans auto-extentions.

- (1) **(i+i)** Si M et N sont tous les deux de type (i), alors $\text{Ext}_A^1(M \oplus N, M \oplus N) = 0$ ssi $M \cong N$.
- (2) **(ii+ii)** Si M et N sont tous les deux de type (ii), alors $\text{Ext}_A^1(M \oplus N, M \oplus N) = 0$ ssi $M \cong N$.
- (3) **(i+ii)** Si M est type (i) et N de type (ii), alors $\text{Ext}_A^1(M \oplus N, M \oplus N) = 0$ ssi il existe $i \in \mathbb{Z}$ tel que $M = \Omega^i S_1$ et $(N = \Omega^i(M(C[1])) \text{ ou } N = \Omega^i(M(D[1])))$

Démonstration Pour l'assertion (1), on a vu que $\text{Ext}_A^1(M(C), M(C)) = 0$;

$$\text{Ext}_A^1(M(C), M(D)) = \underline{\text{Hom}}_A(M(D), M(D)) \neq 0,$$

car $M(D)$ n'est pas projectif;

$$\text{Ext}_A^1(M(C), M(E)) = \underline{\text{Hom}}_A(M(D), M(E)) = \underline{\text{Hom}}_A(S_1, M(E)) \neq 0,$$

car il existe une injection évidente de S_1 à $M(E) = \begin{array}{c} 0 \\ \searrow 0 \\ \searrow 1 \end{array}$ qui n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.1.

Pour l'assertion (2), on a vu que $\text{Ext}_A^1(M(C[1]), M(C[1])) = 0$;

$$\text{Ext}_A^1(M(C[1]), M(D[1])) = \underline{\text{Hom}}_A(M(D[1]), M(D[1])) \neq 0,$$

car $M(D[1])$ n'est pas projectif;

$$\text{Ext}_A^1(M(C[1]), M(E[1])) = \underline{\text{Hom}}_A(M(D[1]), M(E[1])) = \underline{\text{Hom}}_A(S_1, M(E[1])) \neq 0,$$

car le morphisme explicite

$$M(D[1]) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \begin{array}{c} \text{0} \\ \swarrow \quad \searrow \end{array} & \\ \begin{array}{c} \text{1} \\ \swarrow \quad \searrow \end{array} & \begin{array}{c} \text{0} \\ \swarrow \quad \searrow \end{array} & \begin{array}{c} \text{1} \\ \swarrow \quad \searrow \end{array} \end{array} \rightarrow M(E[1]) = \begin{array}{c} \text{0} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{0} \end{array}$$

n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.1.

Pour (3), grâce à la périodicité des modules dans le 3-tube, on peut supposer $M = S_1$. Alors on voit facilement que

$$\text{Ext}_A^1(S_1, M(C[1])) = \underline{\text{Hom}}_A(S_1, \Omega^{-1}M(C[1])) = \underline{\text{Hom}}_A(S_1, M(E[1])) = \underline{\text{Hom}}_A(S_1, \begin{array}{c} \text{0} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{0} \end{array}) = 0.$$

$$\text{Ext}_A^1(S_1, M(D[1])) = \underline{\text{Hom}}_A(S_1, \Omega^{-1}M(D[1])) = \underline{\text{Hom}}_A(S_1, M(C[1])) = \underline{\text{Hom}}_A(S_1, \begin{array}{c} \text{1} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{0} \quad \text{1} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{0} \end{array}) = 0.$$

$$\text{Ext}_A^1(S_1, M(E[1])) = \underline{\text{Hom}}_A(S_1, \Omega^{-1}M(E[1])) = \underline{\text{Hom}}_A(S_1, M(D[1])) = \underline{\text{Hom}}_A(S_1, \begin{array}{c} \text{0} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{1} \quad \text{0} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{1} \end{array}) \neq 0.$$

$$\text{Ext}_A^1(M(C[1]), S_1) = \underline{\text{Hom}}_A(\Omega M(C[1]), S_1) = \underline{\text{Hom}}_A(M(D[1]), S_1) = \underline{\text{Hom}}_A(\begin{array}{c} \text{0} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{1} \quad \text{0} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{1} \end{array}, S_1) = 0.$$

$$\text{Ext}_A^1(M(D[1]), S_1) = \underline{\text{Hom}}_A(\Omega M(D[1]), S_1) = \underline{\text{Hom}}_A(M(E[1]), S_1) = \underline{\text{Hom}}_A(\begin{array}{c} \text{0} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{0} \end{array}, S_1) = 0.$$

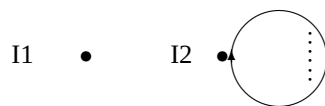
$$\text{Ext}_A^1(M(E[1]), S_1) = \underline{\text{Hom}}_A(\Omega M(E[1]), S_1) = \underline{\text{Hom}}_A(M(C[1]), S_1) = \underline{\text{Hom}}_A(\begin{array}{c} \text{1} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{0} \quad \text{1} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{0} \end{array}, S_1) \neq 0.$$

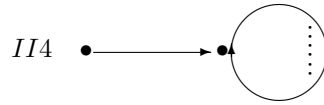
L'assertion (3) en découle.

□

Théorème 3.4.4 Soit M un module sans auto-extensions non-triviales sur $D(2\mathcal{A})^1(0)$. Alors

- (1) M a au plus deux facteurs directes indécomposables non projectifs non-isomorphes.
- (2) $\underline{\text{End}}_A(M)$ est indécomposable.
- (3) $\underline{\text{End}}_A(M)$ est équivalente au sens de Morita à l'une des quatre algèbres suivantes:





Démonstration L'assertion (1) est une conséquence immédiate de la proposition précédente.

On peut supposer que les facteurs directs indécomposables non projectifs de M sont non-isomorphes, puisque on s'intéresse à classer les algèbres des endomorphismes stables, à équivalences de Morita près. Si M est indécomposable, alors on peut appliquer Théorème 3.4.2, i.e. si M est de type (i), alors $\underline{\text{End}}_A(M) = k$; si M est de type (ii), alors $\underline{\text{End}}_A(M) = k[\epsilon]/\epsilon^2$.

Si M a deux facteurs directs indécomposables, alors d'après Proposition 3.4.3 l'un est de type (i) et l'autre (ii). On peut supposer

$$M = S_1 \oplus M(C[1]) = S_1 \oplus \begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 0 \quad 1 \\ \searrow \quad \swarrow \\ \quad 0 \end{array} \quad \text{ou} \quad M = S_1 \oplus M(D[1]) = S_1 \oplus \begin{array}{c} 0 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \quad 0 \\ \searrow \quad \swarrow \\ \quad 1 \end{array}$$

Dans le premier cas, notons

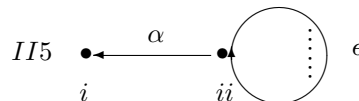
$$\begin{aligned} M(C[1]) &= \begin{array}{c} \boxed{1} \\ \swarrow \quad \searrow \\ 0 \quad 1 \\ \searrow \quad \swarrow \\ \quad 0 \end{array} \xrightarrow{\beta} S_1, & M(C[1]) &= \begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 0 \quad \boxed{1} \\ \searrow \quad \swarrow \\ \quad 0 \end{array} \xrightarrow{\alpha} S_1 \\ M(C[1]) &= \begin{array}{c} \boxed{1} \quad \boxed{1} \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\ 0 \quad 0 \quad 1 \end{array} \xrightarrow{\epsilon} M(C[1]) = \begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 0 \quad \boxed{1} \quad \boxed{1} \\ \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \\ \quad 0 \quad 0 \end{array} \end{aligned}$$

Aucun de ces morphismes explicites n'est projectif en vertu de Lemme 3.2.1. On voit facilement que

$$\underline{\text{Hom}}_A(M(C[1]), S_1) = k\underline{\alpha} \oplus k\underline{\beta}, \quad \underline{\text{Hom}}_A(S_1, M(C[1])) = 0,$$

$$\underline{\text{End}}_A(M(C[1])) = k\underline{Id} \oplus k\underline{\epsilon} \quad \underline{\text{End}}_A(S_1) = k\underline{Id}$$

Il est facile de voir que $\epsilon^2 = 0$ et on vérifie que $\alpha \circ \epsilon = \beta$ en tant qu'applications et donc que $\epsilon\alpha = \beta$ en tant que flèches. On obtient donc que $\underline{\text{End}}_A(M)$ est isomorphe à l'algèbre II5.



Dans le deuxième cas, notons

$$S_1 \xrightarrow{\gamma} M(D[1]) = \begin{array}{c} 0 \\ \swarrow \searrow \\ \boxed{1} \quad 0 \\ \quad \quad \searrow \\ \quad \quad 1 \end{array}, \quad S_1 \xrightarrow{\delta} M(D[1]) = \begin{array}{c} 0 \\ \swarrow \searrow \\ 1 \quad 0 \\ \quad \quad \searrow \\ \quad \quad \boxed{1} \end{array}$$

$$M(D[1]) = \begin{array}{c} \ulcorner \quad \urcorner \\ \swarrow \searrow \\ 1 \quad 0 \\ \quad \quad \searrow \\ \quad \quad 1 \end{array} \xrightarrow{\eta} M(D[1]) = \begin{array}{c} 0 \\ \swarrow \searrow \\ 1 \quad 0 \\ \quad \quad \searrow \\ \quad \quad 1 \end{array}$$

Aucun de ces morphismes explicites n'est projectif en vertu de Lemme 3.2.1. On voit facilement que

$$\underline{\mathrm{Hom}}_A(S_1, M(D[1])) = k\gamma \oplus k\delta, \quad \underline{\mathrm{Hom}}_A(M(D[1]), S_1) = 0$$

$$\underline{\text{End}}_A(M(D[1])) = k\underline{Id} \oplus k\eta, \quad \underline{\text{End}}_A(S_1) = k\underline{Id}$$

Il est facile de voir que $\eta^2 = 0$ et on vérifie que $\eta \circ \gamma = \delta$ en tant qu'applications et donc que $\gamma\eta = \delta$ en tant que flèches. On obtient donc que $\text{End}_A(M)$ est isomorphe à l'algèbre II4.

II4

i $\xrightarrow{\gamma}$ ii η

3.5 $D(2\mathcal{A})^s(c)$ avec $s \geq 2$ et $c = 0$

A Petri net diagram consisting of a single place labeled α on the left. To its right are two transitions, labeled 0 and 1. Transition 0 has an outgoing edge labeled β that points to transition 1. Transition 1 has an outgoing edge labeled γ that points back to transition 0.

$$\gamma\beta = 0, \alpha^2 = 0, (\alpha\beta\gamma)^s = (\beta\gamma\alpha)^s$$

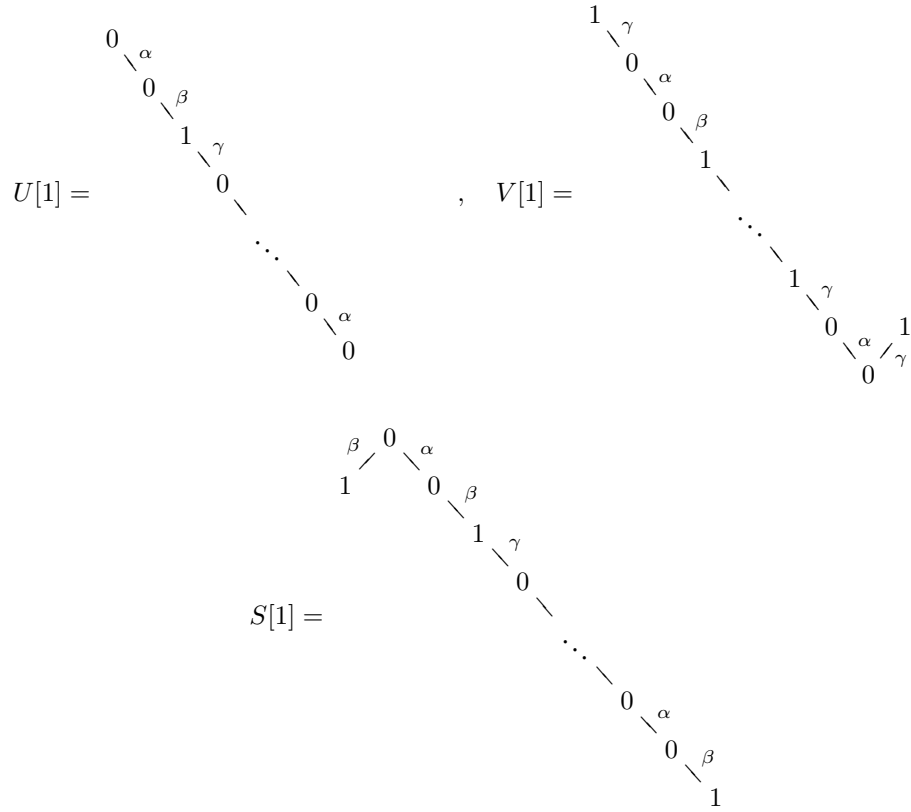
Proposition 3.5.1 (Proposition 1.8.6) Le carquois d’Auslander-Reiten stable de $D(2\mathcal{A})^s(0)$ avec $s \geq 2$ est composé de

- une infinité de 1-tubes
- un 3-tube non régulier
- une infinité de composantes de type $\mathbb{Z}A_{\infty}^{\infty}$

On définit d'abord les deux fonctions σ et ϵ (voir Section 1.2).

	α	β	γ
σ	1	-1	1
ϵ	1	-1	-1

Noutons que $U[1] = (\alpha\beta\gamma)^{s-1}\alpha$, $V[1] = (\gamma\alpha\beta)^{s-1}\gamma\alpha\gamma^{-1}$, $S[1] = \beta^{-1}(\alpha\beta\gamma)^{s-1}\alpha\beta$ qui ont les structures suivantes:



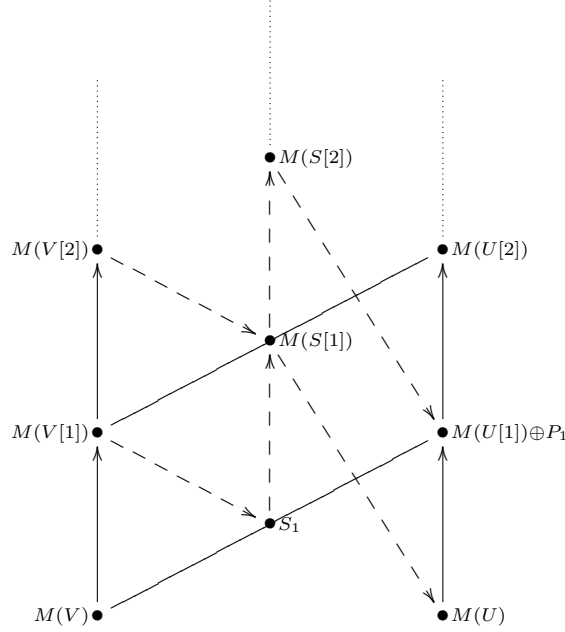
Avec ces notations c-dessus, les suites d'Auslander-Reiten (1), (2) et (3) deviennent

$$\begin{aligned}
 0 &\rightarrow M(U) \rightarrow M(U[1]) \oplus P_1 \rightarrow M(V) \rightarrow 0 \\
 0 &\rightarrow S_1 \rightarrow M(S[1]) \rightarrow M(U) \rightarrow 0 \\
 0 &\rightarrow M(V) \rightarrow M(V[1]) \oplus M(U[n-1]) \rightarrow S_1 \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

Dans le 3-tube, (pour les notations, voir Définition 1.6.6), en utilisant Proposition 1.6.11, on montre que $\Omega(U[n]) = V[n]$, $\Omega(V[n]) = S[n]$ et $\Omega(S[n]) = U[n]$ et les suites d'Auslander-Reiten sont

$$\begin{aligned}
 0 &\rightarrow M(U[n]) \rightarrow M(U[n-1]) \oplus M(V[n-1]) \rightarrow M(V[n]) \rightarrow 0 \\
 0 &\rightarrow M(V[n]) \rightarrow M(V[n-1]) \oplus M(S[n-1]) \rightarrow M(S[n]) \rightarrow 0 \\
 0 &\rightarrow M(S[n]) \rightarrow M(S[n-1]) \oplus M(U[n-1]) \rightarrow M(U[n]) \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

pour tout $n \geq 1$. Ce 3-tube est de la forme



Théorème 3.5.2 Soit M un module indécomposable sur $D(2\mathcal{A})^s(c)$ avec $s \geq 2$ et $c = 0$. Alors M est rigide ssi il est parmi les modules suivants:

- (i) $M(U)$, $M(V)$ et S_1 , i.e. les modules de quasi-longueur 0 (Définition 1.6.5) dans le 3-tube.
- (ii) $M(U[1])$, $M(V[1])$ et $M(S[1])$, i.e. les modules de quasi-longueur 1 dans le 3-tube.
- (iii) $\Omega^n(M(\alpha))$, $n \in \mathbb{Z}$

Pour les modules de type (i), $\underline{\text{End}}_A(M) = k$ et pour les modules de type (ii) et (iii), $\underline{\text{End}}_A(M) = k[\epsilon]/\epsilon^2$

On démontre ce théorème par une série de propositions.

Proposition 3.5.3 Soient M et N deux modules dans le 3-tube ci-dessus.

- (1) $\text{Ext}_A^1(M, M) = 0$ et $\underline{\text{End}}_A M = k$ pour $M \in \{M(U), M(V), S_1\}$, i.e. les modules de quasi-longueur 0 dans le 3-tube
- (2) $\text{Ext}_A^1(M, M) = 0$ et $\underline{\text{End}}_A M = k[\epsilon]/\epsilon^2$ pour $M \in \{M(U[1]), M(V[1]), M(S[1])\}$, i.e. les modules de quasi-longueur 1 dans le 3-tube.
- (3) $\text{Ext}_A^1(M, M) \neq 0$ pour M autre que les six modules ci-dessus.
- (4) **(i+i)** Si $M, N \in \{M(U), M(V), S_1\}$, $\text{Ext}_A^1(M \oplus N, M \oplus N) = 0 \Leftrightarrow M \simeq N$.
- (5) **(ii+ii)** Si $M, N \in \{M(U[1]), M(V[1]), M(S[1])\}$, $\text{Ext}_A^1(M \oplus N, M \oplus N) = 0 \Leftrightarrow M \cong N$.
- (6) **(i+ii)** Si $M_1 \in \{M(U), M(V), S_1\}$ et $M_2 \in \{M(U[1]), M(V[1]), M(S[1])\}$, $\text{Ext}_A^1(M_1 \oplus M_2, M_1 \oplus M_2) = 0 \Leftrightarrow \exists i \in \mathbb{Z}$ tel que $(M_1 \cong \Omega^i S_1 \text{ et } M_2 \cong \Omega^i(M(V[1])))$ ou $(M_1 \cong \Omega^i S_1 \text{ et } M_2 \cong \Omega^i(M(S[1])))$
 Si $M_1 = \Omega^i S_1$ et $M_2 = \Omega^i(M(V[1]))$, $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_2)$ est isomorphe à II5.
 Si $M_1 = \Omega^i S_1$ et $M_2 = \Omega^i(M(S[1]))$, $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_2)$ est isomorphe à II4.

Démonstration Comme ce 3-tube est Ω -stable, pour les trois modules de même quasi-longueur, il suffit d'en considérer un.

(1) $\text{Ext}_A^1(S_1, S_1) = \underline{\text{Hom}}_A(M(U), S_1) = 0$, puisque $\text{Top}(M(U)) = S_0 \not\cong S_1$. L'égalité $\underline{\text{End}}_A(S_1) = k$ est évidente.

(2) Tout morphisme explicite de

$$\Omega(M(S[1])) = M(U[1]) = M((\alpha\beta\gamma)^{s-1}\alpha)$$

vers

$$M(S[1]) = M(\beta^{-1}(\alpha\beta\gamma)^{s-1}\alpha\beta)$$

est de cœur $(\alpha\beta\gamma)^i\alpha\beta$ avec $0 \leq i \leq s-2$ et factorise par P_0 via

$$M(U[1]) \hookrightarrow P_0 \twoheadrightarrow M((\gamma\alpha\beta)^{i+1}) \hookrightarrow M(S[1])$$

On obtient donc

$$\text{Ext}_A^1(M(S[1]), M(S[1])) = \underline{\text{Hom}}_A(M(U[1]), M(S[1])) = 0$$

Montrons que $\underline{\text{End}}_A(M(S[1])) = k[\epsilon]/\epsilon^2$. En effet, le morphisme explicite

$$\epsilon : M(S[1]) = \begin{array}{c} \begin{array}{c} \begin{array}{c} \beta \quad 0 \quad \alpha \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \quad \quad 0 \end{array} \\ \quad \quad \quad \beta \\ \quad \quad \quad \diagdown \\ \quad \quad \quad 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \gamma \\ \diagdown \\ 0 \end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{c} 0 \quad \alpha \\ \diagdown \quad \diagup \\ 0 \quad \beta \\ \quad \quad \quad 1 \end{array} \end{array} \rightarrow M(S[1]) = \begin{array}{c} \begin{array}{c} \begin{array}{c} \beta \quad 0 \quad \alpha \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \quad \quad 0 \end{array} \\ \quad \quad \quad \beta \\ \quad \quad \quad \diagdown \\ \quad \quad \quad 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \gamma \\ \diagdown \\ 0 \end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{c} 0 \quad \alpha \\ \diagdown \quad \diagup \\ 0 \quad \beta \\ \quad \quad \quad 1 \end{array} \end{array}$$

n'est pas projectif d'après Lemme 3.2.1 et forme avec l'identité une base de $\underline{\text{End}}_A(M(S[1]))$. Car tout autre morphisme explicite de $M(S[1])$ à lui-même est de cœur $(\alpha\beta\gamma)^i\alpha\beta$ pour $0 \leq i \leq s-2$ et factorise par P_1 via

$$M(S[1]) \twoheadrightarrow M((\alpha\beta\gamma)^{s-1}\alpha\beta) \hookrightarrow P_1 \twoheadrightarrow M((\gamma\alpha\beta)^{i+1}) \hookrightarrow M(S[1])$$

(3) On va montrer que $\text{Ext}_A^1(S[n], S[n]) \neq 0$, pour $n \geq 2$. Constatons que

$$S[2] = \beta^{-1}(\alpha\beta\gamma)^{s-1}\alpha = \beta^{-1}U[1]$$

et que

$$\Omega^{-1}S[2] = V[2] = (\gamma\alpha\beta)^{s-1}\gamma\alpha\gamma^{-1}\beta^{-1}(\alpha\beta\gamma)^{s-1}\alpha\beta = \gamma(\alpha\beta\gamma)^{s-1}\alpha\gamma^{-1}\beta^{-1}(\alpha\beta\gamma)^{s-1}\alpha\beta = \gamma U[3]$$

On en déduit que $S[n] = \beta^{-1}U[n-1]$ et $V[n] = \gamma U[n+1]$ pour $n \geq 2$.

Le morphisme explicite

$$M(S[n]) = M(\beta^{-1}U[n-1]) \twoheadrightarrow M(U[n-1]) \rightarrow M(U[n]) \rightarrow M(U[n+1]) \hookrightarrow M(\gamma U[n+1]) = M(V[n])$$

n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.1, puisque $\text{Soc}(M(S[n])) \hookrightarrow M(S[n]) \rightarrow M(V[n])$ n'est pas nul. Dans ce composé, les deux morphismes

$$M(U[n-1]) \rightarrow M(U[n]) \quad \text{et} \quad M(U[n]) \rightarrow M(U[n+1])$$

définis dans Définition 1.6.6 sont irréductibles.

(4) On a vu que $\text{Ext}_A^1(S_1, S_1) = 0$;

$$\text{Ext}_A^1(S_1, M(U)) = \underline{\text{Hom}}_A(S_1, \Omega^{-1}M(U)) = \underline{\text{Hom}}_A(S_1, S_1) \neq 0$$

car S_1 n'est pas projectif;

$$\text{Ext}_A^1(S_1, M(V)) = \underline{\text{Hom}}_A(S_1, \Omega^{-1}M(V)) = \underline{\text{Hom}}_A(S_1, M(U)) \neq 0$$

car il existe une injection évidente de S_1 à $M(U)$ qui n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.1.

(5) On a vu que $\text{Ext}_A^1(M(S[1]), M(S[1])) = 0$;

$$\text{Ext}_A^1(M(S[1]), M(U[1])) = \underline{\text{Hom}}_A(M(S[1]), \Omega^{-1}M(U[1])) = \underline{\text{Hom}}_A(M(S[1]), M(S[1])) \neq 0$$

car $M(S[1])$ n'est pas projectif;

$$\text{Ext}_A^1(M(S[1]), M(V[1])) = \underline{\text{Hom}}_A(M(S[1]), \Omega^{-1}M(V[1])) = \underline{\text{Hom}}_A(M(S[1]), M(U[1])) \neq 0$$

car il existe une surjection évidente de $M(S[1])$ à $M(U[1])$ qui n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.1.

(6) on peut supposer $M = S_1$. Alors il est facile de voir que

$$\text{Ext}_A^1(S_1, M(U[1])) = \underline{\text{Hom}}_A(S_1, M(S[1])) \neq 0, \quad \text{Ext}_A^1(M(U[1]), S_1) = \underline{\text{Hom}}_A(M(V[1]), S_1) \neq 0$$

$$\text{Ext}_A^1(S_1, M(V[1])) = \underline{\text{Hom}}_A(S_1, M(U[1])) = 0, \quad \text{Ext}_A^1(M(V[1]), S_1) = \underline{\text{Hom}}_A(M(S[1]), S_1) = 0$$

$$\text{Ext}_A^1(S_1, M(S[1])) = \underline{\text{Hom}}_A(S_1, M(V[1])) = 0, \quad \text{Ext}_A^1(M(S[1]), S_1) = \underline{\text{Hom}}_A(M(U[1]), S_1) = 0$$

où les deux premières inégalités découlent de Lemme 3.2.1 et les quatre dernières égalités sont vraies en regardant les socles et les têtes. On en déduit les possibilités $M_1 \oplus M_2 = S_1 \oplus M(V[1])$ ou $M_1 \oplus M_2 = S_1 \oplus M(S[1])$.

Si $M_1 = S_1, M_2 = M(V[1])$. Notons

$$S_1 \xleftarrow{f} M(V[1]) = M((\gamma\alpha\beta)^{s-1}\gamma\alpha\gamma^{-1}) =$$

et

$$S_1 \xleftarrow{g} M(V[1]) = M((\gamma\alpha\beta)^{s-1}\gamma\alpha\gamma^{-1}) =$$

et

$$M(V[1]) = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \gamma \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \alpha \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \beta \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \dots \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \gamma \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \alpha \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\eta} M(V[1]) = \begin{array}{c} 1 \begin{array}{|c|} \hline \gamma \\ \hline \end{array} 0 \begin{array}{|c|} \hline \alpha \\ \hline \end{array} 0 \begin{array}{|c|} \hline \beta \\ \hline \end{array} 1 \dots 1 \begin{array}{|c|} \hline \gamma \\ \hline \end{array} 0 \begin{array}{|c|} \hline \alpha \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array}$$

Lemme 3.2.1 implique que $\underline{f}, \underline{g}, \underline{\eta} \neq 0$. On voit que

$$\underline{\text{Hom}}_A(S_1, M(V[1])) = 0 \text{ et } \underline{\text{Hom}}_A(M(V[1]), S_1) = k\underline{f} \oplus k\underline{g}$$

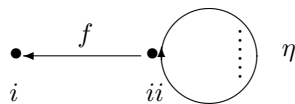
En plus

$$\underline{\text{End}}_A(M(V[1])) = k\underline{Id} \oplus k\underline{\eta},$$

car tout autre morphisme explicite de $M(V[1])$ à lui-même est de cœur $(\gamma\alpha\beta)^i\gamma\alpha$ avec $0 \leq i \leq s-2$ et factorise par P_0 via

$$M(V[1]) \hookrightarrow P_0 \twoheadrightarrow M((\beta\gamma\alpha)^{i+1}) \hookrightarrow M(V[1]).$$

On vérifie que $\eta f = g$ et on obtient que $\underline{\text{End}}_A(M \oplus N)$ est isomorphe à l'algèbre II5.



Quand $M_1 = S_1, M_2 = M(S[1])$, notons

$$S_1 \xrightarrow{f'} M(S[1]) = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \beta \\ \hline \end{array} 0 \begin{array}{|c|} \hline \alpha \\ \hline \end{array} 0 \begin{array}{|c|} \hline \beta \\ \hline \end{array} 1 \begin{array}{|c|} \hline \gamma \\ \hline \end{array} 0 \dots 0 \begin{array}{|c|} \hline \alpha \\ \hline \end{array} 0 \begin{array}{|c|} \hline \beta \\ \hline \end{array} 1 \\ \hline \end{array}$$

et

$$S_1 \xrightarrow{g'} M(S[1]) = \begin{array}{c} \begin{array}{c} \beta \quad 0 \quad \alpha \\ 1 \quad \quad 0 \end{array} \\ \quad \quad \beta \\ \quad \quad 1 \quad \gamma \\ \quad \quad \quad 0 \\ \quad \quad \quad \vdots \\ \quad \quad \quad 0 \quad \alpha \\ \quad \quad \quad \quad 0 \quad \beta \\ \quad \quad \quad \quad \quad \boxed{1} \end{array}$$

Similairement on montre que

$$\underline{\text{Hom}}_A(S_1, M(S[1])) = k\underline{f'} \oplus k\underline{g'}, \quad \underline{\text{Hom}}_A(M(S[1]), S_1) = 0$$

et

$$\underline{\text{End}}_A(M(S[1])) = k\underline{Id} \oplus k\underline{\epsilon}$$

On vérifie que $f'\epsilon = g'$ et on obtient que $\underline{\text{End}}_A(M \oplus N)$ est isomorphe à l'algèbre II4.

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{f'} & \bullet \\ i & & ii \end{array} \quad \begin{array}{c} \bigcirc \\ \vdots \\ \bigcirc \end{array} \quad \epsilon$$

□

On traite maintenant les composantes de type $\mathbb{Z}A_\infty^\infty$.

Proposition 3.5.4 Pour tout module $M \in Q(\Omega S_0) \cup Q(S_0)$, $\text{Ext}_A^1(M, M) \neq 0$.

Démonstration Comme ces deux composantes sont Ω -isomorphes, tout module dans $Q(\Omega S_0) \cup Q(S_0)$ est un syzygy de certain $M([n]1_{(0,-1)})$ pour $n \in \mathbb{Z}$. On va montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\text{Ext}_A^1(M([n]1_{(0,-1)}), M([n]1_{(0,-1)})) \neq 0$$

Si $n \geq 1$,

$$[n]1_{(0,-1)} = (((\beta\gamma\alpha)^{s-1}\beta\gamma)^{-1}\alpha)^n = (((\beta\gamma\alpha)^{s-1}\beta\gamma)^{-1}\alpha)^{n-1}(\alpha\beta\gamma)^{-(s-1)}\gamma^{-1}\beta^{-1}\alpha$$

et on obtient que

$$\Omega([n]1_{(0,-1)}) = (((\beta\gamma\alpha)^{s-1}\beta\gamma)^{-1}\alpha)^{n-1}(\alpha\beta\gamma)^{-(s-1)}\gamma^{-1}.$$

On voit donc que le morphisme explicite $\Omega(M([n]1_{(0,-1)})) \hookrightarrow M([n]1_{(0,-1)})$ n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.1.

Si $n < 0$,

$$[n]1_{(0,-1)} = ((\beta\gamma\alpha)^{s-1}\beta\gamma\alpha^{-1})^{-n}$$

et

$$\Omega([n]1_{(0,-1)}) = ((\beta\gamma\alpha)^{s-1}\beta\gamma\alpha^{-1})^{-n}(\beta\gamma\alpha)^{s-1}\beta\gamma((\gamma\alpha\beta)^{s-1}\gamma\alpha)^{-1}.$$

On voit donc que le morphisme explicite $\Omega(M([n]1_{(0,-1)})) \twoheadrightarrow M([n]1_{(0,-1)})$ n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.1.

L'inégalité $\text{Ext}_A^1(S_0, S_0) \neq 0$ est évident grâce à l'existence de α .

□

Proposition 3.5.5 Pour $M \in Q(\alpha) \cup \Omega Q(\alpha)$, $\text{Ext}_A^1(M, M) = 0 \Leftrightarrow M = \Omega^i(M(\alpha))$ pour certain $i \in \mathbb{Z}$. En plus, si tel est le cas, $\underline{\text{End}}_A(M) = k[\epsilon]/\epsilon^2$.

Démonstration Supposons d'abord que $s \geq 3$. On n'a besoin de considérer que les cordes $[n]\alpha$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

- (1) $n = 0$. $\Omega(\alpha) = (\gamma\alpha\beta)^{s-1}\gamma\alpha((\gamma\alpha\beta)^{s-1}\gamma)^{-1}$ et donc $\text{Top}(\Omega(M(\alpha))) = S_1 \oplus S_1$. on a donc que

$$\text{Ext}_A^1(M(\alpha), M(\alpha)) = \underline{\text{Hom}}_A(\Omega(M(\alpha)), M(\alpha)) = 0$$

- (2) $n = 1$. Le morphisme explicite

$$\Omega(M([1]\alpha)) = M((\gamma\alpha\beta)^{s-1}) \twoheadrightarrow M(\gamma\alpha) = M([1]\alpha)$$

n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.1.

- (3) $n \geq 2$.

$$[n]\alpha = [n-2]((\alpha\beta\gamma)^{s-1}\alpha\beta)^{-1}\beta\gamma\alpha = C\alpha^{-1}\beta\gamma\alpha$$

$$\Omega([n]\alpha) = D(\gamma\alpha(\beta\gamma\alpha)^{s-2})^{-1} = D(\beta\gamma\alpha)^{2-s}\alpha^{-1}\gamma^{-1}$$

pour des cordes C et D . Alors le morphisme

$$\Omega(M([n]\alpha)) = M(D(\beta\gamma\alpha)^{2-s}\alpha^{-1}\gamma^{-1}) \twoheadrightarrow M(\alpha^{-1}\gamma^{-1}) \cong M(\gamma\alpha) \hookrightarrow M(C\alpha^{-1}\beta\gamma\alpha) = M([n]\alpha)$$

n'est pas projectif d'après Lemme 3.2.2. Ce morphisme explicite est illustré par

$$\Omega M([2]\alpha) = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline \gamma \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline \alpha \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} \\ \vdots \\ \begin{array}{|c|} \hline \beta \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} \\ \vdots \\ \begin{array}{|c|} \hline \gamma \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} \\ \vdots \\ \begin{array}{|c|} \hline \alpha \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} \\ \vdots \end{array} \rightarrow M([2]\alpha) = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline \alpha \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \beta \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline \gamma \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \alpha \\ \hline \end{array} \end{array}$$

En effet, le segment de $\Omega(M([n]\alpha))$ contenant le cœur est $(\beta\gamma\alpha)^{2-s}\alpha^{-1}\gamma^{-1}$ et celui de $M([n]\alpha)$ est $\beta\gamma\alpha$. Selon Lemme 3.2.2, si ce morphisme était projectif, la corde $(\beta\gamma\alpha)^{2-s}\alpha^{-1}\gamma^{-1}\beta^{-1}$ contiendrait un chemin maximal, ce qui est absurde.

- (4) $n = -1$. $[-1]\alpha = \beta^{-1}\alpha$ et

$$\Omega([-1]\alpha) = \alpha(\beta\gamma\alpha)^{s-1}((\gamma\alpha\beta)^{s-1}\gamma)^{-1}$$

Supposons maintenant que $s = 2$. On voit facilement que $(\Omega^{-1}\alpha)^{-1} = [2]\alpha[-1]$ et donc que pour $s, t \in \mathbb{Z}$,

$$\Omega^{-1}([s]\alpha[t]) = [s]([2]\alpha[-1])^{-1}[t] = ([2+t]\alpha[-1+s])^{-1}$$

Il suffit donc de ne considérer que les cordes $[n]\alpha$ avec $n \in \mathbb{N}$.

- (1) $n = 0$. $\Omega(\alpha) = \gamma\alpha\beta\gamma\alpha(\gamma\alpha\beta\gamma)^{-1}$ et donc $\text{Top}(\Omega(M(\alpha))) = S_1 \oplus S_1$.

$$\text{Ext}_A^1(M(\alpha), M(\alpha)) = \underline{\text{Hom}}_A(\Omega(M(\alpha)), M(\alpha)) = 0$$

- (2) $n = 1$. Le morphisme explicite $\Omega(M([1]\alpha)) = M(\gamma\alpha\beta) \rightarrow M(\gamma\alpha) = M([1]\alpha)$ n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.1.

- (3) si $n = 2$, le morphisme explicite

$$\Omega(M([2]\alpha)) = \begin{array}{c} 1 \\ \nearrow \gamma \\ 0 \nearrow \alpha \\ 0 \end{array} \hookrightarrow M([2]\alpha) = \begin{array}{c} 0 \quad \beta \\ \nearrow \alpha \quad \searrow 1 \\ 0 \quad \nearrow \beta \quad \searrow \gamma \\ 1 \quad \nearrow \alpha \quad \searrow 0 \\ 0 \quad \nearrow \beta \quad \searrow 0 \\ 1 \quad \nearrow \beta \end{array}$$

n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.1.

- (4) si $n = 3$, $[3]\alpha = (\Omega^{-3}(\alpha))^{-1}$. Comme ce que l'on a montré dans (1), le module $M([3]\alpha)$ est rigide.

- (5) si $n = 4$, le morphisme explicite de cœur γ

$$\Omega(M([4]\alpha)) = \begin{array}{c} 0 \quad \beta \\ \nearrow \alpha \quad \searrow 1 \\ 0 \quad \nearrow \beta \quad \searrow \gamma \\ 1 \quad \nearrow \alpha \quad \searrow 0 \\ 0 \quad \nearrow \beta \quad \searrow 0 \\ 1 \quad \nearrow \beta \end{array} \rightarrow M([4]\alpha) = \begin{array}{c} 0 \quad \beta \\ \nearrow \alpha \quad \searrow 1 \\ 0 \quad \nearrow \beta \quad \searrow \gamma \\ 1 \quad \nearrow \alpha \quad \searrow 0 \\ 0 \quad \nearrow \beta \quad \searrow 0 \\ 1 \quad \nearrow \beta \end{array}$$

n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.1.

- (6) Pour $n \geq 5$, $[n]\alpha = E\alpha^{-1}\beta\gamma\alpha^{-1}\gamma^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1}\beta\gamma\alpha$ et $\Omega([n]\alpha) = F(\alpha\beta\gamma\alpha)^{-1}\beta\gamma\alpha^{-1}\gamma^{-1}$ avec E et F des cordes. Le morphisme explicite de cœur γ

$$\Omega(M([n]\alpha)) = \begin{array}{c} 0 \quad \beta \\ \nearrow \alpha \quad \searrow 1 \\ 0 \quad \nearrow \beta \quad \searrow \gamma \\ 1 \quad \nearrow \alpha \quad \searrow 0 \\ 0 \quad \nearrow \beta \quad \searrow 0 \\ 1 \quad \nearrow \beta \end{array} \rightarrow M([n]\alpha) = \begin{array}{c} 0 \quad \beta \\ \nearrow \alpha \quad \searrow 1 \\ 0 \quad \nearrow \beta \quad \searrow \gamma \\ 1 \quad \nearrow \alpha \quad \searrow 0 \\ 0 \quad \nearrow \beta \quad \searrow 0 \\ 1 \quad \nearrow \beta \end{array}$$

n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.2.

(5) Si $n \geq 2$, le morphisme

$$\Omega^{2n+1}(M(\alpha)) = M([-n+2](\beta^{-1}(\alpha\beta\gamma)^{s-1}\alpha(\alpha\beta\gamma)^{1-s}\beta)[-n+2]) \rightarrow M(\alpha)$$

n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.1.

(6) Le morphisme explicite

$$\Omega^{-1}(M(\alpha)) = M(((\beta\gamma\alpha)^{s-1}\beta)^{-1}(\alpha\beta\gamma)^{s-1}\alpha\beta) \rightarrow M(\alpha)$$

n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.1.

(7) Si $n \geq 1$, le morphisme explicite

$$\Omega^{-2n-1}M(\alpha) = M([n-1]((\beta\gamma\alpha)^{1-s}(\alpha\beta\gamma)^{s-1}\alpha)[n-1]) \rightarrow M(\alpha)$$

n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.1.

□

Proposition 3.5.8 (i+iii) Si M_1 est de type (i) et M_3 de type (iii). Alors

$$\text{Ext}_A^1(M_1 \oplus M_3, M_1 \oplus M_3) = 0 \Leftrightarrow \exists i, n \in \mathbb{Z} \text{ tel que } (M_1 = \Omega^i M(U) \text{ ou } M_1 = \Omega^i M(V)) \text{ et } M_3 = \Omega^{3n+i} M(\alpha)$$

En plus si $M_1 = \Omega^i M(U)$ et $M_3 = \Omega^{3n+i} M(\alpha)$, $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_3)$ est isomorphe à l'algèbre II5 et si $M_1 = \Omega^i M(V)$ et $M_3 = \Omega^{3n+i} M(\alpha)$, $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_3)$ est isomorphe à l'algèbre II4.

Démonstration Il est facile de voir que

$$\text{Ext}_A^1(M(\alpha), M(U)) = \underline{\text{Hom}}_A(M(\alpha), S_1) = 0 = \underline{\text{Hom}}_A(M(\alpha), M(U)) = \text{Ext}_A^1(M(\alpha), M(V))$$

car il n'existe pas de morphismes explicites de $M(\alpha)$ à S_1 ni de $M(\alpha)$ à $M(U)$.

$$\text{Ext}_A^1(M(\alpha), S_1) = \underline{\text{Hom}}_A(M(\alpha), M(V)) \neq 0$$

car il existe une injection évidente $M(\alpha) \hookrightarrow M(V)$ qui n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.1. On obtient aussi que

$$\text{Ext}_A^1(M(V), M(\alpha)) = \underline{\text{Hom}}_A(S_1, M(\alpha)) = 0 = \underline{\text{Hom}}_A(M(V), M(\alpha)) = \text{Ext}_A^1(M(U), M(\alpha))$$

car il n'existe pas de morphismes explicites de S_1 à $M(\alpha)$ ni de $M(V)$ à $M(\alpha)$.

$$\text{Ext}_A^1(S_1, M(\alpha)) = \underline{\text{Hom}}_A(M(U), M(\alpha)) \neq 0$$

car il existe une surjection évidente $M(U) \twoheadrightarrow M(\alpha)$ qui n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.1. Comme les modules $M(U)$, $M(V)$, S_1 sont périodique de période 3, on obtient le résultat voulu.

Calculons maintenant $\underline{\text{End}}_A(\Omega^i(M(V)) \oplus \Omega^{3n+i} M(\alpha)) = \underline{\text{End}}_A(M(V) \oplus M(\alpha))$. Notons

$$M(\alpha) = \begin{array}{c} 0 \\ \searrow \alpha \\ 0 \end{array} \xrightarrow{f} M(V) = \begin{array}{c} 1 \\ \searrow \gamma \\ 0 \\ \searrow \alpha \\ 0 \\ \searrow \beta \\ 1 \\ \searrow \dots \\ 1 \\ \searrow \gamma \\ \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} \searrow \alpha \\ \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

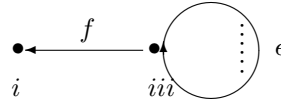
$$M(\alpha) = \begin{array}{c} \boxed{0} \\ \alpha \searrow \\ 0 \end{array} \xrightarrow{g} M(V) = \begin{array}{c} 1 \\ \gamma \searrow \\ 0 \\ \alpha \searrow \\ 0 \\ \beta \searrow \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \gamma \searrow \\ 0 \\ \alpha \searrow \\ \boxed{0} \end{array}$$

$$\epsilon : M(\alpha) = \begin{array}{c} \boxed{0} \\ \alpha \searrow \\ 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 0 \\ \alpha \searrow \\ \boxed{0} \end{array}$$

Le morphisme explicite f n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.1 et $\underline{g} \neq 0 \neq \underline{\epsilon}$ grâce à Lemme 3.2.3. On obtient que

$$\underline{\text{Hom}}_A(M(\alpha), M(V)) = k\underline{f} \oplus k\underline{g} \text{ et } \underline{\text{End}}_A(M(\alpha)) = k\underline{Id} \oplus k\underline{\epsilon}$$

On a vu que $\underline{\text{Hom}}_A(M(V), M(\alpha)) = 0$ et $\underline{\text{End}}_A(M(V)) = k\underline{Id}$. On vérifie que $\epsilon f = g$ et on obtient donc que $\underline{\text{End}}_A(M(\alpha) \oplus M(V))$ est isomorphe à l'algèbre II5.



Calculons maintenant $\underline{\text{End}}_A(\Omega^{3n+i}M(\alpha) \oplus \Omega^i(M(U))) = \underline{\text{End}}_A(M(\alpha) \oplus M(U))$. Notons

$$M(U) = \begin{array}{c} \boxed{0} \\ \alpha \searrow \\ \boxed{0} \\ \beta \searrow \\ 1 \\ \gamma \searrow \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha \searrow \\ 0 \\ \beta \searrow \\ 1 \end{array} \xrightarrow{f'} M(\alpha) = \begin{array}{c} 0 \\ \alpha \searrow \\ 0 \end{array}$$

$$M(U) = \begin{array}{c} \boxed{0} \\ \alpha \downarrow \\ 0 \\ \beta \downarrow \\ 1 \\ \gamma \downarrow \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha \downarrow \\ 0 \\ \beta \downarrow \\ 1 \end{array} \xrightarrow{g'} M(\alpha) = \begin{array}{c} 0 \\ \alpha \downarrow \\ \boxed{0} \end{array}$$

Le morphisme explicite f' n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.1 et $\underline{g'} \neq 0$ grâce à Lemme 3.2.3. On obtient que

$$\underline{\text{Hom}}_A(M(U), M(\alpha)) = k\underline{f'} \oplus k\underline{g'} \text{ et } \underline{\text{End}}_A(M(\alpha)) = k\underline{Id} \oplus k\underline{\epsilon}$$

On a vu que $\underline{\text{Hom}}_A(M(\alpha), M(U)) = 0$ et $\underline{\text{End}}_A(M(U)) = k\underline{Id}$. On vérifie que $f'\epsilon = g'$ et on obtient donc $\underline{\text{End}}_A(M(\alpha) \oplus M(U))$ est isomorphe à l'algèbre II4.

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{f'} & \bullet \\ i & & iii \end{array} \quad \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \vdots \\ \circlearrowright \end{array} \quad \epsilon$$

□

Proposition 3.5.9 (ii+iii) Si M_2 est de type (ii) et M_3 de type (iii). Alors

$$\text{Ext}_A^1(M_2 \oplus M_3, M_2 \oplus M_3) = 0 \Leftrightarrow \exists i, n \in \mathbb{Z} \text{ tel que } M_2 = \Omega^i(M(U[1])) \text{ et } M_3 = \Omega^{3n+i}(M(\alpha))$$

et tel est le cas, $\underline{\text{End}}_A(M_2 \oplus M_3)$ est isomorphe à l'algèbre II6.

Démonstration Il est facile de voir que

$$\text{Ext}_A^1(M(\alpha), M(U[1])) = \underline{\text{Hom}}_A(M(\alpha), M(S[1])) = 0, \quad \text{Ext}_A^1(M(\alpha), M(V[1])) = \underline{\text{Hom}}_A(M(\alpha), M(U[1])) \neq 0$$

$$\text{Ext}_A^1(M(\alpha), M(S[1])) = \underline{\text{Hom}}_A(M(\alpha), M(V[1])) \neq 0, \quad \text{Ext}_A^1(V[1], M(\alpha)) = \underline{\text{Hom}}(S[1], M(\alpha)) \neq 0$$

$$\text{Ext}_A^1(M(U[1]), M(\alpha)) = \underline{\text{Hom}}_A(M(V[1]), M(\alpha)) = 0, \quad \text{Ext}_A^1(S[1], M(\alpha)) = \underline{\text{Hom}}(U[1], M(\alpha)) \neq 0$$

On obtient donc que pour M_2 de type (ii),

$$\text{Ext}_A^1(M(\alpha) \oplus M_2, M(\alpha) \oplus M_2) = 0 \Leftrightarrow M_2 \cong M(U[1]).$$

Si on note

$$\epsilon : M(\alpha) = \begin{array}{c} \boxed{0} \\ \alpha \downarrow \\ 0 \end{array} \rightarrow M(\alpha) = \begin{array}{c} 0 \\ \alpha \downarrow \\ \boxed{0} \end{array}$$

$$M(U[1]) = \begin{array}{c} \boxed{0} \alpha \\ \backslash \\ 0 \beta \\ \backslash \\ 1 \gamma \\ \backslash \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \alpha \\ \backslash \\ 0 \end{array} \quad \xrightarrow{\eta} M(U[1]) = \begin{array}{c} 0 \alpha \\ \backslash \\ 0 \beta \\ \backslash \\ 1 \gamma \\ \backslash \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \alpha \\ \backslash \\ \boxed{0} \end{array}$$

$$M(U[1]) = \begin{array}{c} \boxed{0} \alpha \\ \backslash \\ \boxed{0} \beta \\ \backslash \\ 1 \gamma \\ \backslash \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \alpha \\ \backslash \\ 0 \end{array} \quad \xrightarrow{f} M(\alpha) = \begin{array}{c} 0 \alpha \\ \backslash \\ 0 \end{array}$$

$$M(U[1]) = \begin{array}{c} \boxed{0} \alpha \\ \backslash \\ 0 \beta \\ \backslash \\ 1 \gamma \\ \backslash \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \alpha \\ \backslash \\ 0 \end{array} \quad \xrightarrow{f'} M(\alpha) = \begin{array}{c} 0 \alpha \\ \backslash \\ \boxed{0} \end{array}$$

$$M(\alpha) = \begin{array}{c} 0 \alpha \\ \backslash \\ 0 \end{array} \xrightarrow{g} M(U[1]) = (\alpha\beta\gamma)^{s-1}\alpha = \begin{array}{c} 0 \alpha \\ \backslash \\ 0 \beta \\ \backslash \\ 1 \gamma \\ \backslash \\ 0 \\ \vdots \\ \boxed{0} \alpha \\ \backslash \\ \boxed{0} \end{array}$$

$$M(\alpha) = \begin{array}{c} \boxed{0} \\ \alpha \searrow \\ 0 \end{array} \xrightarrow{g'} M(U[1]) = \begin{array}{c} 0 \\ \alpha \searrow \\ 0 \\ \beta \searrow \\ 1 \\ \gamma \searrow \\ 0 \\ \vdots \searrow \\ 0 \\ \alpha \searrow \\ \boxed{0} \end{array}$$

On voit que

$$\underline{\text{Hom}}_A(M(U[1]), M(\alpha)) = k\underline{f} \oplus k\underline{f'}, \quad \underline{\text{Hom}}_A(M(\alpha), M(U[1])) = k\underline{g} \oplus k\underline{g'}$$

$$\underline{\text{End}}_A(M(\alpha)) = k\underline{Id} \oplus k\underline{\epsilon}, \quad \underline{\text{End}}_A(M(U[1])) = k\underline{Id} \oplus k\underline{\eta}$$

On vérifie que $f g' = \eta$, $f \epsilon = f'$, $\epsilon g = g'$, $g f = 0$ et on a aussi que $\underline{f g} = \underline{g \circ f} = 0$, car $g \circ f$ factorise par P_0 via

$$M(U[1]) \hookrightarrow P_0 \twoheadrightarrow \begin{array}{c} 0 \\ \beta \searrow \\ 1 \\ \gamma \searrow \\ 0 \\ \alpha \searrow \\ 0 \end{array} \hookrightarrow M(U[1])$$

On en déduit que l'algèbre $\underline{\text{End}}_A(M(U[1]) \oplus M(\alpha))$ est isomorphe à II6

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{f} & \bullet \\ \vdots & & \vdots \\ \bullet & \xrightarrow{g} & \bullet \end{array} \quad \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \vdots \\ \circlearrowright \end{array} \quad \epsilon$$

$ii \qquad \qquad \qquad iii$

□

Proposition 3.5.10 (i+ii+iii) Si M_1 est de type (i), M_2 de type (ii) et M_3 de type (iii). Alors $\text{Ext}_A^1(M_1 \oplus M_2 \oplus M_3, M_1 \oplus M_2 \oplus M_3) = 0 \Leftrightarrow \exists i, n \in \mathbb{Z}$ tels que ($M_1 = \Omega^i(M(U))$ ou $M_1 = \Omega^i(M(V))$), $M_2 = \Omega^i(M(U[1]))$ et $M_3 = \Omega^{3n+i}(M(\alpha))$.

Si $M_1 = \Omega^i(M(U))$, $M_2 = \Omega^i(M(U[1]))$ et $M_3 = \Omega^{3n+i}(M(\alpha))$, $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_2 \oplus M_3)$ est isomorphe à III12. et si $M_1 = \Omega^i(M(V))$, $M_2 = \Omega^i(M(U[1]))$ et $M_3 = \Omega^{3n+i}(M(\alpha))$, $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_2 \oplus M_3)$ est III13.

Démonstration Proposition 3.5.9 montre qu'il existe $i, n \in \mathbb{Z}$ tels que

$$M_2 = \Omega^i(M(U[1])) \quad \text{et} \quad M_3 = \Omega^{3n+i}(M(\alpha));$$

Proposition 3.5.3 montre que si $M_2 = \Omega^i(M(U[1]))$, alors

$$M_1 = \Omega^i(M(U)) \quad \text{ou} \quad M_1 = \Omega^i(M(V));$$

Proposition 3.5.8 montre que ($M_1 = \Omega^i(M(U))$ ou $M_1 = \Omega^i(M(V))$) et $M_3 = \Omega^{3n+i}(M(\alpha))$ sont compatibles, c'est-à-dire que leur somme est encore rigide.

Regardons maintenant $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_2 \oplus M_3)$. Supposons d'abord que $M_1 = M(U)$, $M_2 = M(U[1])$ et $M_3 = M(\alpha)$. Regardons les morphismes explicites introduits dans la preuve de Proposition 3.5.9:

$$f : M_2 = M(U[1]) \rightarrow M_3 = M(\alpha), \quad g : M_3 = M(\alpha) \hookrightarrow M_2 = M(U[1])$$

$$\epsilon : M_3 = M(\alpha) \rightarrow M_3 = M(\alpha), \quad \eta : M_2 = M(U[1]) \rightarrow M_2 = M(U[1])$$

et notons

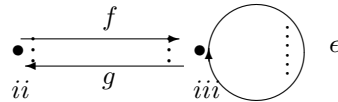
$$l : M_1 = M(U) \rightarrow M(\alpha)$$

qui est le morphisme explicite f' introduits dans la preuve de Proposition 3.5.8 et

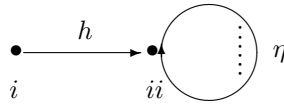
$$h : M_1 = M(U) \rightarrow M_2 = M(U[1])$$

qui est le morphisme irréductible de $M(U)$ à $M(U[1])$ et qui engendre $\underline{\text{Hom}}_A(M(U), M(U[1]))$.

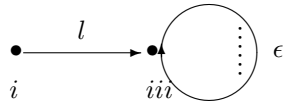
Proposition 3.5.9 montre que l'algèbre $\underline{\text{End}}_A(M(U[1]) \oplus M(\alpha))$ est II6



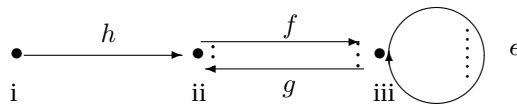
Proposition 3.5.3 montre que l'algèbre $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_2)$ est II4



et Proposition 3.5.8 montre que l'algèbre $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_3)$ est II4



On vérifie que $hf = l$ et $\eta = f\epsilon g$. cela montre que l'algèbre $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_2 \oplus M_3)$ est II12



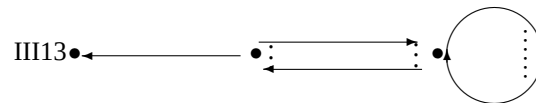
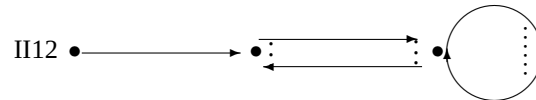
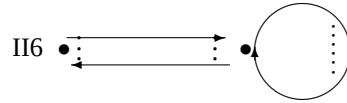
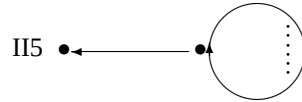
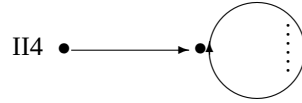
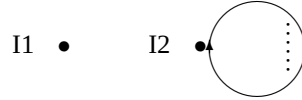
L'autre cas $M_1 = M(V)$, $M_2 = M(U[1])$ et $M_3 = M(\alpha)$ se fait similairement et on obtient que l'algèbre $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_2 \oplus M_3)$ est II13.

□

On arrive au théorème principal de cette setion qui résume ce que l'on a montré ci-dessus.

Théorème 3.5.11 Soit M un module sans auto-extensions non-triviales sur $D(2\mathcal{A})^s(0)$ avec $s \geq 2$. Alors

- (1) M a au plus trois facteurs indécomposables non-projectifs non-isomorphes.
- (2) $\underline{\text{End}}_A(M)$ est indécomposable.
- (3) $\underline{\text{End}}_A(M)$ est équivalente au sens de Morita à l'une des 7 algèbres suivantes:



Maintenant on montre Proposition 3.5.6. On décrit d'abord les cordes minimales.

Proposition 3.5.12 Soit $C = C_1 C_2 \cdots C_n$ une corde. Si la corde C est une corde minimale, alors

- (1) C_1 commence par l'une des flèches α , α^{-1} , β ou γ^{-1} et C_n termine par l'une des flèches α , α^{-1} , β^{-1} ou γ
- (2) Si $n \geq 2$, $|C_1|, |C_n| \leq 3s - 3$; si $n = 1$, $|C| \leq 3s - 4$.

Démonstration Si C_1 est directe et commence par γ , alors $|[1]C| < |C|$ (voir Définition 1.6.6); si C_1 est inverse et commence par β^{-1} , alors $|-1]C| < |C|$; si C_n est directe et termine par β , alors $|C[-1]| < |C|$; si C_n est inverse et termine par γ^{-1} , alors $|C[1]| < |C|$. Cela montre la nécessité de (1).

Supposons que $n \geq 2$. Si $|C_1| = 3s-1$, alors si C_1 est directe, $|[1]C| < |C|$ et si C_1 est inverse, $|-1]C| < |C|$. Si $|C_n| = 3s-1$, alors si C_n est directe, $|C[-1]| < |C|$ et si C_n est inverse, $|C[1]| < |C|$. Supposons que $|C_1| = 3s-2$. Alors si C_1 est directe, alors C_1 commence par α et $C_1 = (\alpha\beta\gamma)^{s-1}\alpha$; si C_1 est inverse, alors C_1 commence par α^{-1} et $C_1 = ((\alpha\beta\gamma)^{s-1}\alpha)^{-1}$. Car si C_1 était directe de première flèche β , alors $C_1 = (\beta\gamma\alpha)^{s-1}\beta$ et comme $t(\beta) = 1$, $n = 1$; si C_1 était inverse de première flèche γ^{-1} , alors $C_1 = ((\gamma\alpha\beta)^{s-1}\gamma)^{-1}$ et comme $s(\gamma) = 1$, $n = 1$. Or, si $C_1 = (\alpha\beta\gamma)^{s-1}\alpha$, $[1]C = \gamma C_1 C_2 \cdots C_n = \gamma(\alpha\beta\gamma)^{s-1}\alpha C_2 \cdots C_n$ et donc $|[2]C| < |C|$; si $C_1 = ((\alpha\beta\gamma)^{s-1}\alpha)^{-1}$, $[-1]C = \beta^{-1} C_1 C_2 \cdots C_n = \beta^{-1}((\alpha\beta\gamma)^{s-1}\alpha)^{-1} C_2 \cdots C_n$ et donc $|[-2]C| < |C|$.

Supposons que $n = 1$. On peut supposer que C soit directe. Si $|C| = 3s-2$, alors si C est directe, $[1](C[-1])$ n'existe pas et si C est inverse, $[-1](C[1])$ n'existe pas. Si $|C| = 3s-3$, alors $C = (\beta\gamma\alpha)^{s-1}$ ou $C = (\alpha\beta\gamma)^{s-1}$, mais on vérifie que $(\beta\gamma\alpha)^{s-1}, (\alpha\beta\gamma)^{s-1} \in \Omega Q(S_0)$.

□

Soit $C = C_1$ une corde minimale que l'on peut supposer directe. Alors d'après la proposition précédente, C est parmi les cordes suivante:

$$(\alpha\beta\gamma)^i, 1 \leq i \leq s-2; (\alpha\beta\gamma)^i\alpha, 0 \leq i \leq s-2; (\beta\gamma\alpha)^i, 1 \leq i \leq s-2; (\beta\gamma\alpha)^i\beta\gamma, 1 \leq i \leq s-2$$

Constatons que $\Omega Q(\alpha) = Q((\alpha\beta\gamma)^{s-2}\alpha)$, puisque $\Omega((\alpha\beta\gamma)^{s-2}\alpha) = [-2]\alpha^{-1}$. Cela implique que l'on n'a besoin de considérer que les cordes minimales suivantes

$$(\alpha\beta\gamma)^i, 1 \leq i \leq s-2, (\alpha\beta\gamma)^i\alpha, 1 \leq i \leq s-3, (\beta\gamma\alpha)^i, 1 \leq i \leq s-2, (\beta\gamma\alpha)^i\beta\gamma, 1 \leq i \leq s-2$$

Lemme 3.5.13 Soit $C = (\alpha\beta\gamma)^i$ avec $1 \leq i \leq s-2$. Alors pour tout $M \in Q(C)$, $\text{Ext}_A^1(M, M) \neq 0$

Démonstration Il suffit de considérer les modules $M(C[n])$ avec $n \in \mathbb{Z}$, puisque tout module dans $Q(C)$ est un syzygy d'un certain $M(C[n])$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Proposition 1.4.6 et Proposition 1.6.11 montre que

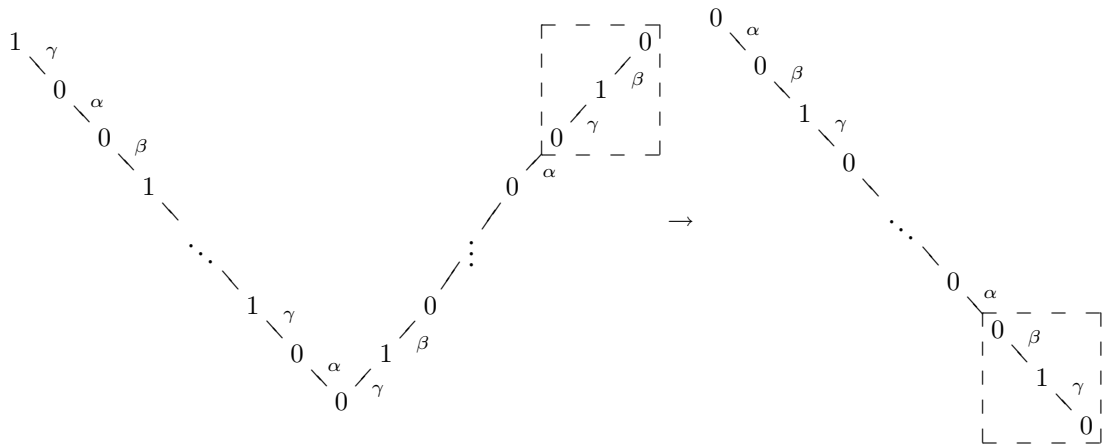
$$\Omega M(C[n]) \cong M(\Omega C[n]) \cong M((\Omega C)[n])$$

On va utiliser souvent implicitement ce fait dans la suite.

Si $n = 0$,

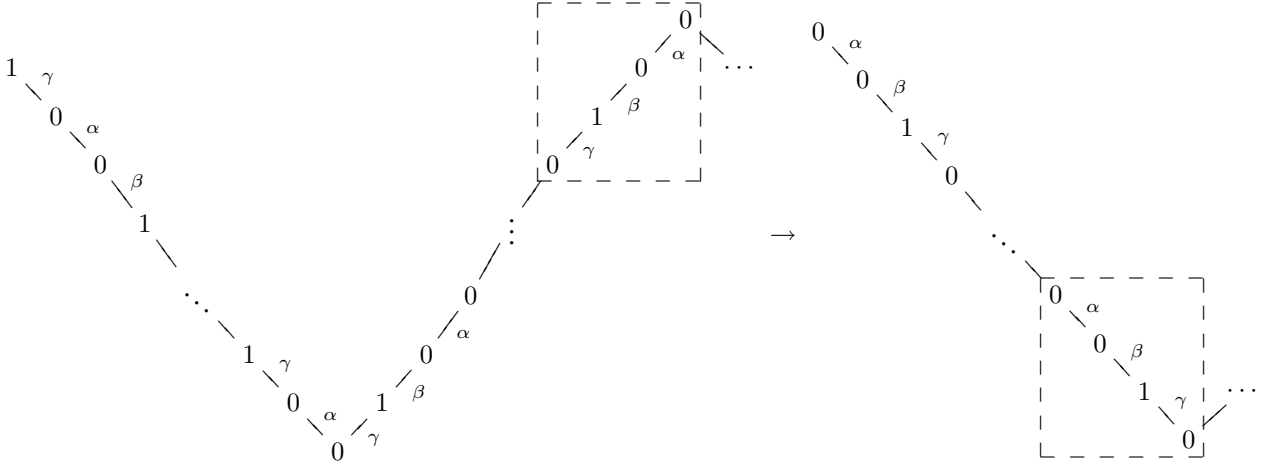
$$\Omega C = (\gamma\alpha\beta)^{s-1}\gamma\alpha((\beta\gamma\alpha)^{s-i-1}\beta\gamma)^{-1}$$

et le morphisme explicite de $\Omega M(C)$ à $M(C)$ de cœur $\beta\gamma$



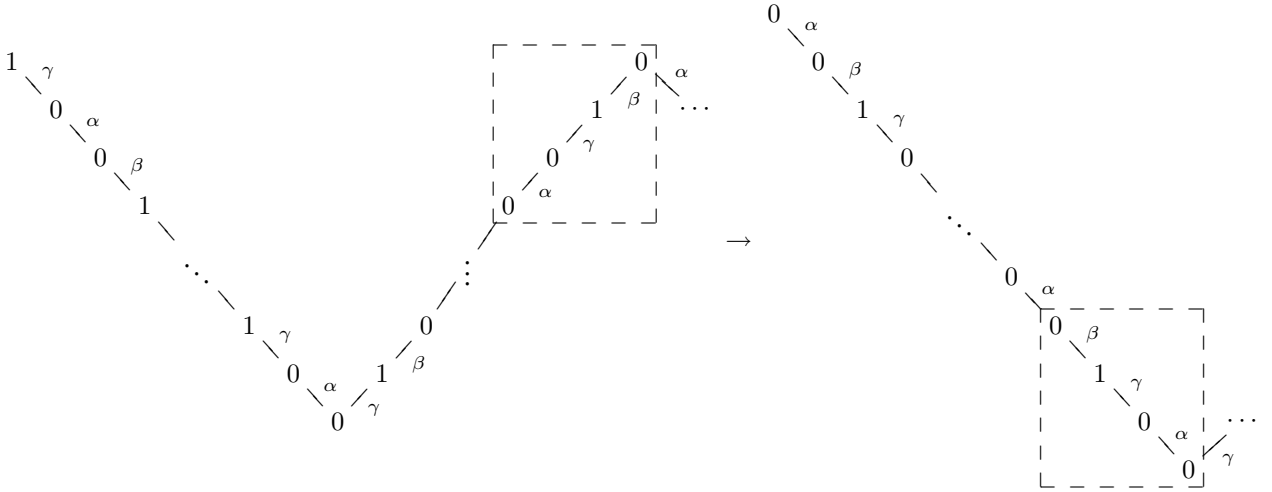
n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.2. En effet, suivant les notations de ce lemme 3.2.2, $E = \beta\gamma$, $C'_i = ((\alpha\beta\gamma)^{s-i-1})^{-1}$, $D'_j = (\alpha\beta\gamma)^{i-1}\alpha$ et $D'_j E C'_i{}^{-1} = (\alpha\beta\gamma)^{i-1}\alpha\beta\gamma(\alpha\beta\gamma)^{s-i-1} = (\alpha\beta\gamma)^{s-1}$ ne contient aucun chemin maximal.

Si $n > 0$, $\Omega C[n] = (\gamma\alpha\beta)^{s-1}\gamma\alpha((\alpha\beta\gamma)^{s-i})^{-1}\beta D$ avec D une corde et le morphisme explicite de $\Omega M(C[n])$ à $M(C[n])$ de cœur $\alpha\beta\gamma$



n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.2.

Si $n < 0$, $C[n] = (C[-1])[n+1] = (\alpha\beta\gamma)^i\alpha\gamma^{-1}E$ et $\Omega C[n] = (\gamma\alpha\beta)^{s-1}\gamma\alpha((\beta\gamma\alpha)^{s-i-1}\beta\gamma)^{-1}\alpha F$ avec E et F des cordes. Le morphisme explicite de $\Omega M(C[n])$ à $M(C[n])$ de cœur $\beta\gamma\alpha$



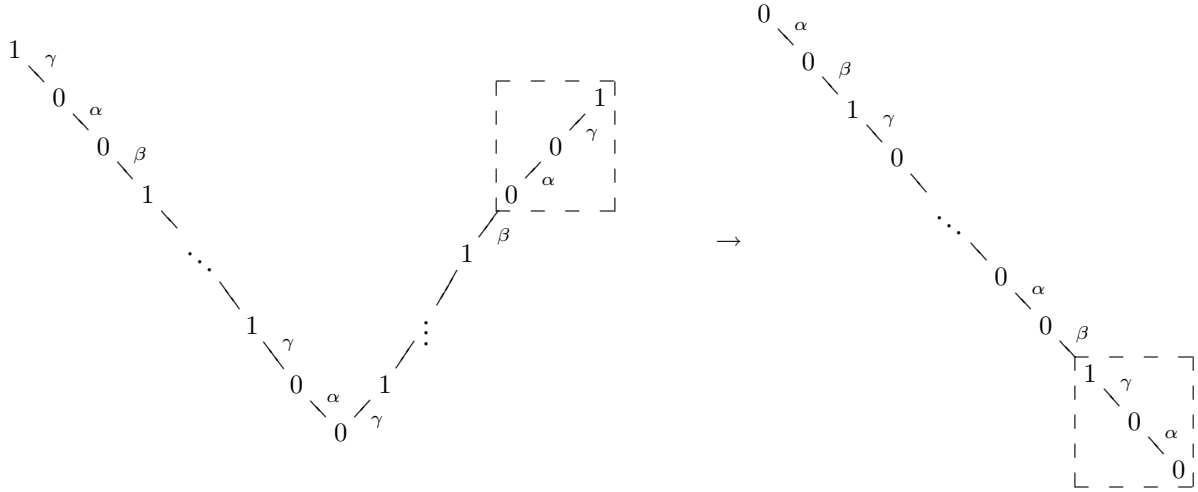
n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.2.

□

Lemme 3.5.14 Soit $C = (\alpha\beta\gamma)^i\alpha$ avec $1 \leq i \leq s-3$. Alors pour tout $M \in Q(C)$, $\text{Ext}_A^1(M, M) \neq 0$

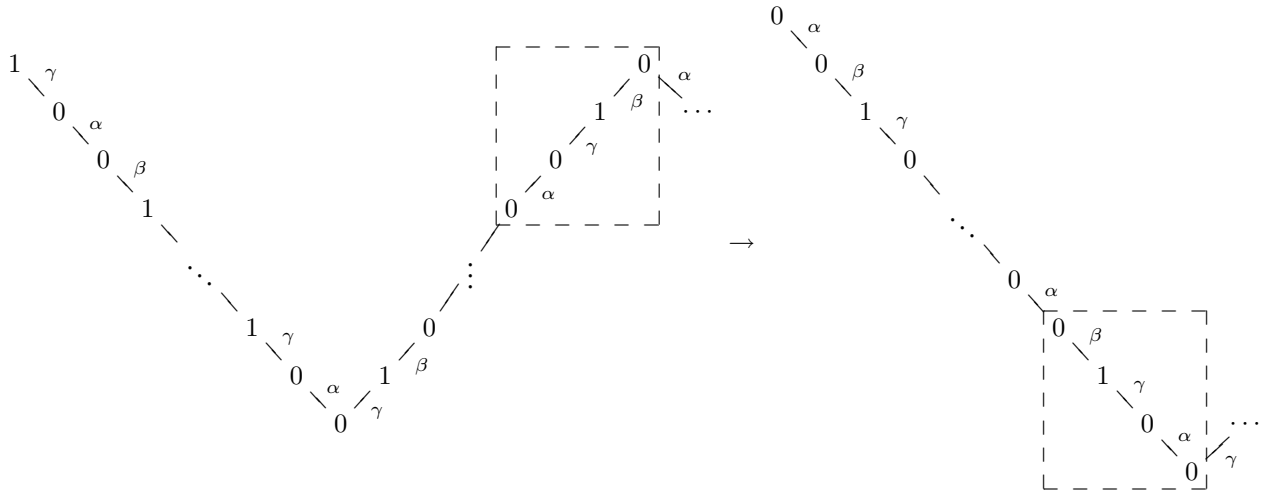
Démonstration Il suffit de considérer les modules $M(C[n])$ avec $n \in \mathbb{Z}$, puisque tout module dans $Q(C)$ est un syzygy d'un certain $M(C[n])$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

Si $n = 0$, $\Omega C = (\gamma\alpha\beta)^{s-1}\gamma\alpha((\gamma\alpha\beta))^{s-i-1}\gamma)^{-1}$ et le morphisme explicite de $\Omega M(C)$ à $M(C)$ de cœur $\gamma\alpha$



n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.2. En effet, suivant les notations de ce lemme 3.2.2, $E = \gamma\alpha$, $C'_i = ((\beta\gamma\alpha)^{s-i-2}\beta\gamma)^{-1}$, $D'_j = (\alpha\beta\gamma)^{i-1}\alpha\beta$ et $D'_j E C'^{-1}_i = (\alpha\beta\gamma)^{i-1}\alpha\beta\gamma\alpha(\beta\gamma\alpha)^{s-i-2}\beta\gamma = (\alpha\beta\gamma)^{s-1}$ ne contient aucun chemin maximal.

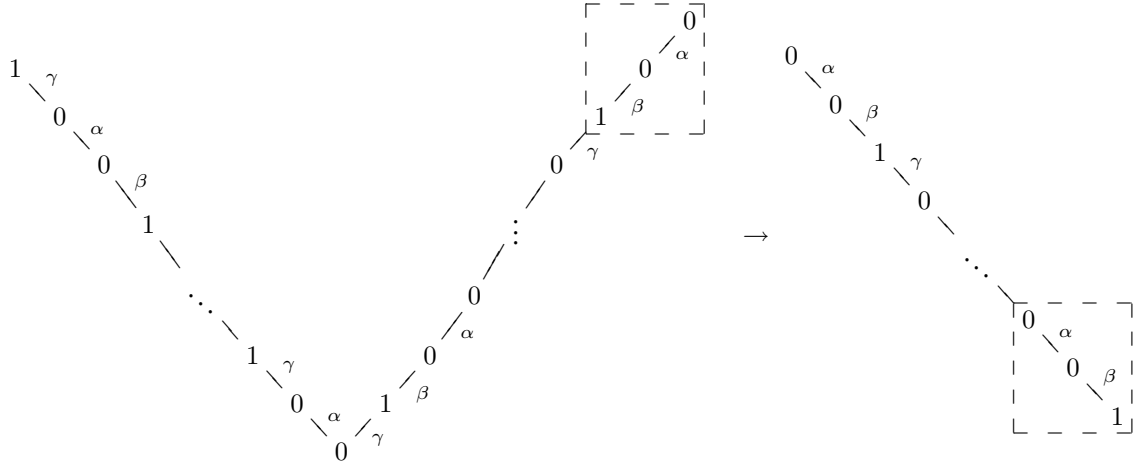
Si $n > 0$, $C[n] = (\alpha\beta\gamma)^i\alpha\gamma^{-1}D$ et $\Omega C[n] = (\gamma\alpha\beta)^{s-1}\gamma\alpha(\beta\gamma\alpha)^{s-i-1}\beta\gamma)^{-1}\alpha E$ avec D et E des cordes. Comme $s - i - 1 \geq 2$, le morphisme explicite de $\Omega M(C[n])$ à $M(C[n])$ de cœur $\beta\gamma\alpha$



n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.2.

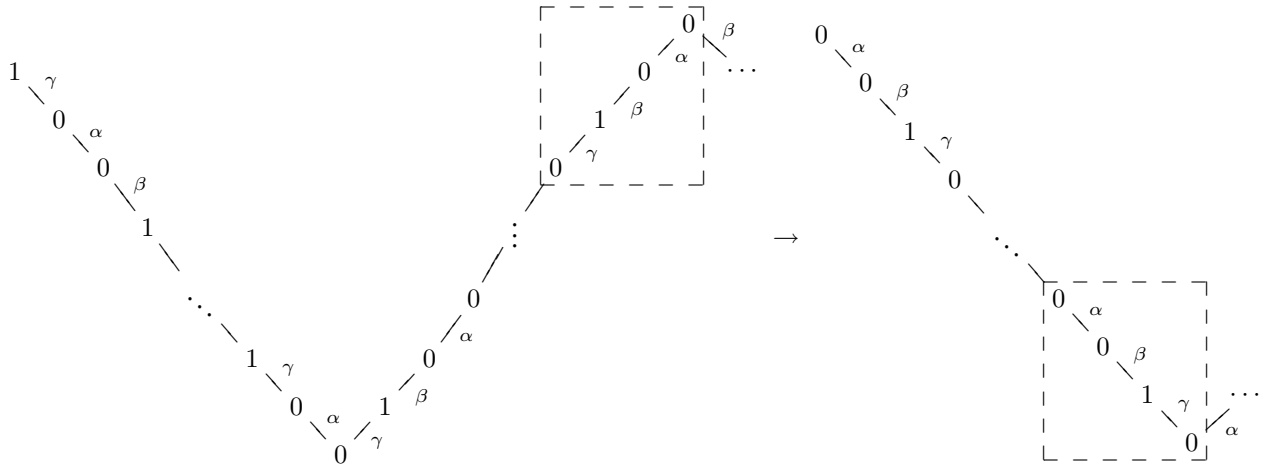
Si $n = -1$, $C[-1] = (\alpha\beta\gamma)^i\alpha\beta$ et $\Omega C[-1] = (\gamma\alpha\beta)^{s-1}\gamma\alpha((\alpha\beta\gamma)^{s-i-1})^{-1}$. Le morphisme explicite de

$\Omega M(C[-1])$ à $M(C[-1])$ de cœur $\alpha\beta$



n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.2.

Si $n < -1$, $C[n] = (C[-1])[n+1] = (\alpha\beta\gamma)^{i+1}\alpha^{-1}F$ et $\Omega C[n] = (\gamma\alpha\beta)^{s-1}\gamma\alpha((\alpha\beta\gamma)^{s-i-1})^{-1}\beta G$ avec F et G des cordes. Comme $s-i-1 \geq 2$, le morphisme explicite de $\Omega M(C[n])$ à $M(C[n])$ de cœur $\beta\gamma\alpha$



n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.2.

□

Lemme 3.5.15 Si $C = (\beta\gamma\alpha)^i\beta\gamma$ avec $0 \leq i \leq s-2$, alors pour tout $M \in Q(C)$, $\text{Ext}_A^1(M, M) \neq 0$.

Démonstration On considère les cordes $C[n]$ avec $n \in \mathbb{Z}$, puisque tout module dans $Q(C)$ est un syzygy d'un certain $M(C[n])$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

Si $n \geq 0$, $C[n] = (\beta\gamma\alpha)^i\beta\gamma D$ où $|D| = 0$ ou D commence par α^{-1} et

$$\Omega C[n] = (\beta\gamma\alpha)^{s-1}\beta\gamma\alpha^{-1}E = (\beta\gamma\alpha)^i\beta\gamma\alpha(\beta\gamma\alpha)^{s-i-2}\beta\gamma\alpha^{-1}E$$

avec E une corde. Alors le morphisme explicite

$$\Omega M(C[n]) \twoheadrightarrow M((\beta\gamma\alpha)^i\beta\gamma) \hookrightarrow M(C[n])$$

n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.1.

Si $n < 0$, $C[n] = (\beta\gamma\alpha)^{i+1}\gamma^{-1}F$ et $\Omega C[n] = (\beta\gamma\alpha)^{s-1}\beta\gamma\alpha^{-1}G = (\beta\gamma\alpha)^{i+1}(\beta\gamma\alpha)^{s-i-2}\beta\gamma\alpha^{-1}G$ avec F et G des cordes. Alors le morphisme explicite

$$\Omega M(C[n]) \rightarrow M((\beta\gamma\alpha)^{i+1}) \hookrightarrow M(C[n])$$

n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.1.

□

Lemme 3.5.16 Si $C = (\beta\gamma\alpha)^i$ avec $1 \leq i \leq s-2$, alors pour tout $M \in Q(C)$, $\text{Ext}_A^1(M, M) \neq 0$.

Démonstration On considère les cordes $C[n]$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

Si $n \geq 0$, $C[n] = (\beta\gamma\alpha)^i D$ où $|D| = 0$ ou D commence par γ^{-1} et

$$\Omega C[n] = (\beta\gamma\alpha)^{s-1}\beta\gamma\alpha^{-1}E = (\beta\gamma\alpha)^i(\beta\gamma\alpha)^{s-i-1}\beta\gamma\alpha^{-1}E$$

avec E une corde. Alors le morphisme explicite

$$\Omega M(C[n]) \rightarrow M((\beta\gamma\alpha)^i) \hookrightarrow M(C[n])$$

n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.1.

Si $n < 0$, $C[n] = (\beta\gamma\alpha)^i \beta F$ où $|F| = 0$ ou F commence par $\gamma\alpha^{-1}$ et

$$\Omega C[n] = (\beta\gamma\alpha)^{s-1}\beta\gamma G = (\beta\gamma\alpha)^i\beta\gamma\alpha(\beta\gamma\alpha)^{s-i-2}\beta\gamma G$$

avec G une corde. Alors si $n = -1$, le morphisme explicite

$$\Omega M(C[n]) \rightarrow M((\beta\gamma\alpha)^i\beta) \hookrightarrow M(C[n])$$

n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.1 et si $n < -1$, le morphisme explicite

$$\Omega M(C[n]) \rightarrow M((\beta\gamma\alpha)^i\beta\gamma) \hookrightarrow M(C[n])$$

n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.1.

□

Soit $C = C_1 C_2 \cdots C_n$ une corde minimale avec $n \geq 2$. Supposons d'abord que C_1 soit directe. Alors C_1 est parmi les cordes suivantes:

$$(\alpha\beta\gamma)^i, 1 \leq i \leq s-2; (\alpha\beta\gamma)^i\alpha, 0 \leq i \leq s-2; (\beta\gamma\alpha)^i\mathcal{L}^{-1}, 1 \leq i \leq s-2; (\beta\gamma\alpha)^i\beta\gamma\mathcal{L}^{-1}, 0 \leq i \leq s-2$$

Comme dans une composante $Q(C)$, on n'a besoin de considérer les cordes $C[n]$ dont les premiers segments sont C_1 . Dans la suite, on va traiter toutes les cordes non périodiques qui ne sont pas dans $Q(S_0) \cup \Omega Q(S_0) \cup Q(\alpha) \cup \Omega Q(\alpha)$ et dont les premiers segments sont parmi les cordes ci-dessus, i.e. les cordes non périodiques $C = C_1 \cdots C_n$ telles que C_1 soit parmi les cordes

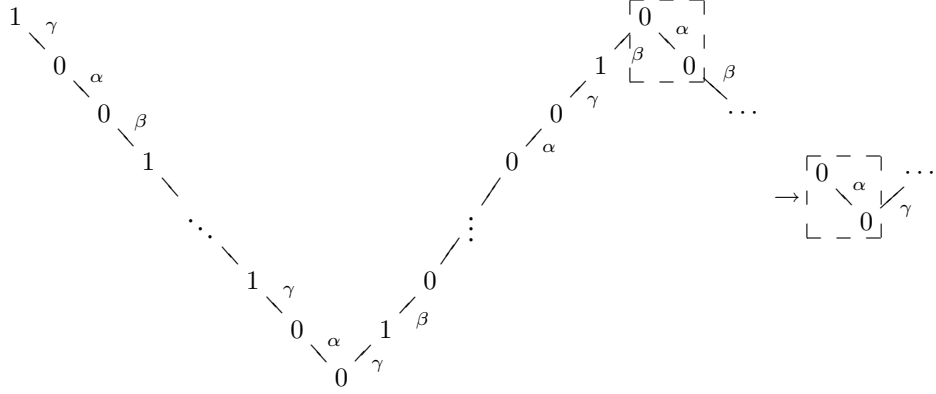
$$(\alpha\beta\gamma)^i, 1 \leq i \leq s-1; (\alpha\beta\gamma)^i\alpha, 0 \leq i \leq s-2; (\beta\gamma\alpha)^i\mathcal{L}^{-1}, 1 \leq i \leq s-1; (\beta\gamma\alpha)^i\beta\gamma\mathcal{L}^{-1}, 0 \leq i \leq s-2$$

D'après Proposition 1.4.6, $\Omega C = D = D_0 D_1 \cdots D_n D_{n+1}$.

Lemme 3.5.17 Soit $C = C_1 \cdots C_n$ une corde non périodique qui n'est pas dans $Q(S_0) \cup \Omega Q(S_0) \cup Q(\alpha) \cup \Omega Q(\alpha)$. Si $C_1 = \alpha$, alors $\text{Ext}_A^1(M(C), M(C)) \neq 0$.

Démonstration Supposons que $\text{Ext}_A^1(M(C), M(C)) = 0$. Notons $\Omega C = D = D_0 D_1 \cdots D_{n+1}$. Alors $D_0 = (\gamma\alpha\beta)^{s-1}\gamma\alpha$ et $D_1 = ((\beta\gamma\alpha)^{s-1}\beta\gamma)^{-1}$.

Si $|D_2| > 1$, i.e. $D_2 = \alpha\beta D'_2$ avec D'_2 une corde, alors le morphisme explicite de cœur α de $M(D)$ à $M(C)$



n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.1. On obtient donc que $D_2 = \alpha$ et $C_2 = ((\beta\gamma\alpha)^{s-1}\beta\gamma)^{-1}$. Si $D_3 \neq ((\beta\gamma\alpha)^{s-1}\beta\gamma)^{-1}$, alors $C_1 C_2 = \alpha((\beta\gamma\alpha)^{s-1}\beta\gamma)^{-1} = D_2 D_3 C'_2$ avec $|C'_2| > 0$. Le morphisme explicite

$$M(D) = M(D_0 D_1 D_2 D_3 \cdots D_{n+1}) \twoheadrightarrow M(D_2 D_3) \hookrightarrow M(D_2 D_3 C'_2 C_3 \cdots C_n) = M(C)$$

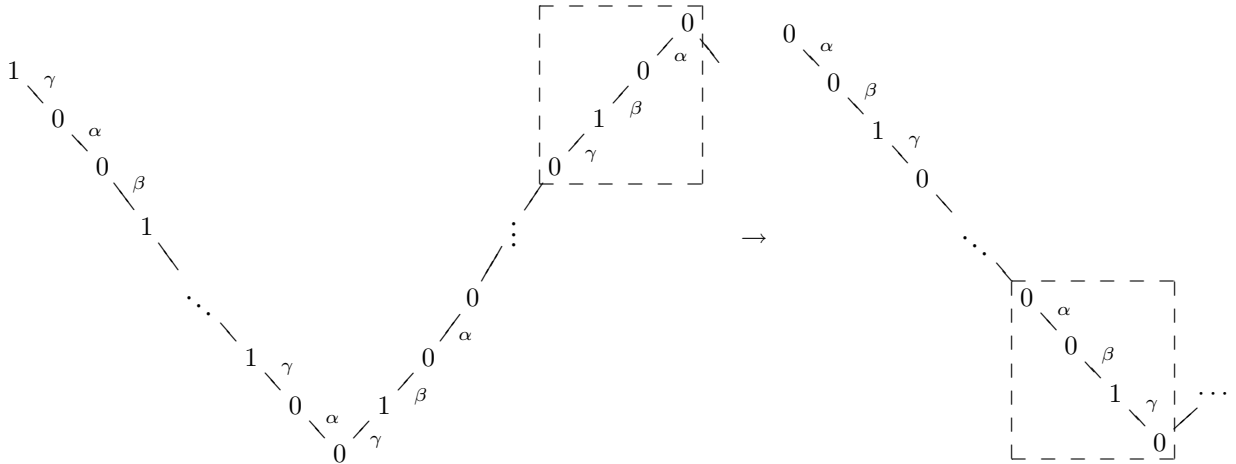
n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.1. On en déduit que $D_3 = ((\beta\gamma\alpha)^{s-1}\beta\gamma)^{-1}$ et donc que $C_3 = \alpha$.

On montre par récurrence que pour que $\text{Ext}_A^1(M(C), M(C)) = 0$, $C_{2i-1} = \alpha$ et $C_{2i} = ((\beta\gamma\alpha)^{s-1}\beta\gamma)^{-1}$ pour tout $i \geq 1$. Cela signifie que C serait une corde infinie, ce qui est absurde.

□

Lemme 3.5.18 Soit $C = C_1 \cdots C_n$ une corde non périodique qui n'est pas dans $Q(S_0) \cup \Omega Q(S_0) \cup Q(\alpha) \cup \Omega Q(\alpha)$. Si $C_1 = (\alpha\beta\gamma)^i$ avec $1 \leq i \leq s-2$, alors $\text{Ext}_A^1(M(C), M(C)) \neq 0$.

Démonstration Comme $\Omega C = D = D_0 D_1 \cdots D_{n+1}$ où $D_0 = (\gamma\alpha\beta)^{s-1}\gamma\alpha$ et où $D_1 = ((\alpha\beta\gamma)^{s-i})^{-1}$, le morphisme explicite de cœur $\alpha\beta\gamma$ de $M(D)$ à $M(C)$



n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.2.

□

Lemme 3.5.19 Soit $C = C_1 \cdots C_n$ une corde non périodique qui n'est pas dans $Q(S_0) \cup \Omega Q(S_0) \cup Q(\alpha) \cup \Omega Q(\alpha)$. Si $C_1 = (\alpha\beta\gamma)^{s-1}$, alors $\text{Ext}_A^1(M(C), M(C)) \neq 0$.

Démonstration Constatons que $\Omega C = D = D_0 D_1 \cdots D_{n+1}$ avec $D_0 = (\gamma\alpha\beta)^{s-1}\gamma\alpha$ et $D_1 = (\alpha\beta\gamma)^{-1}$.

Si $C_2 = \alpha^{-1}$, alors $D_2 = (\beta\gamma\alpha)^{s-1}\beta\gamma$. Supposons que $\text{Ext}_A^1(M(C), M(C)) = 0$. Si $C_3 \neq (\beta\gamma\alpha)^{s-1}\beta\gamma$ ou ($C_3 = (\beta\gamma\alpha)^{s-1}\beta\gamma$ et $n = 3$), alors

$$D_1 D_2 = \gamma^{-1} \beta^{-1} \alpha^{-1} (\beta\gamma\alpha)^{s-1} \beta\gamma = \gamma^{-1} \beta^{-1} C_2 C_3 D'_2$$

où D'_2 est de longueur nulle si $n = 3$ et est directe si $n > 3$. Le morphisme explicite

$$M(D) = M(\gamma^{-1} \beta^{-1} C_2 C_3 D'_2 D_3 \cdots D_{n+1}) \twoheadrightarrow M(C_2 C_3) \hookrightarrow M(C_1 C_2 \cdots C_n) = M(C)$$

n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.1. On obtient que $n > 3$ et $C_3 = (\beta\gamma\alpha)^{s-1}\beta\gamma$. Donc $D_3 = \alpha^{-1}$. Si $C_4 \neq \alpha^{-1}$, alors

$$C_2 C_3 C_4 = \alpha^{-1} (\beta\gamma\alpha)^{s-1} \beta\gamma \alpha^{-1} C'_4$$

avec $|C'_4| > 0$ et

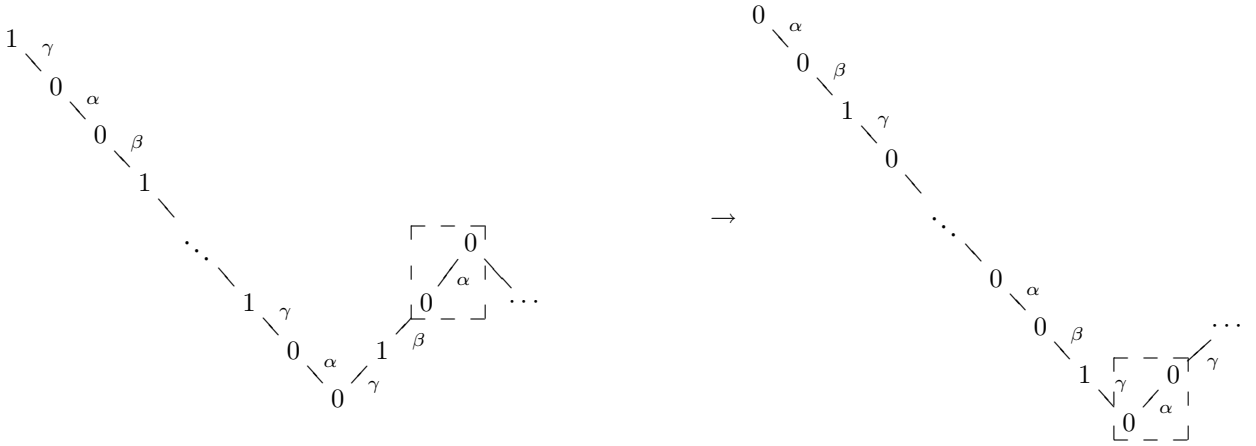
$$D_1 D_2 D_3 = \gamma^{-1} \beta^{-1} \alpha^{-1} (\beta\gamma\alpha)^{s-1} \beta\gamma \alpha^{-1}$$

Le morphisme explicite

$$M(D) \twoheadrightarrow M(\alpha^{-1} D_2 D_3) \cong M(C_2 C_3 \alpha^{-1}) \hookrightarrow M(C)$$

n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.1. On obtient que $C_4 = \alpha^{-1}$. On montre par récurrence que pour que $\text{Ext}_A^1(M(C), M(C)) = 0$, $C_{2i} = \alpha^{-1}$ et $C_{2i-1} = (\beta\gamma\alpha)^{s-1}\beta\gamma$ pour tout $i \geq 1$. Cela signifie que C serait une corde infinie, ce qui est absurde.

Si $C_2 \neq \alpha^{-1}$, alors pour que le morphisme explicite de $M(D)$ à $M(C)$



ne soit pas projectif, il faut que $|C_2| \geq 3s-2$, d'après Lemme 3.2.2. Si $|C_2| = 3s-1$, alors $C_2 = ((\gamma\alpha\beta)^{s-1}\gamma\alpha)^{-1}$ et $n = 2$. Alors

$$C = (\alpha\beta\gamma)^i ((\gamma\alpha\beta)^{s-1}\gamma\alpha)^{-1} = (\alpha\beta\gamma)^{i-1} \alpha\beta\gamma ((\gamma\alpha\beta)^{s-1}\gamma\alpha)^{-1}$$

et

$$D = (\gamma\alpha\beta)^{s-1} \gamma\alpha \gamma^{-1} \beta^{-1} \alpha^{-1} \beta$$

Le morphisme explicite

$$M(D) \twoheadrightarrow M((\gamma\alpha\beta)^{s-1} \gamma\alpha \gamma^{-1} \beta^{-1} \alpha^{-1}) \cong M(\alpha\beta\gamma((\gamma\alpha\beta)^{s-1}\gamma\alpha)^{-1}) \hookrightarrow M(C)$$

n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.1. Si $|C_2| = 3s - 2$, i.e. $C_2 = ((\alpha\beta\gamma)^{s-1}\alpha)^{-1}$, alors $D_2 = \beta\gamma$. Si $|D_3| < 3s - 2$, alors $C_2 = D_3C'_2$ avec $|C'_2| > 0$ et donc

$$C_1C_2 = (\alpha\beta\gamma)^i((\alpha\beta\gamma)^{s-1}\alpha)^{-1} = (\alpha\beta\gamma)^i\alpha D_2D_3C'_2$$

Le morphisme explicite

$$M(D) = M(D_0D_1D_2D_3 \cdots D_{n+1}) \twoheadrightarrow M(D_2D_3) \hookrightarrow M((\alpha\beta\gamma)^{i-1}\alpha D_2D_3C'_2C_3 \cdots C_n) = M(C)$$

n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.1. Si $|D_3| = 3s - 1$, i.e. $D_3 = ((\gamma\alpha\beta)^{s-1}\gamma\alpha)^{-1}$, alors $|C_3| = 0$ et $n = 2$.

$$D = D_0D_1D_2D_3 = (\gamma\alpha\beta)^{s-1}\gamma\alpha(\alpha\beta\gamma)^{-1}\beta\gamma((\gamma\alpha\beta)^{s-1}\gamma\alpha)^{-1} = [-2]\alpha^{-1}[-2] \in Q(\alpha)$$

Si $|D_3| = 3s - 2$ $D_3^{-1} = (\alpha\beta\gamma)^{s-1}\alpha = C_1\alpha$. Le morphisme explicite

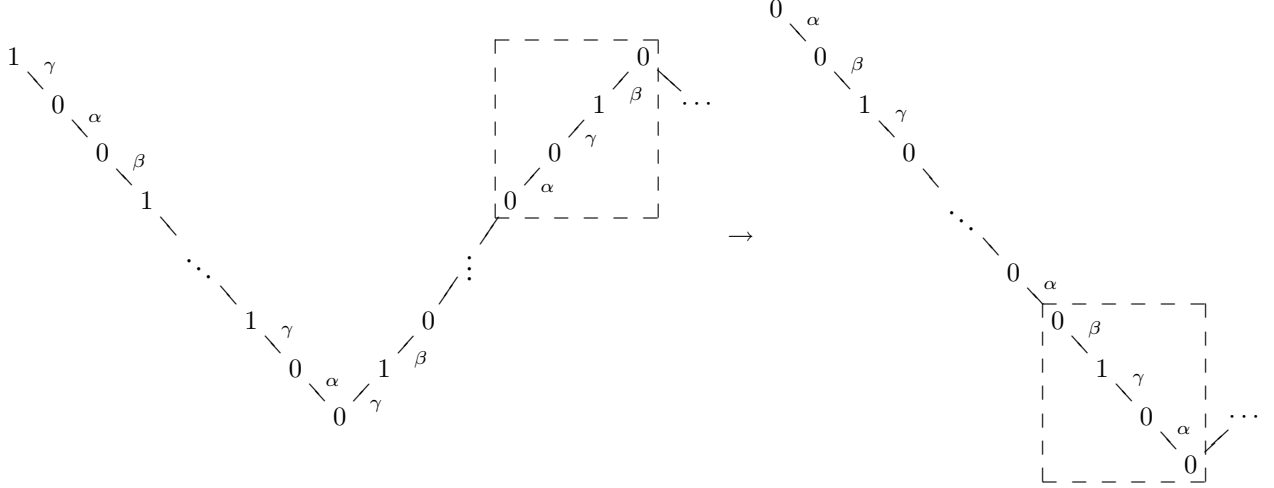
$$M(D) = M(D_0D_1D_2\alpha^{-1}C_1^{-1}D_4 \cdots D_{n+1}) \twoheadrightarrow M(C_1) \hookrightarrow M(C_1 \cdots C_n) = M(C)$$

n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.1.

□

Lemme 3.5.20 Soit $C = C_1 \cdots C_n$ une corde non périodique qui n'est pas dans $Q(S_0) \cup \Omega Q(S_0) \cup Q(\alpha) \cup \Omega Q(\alpha)$. Si $C_1 = (\alpha\beta\gamma)^i\alpha$ avec $1 \leq i \leq s - 2$, alors $\text{Ext}_A^1(M(C), M(C)) \neq 0$.

Démonstration Comme $\Omega C = D = D_0D_1 \cdots D_{n+1}$ avec $D_0 = (\gamma\alpha\beta)^{s-1}\gamma\alpha$ et $D_1 = ((\beta\gamma\alpha)^{s-i-1}\beta\gamma)^{-1}$. Le morphisme explicite de cœur $\beta\gamma\alpha$ de $M(D)$ à $M(C)$



n'est pas projectif, d'après Lemme 3.2.2.

□

Lemme 3.5.21 Soit $C = C_1 \cdots C_n$ une corde non périodique qui n'est pas dans $Q(S_0) \cup \Omega Q(S_0) \cup Q(\alpha) \cup \Omega Q(\alpha)$. Si C_1 est directe et commence par β telle que $|C_1| \leq 3s - 3$, alors $\text{Ext}_A^1(M(C), M(C)) \neq 0$.

Démonstration Comme $D_0 = (\beta\gamma\alpha)^{s-1}\beta\gamma = C_1D'_0$ avec $|D'_0| > 0$, le morphisme explicite

$$M(D) = M(C_1D'_0D_2 \cdots D_{n+1}) \twoheadrightarrow M(C_1) \hookrightarrow M(C_1 \cdots C_n) = M(C)$$

n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.1.

□

Considérons maintenant les cordes $C = C_1 \cdots C_n$ avec $n \geq 2$ non périodique qui ne sont pas dans $Q(S_0) \cup \Omega Q(S_0) \cup Q(\alpha) \cup \Omega Q(\alpha)$ telle que C_1 soit parmi les cordes suivantes:

$$(\alpha\beta\gamma)^{-i}, 1 \leq i \leq s-1; ((\alpha\beta\gamma)^i\alpha)^{-1}, 0 \leq i \leq s-2; (\beta\gamma\alpha)^{-i}, 1 \leq i \leq s-1; ((\beta\gamma\alpha)^i\beta\gamma)^{-1}, 1 \leq i \leq s-2$$

Lemme 3.5.22 Si $C_1 = \alpha^{-1}$, alors $\text{Ext}_A^1(M(C), M(C)) \neq 0$.

Démonstration Supposons que $\text{Ext}_A^1(M(C), M(C)) = 0$. $\Omega(C) = D_0 \cdots D_{n+1}$ avec $D_1 = (\gamma\alpha\beta)^{s-1}\gamma$. Ecrivons $C_2 = \beta E$ pour une corde E .

Si $C_2 \neq (\beta\gamma\alpha)^{s-1}\beta\gamma$, alors $D_1 = ED'_1$ avec $|D'_1| > 0$. Le morphisme explicite

$$M(D) = M(EFD_2 \cdots D_{n+1}) \twoheadrightarrow M(E) \hookrightarrow M(C_1\beta EC_3 \cdots C_n) = M(C)$$

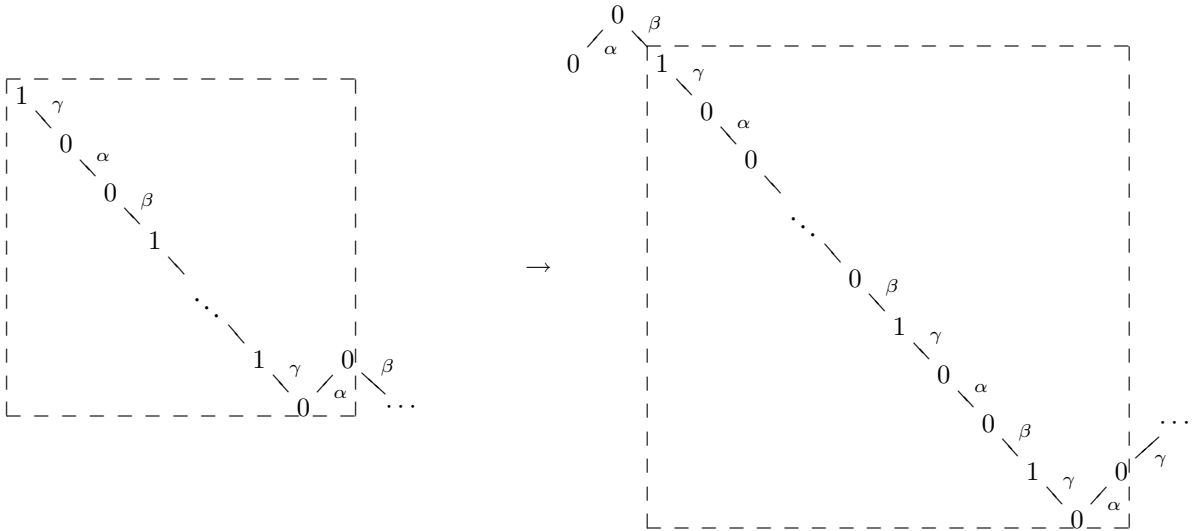
n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.1. On a montré donc que $C_2 = (\beta\gamma\alpha)^{s-1}\beta\gamma$. Si $n = 2$, alors

$$C = C_1C_2 = \alpha^{-1}(\beta\gamma\alpha)^{s-1}\beta\gamma = 1_{(0,1)}[1] \in Q(S_0)$$

et on a donc que $n > 2$. Si $C_3 \neq \alpha$, alors $C_3 = \alpha C'_3$ avec $|C'_3| > 0$.

$$C_2C_3 = (\beta\gamma\alpha)^{s-1}\beta\gamma\alpha C'_3 = \beta(\gamma\alpha\beta)^{s-1}\gamma\alpha^{-1}C'_3 = \beta D_1 D_2 C'_3$$

Le morphisme explicite de cœur $D_1 D_2$ de $M(D)$ à $M(C)$

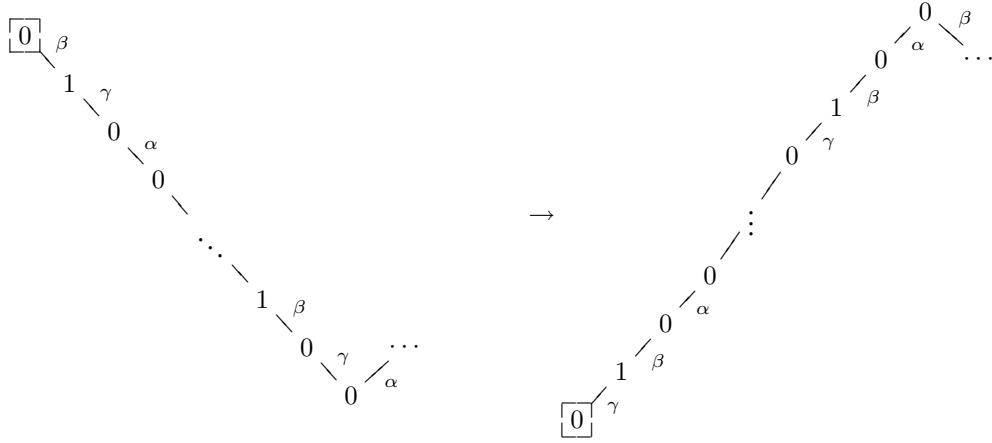


n'est pas projectif, d'après Lemme 3.2.1. On obtient donc que $C_3 = \alpha^{-1}$. On montre par récurrence que $C_{2i-1} = \alpha^{-1}$ et $C_{2i} = (\beta\gamma\alpha)^{s-1}\beta\gamma$ pour $i \geq 1$. Cela signifie que C serait de longueur infinie, ce qui est absurde.

□

Lemme 3.5.23 Si $C_1 = (\alpha\beta\gamma)^{-i}$ avec $1 \leq i \leq s-1$, alors $\text{Ext}_A^1(M(C), M(C)) \neq 0$.

Démonstration Alors $D_1 = (\beta\gamma\alpha)^{s-i-1}\beta\gamma$ et le morphisme explicite de $M(D)$ à $M(C)$

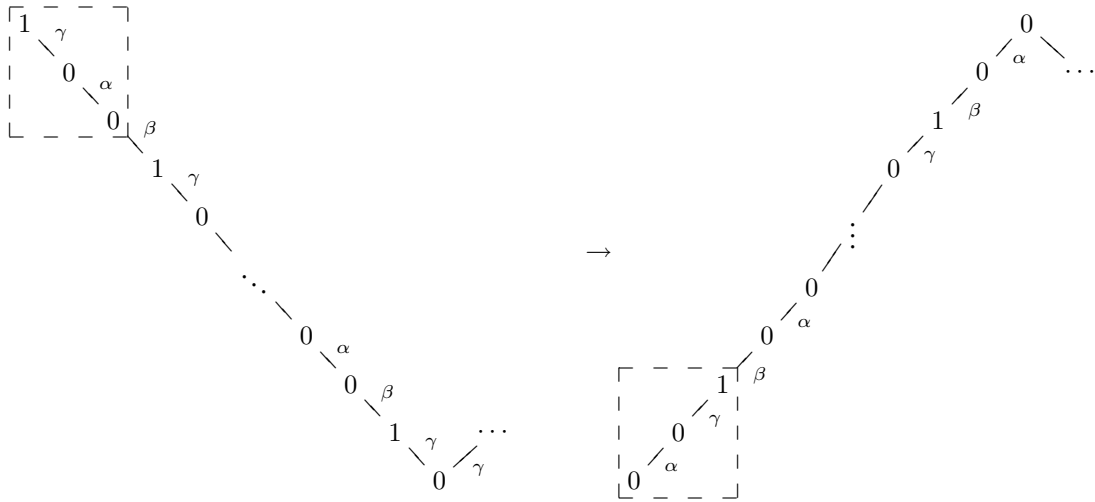


n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.3.

□

Lemme 3.5.24 Si $C_1 = ((\alpha\beta\gamma)^i\alpha)^{-1}$ avec $1 \leq i \leq s-2$, alors $\text{Ext}_A^1(M(C), M(C)) \neq 0$.

Démonstration $C_1 = ((\alpha\beta\gamma)^i\alpha)^{-1} = \alpha^{-1}\gamma^{-1}((\alpha\beta\gamma)^{i-1}\alpha\beta)^{-1}$ et $D_1 = \gamma\alpha\beta\gamma(\alpha\beta\gamma)^{s-i-2}$. Le morphisme explicite de cœur $\gamma\alpha$ de $M(D)$ à $M(C)$

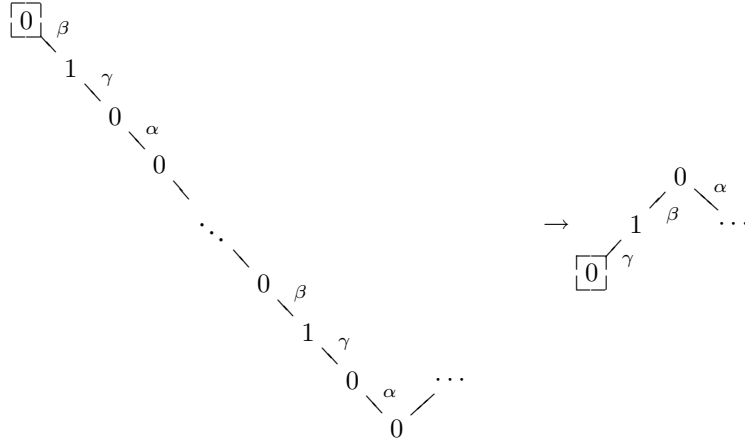


n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.2.

□

Lemme 3.5.25 Si $C_1 = \beta\gamma$, alors $\text{Ext}_A^1(M(C), M(C)) \neq 0$.

Démonstration $D_1 = (\beta\gamma\alpha)^{s-1}$ et le morphisme explicite de cœur S_0 de $M(D)$ à $M(C)$



n'est pas projectif, d'après Lemme 3.2.3.

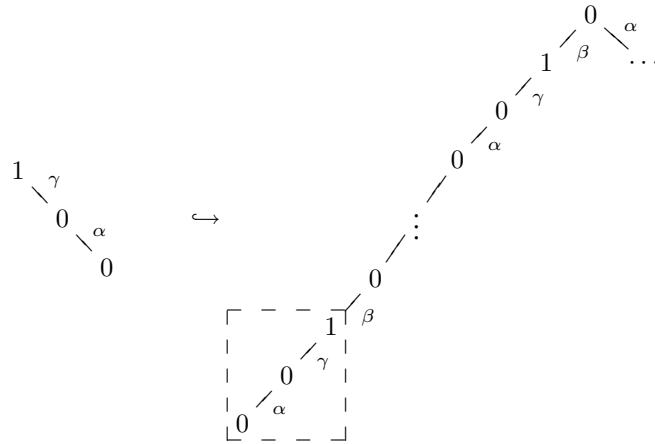
□

Lemme 3.5.26 Si $C_1 = (\beta\gamma\alpha)^{1-s}$, alors $\text{Ext}_A^1(M(C), M(C)) \neq 0$.

Démonstration Si $n = 2$ et $C_2 = (\alpha\beta\gamma)^{s-1}\alpha$, alors $C = C_1C_2 = (\beta\gamma\alpha)^{1-s}(\alpha\beta\gamma)^{s-1}\alpha$ et

$$\Omega C = D = \gamma\alpha\gamma^{-1} = [1]\alpha[1] \in Q(\alpha)$$

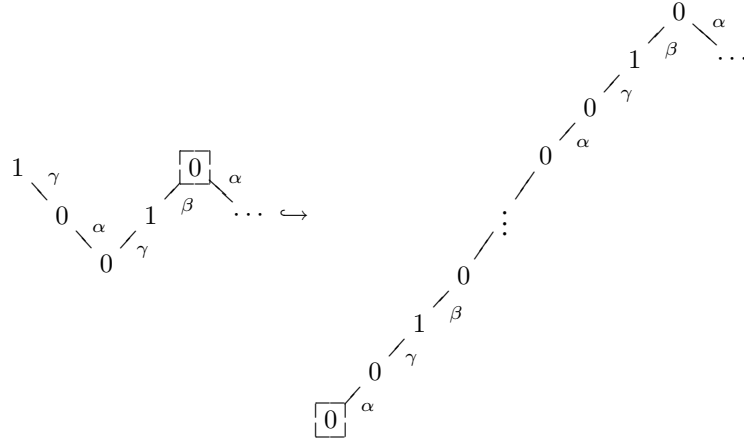
Si $C_2 = (\alpha\beta\gamma)^{s-1}\alpha\beta$, alors $n = 2$ et $\Omega C = \gamma\alpha$ et le morphisme explicite de cœur $\gamma\alpha$ de $M(D)$ à $M(C)$



n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.1.

Supposons que $|C_2| < 3s - 1$ et que $n > 2$. On peut écrire $D_2 = \gamma^{-1}\beta^{-1}E$ avec E une corde. Si $|E| > 0$, $C_1 = (\beta\gamma\alpha)^{1-s} = EC'_1$ avec $|C'_1| > 0$. Le morphisme explicite $M(D) = M(\gamma\alpha\gamma^{-1}\beta^{-1}ED_3 \cdots D_{n+1}) \twoheadrightarrow M(E) \hookrightarrow M(EC'_1C_2 \cdots C_n)$ n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.2. Si $|E| = 0$, alors le morphisme

explicite de cœur S_0 de $M(D)$ à $M(C)$

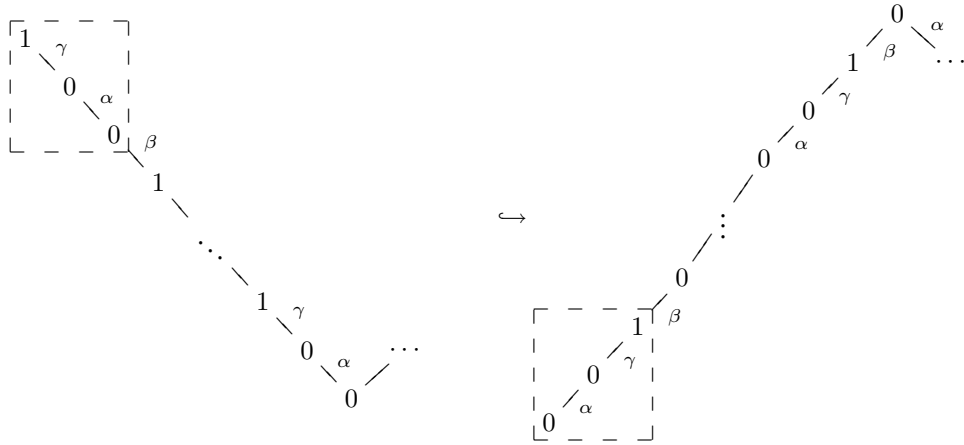


n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.2 et Lemme 3.2.3.

□

Lemme 3.5.27 Si $C_1 = (\beta\gamma\alpha)^{-i}$ avec $1 \leq i \leq s - 2$, alors $\text{Ext}_A^1(M(C), M(C)) \neq 0$.

Démonstration $D_1 = (\gamma\alpha\beta)^{s-i-1}\gamma\alpha$ et le morphisme explicite de $M(D)$ à $M(C)$ de cœur $\gamma\alpha$

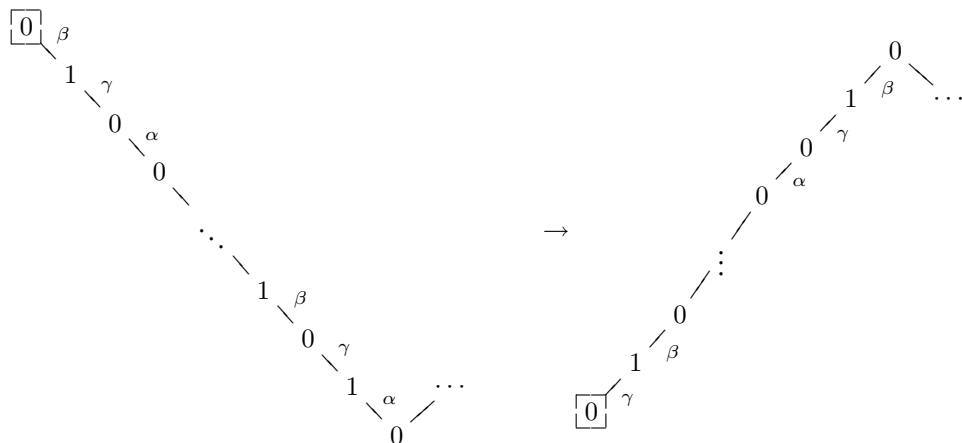


n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.2.

□

Lemme 3.5.28 Si $C_1 = (\beta\gamma\alpha)^i\beta\gamma$ avec $1 \leq i \leq s - 2$, alors $\text{Ext}_A^1(M(C), M(C)) \neq 0$.

Démonstration $D_1 = (\beta\gamma\alpha)^{s-i-1}$ et le morphisme explicite de $M(D)$ à $M(C)$ de cœur S_0



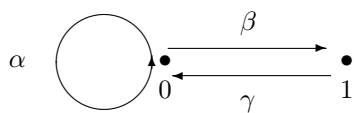
n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.3.

□

3.6 $D(2\mathcal{A})^s(c)$ avec $s \geq 1$ et $c = 1$

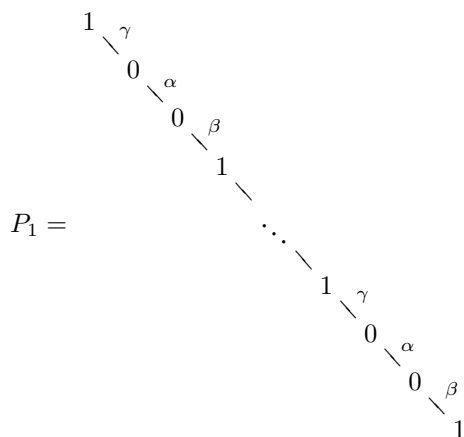
3.6.1 Lemmes clés modifiés

Regardons la structure des algèbres $A = D(2\mathcal{A})^s(1)$ avec $s \geq 1$.



$$\gamma\beta = 0, \alpha^2 = (\alpha\beta\gamma)^s = (\beta\gamma\alpha)^s$$

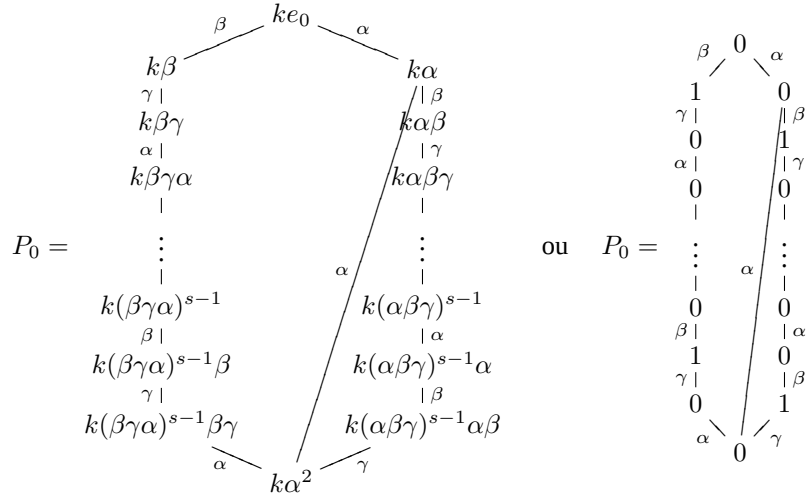
Le module projectif indécomposable



est un module de type corde unisériel et le module projectif indécomposable de tête S_0 est

$$P_0 = ke_0 \oplus k\beta \oplus k\beta\gamma \oplus k\beta\gamma\alpha \oplus \cdots \oplus k(\beta\gamma\alpha)^{s-1}\beta\gamma \oplus k\alpha \oplus k\alpha\beta \oplus k\alpha\beta\gamma \oplus \cdots \oplus k(\alpha\beta\gamma)^{s-1}\alpha\beta \oplus k\alpha^2$$

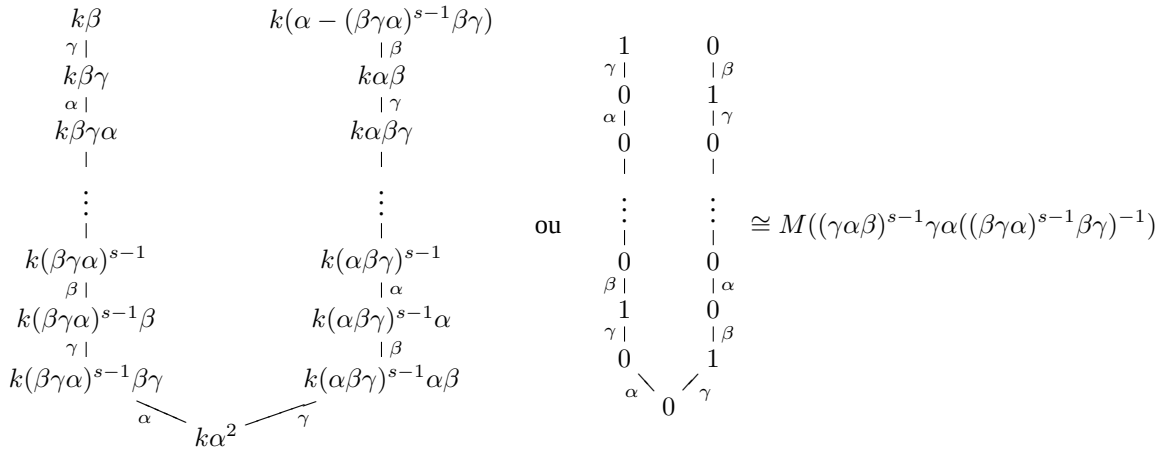
où $k\alpha^2 = k(\alpha\beta\gamma)^s = k(\beta\gamma\alpha)^s$. On peut visualiser P_0 comme suit



Constatons que les chemins maximaux de P_0 sont $(\beta\gamma\alpha)^s$, $(\alpha\beta\gamma)^s$ et α^2 . Notons que $\overline{A} = A/\text{Soc}P_0 = A/k\alpha^2$ est une algèbre de corde. Les A -modules indécomposables sont donc les $\overline{A}$ -modules indécomposables et P_0 . On regarde $\text{Rad}(P_0)$ et P_0/S_0 .

$$\text{Rad}(P_0) = k\beta \oplus k\beta\gamma \oplus k\beta\gamma\alpha \oplus \cdots \oplus k(\beta\gamma\alpha)^{s-1}\beta\gamma \oplus k\alpha \oplus k\alpha\beta \oplus k\alpha\beta\gamma \oplus \cdots \oplus k(\alpha\beta\gamma)^{s-1}\alpha\beta \oplus k\alpha^2$$

Constatons que $(\alpha - (\beta\gamma\alpha)^{s-1}\beta\gamma)\alpha = \alpha^2 - (\beta\gamma\alpha)^s = 0$ et donc on visualise sa structure comme suit:



Si on note $\overline{x}$ la classe d'un élément x dans P_0/S_0 , alors

$$P_0/S_0 = k\overline{e_0} \oplus k\overline{\beta} \oplus k\overline{\beta\gamma} \oplus k\overline{\beta\gamma\alpha} \oplus \cdots \oplus k\overline{(\beta\gamma\alpha)^{s-1}\beta\gamma} \oplus k\overline{\alpha} \oplus k\overline{\alpha\beta} \oplus k\overline{\alpha\beta\gamma} \oplus \cdots \oplus k\overline{(\alpha\beta\gamma)^{s-1}\alpha\beta}$$

On visualiser P_0/S_0 comme suit

$$P_0 = \begin{array}{c} \beta \quad \alpha \\ \swarrow \quad \searrow \\ k\bar{\beta} \quad k\bar{\alpha} \\ \gamma \downarrow \quad \downarrow \beta \\ k\bar{\beta}\gamma \quad k\bar{\alpha}\beta \\ \alpha \downarrow \quad \downarrow \gamma \\ k\bar{\beta}\gamma\alpha \quad k\bar{\alpha}\beta\gamma \\ \vdots \quad \vdots \\ k(\bar{\beta}\gamma\alpha)^{s-1} \quad k(\bar{\alpha}\beta\gamma)^{s-1} \\ \beta \downarrow \quad \downarrow \alpha \\ k(\bar{\beta}\gamma\alpha)^{s-1}\beta \quad k(\bar{\alpha}\beta\gamma)^{s-1}\alpha \\ \gamma \downarrow \quad \downarrow \beta \\ k(\bar{\beta}\gamma\alpha)^{s-1}\beta\gamma \quad k(\bar{\alpha}\beta\gamma)^{s-1}\alpha\beta \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{c} \beta \quad 0 \quad \alpha \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \quad 0 \\ \gamma \downarrow \quad \downarrow \beta \\ 0 \quad 1 \\ \alpha \downarrow \quad \downarrow \gamma \\ 0 \quad 0 \\ \vdots \quad \vdots \\ 0 \quad 0 \\ \beta \downarrow \quad \downarrow \alpha \\ 1 \quad 0 \\ \gamma \downarrow \quad \downarrow \beta \\ 0 \quad 1 \end{array} \cong M(((\beta\gamma\alpha)^{s-1}\beta\gamma)^{-1}(\alpha\beta\gamma)^{s-1}\alpha\beta)$$

On voit que le composé $\text{Rad}(P_0) \hookrightarrow P_0 \twoheadrightarrow P_0/S_0$ est la somme des trois morphismes explicites $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3$

$$\begin{array}{c} \boxed{1} \quad 0 \quad \boxed{1} \quad 0 \quad 1 \quad \boxed{0} \quad 0 \quad 1 \quad \boxed{0} \quad 0 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \end{array} \xrightarrow{\theta_1} \begin{array}{c} \boxed{1} \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{array} \xrightarrow{\theta_2} \begin{array}{c} \boxed{0} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{array} \text{ et } \xrightarrow{\theta_3} \begin{array}{c} \boxed{0} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

Pour cette algèbre $D(2\mathcal{A})^s(1)$ avec $s \geq 1$, on modifie les lemmes de la section 3.2.

Lemme 3.6.1 Soit $A = D(2\mathcal{A})^s(1)$ avec $s \geq 1$. Soit $f : M(C) \rightarrow M(D)$ un morphisme explicite entre deux modules de type corde tels qu'aucun des deux ne soit projectif.

- (1) Si le composé $\text{Soc}(M(C)) \rightarrow M(C) \rightarrow M(D)$ n'est pas nul, alors $\underline{f} \neq 0$.
- (2) Si le composé $M(C) \rightarrow M(D) \rightarrow M(D)/\text{Rad}(M(D))$ n'est pas nul, alors $\underline{f} \neq 0$.

Démonstration On montre (1), la preuve de (2) étant duale. Si $\underline{f} = 0$, alors il existe un module projectif $P = \sum P(j)$ et des morphismes explicites $g_j : M(C) \rightarrow \text{Rad}(P(j))$ et $h_j : P(j)/\text{Soc}(P(j)) \rightarrow M(D)$ tels que $f = \sum h_j \circ \eta_j \circ g_j$ où η_j est le composé $\text{Rad}(P(j)) \hookrightarrow P(j) \twoheadrightarrow P(j)/\text{Soc}(P(j))$. Comme pour tout j , η_j est la somme d'au plus trois morphismes explicites, $g_j \circ \eta_j \circ h_j$ est la somme d'au plus trois morphismes explicites. Comme les morphismes explicites sont linéairement indépendants, il existe i tel que f soit un facteur de $g_i \circ \eta_i \circ h_i$. Comme $\text{Soc}(P(i))$ est simple, $\text{Soc}(P(i)) \subseteq \text{Ker}(\eta_i)$ et comme le composé $\text{Soc}(M(C)) \hookrightarrow M(C) \xrightarrow{g_i} \text{Rad}(P(i))$ a pour image contenue dans $\text{Soc}(P(i))$, le composé $\text{Soc}(M(C)) \hookrightarrow M(C) \xrightarrow{g_i} \text{Rad}(P(i)) \xrightarrow{\eta_i} P(i)/\text{Soc}(P(i))$ est nul, et donc $f = 0$, ce qui est absurde.

□

Lemme 3.6.2 Soit $A = D(2\mathcal{A})^s(1)$ avec $s \geq 1$. Soient $C = C_1C_2 \cdots C_n$ et $D = D_1D_2 \cdots D_m$ deux cordes. Soit $f : M(C) \rightarrow M(D)$ un morphisme explicite de cœur E qui est une corde directe de longueur strictement positive. Supposons que $E \subset C_i$ et $E \subset D_j$ et écrivons $C_i = EC'_i$ et $D_j = D'_jE$. Si D'_jEC_i ne contient aucun chemin maximal (voir Définition 1.4.1) ou contient α^2 , alors $\underline{f} \neq 0$.

Démonstration Si $\underline{f} = 0$, alors il existe un module projectif indécomposable P_i avec $i \in \{0, 1\}$ et deux morphismes explicites $g : M(C) \rightarrow \text{Rad}(P_i)$ et $h : P_i/S_i \rightarrow M(D)$ tels que f soit un facteur de $h \circ \eta_i \circ g$. Si $i = 1$, P_1 est unisériel et ce cas a été traité dans la preuve de Lemme 3.2.2: $D'_jEC'_i$ contient le chemin maximal $(\gamma\alpha\beta)^s$. Si $i = 0$, en regardant les structures de $\text{Rad}(P_0)$ et P_0/S_0 , on voit que $D'_jEC'_i$ contient $(\alpha\beta\gamma)^s$ ou $(\beta\gamma\alpha)^s$, mais elle ne contient jamais α^2 . En effet, si on combine dans P_0 la corde $\text{Im}(g) \subseteq \text{Rad}(P_0)$ et la corde de $\text{Im}(h) \subseteq P_0/S_0$, alors le graphe obtenu ne contient pas α^2 .

□

Lemme 3.6.3 Soit $A = D(2\mathcal{A})^s(1)$ avec $s \geq 1$. Soit $f : M(C) \rightarrow M(D)$ un morphisme explicite de cœur E avec $|E| = 0$. Supposons que $E = C_i \cap C_{i+1}$ (i.e. $\text{Pos}_E(C) = i$ voir sa définition avant Proposition 1.5.5) et $E = D_j \cap D_{j+1}$ (i.e. $\text{Pos}_E(D) = j$). Notons

$$C_i = C'_i\alpha_1^{-1}, C_{i+1} = \alpha_2C'_{i+1}, D_j = D'_j\alpha_3, D_{j+1} = \alpha_4^{-1}D'_{j+1}$$

où les α_i sont des flèches directes. Si tous les $\alpha_3\alpha_1, \alpha_4\alpha_1, \alpha_3\alpha_2$ et $\alpha_4\alpha_2$ sont dans l'idéal admissible $\langle \rho \rangle$, alors $\underline{f} \neq 0$.

Démonstration Si $\underline{f} = 0$, alors il existe un module projectif indécomposable P et deux morphismes explicites $g : M(C) \rightarrow \text{Rad}(\bar{P})$ et $h : P/\text{Soc}(P) \rightarrow M(D)$ tels que f soit un facteur de $g \circ \eta_P \circ h$ où η_P est le composé $\text{Rad}(P) \hookrightarrow P \twoheadrightarrow P/\text{Soc}(P)$. Or, comme dans la preuve du lemme précédent, il existe une corde $F \subset C_i$ ou $F \subset C_{i+1}$ qui contient E et une sous-corde $G \subset D_j$ ou $G \subset D_{j+1}$ qui contient E tel que, par exemple, si on suppose que $F \subset C_i$ et $G \subset D_j$ (les autres cas étant similaires), alors GF^{-1} est un chemin maximal. Comme G termine par α_3 et F^{-1} commence par $\alpha_1, \alpha_3\alpha_1 \notin \langle \rho \rangle$.

□

3.6.2 Syzygies

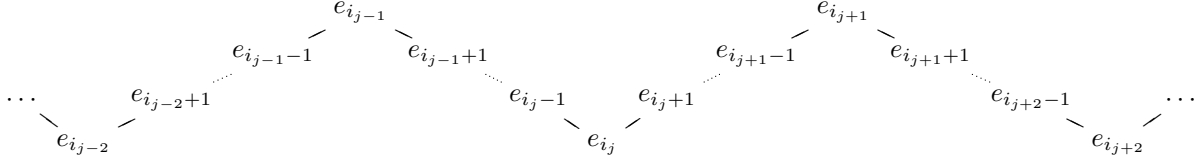
Dans le cas de l'algèbre $D(2\mathcal{A})^s(0)$, on calcule souvent les syzygies de modules de type corde. Le point crucial est les proposition 1.4.6 et 1.6.11. On va montrer dans cette sous-section que sur $D(2\mathcal{A})^s(1)$ avec $s \geq 1$, si on garde la définition de ΩC dans Définition 1.4.2, Proposition 1.4.6 reste vraie pour les cordes autres que les cordes $T[n]$ et $(T[n])^{-1}$ avec $n \in \mathbb{N}$ où $T = (\beta\gamma\alpha)^{s-1}\beta\gamma$, i.e. ceux dans le 1-tube $Q(T)$. Il en résulte que Proposition 1.6.11 rest vrai pour les cordes autres que les cordes $T[n]$ et $(T[n])^{-1}$ avec $n \in \mathbb{N}$, puisque cette proposition ne concerne que la définition de ΩC et celle de $C[1]$.

Proposition 3.6.4 Soit $A = D(2\mathcal{A})^s(1)$ avec $s \geq 1$. Soit C une corde autre que les cordes $T[n]$ et $(T[n])^{-1}$ avec $n \in \mathbb{N}$ où $T = (\beta\gamma\alpha)^{s-1}\beta\gamma$. Alors $\Omega M(C) \cong M(\Omega C)$ où ΩC est définie dans Définition 1.4.2.

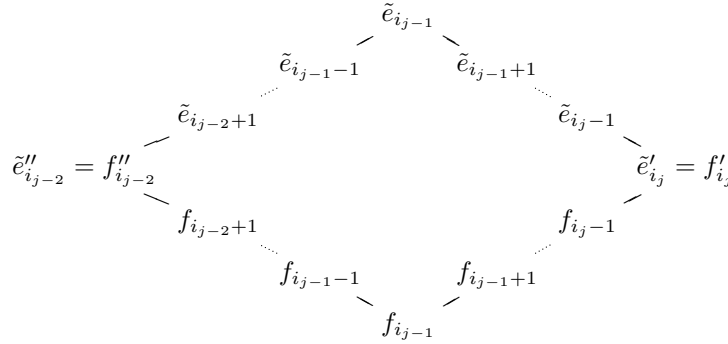
La démonstration de cette proposition occupe tout le reste de cette sous-section.

Proposition 3.6.5 Soit $A = D(2\mathcal{A})^s(1)$ avec $s \geq 1$. Soit C une corde autre que les cordes $T[n]$ et $(T[n])^{-1}$ avec $n \in \mathbb{N}$. Alors $\Omega(C[1]) = (\Omega C)[1]$.

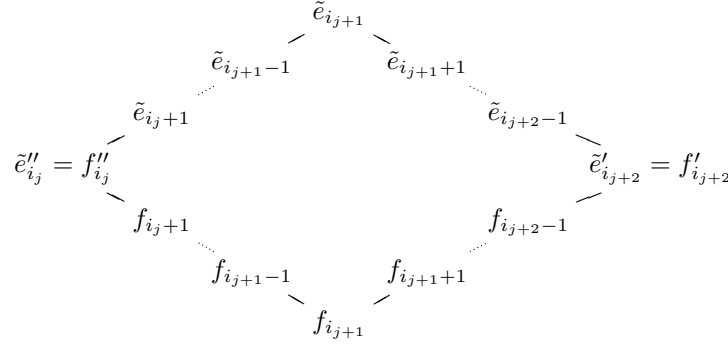
On utilise des notations dans la preuve de Proposition 1.4.6. Supposons que Λ soit une algèbre bisérielle spéciale. Soit $C = \cdots C_{j-1}C_jC_{j+1}C_{j+2}\cdots$ une corde sur Λ avec C_j directe. On visualise $M(C)$ sous une base $\{e_i\}$ comme suit:



L'enveloppe projective de $M(C)$ est de la forme $P = \cdots \oplus P_{s(C_j)} \oplus P_{t(C_{j+1})} \oplus \cdots$ où les modules projectifs indécomposables $P_{s(C_j)}$ et $P_{t(C_{j+1})}$ sont de la forme



et



L'application surjective $P \twoheadrightarrow M(C)$ envoie respectivement

$$\tilde{e}_{i_{j-2}}'', \tilde{e}_{i_{j-2}+1}, \dots, \tilde{e}_{i_{j-1}-1}, \tilde{e}_{i_{j-1}}, \tilde{e}_{i_{j-1}+1}, \dots, \tilde{e}_{i_j-1}, \tilde{e}_{i_j}'$$

en

$$e_{i_{j-2}}, e_{i_{j-2}+1}, \dots, e_{i_{j-1}-1}, e_{i_{j-1}}, e_{i_{j-1}+1}, \dots, e_{i_j-1}, e_{i_j}$$

et envoie respectivement

$$\tilde{e}_{i_j}'', \tilde{e}_{i_j+1}, \dots, \tilde{e}_{i_{j+1}-1}, \tilde{e}_{i_{j+1}}, \tilde{e}_{i_{j+1}+1}, \dots, \tilde{e}_{i_{j+2}-1}, \tilde{e}_{i_{j+2}}'$$

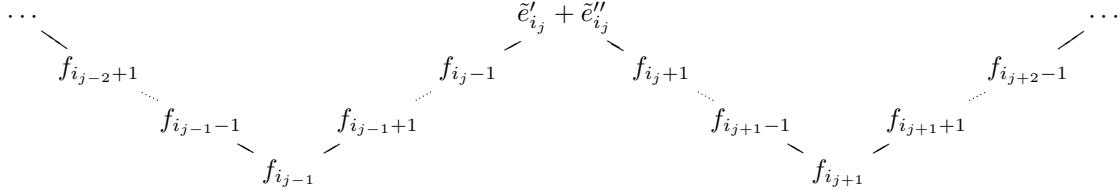
en

$$-e_{i_j}, -e_{i_j+1}, \dots, -e_{i_{j+1}-1}, -e_{i_{j+1}}, -e_{i_{j+1}+1}, \dots, -e_{i_{j+2}-1}, -e_{i_{j+2}}$$

Le noyau de $P \twoheadrightarrow M(C)$ est de la forme

$$\cdots \oplus kf_{i_{j-2}+1} \oplus \cdots \oplus kf_{i_{j-1}-1} \oplus kf_{i_{j-1}} \oplus f_{i_{j-1}+1} \oplus \cdots \oplus kf_{i_j-1} \oplus k(f_{i_j}' + f_{i_{j-2}}'') \oplus kf_{i_j+1} \oplus \cdots \oplus kf_{i_{j+1}-1} \oplus$$

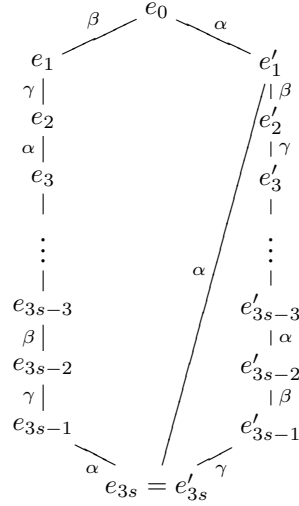
$kf_{i_j+1} \oplus kf_{i_j+1+1} \oplus \cdots \oplus kf_{i_j+2-1} \oplus \cdots$
 Alors on visualise $\Omega M(C) (\cong M(\Omega C))$ comme suit:



On va utiliser cette présentation d'une base pour $\Omega M(C)$ même si pour C une corde sur l'algèbre $D(2\mathcal{A})^s(1)$ avec $s \geq 1$.

Maintenant on se place sur l'algèbre $D(2\mathcal{A}^s(1))$ avec $s \geq 1$.

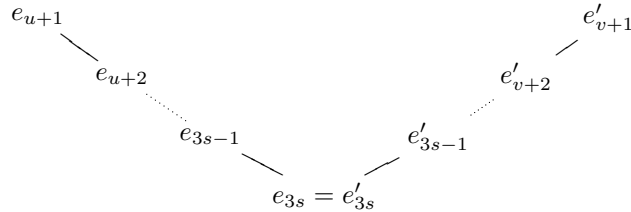
Regardons d'abord P_0 . Pour simplifier la présentation, P_0 est illustrée par le graphe suivant:



Les quotients explicites de $P_0/S_0 = M(((\beta\gamma\alpha)^{s-1}\beta\gamma)^{-1}(\alpha\beta\gamma)^{s-1}\alpha\beta)$ sont de la forme $C^{-1}D$ avec $(\beta\gamma\alpha)^{s-1}\beta\gamma = CC'$ et $(\alpha\beta\gamma)^{s-1}\alpha\beta = DD'$. On montre que $\Omega M(C^{-1}D) \cong M(\Omega(C^{-1}D))$ pour $C^{-1}D \neq T^{-1}$. Notons $|C| = u$ et $|D| = v$. Alors $C^{-1}D \neq T^{-1}$ implique que $v > 0$ ou $u < 3s - 1$. Si $v > 0$, alors

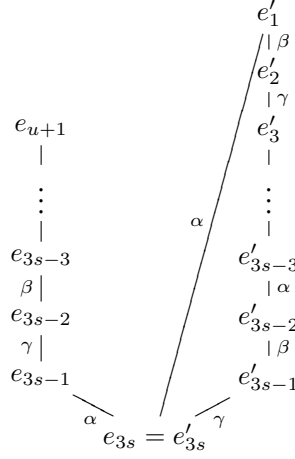
$$\Omega M(C^{-1}D) = ke_{u+1} \oplus \cdots \oplus ke_{3s-1} \oplus ke_{3s} \oplus ke'_{3s-1} \oplus \cdots \oplus e'_{v+1}$$

qui est illustrée comme suit:

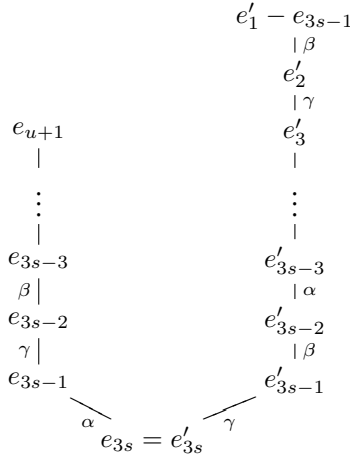


Cette présentation donne l'isomorphisme $\Omega M(C^{-1}D) \cong M(\Omega(C^{-1}D))$.

Si $v = 0$ et $u < 3s - 1$, $\Omega M(C^{-1}D) = ke_{u+1} \oplus \cdots \oplus ke_{3s-1} \oplus ke_{3s} \oplus ke'_{3s-1} \oplus \cdots \oplus e'_1$ qui est illustrée par le graphe suivant:



Cette présentation ne donne pas l'isomorphisme $\Omega M(C^{-1}D) \cong M(\Omega(C^{-1}D))$, puisque $v + 1 \geq 2$. En revanche si on change e'_1 en $e'_1 - e_{3s-1}$, on constate que $\alpha(e'_1 - e_{3s-1}) = e'_{3s} - e_{3s} = 0$ et $\beta(e'_1 - e_{3s-1}) = e'_2$, et le présentation suivante donne l'isomorphisme voulu.

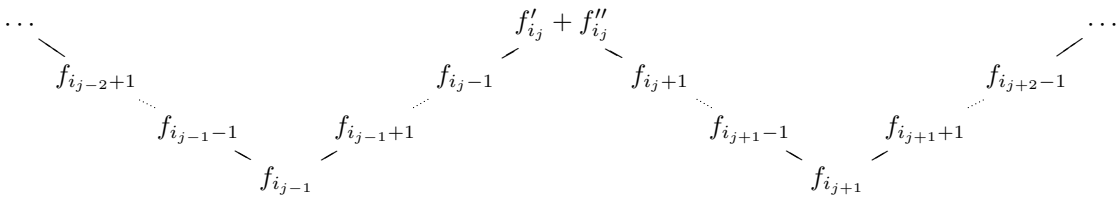


On montre maintenant la proposition 3.6.4.

Soit C une corde directe différente de $(\beta\gamma\alpha)^{s-1}\beta\gamma$. Si $s(C) = 1$, comme P_1 est un module de type corde, $\Omega M(C) \cong M(\Omega C)$ est évidente.

Supposons que $s(C) = 0$. Alors $C \subsetneq (\beta\gamma\alpha)^{s-1}\beta\gamma$ ou $C \subseteq (\alpha\beta\gamma)^{s-1}\alpha\beta$. Cette corde est donc un quotient explicite de P_0 et le fait que $\Omega M(C) \cong M(\Omega C)$ a été déjà montré ci-dessus.

Soit $C = C_1 \cdots C_n$ une corde à n segments avec $n \geq 2$ sur $D(2\mathcal{A})^s(1)$. Posons $\Omega C = D = D_0 D_1 \cdots D_{n+1}$. On peut visualiser une base de $\Omega M(C)$ en forme de $\Omega C = D = D_0 D_1 \cdots D_n D_{n+1}$ comme suit (voir les notations introduites au début de cette sous-section):



Cette présentation ne donne pas l'isomorphisme $\Omega M(C) \cong M(\Omega C) = M(D)$. En effet, si $D_j = ((\beta\gamma\alpha)^{s-1}\beta\gamma)^{-1}$, alors $\alpha f'_{i_j} = f_{i_{j-1}}$ et si $D_{j+1} = (\beta\gamma\alpha)^{s-1}\beta\gamma$, alors $\alpha f''_{i_j} = f_{i_{j+1}}$. On va modifier cette base pour que ce soit une base de $M(D)$ à condition que $D \notin Q(T)$, ce qui donne l'isomorphisme $\Omega M(C) \cong M(\Omega C)$.

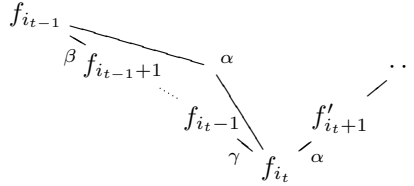
Pour les cordes D_t telles que $D_t \neq (\beta\gamma\alpha)^{s-1}\beta\gamma, ((\beta\gamma\alpha)^{s-1}\beta\gamma)^{-1}$. Ce n'est pas nécessaire de les modifier.

Supposons que D_t soit un segment tel que $D_t = (\beta\gamma\alpha)^{s-1}\beta\gamma$ ou $D_t = ((\beta\gamma\alpha)^{s-1}\beta\gamma)^{-1}$. Supposons d'abord que l'on ne soit dans aucune des deux situations suivantes:

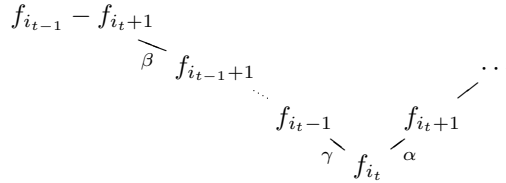
- (1) D_t est le premier segment de D et D_t est inverse.
- (2) D_t est le dernier segment de D et D_t est directe.

Alors par symétrie, on peut supposer que D_t soit directe. On en déduit que $|D_{t+1}| > 0$. On distingue des cas.

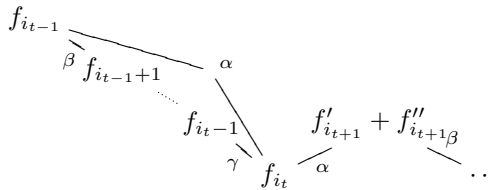
Supposons d'abord que D_t soit le premier segment de D .



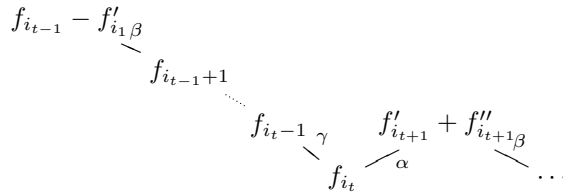
Dans ce diagramme, la ligne indexée par α signifie que $\alpha f_{i_{t-1}} = f_{i_t}$. On sait que $\alpha f_{i_{t-1}} = f_{i_t}$. Si $|D_{t+1}| > 1$, alors $\beta f_{i_{t+1}} = 0$. On change $f_{i_{t-1}}$ en $f_{i_{t-1}} - f_{i_{t+1}}$ et donc $\alpha(f_{i_{t-1}} - f_{i_{t+1}}) = f_{i_t} - f_{i_t} = 0$ et $\beta(f_{i_{t-1}} - f_{i_{t+1}}) = f_{i_{t-1}+1}$.



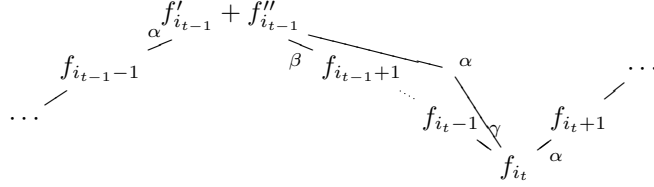
On a réglé le problème pour D_t . Si $|D_{t+1}| = 1$, alors $i_t + 1 = i_{t+1}$ et l'élément en cette position est $f'_{i_{t+1}} + f''_{i_{t+1}}$ avec $\beta(f'_{i_{t+1}}) = 0$ et $\alpha(f'_{i_{t+1}}) = f_{i_t}$.



Si on change $f_{i_{t-1}}$ en $f_{i_{t-1}} - f'_{i_{t+1}}$, alors $\alpha(f_{i_{t-1}} - f'_{i_{t+1}}) = f_{i_t} - f_{i_t} = 0$ et $\beta(f_{i_{t-1}} - f'_{i_{t+1}}) = f_{i_{t-1}+1}$. On a réglé le problème pour D_t .



Supposons maintenant que D_t ne soit pas le premier segment de D . Si $|D_{t+1}| > 1$, alors $\beta(f_{i_{t+1}}) = 0$.

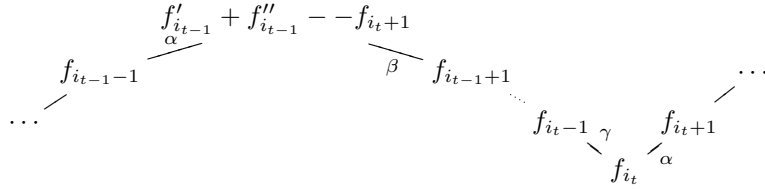


Dans ce digramme, la ligne indexée par α signifie que $\alpha f''_{i_{t-1}} = f_{i_t}$, mais pas $\alpha(f'_{i_{t-1}} + f''_{i_{t-1}}) = f_{i_t}$. Il en est de même pour des diagrammes similaires dans la suite. alors on change $f'_{i_{t-1}} + f''_{i_{t-1}}$ en $f'_{i_{t-1}} + f''_{i_{t-1}} - f_{i_{t+1}}$. Alors

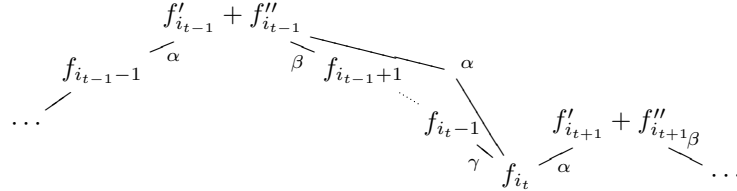
$$\alpha(f'_{i_t} + f''_{i_t} - f_{i_{t+1}}) = f_{i_{t-1}-1} + f_{i_t} - f_{i_t} = f_{i_{t-1}-1}$$

et

$$\beta(f'_{i_{t-1}} + f''_{i_{t-1}} - f_{i_{t+1}}) = 0 + f_{i_{t-1}+1} + 0 = f_{i_{t-1}+1}$$



Si $|D_{t+1}| = 1$,



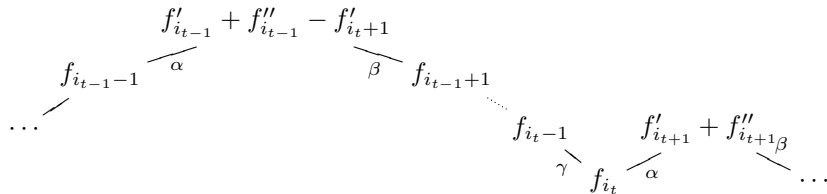
alors on change $f'_{i_{t-1}} + f''_{i_{t-1}}$ en $f'_{i_{t-1}} + f''_{i_{t-1}} - f'_{i_{t+1}}$. Alors

$$\alpha(f'_{i_t} + f''_{i_t} - f'_{i_{t+1}}) = f_{i_{t-1}-1} + f_{i_t} - f_{i_t} = f_{i_{t-1}-1}$$

et

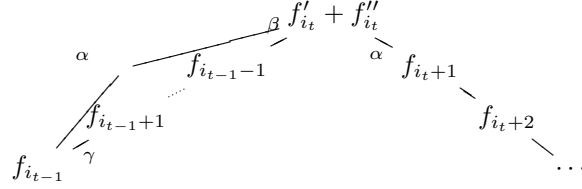
$$\beta(f'_{i_{t-1}} + f''_{i_{t-1}} - f'_{i_{t+1}}) = 0 + f_{i_{t-1}+1} + 0 = f_{i_{t-1}+1}$$

Cela règle le problème pour D_t .

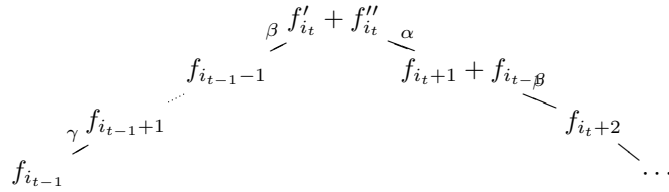


On traite maintenant les deux cas exclus (1) et (2). Comme ils sont symétriques, on peut supposer que D_t soit le premier segment de D et que D_t soit inverse.

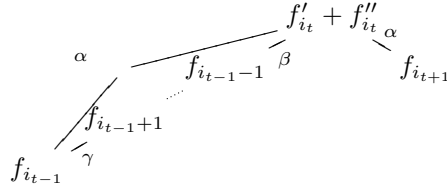
Si $|D_{t+1}| > 1$, alors $\alpha f'_{i_t} = f_{i_{t-1}}$.



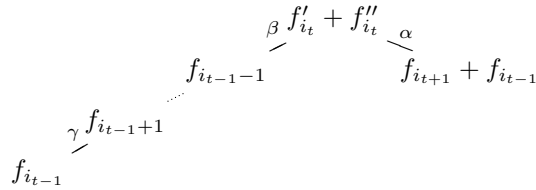
On change $f_{i_{t+1}}$ en $f_{i_{t+1}} + f_{i_{t-1}}$. Cela règle le problème pour D_{t+1} , car $\alpha(f'_{i_t} + f''_{i_t}) = f_{i_{t+1}} + f_{i_{t-1}}$ et $\beta(f_{i_{t+1}} + f_{i_{t-1}}) = f_{i_{t+2}} + 0 = f_{i_{t+2}}$ puisque $\beta f_{i_{t-1}} = 0$.



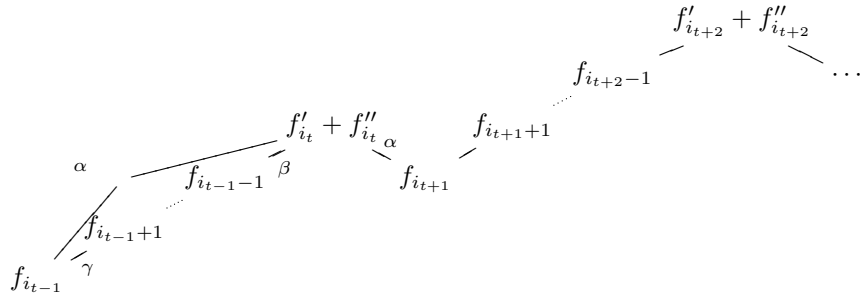
Supposons que $|D_{t+1}| = 1$. Si D_{t+1} est le dernier segment de D ,



alors il suffit de changer $f_{i_{t+1}}$ en $f_{i_{t+1}} + f_{i_{t-1}}$.

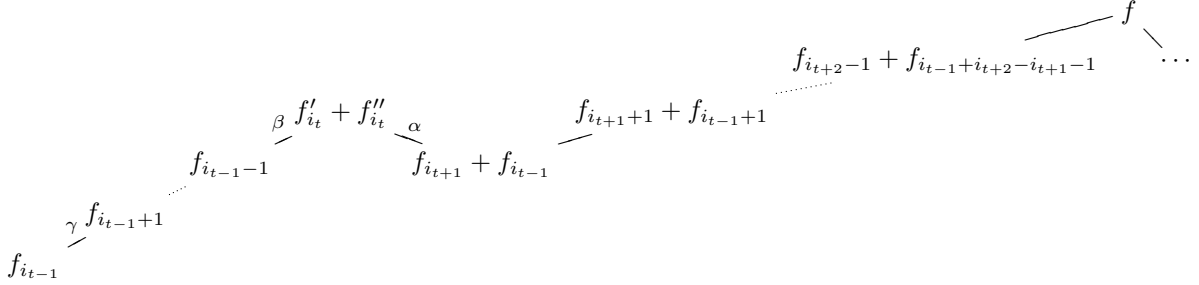


Supposons que D_{t+1} ne soit pas le dernier segment de D .



On change D_{t+2} en y ajoutant terme à terme D_t , i.e. on change $f_{i_{t+1}}$ en $f_{i_{t+1}} + f_{i_{t-1}}$, $f_{i_{t+1}+1}$ en $f_{i_{t+1}+1} + f_{i_{t-1}+1}$, $\dots$, $f_{i_{t+2}-1}$ en $f_{i_{t+2}-1} + f_{i_{t-1}+i_{t+2}-i_{t+1}-1}$, $f'_{i_{t+2}} + f''_{i_{t+2}}$, si $|D_{t+2}| < 3s-1$, en $f = f'_{i_{t+2}} + f''_{i_{t+2}} + f_{i_{t-1}+i_{t+2}-i_{t+1}}$

et, si $|D_{t+2}| < 3s - 1$, en $f = f'_{i_{t+2}} + f''_{i_{t+2}} + f'_{i_t} + f''_{i_t}$



Si $|D_{t+2}| < 3s - 1$, alors cela règle les problèmes.

Si $|D_{t+2}| = 3s - 1$, un problème supplémentaire apparait. Car l'élément en position i_{t+2} est $f'_{i_{t+2}} + f''_{i_{t+2}} + f'_{i_t} + f''_{i_t}$ et

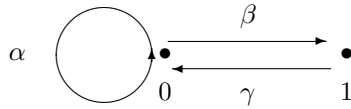
$$\alpha(f'_{i_{t+2}} + f''_{i_{t+2}} + f'_{i_t} + f''_{i_t}) = f_{i_{t+1}} + f_{i_{t+2}+1} + f_{i_{t-1}} + f_{i_{t+1}} = f_{i_{t+2}+1} + f_{i_{t-1}} \neq f_{i_{t+2}+1}$$

Si D_{t+2} est le dernier segment de D ou si $|D_{t+3}| > 1$, comme $\beta(f_{i_{t-1}}) = 0$, il suffit changer $f_{i_{t+2}+1}$ en $f_{i_{t+2}+1} + f_{i_{t-1}}$. Supposons que $|D_{t+3}| = 1$ et que D_{t+3} ne soit pas le dernier segment de D . Alors on ajoute à D_{t+4} la suite D_t terme à terme i.e. on change $f_{i_{t+3}}$ en $f_{i_{t+3}} + f_{i_{t-1}}$, $f_{i_{t+3}+1}$ en $f_{i_{t+3}+1} + f_{i_{t-1}+1}$, $\dots$, $f_{i_{t+4}-1}$ en $f_{i_{t+4}-1} + f_{i_{t-1}+i_{t+4}-i_{t+3}-1}$ et on change $f'_{i_{t+4}} + f''_{i_{t+4}}$, si $|D_{s+4}| < 3s - 1$, en $f'_{i_{t+4}} + f''_{i_{t+4}} + f_{i_{t-1}+i_{t+4}-i_{t+3}}$ et, si $|D_{s+4}| = 3s - 1$, en $f'_{i_{t+4}} + f''_{i_{t+4}} + f'_{i_t} + f''_{i_t}$.

On montre par récurrence que ce processus s'arrête en un nombre fini d'étapes, car $C \notin Q(T)$. Notre modifications fournissent alors une base qui établit un isomorphisme $\Omega M(C) \cong M(\Omega C)$.

3.6.3 $D(2\mathcal{A})^1(1)$

Rappelons l'algèbre $A = D(2\mathcal{A})^1(1)$.



$$\gamma\beta = 0, \alpha^2 = 0, \alpha\beta\gamma = \beta\gamma\alpha$$

Les modules projectifs indécomposables sont (voir Section 2.2)



Notons $A' = D(2\mathcal{A})^1(1)$. Alors $A/S_0 \cong A'/S'_0$ où S'_0 est le module simple de A' en sommet 0. Le carquois d'Auslander-Reiten stable de A a la même structure que celui de A' .

Proposition 3.6.6 Le carquois d'Auslander-Reiten stable de $D(2\mathcal{A})^1(1)$ est composé de

- une infinité de 1-tubes
- un 3-tube non régulier
- une composante de type $\mathbb{Z}\tilde{A}_{1,3}$

Suivant les notations de la sous-section 3.6.2, $T = \beta\gamma$. D'après Théorème 1.6.10(2), il existe une suite d'Auslander-Reiten de terme intermédiaire indécomposable

$$0 \rightarrow M(T) \rightarrow M(T[1]) \rightarrow M(T) \rightarrow 0$$

Cette suite appartient à un 1-tube et $M(T)$ forme l'extrémité de cet 1-tube, puisque $\tau M(T) = \Omega^2 M(T) \cong M(T)$. Constatons que sur cette algèbre $A = D(2\mathcal{A})^1(1)$, on voit directement que

$$\Omega M(\beta\gamma) \cong M(\beta\gamma\alpha^{-1}, 1, 1)$$

qui est un module de type ruban et que Ω établit un isomorphismes de 1-tubes $Q(T)$ et $Q(T\alpha^{-1}, 1)$. En revanche, sur l'algèbre $A' = D(2\mathcal{A})^1(0)$, $\Omega M(\beta\gamma) \cong M(\beta\gamma)$ et Ω est un automorphisme du 1-tube $Q(T)$.

On voit facilement que la composante $Q(T)$ est formé des modules $M(T[n])$ pour $n \in \mathbb{N}$. D'après Proposition 3.6.4, toute corde C satisfaisant $C \notin Q(T)$ vérifie que $\Omega M(C) \cong M(\Omega C)$.

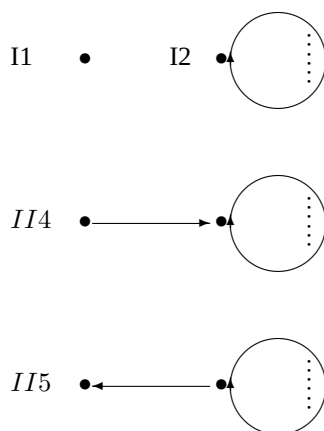
Théorème 3.6.7 On pose

$$C = \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 0 \\ \diagup \\ 0 \end{array}, \quad D = 1_{(1,1)} \text{ et } E = \begin{array}{c} 0 \\ \diagdown \\ 0 \\ \diagup \\ 1 \end{array}$$

Soit M un module indécomposable sur $D(2\mathcal{A})^1(1)$. Alors $\text{Ext}_A^1(M, M) = 0$ ssi M est un module de quasi-longueur 0 ou 1 (voir Définition 1.6.5) dans le 3-tube. En outre, si $M \in \{M(C), M(D), M(E)\}$, $\underline{\text{End}}_A(M) = k$ et si $M \in \{M(C[1]), M(D[1]), M(E[1])\}$, $\underline{\text{End}}_A(M) = k[\epsilon]/\epsilon^2$.

Théorème 3.6.8 Soit M un module sans auto-extensions non-triviales sur $D(2\mathcal{A})^1(1)$. Alors

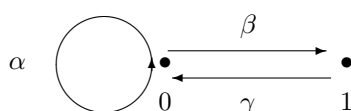
- (1) M a au plus deux facteurs directs indécomposables non projectifs non-isomorphes.
- (2) L'algèbre $\underline{\text{End}}_A(M)$ est une algèbre indécomposable.
- (3) L'algèbre $\underline{\text{End}}_A(M)$ est équivalente au sens de Morita à l'une des quatre algèbres suivantes et chaque algèbre apparaît.



Pour les preuves de ces deux théorèmes, on copie les preuves de Théorème 3.4.2 et de Théorème 3.4.4 pour l'algèbre $D(2\mathcal{A})^1(0)$, dans lesquelles on remplace Lemme 3.2.1 par Lemme 3.6.1, Lemme 3.2.2 par Lemme 3.6.2 et Lemme 3.2.3 par Lemme 3.6.3. Dans ces deux preuves, on montre parfois que $\underline{\text{Hom}}_A(M(C), M(D)) = 0$ pour certaines cordes C et D , mais on constate que dans tous les cas il n'existe pas de morphismes explicites de $M(C)$ à $M(D)$.

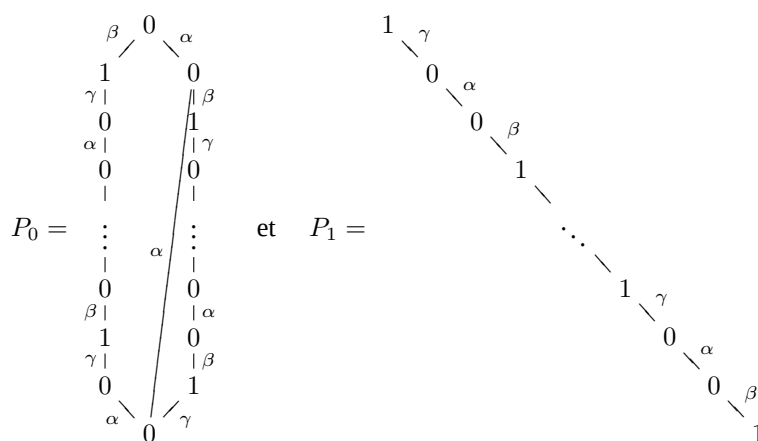
3.6.4 $D(2\mathcal{A})^s(1)$ avec $s \geq 2$

Rappelons l'algèbre $A = D(2\mathcal{A})^s(1)$ avec $s \geq 2$.



$$\gamma\beta = 0, \alpha^2 = (\alpha\beta\gamma)^s = (\beta\gamma\alpha)^s$$

Les modules projectifs indécomposables sont



Notons $A' = D(2\mathcal{A})^s(0)$ avec $s \geq 2$. Alors $A/S_0 \cong A'/S'_0$ où S'_0 est le module simple de A' en sommet 0. Le carquois d'Auslander-Reiten stable de A a la même structure que celui de A' .

Proposition 3.6.9 Le carquois d'Auslander-Reiten stable de $D(2\mathcal{A})^1(1)$ est composé de

- une infinité de 1-tubes
- un 3-tube non régulier
- une infinité de composante de type $\mathbb{Z}A_\infty^\infty$

Les remarques suivant Proposition 3.6.6 restent valables. En fait, suivant les notations de la sous-section 3.6.2, $T = (\beta\gamma\alpha)^{s-1}\beta\gamma$. D'après Théorème 1.6.10(2), il existe une suite d'Auslander-Reiten de terme intermédiaire indécomposable

$$0 \rightarrow M(T) \rightarrow M(T[1]) \rightarrow M(T) \rightarrow 0$$

Cette suite appartient à un 1-tube et $M(T)$ forme l'extrémité de cet 1-tube, puisque $\tau M(T) = \Omega^2 M(T) \cong M(T)$. Constatons que sur cette algèbre $A = D(2\mathcal{A})^1(1)$, on voit facilement que

$$\Omega M(\beta\gamma) \cong M(\beta\gamma\alpha^{-1}, 1, 1)$$

qui est un module de type ruban et que Ω établit un isomorphismes de 1-tubes $Q(T)$ et $Q(T\alpha^{-1}, 1)$. En revanche, sur l'algèbre $A' = D(2\mathcal{A})^1(0)$, $\Omega M((\beta\gamma\alpha)^{s-1}\beta\gamma) \cong M((\beta\gamma\alpha)^{s-1}\beta\gamma)$ et Ω est un automorphisme du 1-tube $Q(T)$.

On voit aisément que la composante $Q(T)$ est formé des modules $M(T[n])$ pour $n \in \mathbb{N}$. D'après Proposition 3.6.4, toute corde C satisfaisant $C \notin Q(T)$ vérifie que $\Omega M(C) \cong M(\Omega C)$.

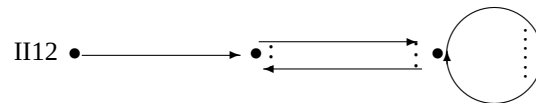
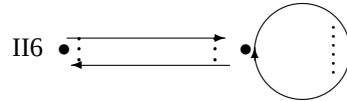
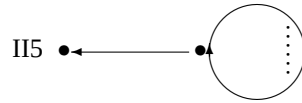
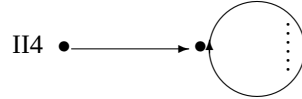
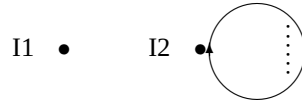
Théorème 3.6.10 On note $U = (\alpha\beta\gamma)^{s-1}\alpha\beta$, $V = (\gamma\alpha\beta)^{s-1}\gamma\alpha$ et $S = 1_{(1,-1)}$. Soit M un module indécomposable sur $D(2\mathcal{A})^s(c)$ avec $s \geq 2$ et $c = 1$. Alors M est rigide ssi il est parmi les modules suivants:

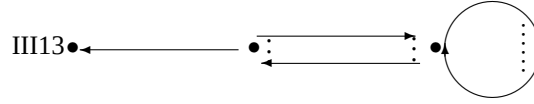
- (i) $M(U)$, $M(V)$ et S_1 , i.e. les modules de quasi-longueur 0 (Définition 1.6.5) dans le 3-tube.
- (ii) $M(U[1])$, $M(V[1])$ et $M(S[1])$, i.e. les modules de quasi-longueur 1 dans le 3-tube.
- (iii) $\Omega^n(M(\alpha))$, $n \in \mathbb{Z}$

Pour les modules de type (i). $\underline{\text{End}}_A(M) = k$ et pour les modules de type (ii) et (iii), $\underline{\text{End}}_A(M) = k[\epsilon]/\epsilon^2$

Théorème 3.6.11 Soit M un module sans auto-extensions non-triviales sur $D(2\mathcal{A})^s(1)$ avec $s \geq 2$. Alors

- (1) M a au plus trois facteurs indécomposables non-projectifs non-isomorphes.
- (2) $\underline{\text{End}}_A(M)$ est indécomposable.
- (3) $\underline{\text{End}}_A(M)$ est équivalente au sens de Morita à une des 7 algèbres suivantes et chaque algèbre apparaît.





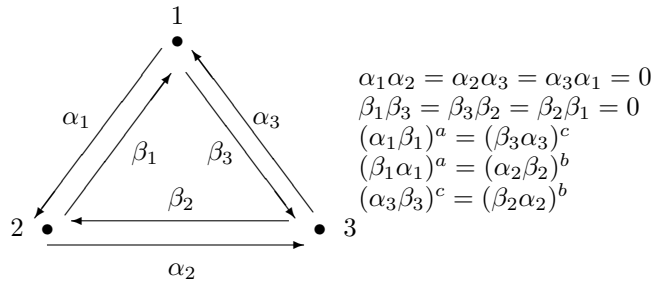
Pour les preuves de ces deux théorèmes, on copie les preuves de Théorème 3.5.2 et de Théorème 3.5.11 pour l'algèbre $D(2\mathcal{A})^s(0)$, dans lesquelles on remplace Lemme 3.2.1 par Lemme 3.6.1, Lemme 3.2.2 par Lemme 3.6.2 et Lemme 3.2.3 par Lemme 3.6.3. Dans ces deux preuves, on montre parfois qu'un morphisme explicite est projectif qui factorise par P_0 . Bien que les P_0 sont différents pour l'algèbre $D(2\mathcal{A})^s(1)$ et l'algèbre $D(2\mathcal{A})^s(0)$, on vérifie les factorisations par P_0 restent les mêmes en utilisant la description de composé

$$(\text{Rad}(P_0) \hookrightarrow P_0 \twoheadrightarrow P_0/S_0) = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$$

donnée dans la sous-section 3.6.1.

3.7 $D(3\mathcal{K})^{a,b,c}$ avec $a = b = c = 1$

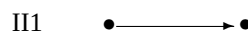
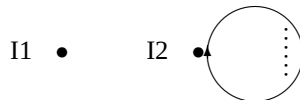
L'algèbre $D(3\mathcal{K})^{1,1,1}$ est

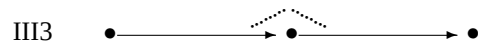
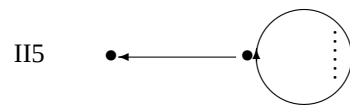
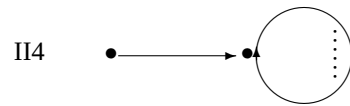
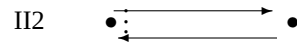


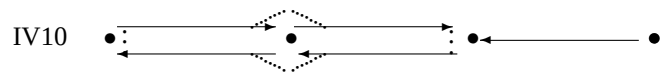
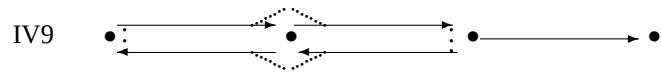
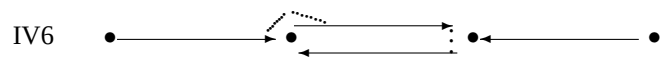
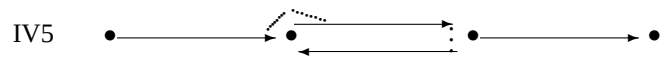
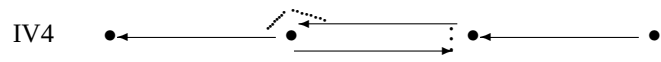
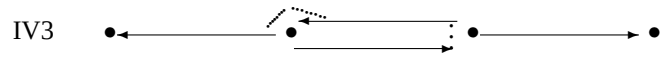
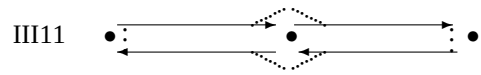
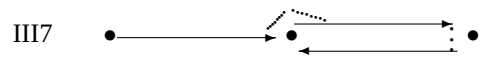
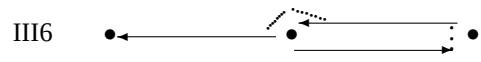
Ce cas a été calculé par Alexander Zimmermann dans [45]. Voici son résultat:

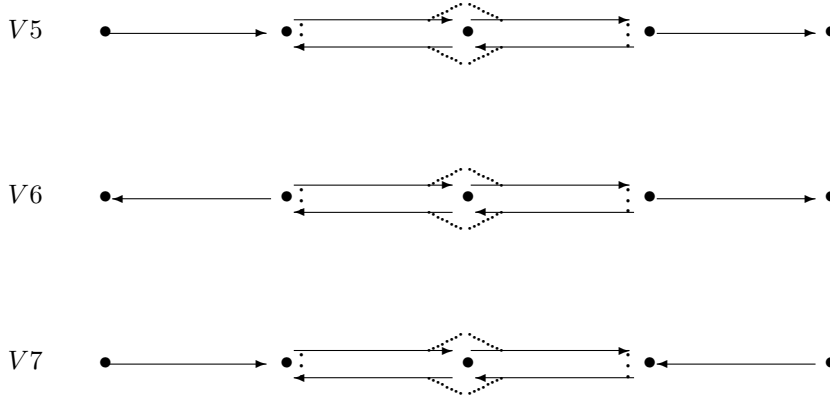
Théorème 3.7.1 Soit M un module sur $D(3\mathcal{K})^{a,b,c}$ avec $a = b = c = 1$ tel que $\text{Ext}_A^1(M, M) = 0$. Alors

1. M a au plus 5 facteurs directs indécomposables non projectifs non isomorphes.
2. $\underline{\text{End}}_A(M)$ a au plus deux facteurs directe indécomposables, à équivalences de Morita près.
3. tout facteur direct indécomposable de $\underline{\text{End}}_A(M)$ est Morita équivalente à l'une des 23 algèbres suivantes et chaque algèbre apparaît.









Remarque 3.7.2 Pour cette algèbre $D(3\mathcal{K})^{1,1,1}$, $P_1 = \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \end{array}$. Alors le morphisme

$$M(C) = \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \twoheadrightarrow S_2 \oplus S_3 \hookrightarrow \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \end{array} = M(D)$$

est projectif, car il factorise par P_1 via

$$\begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \hookrightarrow P_1 = \begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \end{array}} \twoheadrightarrow \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array}$$

mais il est somme de deux morphismes non projectifs qui sont faiblement unilatéraux de cœur de longueur nulle:

$$\boxed{2} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \xrightarrow{f} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{2} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{c} 2 \quad \boxed{3} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \xrightarrow{g} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad \boxed{3} \end{array}$$

En effet, si f est projectif, alors d'après Remarque 2.2.2, il existe un module indécomposable projectif P et deux morphismes explicites $f_1 : M(C) \rightarrow P$ et $f_2 : P \rightarrow M(D)$ tels que $f_2 \circ f_1 = f + f'$ pour f' un autre morphisme explicite de cœur disjoint de celui de f ou le morphisme nul. On a évidemment que $P = P_1$ et que $f' = g$. Comme $\overline{f} + \overline{g} = 0$, $\overline{f} = 0 \iff \overline{g} = 0$. Or, si g est projectif, il existe un module indécomposable projectif P' et deux morphismes explicites $g_1 : M(C) \rightarrow P'$ et $g_2 : P' \rightarrow M(D)$ tels que $g_2 \circ g_1 = g + f''$ pour $f'' \neq f$ un autre morphisme explicite de cœur disjoint de celui de f' ou le morphisme nul. On voit que $P' = P_1$ et donc que $f'' = f$, Ceci est une contradiction et on en déduit que f et g sont non projectifs.

Cet exemple contredit Lemmas 3.1 et 3.2 de [44].

Remarque 3.7.3 Dans Lemme 2.3.4, les conditions $|C_2| > 0$ et $\text{Ext}_A^1 = 0$ sont nécessaires.

(1) Si $|C_2| = 0$, alors le composé

$$\begin{array}{c} \boxed{2} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \end{array} \xrightarrow{\theta} S_2 \xrightarrow{\eta} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{2} \quad 3 \end{array}$$

factorise par P_1 via

$$\begin{array}{c} 2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 3 \quad \boxed{1} \end{array} \hookrightarrow P_1 = \begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \boxed{2} \quad 3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \end{array} \twoheadrightarrow \begin{array}{c} 2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \quad 3 \end{array}$$

mais aucun des deux morphismes explicites θ et η sont projectifs en vertu de Lemme 3.2.1.

(2) S'il n'existe pas conditions de nullité de Ext^1 , notons

$$h : \begin{array}{c} \boxed{2} \quad \boxed{1} \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\ 3 \quad \boxed{1} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \boxed{2} \quad \boxed{1} \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\ 3 \quad \boxed{1} \end{array}$$

et

$$g : \begin{array}{c} \boxed{2} \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \quad 3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \boxed{2} \quad 3 \end{array}$$

Alors h est non projectif en vertu de Lemme 3.2.1 et on a montré dans la remarque précédente que g n'est pas projectif, mais leur composé θ dans (1) est projectif. Constatons que

$$\text{Ext}_A^1 \left(\begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 2 \quad 3 \end{array}, \begin{array}{c} 2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 3 \quad 1 \end{array} \right) = \underline{\text{Hom}}_A \left(S_1, \begin{array}{c} 2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 3 \quad 1 \end{array} \right) \neq 0$$

car le morphisme explicite

$$S_1 \hookrightarrow \begin{array}{c} 2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 3 \quad \boxed{1} \end{array}$$

n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.1.

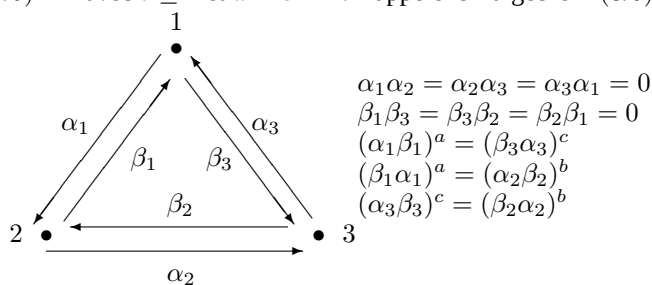
Remarque 3.7.4 On va traiter l'algèbre $D(3\mathcal{K})^{1,b,1}$ avec $b \geq 2$ dans le prochain chapitre. Si $b \geq 2$, la situation devient beaucoup plus compliquée, car

- (1) L'algèbre $D(3\mathcal{K})^{1,b,1}$ avec $b \geq 2$ n'est pas de croissance polynomiale (Lemme 1.8.1).
- (2) Le carquois d'Auslander-Reiten de $D(3\mathcal{K})^{1,b,1}$ avec $b \geq 2$ est plus compliqué celui de $D(3\mathcal{K})^{1,1,1}$. La composante de type $\mathbb{Z}\tilde{A}_{3,3}$ dans le carquois d'Auslander-Reiten de $D(3\mathcal{K})^{1,1,1}$ devient une infinité de composantes de type $\mathbb{Z}A_\infty$ dans le carquois d'Auslander-Reiten de $D(3\mathcal{K})^{1,b,1}$ avec $b \geq 2$.

Chapter 4

Algèbres courtoises et blocs à défaut diédral II

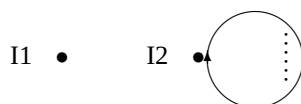
Dans ce chapitre, on traite l'algèbre $D(3\mathcal{K})^{a,b,c}$ avec $b \geq 2$ et $a = c = 1$. Rappelons l'algèbre $D(3\mathcal{K})^{a,b,c}$.

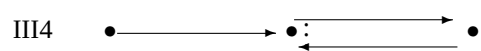
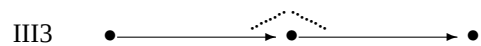
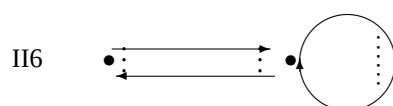
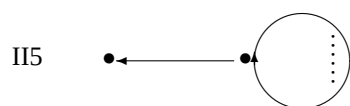
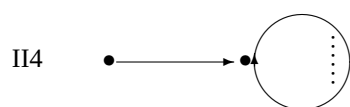
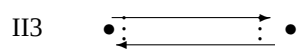
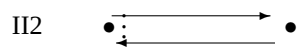


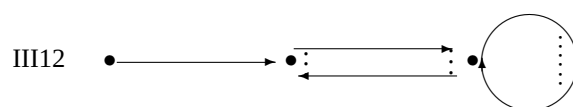
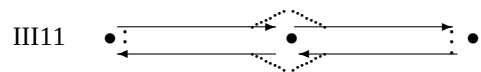
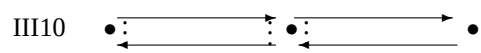
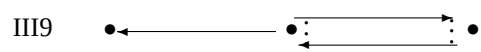
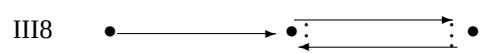
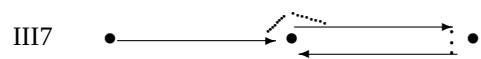
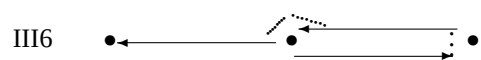
Voici le théorème principal de ce chapitre.

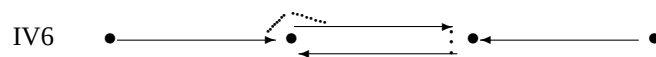
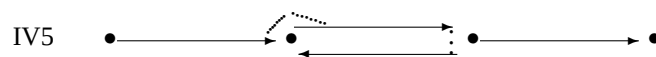
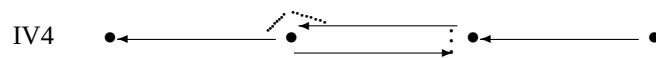
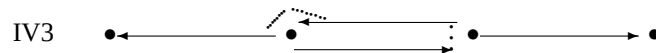
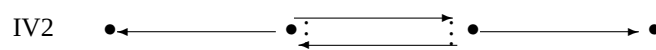
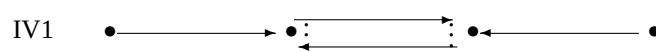
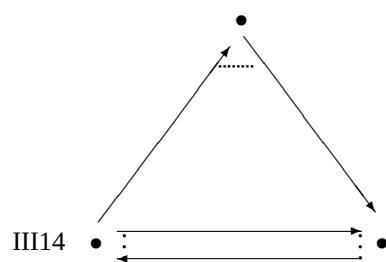
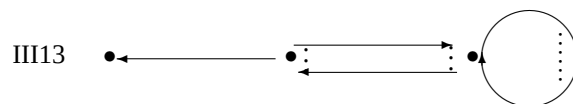
Théorème 4.0.5 Soit M un module sur $D(3\mathcal{K})^{1,b,1}$ avec $b \geq 2$ tel que $\text{Ext}_A^1(M, M) = 0$.

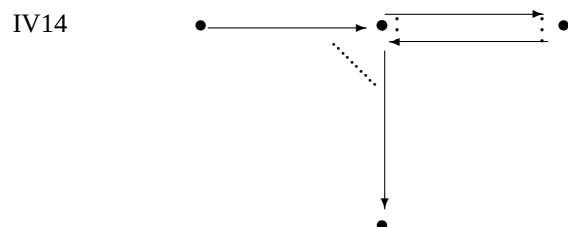
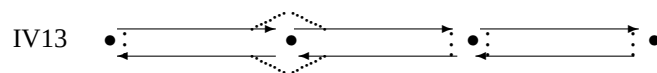
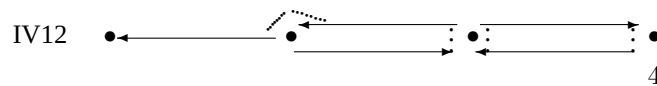
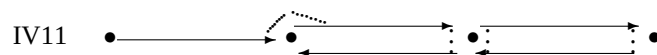
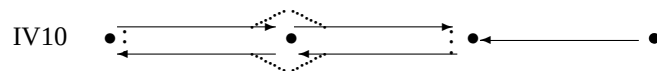
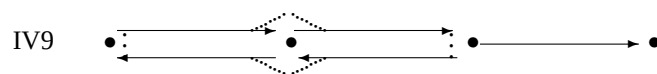
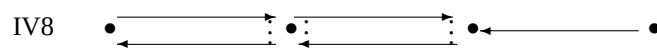
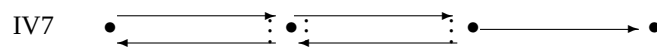
1. M a au plus 6 facteurs directes indécomposables non projectifs non isomorphes.
2. $\underline{\text{End}}_A(M)$ a au plus deux facteurs directe indécomposables, à équivalences de Morita près.
3. tout facteur directe indécomposable de $\underline{\text{End}}_A(M)$ est Morita équivalente à l'une des 65 algèbres courtoises et chaque algèbre apparaît.



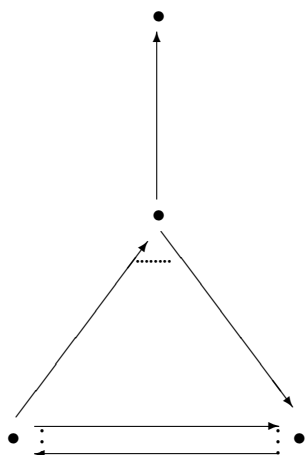




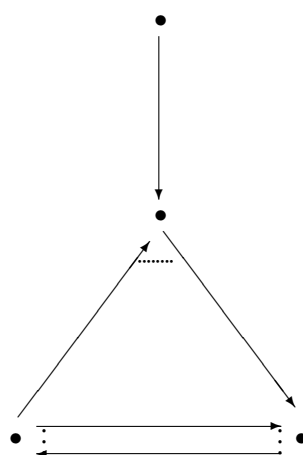




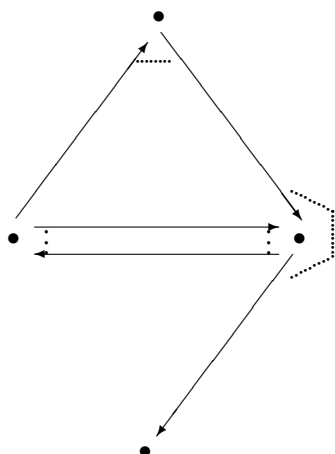
IV15



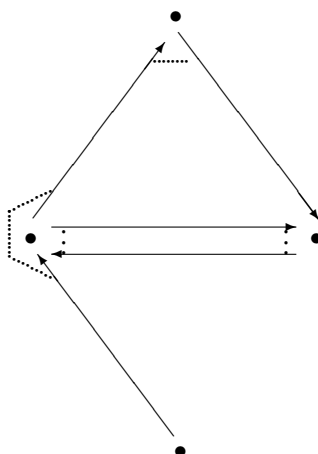
IV16



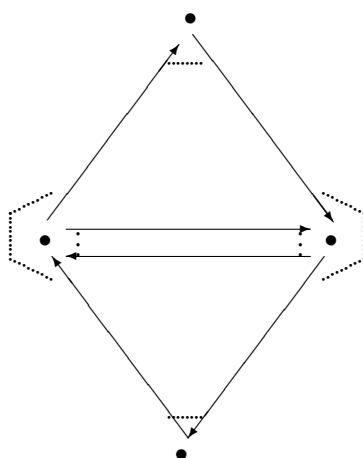
IV17

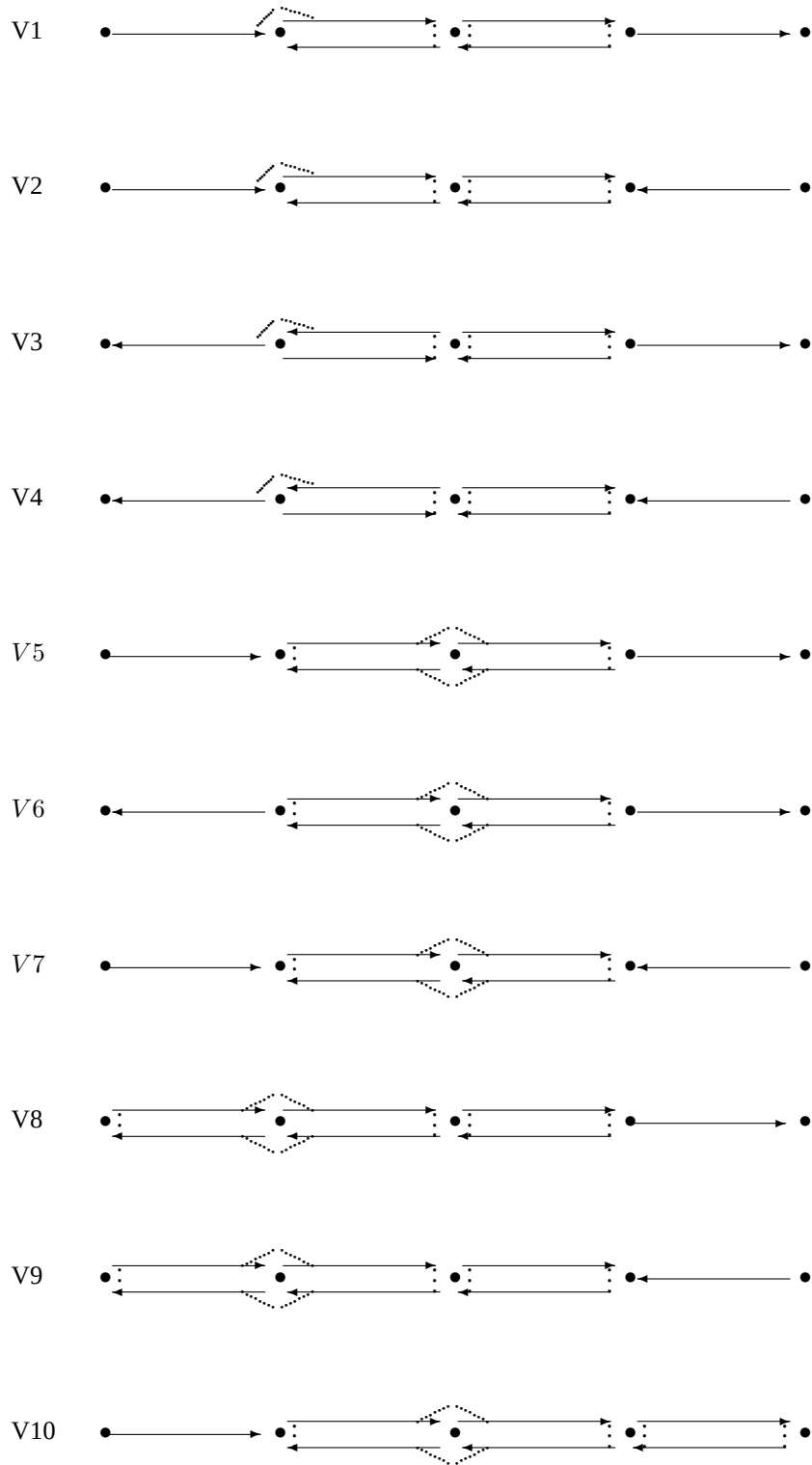


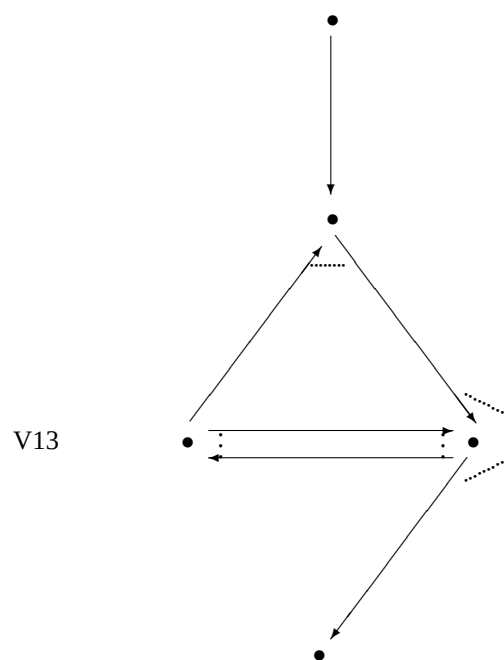
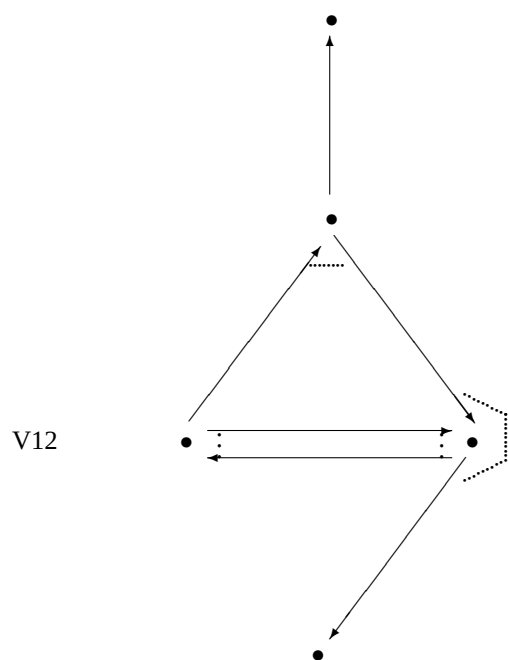
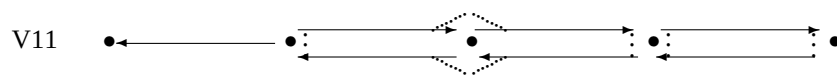
IV18



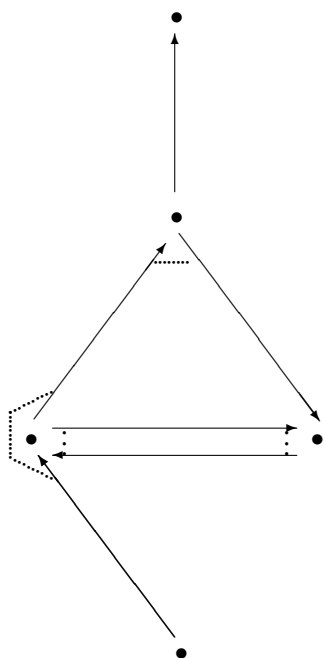
IV19



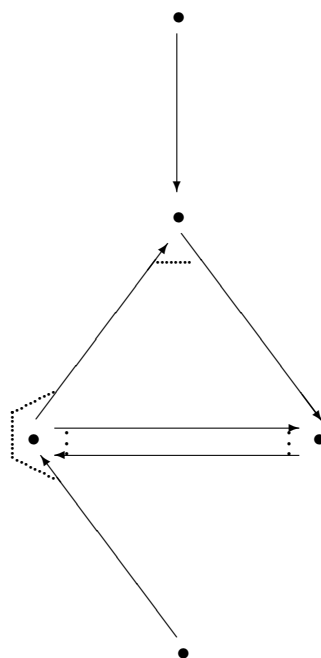




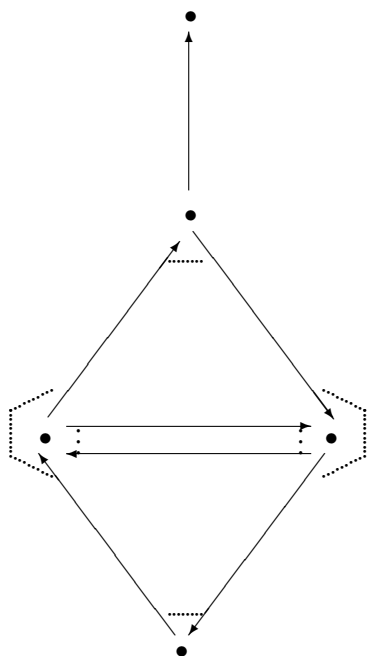
V14



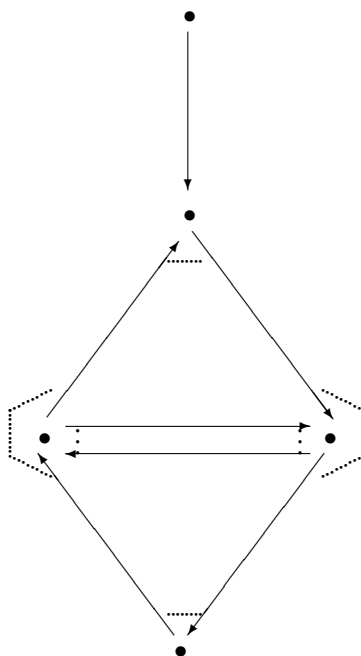
V15

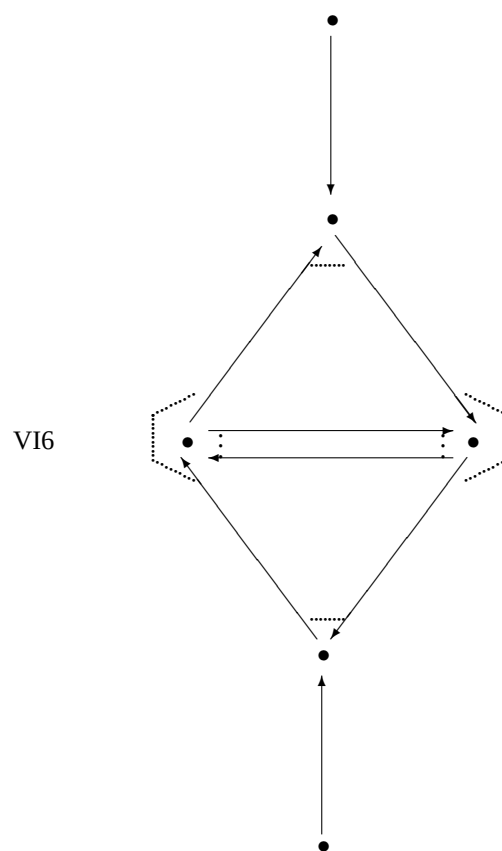
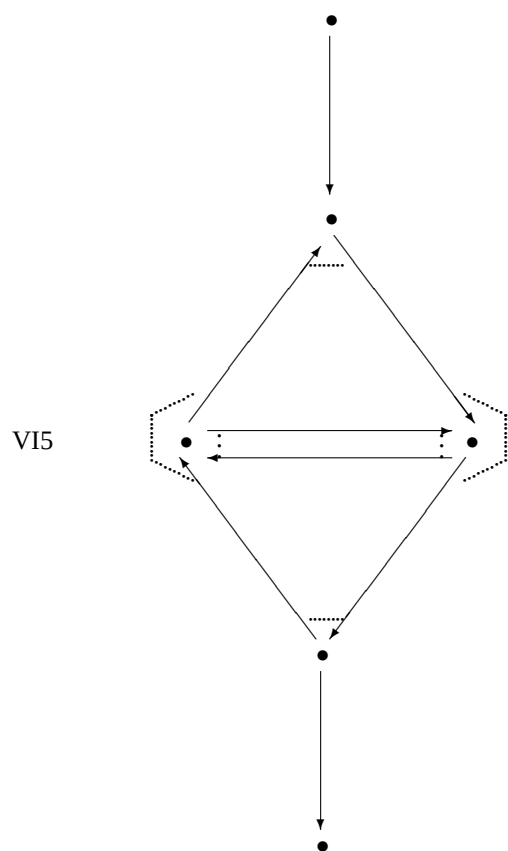
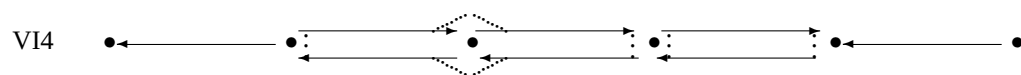
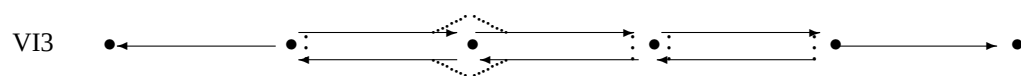
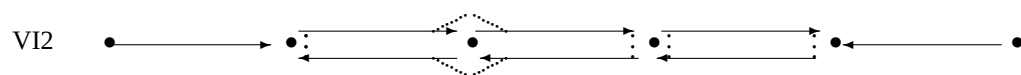
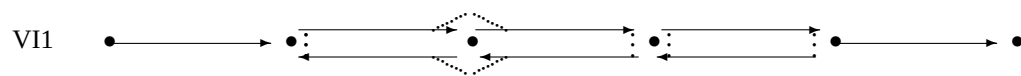


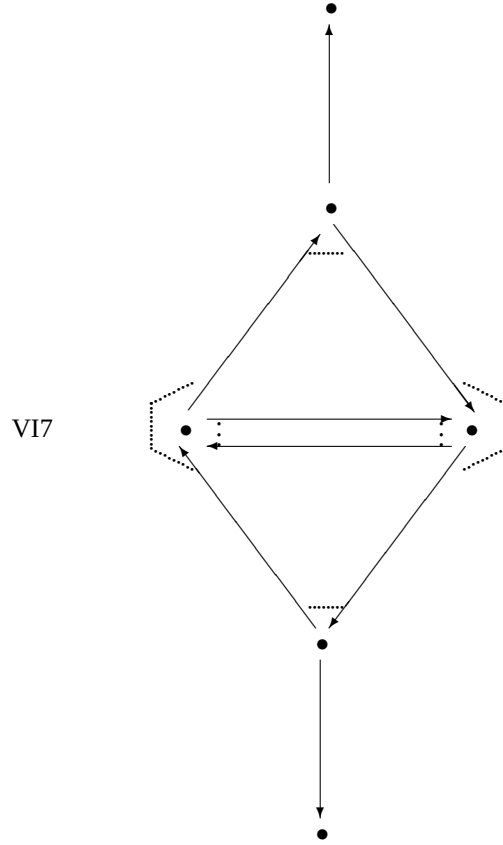
V16



V17







4.1 Modules indécomposables rigides

Dans cette section, on cherche tous les modules rigides indécomposables sur $D(3\mathcal{K})^{1,b,1}$ avec $b \geq 2$.

Introduisons des notations. Désignons par $\begin{smallmatrix} 2 \\ \sim \\ 3 \end{smallmatrix}$ la corde $(\alpha_2\beta_2)^{b-1}\alpha_2$, par $\begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix}$ la corde $(\beta_2\alpha_2)^{b-1}\beta_2$, par $\begin{smallmatrix} 2 \\ \parallel \\ 3 \end{smallmatrix}$ la corde $(\alpha_2\beta_2)^{b-1}$ et par $\begin{smallmatrix} 3 \\ \parallel \\ 2 \end{smallmatrix}$ la corde $(\beta_2\alpha_2)^{b-1}$. Graphiquement, ce sont les cordes de la forme

$$\begin{smallmatrix} 2 \\ \sim \\ 3 \end{smallmatrix} = \begin{array}{c} 2 \\ \alpha_2 \\ 3 \\ \beta_2 \\ 2 \\ \dots \\ 2 \\ \alpha_2 \\ 3 \\ \beta_2 \\ 2 \\ \alpha_2 \\ 3 \end{array}, \quad \begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} = \begin{array}{c} 3 \\ \beta_2 \\ 2 \\ \alpha_2 \\ 3 \\ \dots \\ 3 \\ \beta_2 \\ 2 \\ \alpha_2 \\ 3 \\ \beta_2 \\ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
2 \\
\parallel \\
2 = 2
\end{array}
= \begin{array}{c}
2 \xrightarrow{\alpha_2} 3 \xrightarrow{\beta_2} 2 \cdots 2 \xrightarrow{\alpha_2} 3 \xrightarrow{\beta_2} 2
\end{array}, \quad
\begin{array}{c}
3 \\
\parallel \\
3 = 3
\end{array}
= \begin{array}{c}
3 \xrightarrow{\beta_2} 2 \xrightarrow{\alpha_2} 3 \cdots 3 \xrightarrow{\beta_2} 2 \xrightarrow{\alpha_2} 3
\end{array}$$

Notre résultat principal est

Théorème 4.1.1 Soit M un module indécomposable sur $D(3\mathcal{K})^{1,b,1}$ avec $b \geq 2$. Alors M est rigide ssi il est parmi les modules suivants:

- (1) $\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array}, \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{array}, \begin{array}{c} 2 \\ \sim \\ 3 \end{array}$
- (2) $\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{array}, \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \sim \\ 3 \end{array}, \begin{array}{c} 2 \\ \sim \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array}$
- (3) $\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 1 \end{array}, \begin{array}{c} 3 \\ \sim \\ 2 \end{array}, \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 3 \end{array}$
- (4) $\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \sim \\ 2 \end{array}, \begin{array}{c} 3 \\ \sim \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 3 \end{array}, \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 1 \end{array}$
- (5) $\Omega^n(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array}), n \in \mathbb{Z}$
- (6) $\Omega^n(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 2 \end{array}), n \in \mathbb{Z}$

(7) les modules dans la composante de type $\mathbb{Z}A_\infty^\infty$ contenant S_1 , disons $Q(S_1)$

(8) les modules dans la composante de type $\mathbb{Z}A_\infty^\infty$ contenant S_2 , disons $Q(S_2)$

Pour les modules M de type (1) (3) (7) (8), $\underline{\text{End}}_A(M) = k$, et pour ceux de type (2)(4)(5)(6), $\underline{\text{End}}_A(M) = k[\epsilon]/\epsilon^2$

Définissons les deux fonctions σ et ϵ (voir Section 1.2).

	α_1	β_1	α_2	β_2	α_3	β_3
σ	1	-1	1	1	1	-1
ϵ	1	-1	-1	-1	1	1

Proposition 4.1.2 (Proposition 1.8.7) Le carquois d'Auslander-Reiten de $D(3\mathcal{K})^{1,b,1}$ avec $b \geq 2$ est composé de

- une infinité de 1-tubes
- deux 3-tubes Ω -stables.
- une composante non régulière de type $\mathbb{Z}A_\infty^\infty$ contenant P_2 , P_3 et S_1

- une composante non régulière de type $\mathbb{Z}A_\infty^\infty$ contenant S_2, S_3 et P_1
- une infinité de composantes régulières de type $\mathbb{Z}A_\infty^\infty$

Les modules projectifs indécomposables sont

$$P_1 = \begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 2 \quad 3 \\ \nwarrow \quad \nearrow \\ 1 \end{array}, \quad P_2 = \begin{array}{c} 2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \quad 3 \\ \nwarrow \quad \nearrow \\ 2 \end{array} \quad \text{et} \quad P_3 = \begin{array}{c} 3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \quad 2 \\ \nwarrow \quad \nearrow \\ 3 \end{array}$$

Les suites d'Auslander-Reiten de terme intermédiaire indécomposable sont (voir Théorème 1.6.10(2))

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 2 \end{array} &\rightarrow \begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 2 \end{array} \xrightarrow{\beta_2} \begin{array}{c} 3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \end{array} \rightarrow 0, & 0 \rightarrow \begin{array}{c} 3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \end{array} &\rightarrow \begin{array}{c} 3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \end{array} \xrightarrow{\beta_1} \begin{array}{c} 2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 3 \end{array} \xrightarrow{\sim} \begin{array}{c} 2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 3 \end{array} \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow \begin{array}{c} 2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 3 \end{array} &\xrightarrow{\sim} \begin{array}{c} 2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 3 \end{array} \xrightarrow{\beta_3} \begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 2 \end{array} \rightarrow 0, & 0 \rightarrow \begin{array}{c} 2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \end{array} &\rightarrow \begin{array}{c} 2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \end{array} \xrightarrow{\alpha_3} \begin{array}{c} 3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 2 \end{array} \xrightarrow{\sim} \begin{array}{c} 3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 2 \end{array} \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow \begin{array}{c} 3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 2 \end{array} &\xrightarrow{\sim} \begin{array}{c} 3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 2 \end{array} \xrightarrow{\alpha_1} \begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 3 \end{array} \rightarrow 0, & 0 \rightarrow \begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 3 \end{array} &\rightarrow \begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 3 \end{array} \xrightarrow{\alpha_2} \begin{array}{c} 2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \end{array} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Comme

$$\Omega \left(\begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 2 \end{array} \right) = \begin{array}{c} 3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \end{array}, \quad \Omega \left(\begin{array}{c} 3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \end{array} \right) = \begin{array}{c} 2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 3 \end{array} \quad \text{et} \quad \Omega \left(\begin{array}{c} 2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 3 \end{array} \right) = \begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 2 \end{array},$$

les trois modules $\begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 2 \end{array}$, $\begin{array}{c} 3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \end{array}$ et $\begin{array}{c} 2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 3 \end{array}$ forment l'extrémité d'un 3-tube Ω -stable. De même, les trois modules $\begin{array}{c} 2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \end{array}$, $\begin{array}{c} 3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 2 \end{array}$ et $\begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 3 \end{array}$ forment l'extrémité d'un autre 3-tube Ω -stable. Si on pose

$$C = \begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 2 \end{array}, \quad D = \begin{array}{c} 3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \end{array}, \quad E = \begin{array}{c} 2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 3 \end{array},$$

$$C' = \begin{array}{c} 2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \end{array}, \quad D' = \begin{array}{c} 3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 2 \end{array}, \quad E' = \begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 3 \end{array},$$

alors

$$\begin{aligned} C[1] &= \begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 2 \end{array} \xrightarrow{\quad} \begin{array}{c} 3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \end{array}, \quad D[1] = \begin{array}{c} 3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \end{array} \xrightarrow{\quad} \begin{array}{c} 2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 3 \end{array}, \quad E[1] = \begin{array}{c} 2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 3 \end{array} \xrightarrow{\quad} \begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 2 \end{array} \\ C'[1] &= \begin{array}{c} 2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \end{array} \xrightarrow{\quad} \begin{array}{c} 3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 2 \end{array}, \quad D'[1] = \begin{array}{c} 3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 2 \end{array} \xrightarrow{\quad} \begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 3 \end{array}, \quad E'[1] = \begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 3 \end{array} \xrightarrow{\quad} \begin{array}{c} 2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \end{array} \end{aligned}$$

Pour les notations, voir Définition 1.6.6. On montre, en utilisant Proposition 1.6.11, que

$$\begin{aligned} \Omega(C[n]) &= D[n], \quad \Omega(D[n]) = E[n], \quad \Omega(E[n]) = C[n], \\ \Omega(C'[n]) &= D'[n], \quad \Omega(D'[n]) = E'[n], \quad \Omega(E'[n]) = C'[n] \end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après Théorème 1.6.10, il existe des suites d'Auslander-Reiten de la forme: pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \rightarrow M(C[n]) \rightarrow M(C[n+1]) \oplus M(D[n-1]) \rightarrow M(D[n]) \rightarrow 0$$

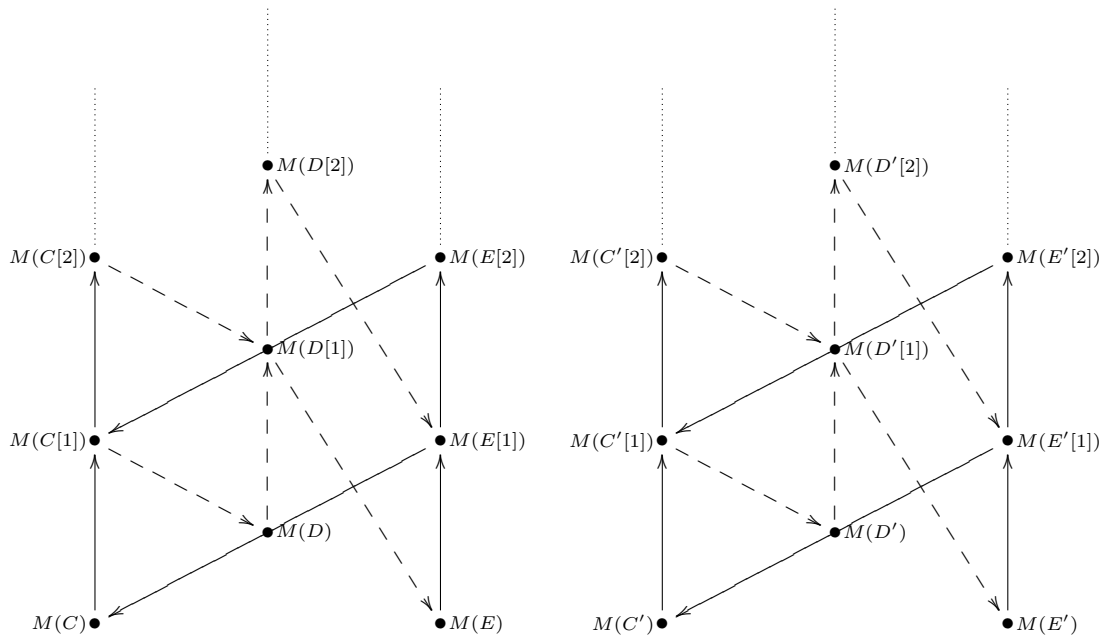
$$0 \rightarrow M(D[n]) \rightarrow M(D[n+1]) \oplus M(E[n-1]) \rightarrow M(E[n]) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow M(E[n]) \rightarrow M(E[n+1]) \oplus M(C[n-1]) \rightarrow M(C[n]) \rightarrow 0$$

où on utilise la convention

$$M(C[-1]) = M(D[-1]) = M(E[-1]) = 0.$$

Ces suites d'Auslander-Reiten forment les deux 3-tubes Ω -stables suivants:



Lemme 4.1.3 Soit M un module dans les deux 3-tubes ci-dessus. Alors

(i) Si M est de quasi-longueur 0 (voir Définition 1.6.5), i.e.

$$M \in \{M(C), M(D), M(E), M(C'), M(D'), M(E')\},$$

alors $\text{Ext}_A^1(M, M) = 0$ et $\underline{\text{End}}_A(M) = k$.

(ii) Si M est de quasi-longueur 1, i.e.

$$M \in \{M(C[1]), M(D[1]), M(E[1]), M(C'[1]), M(D'[1]), M(E'[1])\},$$

alors $\text{Ext}_A^1(M, M) = 0$ et $\underline{\text{End}}_A(M) = k[\epsilon]/\epsilon^2$.

(iii) Si M est de quasi-longueur ≥ 2 , alors $\text{Ext}_A^1(M, M) \neq 0$.

Démonstration (i). Il suffit de regarder $M = \begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix}$ ou $M = \begin{smallmatrix} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{smallmatrix}$, puisque

$$\text{Ext}_A^1(\Omega^i M, \Omega^i M) = \text{Ext}_A^1(M, M) \text{ et } \underline{\text{End}}_A(\Omega^i M) = \underline{\text{End}}_A(M),$$

pour tout module M et tout $i \in \mathbb{Z}$. On montre le cas $M = \begin{smallmatrix} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{smallmatrix}$, l'autre cas étant similaire.

$$\text{Ext}_A^1\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{smallmatrix}\right) = \underline{\text{Hom}}_A\left(\Omega\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \begin{smallmatrix} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{smallmatrix}\right) = \underline{\text{Hom}}_A\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{smallmatrix}\right) = 0$$

car il n'existe pas de morphismes explicites de $\begin{smallmatrix} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{smallmatrix}$ vers $\begin{smallmatrix} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{smallmatrix}$.

Le fait que $\underline{\text{End}}_A(M) = k$ est aussi évident, car à part l'identité, il n'existe pas de morphismes explicites de $\begin{smallmatrix} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{smallmatrix}$ à lui-même.

(ii) Comme dans (i), on peut supposer que $M = \begin{smallmatrix} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{smallmatrix}$. Le seul morphisme explicite

$$\Omega M = \begin{smallmatrix} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{smallmatrix} \nearrow \boxed{2} \searrow \begin{smallmatrix} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{smallmatrix} \sim \rightarrow M = \begin{smallmatrix} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{smallmatrix} \nearrow \boxed{2} \searrow \begin{smallmatrix} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{smallmatrix}$$

est de cœur S_2 , comme illustré dans les deux modules, mais il est projectif car il est le composé

$$\begin{smallmatrix} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{smallmatrix} \searrow \begin{smallmatrix} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{smallmatrix} \sim \rightarrow P_1 = \begin{smallmatrix} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{smallmatrix} \nearrow \boxed{\begin{smallmatrix} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{smallmatrix}} \searrow \begin{smallmatrix} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{smallmatrix} \rightarrow \boxed{\begin{smallmatrix} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{smallmatrix}} \nearrow \begin{smallmatrix} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{smallmatrix}$$

On obtient donc que

$$\text{Ext}_A^1(M, M) = \underline{\text{Hom}}_A(\Omega M, M) = 0.$$

Calculons $\underline{\text{End}}_A(M)$. A part l'identité, il existe un autre morphisme explicite de M à lui-même, noté ϵ ,

$$\epsilon : \begin{smallmatrix} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{smallmatrix} \rightarrow \begin{smallmatrix} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{smallmatrix} \boxed{1}$$

Ce morphisme n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.3 et forme avec l'identité une base de $\underline{\text{End}}_A(M)$.

(iii). Si $n \geq 2$, regardons $C[n]$ et $\Omega C[n] = D[n]$,

$$C[n] = \begin{smallmatrix} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{smallmatrix} \searrow \dots$$

$$D[n] = \begin{smallmatrix} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{smallmatrix} \searrow \begin{smallmatrix} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{smallmatrix} \nearrow \dots \quad \begin{matrix} \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ & & & \end{matrix}$$

En effet, si on pose

$$C_1 = \begin{smallmatrix} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{smallmatrix}, \quad C_2 = \begin{smallmatrix} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{smallmatrix}, \quad C_3 = \begin{smallmatrix} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{smallmatrix}, \quad C_4 = \begin{smallmatrix} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{smallmatrix} \searrow \begin{smallmatrix} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{smallmatrix}, \quad C_5 = \begin{smallmatrix} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{smallmatrix}, \quad C_6 = \begin{smallmatrix} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{smallmatrix}$$

et si on définit que pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $C_m = C_{m'}$ pour $m \equiv m' \pmod{6}$ et $m' \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, alors

$$C[n] = C_1 C_2 \cdots C_{2n+1}, \quad D[n] = C_3 C_4 \cdots C_{2n+3}$$

et la partie en boîte dans $D[n]$ est

$$C_7 \cdots C_{2n+3} = C_1 \cdots C_{2n-3}.$$

On a donc un morphisme explicite

$$M(D[n]) \rightarrow M(C_7 \cdots C_{2n+3}) \cong M(C_1 \cdots C_{2n-3}) \hookrightarrow M(C)$$

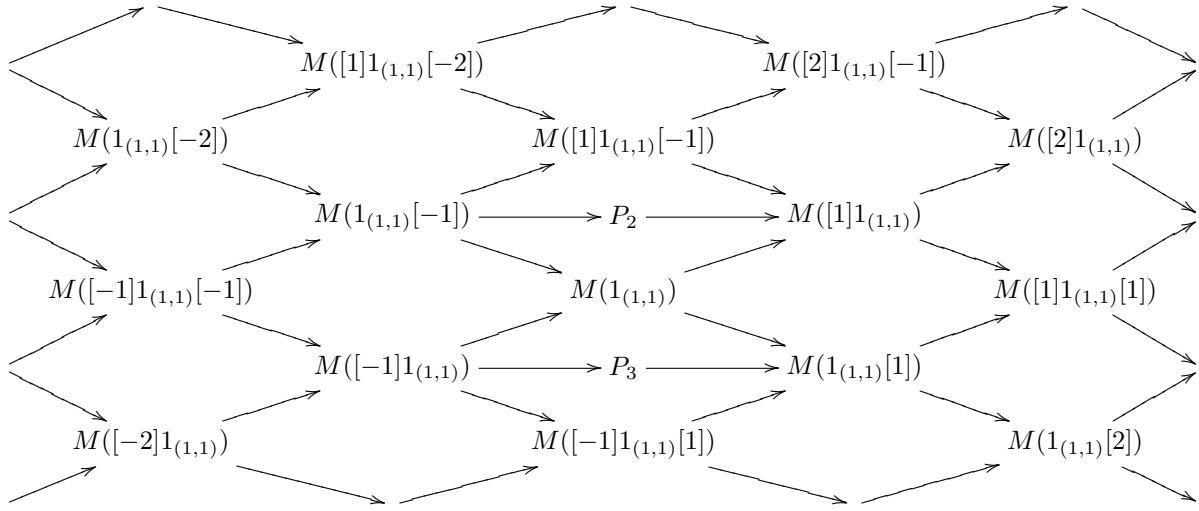
qui n'est pas projectif, d'après Lemme 3.2.1. On obtient donc que

$$\text{Ext}_A^1(M(C[n]), M(C[n])) = \underline{\text{Hom}}_A(\Omega(M(C[n])), M(C[n])) = \underline{\text{Hom}}_A(M(D[n]), M(C[n])) \neq 0$$

□

Il existe deux composantes non régulières.

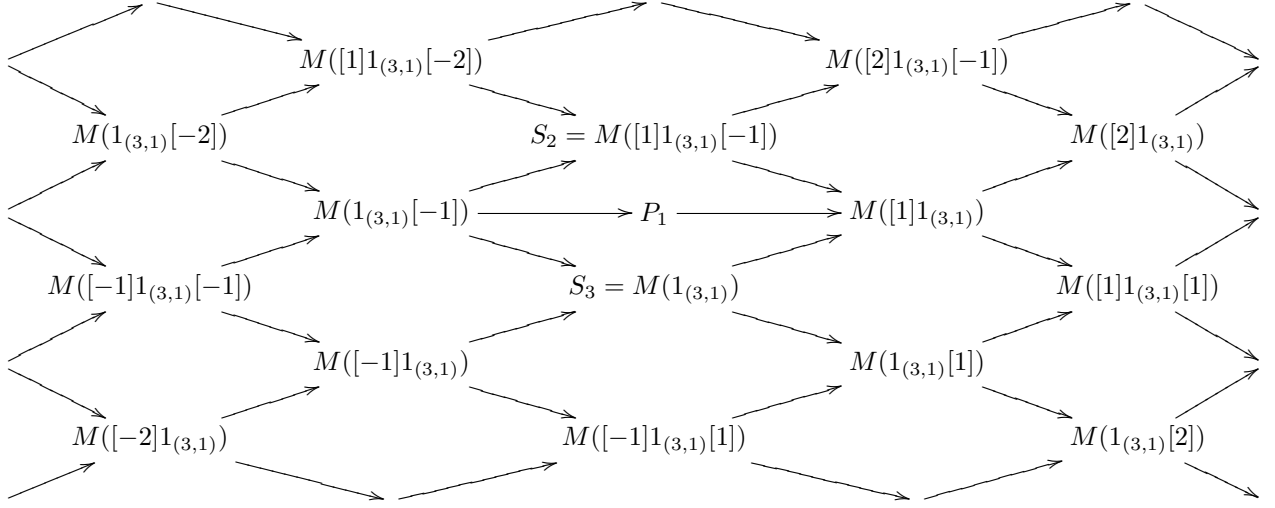
La première composante est celle contenant $S_1 = M(1_{(1,1)})$. Sa forme est



où

$$1_{(1,1)}[1] = \begin{array}{c} 3 \\ \nearrow \quad \searrow \\ 1 \quad 2 \end{array}, \quad 1_{(1,1)}[-1] = \begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \searrow \quad \nearrow \\ 2 \end{array}, \quad [1]1_{(1,1)} = \begin{array}{c} 2 \\ \nearrow \quad \searrow \\ 3 \quad 1 \end{array}, \quad [-1]1_{(1,1)} = \begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \searrow \quad \nearrow \\ 3 \end{array}$$

L'autre composante est celle contenant $S_3 = M(1_{(3,1)})$.



où

$$1_{(3,1)}[1] = \begin{array}{c} 2 \\ \swarrow \searrow \\ 3 \quad 1 \end{array}, \quad 1_{(3,1)}[-1] = \begin{array}{c} 3 \\ \swarrow \searrow \\ 1 \quad 2 \end{array}, \quad [1]1_{(3,1)} = \begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \searrow \\ 2 \quad 3 \end{array},$$

$$[-1]1_{(3,1)} = \begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \searrow \\ 2 \quad 3 \end{array}, \quad [1]1_{(3,1)}[-2] = \begin{array}{c} 2 \\ \swarrow \searrow \\ 3 \quad 1 \end{array}, \quad [2]1_{(3,1)}[-1] = \begin{array}{c} 3 \\ \swarrow \searrow \\ 1 \quad 2 \end{array}$$

Proposition 4.1.4 Soit M un module indécomposable dans $Q(S_1) \cup Q(S_2)$. Alors on a $\text{Ext}_A^1(M, M) = 0$ et $\text{End}_A(M) = k$.

Avant de donner la preuve de cette proposition, introduisons des notations. Posons

$$C_1 = \begin{array}{c} 3 \\ \swarrow \searrow \\ 1 \quad 2 \end{array}, \quad C_2 = \begin{array}{c} 3 \\ \swarrow \searrow \\ 2 \quad 1 \end{array}, \quad C_3 = \begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \searrow \\ 2 \quad 3 \end{array}, \quad C_4 = \begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \searrow \\ 3 \quad 2 \end{array}, \quad C_5 = \begin{array}{c} 2 \\ \swarrow \searrow \\ 3 \quad 1 \end{array}, \quad C_6 = \begin{array}{c} 2 \\ \swarrow \searrow \\ 1 \quad 3 \end{array}$$

et définissons que tout $m \in \mathbb{Z}$, $C_s = C_{s'}$ pour $s \equiv s' \pmod{6}$ et $s' \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Alors

$$P_3 = \begin{array}{c} 3 \\ \swarrow \searrow \\ 1 \quad 2 \\ \swarrow \searrow \\ 3 \end{array} = \begin{array}{c} C_1 \quad C_2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ C_4 \quad C_5 \end{array}, \quad P_1 = \begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \searrow \\ 2 \quad 3 \\ \swarrow \searrow \\ 1 \end{array} = \begin{array}{c} C_3 \quad C_4 \\ \swarrow \quad \searrow \\ C_6 \quad C_1 \end{array} \quad \text{et} \quad P_2 = \begin{array}{c} 2 \\ \swarrow \searrow \\ 3 \quad 1 \\ \swarrow \searrow \\ 2 \end{array} = \begin{array}{c} C_5 \quad C_6 \\ \swarrow \quad \searrow \\ C_2 \quad C_3 \end{array}$$

Constatons que tout chemin maximal dans les modules projectifs indécomposables est composé de deux cordes $C_i C_{i+3}$ pour $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (où on prend les indices modulo 6).

Lemme 4.1.5 Supposons que $C = C_i C_{i+1} \cdots C_{i+n}$ avec $i \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors $D = \Omega(C)$ est de la forme suivante:

- (i) si C_i et C_{i+n} sont inverses, alors $D = C_{i+4} \cdots C_{i+n+4}$.
- (ii) si C_i et C_{i+n} sont directes, alors $D = C_{i+2} \cdots C_{i+n+2}$.

(iii) si C_i est inverse et C_{i+n} est directe, alors si $n = 1$, $D = C_i \cap C_{i+1}$ et si $n \geq 2$, $D = C_{i+4} \cdots C_{i+n+2}$.

(iv) si C_i est directe et C_{i+n} est inverse, alors $D = C_{i+2} \cdots C_{i+n+4}$.

Démonstration Il suffit de regarder les structures des modules projectifs indécomposables P_i avec $1 \leq i \leq 3$ et ce lemme est une conséquence immédiate de Proposition 1.4.6. $\square$

Posons

$$C'_1 = \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 1 \end{array}, C'_2 = \begin{array}{c} \sim 2 \\ \diagup \\ 3 \end{array}, C'_3 = \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 3 \end{array}, C'_4 = \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ 2 \end{array}, C'_5 = \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 2 \end{array}, C'_6 = \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ 1 \end{array}$$

et définissons que tout $m \in \mathbb{Z}$, $C'_m = C'_{m'}$ pour $m \equiv m' \pmod{6}$ et $m' \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Alors

$$P_2 = \begin{array}{ccc} & 2 & \\ \sim & \diagdown & \\ 3 & & 1 \\ & \diagup & \\ & 2 & \end{array} = \begin{array}{ccc} & C'_2 & C'_1 \\ & \diagdown & \diagup \\ & C'_5 & C'_4 \end{array}, P_1 = \begin{array}{ccc} & 1 & \\ & \diagdown & \\ 2 & & 3 \\ & \diagup & \\ & 1 & \end{array} = \begin{array}{ccc} & C'_4 & C'_3 \\ & \diagdown & \diagup \\ & C'_1 & C'_6 \end{array} \text{ et } P_3 = \begin{array}{ccc} & 3 & \\ & \diagdown & \\ 1 & & 2 \\ & \diagup & \\ & 3 & \end{array} = \begin{array}{ccc} & C'_6 & C'_5 \\ & \diagdown & \diagup \\ & C'_3 & C'_2 \end{array}$$

Constatons que tout chemin maximal dans les modules projectifs indécomposables est composé de deux cordes $C'_i C'_{i+3}$ pour $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Comme d'habitude, on prend les indices modulo 6.

Lemme 4.1.6 Supposons que $C' = C'_{j+m} C'_{j+m-1} \cdots C'_j$ avec $j \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}$. Alors $D' = \Omega(C')$ est de la forme suivante:

- (i) si C'_{j+m} et C'_j sont inverses, alors $D' = C'_{j+m+2} \cdots C'_{j+2}$.
- (ii) si C'_{j+m} et C'_j sont directes, alors $D' = C'_{j+m+4} \cdots C'_{j+n+4}$.
- (iii) si C'_{j+m} est inverse et C'_j est directe, alors si $m = 1$, $D' = C'_{j+1} \cap C'_j$ et si $m \geq 2$, $D' = C'_{j+m+2} \cdots C'_{j+2}$.
- (iv) si C'_{j+m} est directe et C'_j est inverse, alors $D' = C'_{j+m+4} \cdots C'_{j+2}$.

Démonstration Il suffit de regarder les structures des modules projectifs indécomposables P_i avec $1 \leq i \leq 3$ et ce lemme est aussi une conséquence immédiate de Proposition 1.4.6. $\square$

Preuve de Proposition 4.1.4 Comme les deux composantes sont Ω -isomorphes, on n'a besoin que de traiter $Q(S_1)$. Comme $\tau = \Omega^2$ pour une algèbre symétrique et par conséquent,

$$\text{Ext}_A^1(\tau M, \tau M) = \text{Ext}_A^1(\Omega^2 M, \Omega^2 M) = \text{Ext}_A^1(M, M),$$

il suffit de regarder les modules $M(1_{(1,1)}[n])$ avec $n \geq 0$ et les modules $M([m]1_{(1,1)})$ avec $m > 0$, puisque tout module dans ces composantes est un syzygy d'un certain module de la forme $M(1_{(1,1)}[n])$ avec $n \geq 0$ ou $M([m]1_{(1,1)})$ avec $m > 0$.

Considérons d'abord les modules $M(1_{(1,1)}[n])$ avec $n \geq 0$.

- (1) Si $n = 0$, $M = S_1$ et $\Omega M = \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \diagup \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ 1 \end{array}$. Il n'existe pas de morphismes explicites de ΩM vers M et donc

$$\text{Ext}_A^1(M, M) = \underline{\text{Hom}}_A(\Omega M, M) = 0.$$

- (2) Si $n = 1$, $M = M(1_{(1,1)}[1]) = \begin{smallmatrix} & 3 & \\ 1 & \nearrow & \nwarrow 2 \end{smallmatrix} \sim$ et $\Omega M = S_3$. Il n'existe pas morphismes explicites de ΩM vers M . On en déduit que

$$\text{Ext}_A^1(M, M) = \underline{\text{Hom}}_A(\Omega M, M) = 0.$$

- (3) Pour $n \geq 2$,

$$1_{(1,1)}[n] = C = C_1 C_2 \cdots C_{2n}$$

et donc

$$\Omega C = D = C_5 C_6 \cdots C_{2n+2},$$

d'après Lemme 4.1.5. Les cordes C et D sont de la forme

$$C = \begin{smallmatrix} & 3 & & 1 & & 2 & & 3 & & 1 & & 2 & & \cdots \\ 1 & \nearrow & \nwarrow 2 & \nearrow & \nwarrow 3 & \nearrow & \nwarrow 1 & \nearrow & \nwarrow 2 & \nearrow & \nwarrow 3 & \nearrow & \nwarrow 1 & \nearrow & \cdots \end{smallmatrix}$$

$$D = \begin{smallmatrix} & 2 & & 3 & & 1 & & 2 & & 3 & & \cdots \\ 3 & \nearrow & \nwarrow 1 & \nearrow & \nwarrow 2 & \nearrow & \nwarrow 3 & \nearrow & \nwarrow 1 & \nearrow & \nwarrow 2 & \nearrow & \nwarrow 3 & \nearrow & \cdots \end{smallmatrix}$$

J'affirme que le cœur d'un morphisme explicite de $\Omega M(C) = M(D)$ vers $M(C)$ est parmi

$$\{S_1, S_2, S_3, (\beta_2 \alpha_2)^s \beta_2 = \begin{smallmatrix} & 3 & \\ & \nearrow & \nwarrow 2 \end{smallmatrix}, \text{ avec } 0 \leq s \leq b-2\}.$$

En effet, d'après les descriptions des sous-cordes explicites (voir Proposition 1.5.5) et des quotient explicites (voir Proposition 1.5.6), les sous-cordes explicites de C sont

- (i) S_1, S_2, S_3
- (ii) $\begin{smallmatrix} a & \\ & \nearrow & \nwarrow 2 \end{smallmatrix}$ avec $a \in \{2, 3\}$ qui est une sous-corde explicite de $\begin{smallmatrix} 2 & \\ & \nearrow & \nwarrow 2 \end{smallmatrix}$ et qui est de longueur strictement positive.
- (iii) $C_{[s,t]} = C_{s+1} \cdots C_t$ avec $0 \leq s < t \leq 2n$ et s, t paires.
- (iv) $\left(\begin{smallmatrix} a & \\ & \nearrow & \nwarrow 2 \end{smallmatrix} \right) C_{6s+3} \cdots C_t$ avec $0 \leq 6s+2 < t \leq 2n$ et t paire, où $\begin{smallmatrix} a & \\ & \nearrow & \nwarrow 2 \end{smallmatrix}$ est une sous-corde explicite de $\begin{smallmatrix} 2 & \\ & \nearrow & \nwarrow 2 \end{smallmatrix}$ et est de longueur strictement positive.

et les quotients explicites de D sont

- (i) S_1, S_2, S_3
- (ii) $\begin{smallmatrix} 3 & \\ & \nearrow & \nwarrow b \end{smallmatrix}$ avec $b \in \{2, 3\}$ qui est un quotient explicite de $\begin{smallmatrix} 3 & \\ & \nearrow & \nwarrow 3 \end{smallmatrix}$ et qui est de longueur strictement positive.
- (iii) $D_{[s,t]} = C_{s+1} \cdots C_t$ avec $4 \leq s < t \leq 2n+2$ tels que ou bien (s, t) soient impaires) ou bien $(s = 4$ et t soit impaire) ou bien $(s$ soit impaire et $t = 2n+2)$.

(iv) $C_s \cdots C_{6t+1} \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \vdots \\ b \end{smallmatrix} \right)$ avec $5 \leq s < 6t + 2 \leq 2n + 2$ tel que s soit paire ou $s = 5$ où $\begin{smallmatrix} 3 \\ \vdots \\ b \end{smallmatrix}$ est un quotient explicite de $\begin{smallmatrix} 3 \\ \vdots \\ 3 \end{smallmatrix}$ et est de longueur strictement positive.

Comme le cœur d'un morphisme explicite de $M(D)$ à $M(C)$ est à la fois un quotient explicite de $M(D)$ et une sous-corde explicite de $M(C)$, on voit facilement l'affirmation.

Etant donné un morphisme explicite de $M(D)$ à $M(C)$ de cœur $(\beta_2 \alpha_2)^s \beta_2 = \begin{smallmatrix} 3 \\ \vdots \\ 2 \end{smallmatrix}$ avec $0 \leq s \leq b - 2$, on le factorise par P_3 via

$$M(D) = \cdots \begin{smallmatrix} 3 \\ \vdots \\ 2 \end{smallmatrix} \sim \begin{smallmatrix} 1 \\ \vdots \\ 2 \end{smallmatrix} \cdots = \cdots \begin{smallmatrix} 3 \\ \vdots \\ 2 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 2 \\ \vdots \\ 3 \end{smallmatrix} \cdots \rightarrow P_3 = \begin{smallmatrix} 3 \\ \vdots \\ 2 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 2 \\ \vdots \\ 3 \end{smallmatrix} \rightarrow \cdots \begin{smallmatrix} 3 \\ \vdots \\ 2 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 2 \\ \vdots \\ 3 \end{smallmatrix} \cdots = \cdots \begin{smallmatrix} 3 \\ \vdots \\ 2 \end{smallmatrix} \sim \begin{smallmatrix} 1 \\ \vdots \\ 2 \end{smallmatrix} \cdots = M(C)$$

où l'intersection des deux boîtes dans P_3 est $(\beta_2 \alpha_2)^s \beta_2 = \begin{smallmatrix} 3 \\ \vdots \\ 2 \end{smallmatrix}$.

Soit $f : \Omega M \rightarrow M$ un morphisme explicite de cœur $E = S_i$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$. Notons $s = \text{Pos}_D(E)$ et $t = \text{Pos}_C(E)$, alors s est impaire, t est paire et $s + 3 \equiv t \pmod{6}$.

(i) Si $s \leq t + 3$, alors f est le composé

$$M(D) \twoheadrightarrow M(D_{[4,s]}) \hookrightarrow I(M(D_{[4,s]})) \twoheadrightarrow M(C_{[t-s+3,t]}) \hookrightarrow M(C)$$

où $I(M(D_{[4,s]}))$ est l'enveloppe injective de $M(D_{[4,s]})$ qui est aussi projectif, puisque A est une algèbre auto-injective voire symétrique. En effet,

$$D_{[4,s]} = C_5 \cdots C_s \text{ et } C_{[t-s+3,t]} = C_{t-s+4} \cdots C_t.$$

Comme $s + 3 \equiv t \pmod{6}$, $(t - s + 4) + 4 \equiv 5 \pmod{6}$ et $t + 2 \equiv s - 1 \pmod{6}$. Comme C_{t-s+4} est inverse et C_t est directe, Lemme 4.1.5 implique que

$$\Omega C_{[t-s+3,t]} = \Omega(C_{t-s+4} \cdots C_t) = C_{(t-s+4)+4} \cdots C_{t+2} = C_5 \cdots C_{s-1} = D_{[4,s-1]}$$

La situation peut être visualisée comme suit:

$$C_{[t-s+3,t]} = \begin{array}{c} C_{t-s+4} \diagup \diagdown \diagup \diagdown \cdots \diagup \diagdown \diagup \diagdown C_t \\ \bullet \\ E \end{array}$$

$$D_{[4,s]} = \begin{array}{c} C_5 \diagup \diagdown \diagup \diagdown \cdots \diagdown \diagup \diagdown C_s \\ \bullet \\ E \end{array}$$

(ii) Si $s > t + 3$, alors f est le composé

$$M(D) \twoheadrightarrow M(D_{[s, 2n+2]}) \hookrightarrow I(M(D_{[s, 2n+2]})) \twoheadrightarrow M(C_{[t, t+2n+3-s]}) \hookrightarrow M(C)$$

où $I(M(D_{[s, 2n+2]}))$ est l'enveloppe injective de $M(D_{[s, 2n+2]})$ qui est aussi projectif, puisque A est une algèbre auto-injective. En effet,

$$D_{[s, 2n+2]} = C_{s+1} \cdots C_{2n+2} \text{ et } C_{[t, t+2n+3-s]} = C_{t+1} \cdots C_{t+2n+3-s}.$$

Comme $s + 3 \equiv t \pmod{6}$, $(t + 1) + 4 \equiv s + 2 \pmod{6}$ et $(t + 2n + 3 - s) + 2 \equiv 2n + 2 \pmod{6}$. Comme C_{t+1} est inverse et $C_{t+2n+3-s}$ est directe, Lemme 4.1.5 implique que

$$\Omega C_{[t, t+2n+3-s]} = \Omega(C_{t+1} \cdots C_{t+2n+3-s}) = C_{(t+1)+4} \cdots C_{(t+2n+3-s)+2} = C_{s+2} \cdots C_{2n+2} = D_{[s+1, 2n+2]}.$$

La situation peut être visualisée comme suit:

$$\begin{aligned} C_{[t, t+2n+3-s]} &= \begin{array}{c} C_{t+1} \diagup \diagdown \diagup \diagdown \cdots \diagup \diagdown \diagup \diagdown C_{t+2n+3-s} \\ E \bullet \end{array} \\ D_{[s, 2n+2]} &= \begin{array}{c} E \bullet \\ C_{s+1} \diagdown \diagup \diagdown \diagup \cdots \diagdown \diagup \diagdown C_{2n+2} \end{array} \end{aligned}$$

Considérons ensuite les modules $M = M([m]1_{(1,1)})$ avec $m > 0$.

- (4) Si $m = 1$, $M = \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \diagup \diagdown 1 \end{smallmatrix}$, alors $\Omega M = S_2$. Il n'existe pas de morphismes explicites de $\Omega M = S_2$ à M et donc $\text{Ext}_A^1(M, M) = \underline{\text{End}}_A(\Omega M, M) = 0$.
- (5) Si $m \geq 2$, $[m]1_{(1,1)} = C' = C'_{2m} \cdots C'_1$ et donc $\Omega C' = D' = C'_{2m+2} \cdots C'_5$ d'après Lemme 4.1.6. D'après les descriptions des sous-cordes explicites (voir Proposition 1.5.5) et des quotient explicites (voir Proposition 1.5.6), le cœur d'un morphisme explicite de $\Omega M(C') = M(D')$ vers $M(C')$ est parmi

$$\{S_1, S_2, S_3, ((\alpha_2 \beta_2)^s \alpha_2)^{-1} = \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \cdots \end{smallmatrix}, \text{ avec } 0 \leq s \leq b-2\}.$$

Etant donné un morphisme explicite de $M(D')$ à $M(C')$ de cœur

$$((\alpha_2 \beta_2)^s \alpha_2)^{-1} = \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \cdots \end{smallmatrix}, \text{ avec } 0 \leq s \leq b-2,$$

on le factorise par P_2 via

$$\Omega M = \cdots \begin{array}{c} \cdots \diagdown 3 \cdots \end{array} \begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{c} 2 \\ \diagup \diagdown 3 \end{array}} \cdots \end{array} \rightarrow P_2 = \begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{c} 2 \\ \diagup \diagdown 3 \\ \diagdown \diagup 2 \\ \diagup \diagdown 3 \\ \diagdown \diagup 2 \end{array}} \end{array} \rightarrow M = \cdots \begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{c} 2 \\ \diagup \diagdown 3 \\ \diagdown \diagup 2 \\ \diagup \diagdown 3 \\ \diagdown \diagup 2 \end{array}} \cdots \end{array}$$

où l'intersection des deux boîtes dans P_2 est $((\alpha_2\beta_2)^s\alpha_2)^{-1} = \begin{smallmatrix} & 2 \\ & \vdots \\ 3 \end{smallmatrix}$, avec $0 \leq s \leq b-2$.

Soit $f : \Omega M \rightarrow M$ un morphisme explicite de cœur $E = S_i$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$. Notons $s = \text{Pos}_{D'}(E)$, i.e. $E = C'_{s+1} \cap C'_s$ dans D' et $t = \text{Pos}_{C'}(E)$, i.e. $E = C'_{t+1} \cap C'_t$ dans C' , alors s est impaire, t est paire et $s+3 \equiv t \pmod{6}$.

(i) Si $s \leq t+3$, alors f est le composé

$$M(D') \twoheadrightarrow M(D'_{[s,4]}) \hookrightarrow I(M(D'_{[s,4]})) \twoheadrightarrow M(C'_{[t,t-s+3]}) \hookrightarrow M(C')$$

où $I(M(D'_{[s,4]}))$ est l'enveloppe injective de $M(D'_{[s,4]})$ qui est aussi projectif, puisque A est une algèbre auto-injective. En effet,

$$D'_{[s,4]} = C'_s \cdots C'_5, \text{ et } C'_{[t,t-s+3]} = C'_t \cdots C'_{t-s+4}.$$

Comme $s+3 \equiv t \pmod{6}$, $t+2 \equiv s-1 \pmod{6}$ et $(t-s+4)+4 \equiv 5 \pmod{6}$. Comme C'_t est inverse et C'_{t-s+3} est directe, Lemme 4.1.6 implique que

$$\Omega C'_{[t,t-s+3]} = \Omega(C'_t \cdots C'_{t-s+3}) = C'_{t+2} \cdots C'_{(t-s+4)+4} = C'_{s-1} \cdots C'_5 = D'_{[s-1,5]}.$$

La situation peut être visualisée comme suit:

$$\begin{array}{c} C'_{[t,t-s+3]} = \begin{array}{c} C'_t \diagup \diagdown \diagup \diagdown \cdots \diagup \diagdown \diagup \diagdown C'_{t-s+4} \\ \bullet \\ E \end{array} \\ \\ D'_{[s,4]} = \begin{array}{c} \bullet \\ E \\ C'_s \diagdown \diagup \diagdown \diagup \cdots \diagdown \diagup \diagdown C'_5 \end{array} \end{array}$$

(ii) Si $s > t+3$, alors f est le composé

$$M(D') \twoheadrightarrow M(D'_{[2m+2,s]}) \hookrightarrow I(M(D'_{[2m+2,s]})) \twoheadrightarrow M(C'_{[t-s+2m+3,t]}) \hookrightarrow M(C')$$

où $I(M(D'_{[2m+2,s]}))$ est l'enveloppe injective de $M(D'_{[2m+2,s]})$ qui est aussi la couverture projective de $M(C'_{[t-s+2m+3,t]})$,

$$D'_{[2m+2,s]} = C'_{2m+2} \cdots C'_{s+1} \text{ et } C'_{[t-s+2m+3,t]} = C'_{t-s+2m+3} \cdots C'_{t+1}.$$

Comme $s+3 \equiv t \pmod{6}$, $(t-s+2m+3)+2 \equiv 2m+2 \pmod{6}$ et $(t+1)+4 \equiv s+2 \pmod{6}$. Comme $C'_{t-s+2m+3}$ est inverse et C'_{t+1} est directe, Lemme 4.1.6 implique que

$$\Omega C'_{[t-s+2m+3,t]} = \Omega(C'_{t-s+2m+3} \cdots C'_{t+1}) = C'_{(t-s+2m+3)+2} \cdots C'_{(t+1)+4} = C'_{2m+2} \cdots C'_{s+2} = C'_{[2m+2,s+1]}.$$

La situation peut être visualisée comme suit:

$$\begin{array}{c} C'_{[t-s+2m+3,t]} = \begin{array}{c} C'_{t-s+2m+3} \diagup \diagdown \diagup \diagdown \cdots \diagup \diagdown \diagup \diagdown C'_{t+1} \\ \bullet \\ E \end{array} \\ \\ D'_{[2m+2,s]} = \begin{array}{c} C'_{2m+2} \diagup \diagdown \diagup \diagdown \cdots \diagup \diagdown \diagup \diagdown C'_{s+1} \\ \bullet \\ E \end{array} \end{array}$$

On a montré donc que $\text{Ext}_A^1(M, M) = 0$ pour tout $M \in Q(S_1) \cup Q(\Omega S_1)$. On montre ensuite que $\underline{\text{End}}_A(M) = k$ pour tout $M \in Q(S_1) \cup Q(\Omega S_1)$.

Considérons d'abord les modules $M = M(1_{(1,1)}[n])$ avec $n \geq 0$.

- (1) Si $n = 1$, alors $M = S_1$ et $\underline{\text{End}}_A S_1 = k$ est évidente.
- (2) Supposons que $n \geq 2$ et notons $C = 1_{(1,1)}[n]$. En utilisant les descriptions des sous-cordes explicites et des quotients explicites ci-dessus, le cœur d'un morphisme explicite de $M(C)$ vers $M(C)$ est parmi

$$\{S_1, S_2, S_2, (\beta_2 \alpha_2)^s \beta_2 = \begin{array}{c} 3 \\ \searrow \\ 2 \end{array} \text{ avec } 0 \leq s \leq b-2\}.$$

Comme ci-dessus, un morphisme explicite de cœur $(\beta_2 \alpha_2)^s \beta_2 = \begin{array}{c} 3 \\ \searrow \\ 2 \end{array}$ factorise par P_3 .

Soit $f : M \rightarrow M$ un morphisme explicite de cœur $E = S_i$ avec $i \in \{1, 2, 3\}$. Notons s la position de E dans la source C et t celle dans le but C , alors s est impaire, t est paire et $s + 3 \equiv t \pmod{6}$.

- (i) Si $s < t$, f est projectif via

$$M(C) \twoheadrightarrow M(C_{[0,s]}) \hookrightarrow I(M(C_{[0,s]})) \twoheadrightarrow M(C_{[t-s-1,t]}) \hookrightarrow M(C)$$

où $I(M(C_{[0,s]}))$ est l'enveloppe injective de $M(C_{[0,s]})$ qui est aussi projectif, puisque A est une algèbre auto-injective. En effet,

$$C_{[0,s]} = C_1 \cdots C_s \text{ et } C_{[t-s-1,t]} = C_{t-s} \cdots C_t.$$

Comme $s + 3 \equiv t \pmod{6}$, $t - s - 1 \equiv 2 \pmod{6}$. Comme C_{t-s} est inverse et C_t est directe, Lemme 4.1.5 implique que

$$\Omega C_{[t-s-1,t]} = \Omega(C_{t-s} \cdots C_t) = C_{t-s+4} \cdots C_{t+2} = C_1 \cdots C_{s-1} = C_{[0,s-1]}.$$

La situation peut être visualisée comme suit:

$$C_{[t-s-1,t]} = \begin{array}{c} C_{t-s} \diagup \diagdown \diagup \diagdown \cdots \diagup \diagdown \diagup \diagdown C_t \\ \bullet \\ E \end{array}$$

$$C_{[0,s]} = \begin{array}{c} C_1 \diagup \diagdown \diagup \diagdown \cdots \diagdown \diagup \diagdown \diagup \diagdown C_s \\ \bullet \\ E \end{array}$$

- (ii) Si $s > t$, alors f est le composé

$$M(C) \twoheadrightarrow M(C_{[s,2n]}) \hookrightarrow I(M(C_{[s,2n]})) \twoheadrightarrow M(C_{[t,t+2n+1-s]}) \hookrightarrow M(C)$$

où $I(M(C_{[s,2n]}))$ est l'enveloppe injective de $M(C_{[s,2n]})$ qui est aussi la couverture projectif de $M(C_{[t,t+2n+1-s]})$, puisque A est une algèbre auto-injective. En effet,

$$C_{[s,2n]} = C_{s+1} \cdots C_{2n} \text{ et } C_{[t,t+2n+1-s]} = C_{t+1} \cdots C_{t+2n+1-s}.$$

Comme $s + 3 \equiv t \pmod{6}$, $(t + 1) + 4 \equiv s + 1 \pmod{6}$ et $(t + 2n + 1 - s) + 2 \equiv 2n \pmod{6}$. Comme C_{t+1} est inverse et $C_{t+2n+1-s}$ est directe, Lemme 4.1.5 implique que

$$\Omega M(C_{[t,t+2n+1-s]}) = \Omega(C_{t+1} \cdots C_{t+2n+1-s}) = C_{(t+1)+4} \cdots C_{(t+2n+1-s)+2} = C_{s+1} \cdots C_{2n} = C_{[s,2n]}.$$

La situation peut être visualisée comme suit:

$$C_{[t,t+2n+1-s]} = \begin{array}{c} C_{t+1} \diagup \diagdown \diagup \diagdown \dots \diagup \diagdown \diagup \diagdown C_{t+2n+1-s} \\ E \bullet \end{array}$$

$$D_{[s,2n]} = \begin{array}{c} E \bullet \\ C_{s+1} \diagdown \diagup \diagdown \diagup \dots \diagdown \diagup \diagdown C_{2n} \end{array}$$

Considérons maintenant les modules $M = M([m]1_{(1,1)})$ avec $m > 0$.

- (3) Comme ci-dessus, notons $C' = [m]1_{(1,1)}$. En utilisant les descriptions des sous-cordes explicites et des quotients explicites ci-dessus, le cœur d'un morphisme explicite de $M(C')$ vers $M(C')$ est parmi

$$\{S_1, S_2, S_2, (\alpha_2 \beta_2)^s \alpha_2 = \begin{array}{c} 2 \\ \vdots \\ 3 \end{array} \text{ avec } 0 \leq s \leq b-2\}.$$

Comme ci-dessus, un morphisme explicite de cœur $(\alpha_2 \beta_2)^s \alpha_2 = \begin{array}{c} 2 \\ \vdots \\ 3 \end{array}$ factorise par P_2 .

Soit $f : M(D) \rightarrow M(C)$ un morphisme explicite de cœur $E = S_i$ avec $i \in \{1, 2, 3\}$. Notons s la position de E dans la source C' et t celle dans le but C' , alors s est impaire, t est paire et $s+3 \equiv t \pmod{6}$.

- (i) Si $s < t$, f est projectif via

$$M(C') \twoheadrightarrow M(C'_{[s,0]}) \hookrightarrow I(M(C'_{[s,0]})) \twoheadrightarrow M(C'_{[t,t-s-1]}) \hookrightarrow M(C')$$

où $I(M(C'_{[s,0]}))$ est l'enveloppe injective de $M(C'_{[s,0]})$ qui est aussi la couverture projective de $M(C'_{[t,t-s-1]})$.

$$C_{[s,0]} = C_s \cdots C_1 \text{ et } C'_{[t,t-s-1]} = C'_t \cdots C'_{t-s}.$$

Comme $s+3 \equiv t \pmod{6}$, $t+2 \equiv s-1 \pmod{6}$ et $t-s+4 \equiv 1 \pmod{6}$. Comme C'_t est inverse et C'_{t-s} est directe, Lemme 4.1.6 implique que

$$\Omega C'_{[t,t-s-1]} = \Omega(C'_t \cdots C'_{t-s}) = C'_{t+2} \cdots C'_{t-s+4} = C'_{s-1} \cdots C'_1 = C'_{[s-1,0]}.$$

La situation peut être visualisée comme suit:

$$C'_{[t,t-s-1]} = \begin{array}{c} C'_t \diagup \diagdown \diagup \diagdown \dots \diagup \diagdown \diagup \diagdown C'_{t-s} \\ E \bullet \end{array}$$

$$C_{[s,0]}' = \begin{array}{c} E \bullet \\ C'_s \diagdown \diagup \diagdown \diagup \dots \diagdown \diagup \diagdown C'_1 \end{array}$$

- (ii) Si $s > t$, alors f est le composé

$$M(C') \twoheadrightarrow M(C'_{[2m,s]}) \hookrightarrow I(M(C'_{[2m,s]})) \twoheadrightarrow M(C'_{[t+2m+1-s,t]}) \hookrightarrow M(C')$$

où $I(M(C'_{[2m,s]}))$ est l'enveloppe injective de $M(C'_{[2m,s]})$ qui est aussi la couverture projective de $M(C'_{[t+2m+1-s,t]})$.

$$C'_{[2m,s]} = C'_{2m} \cdots C'_{s+1} \text{ et } C'_{[t+2m+1-s,t]} = C'_{t+2m+1-s} \cdots C'_{t+1}.$$

Comme $s + 3 \equiv t \pmod{6}$, $(t + 2m + 1 - s) + 2 \equiv 2m \pmod{6}$ et $(t + 1) + 4 \equiv s + 2 \pmod{6}$. Comme $C'_{t+2m+1-s}$ est inverse et C'_{t+1} est directe, Lemme 4.1.6 implique que

$$\Omega M(C'_{[t+2m+1-s, t]}) = \Omega(C'_{t+2m+1-s} \cdots C'_{t+1}) = C'_{(t+2m+1-s)+2} \cdots C'_{(t+1)+4} = C'_{2m} \cdots C'_{s+2} = C_{[2m, s+1]}.$$

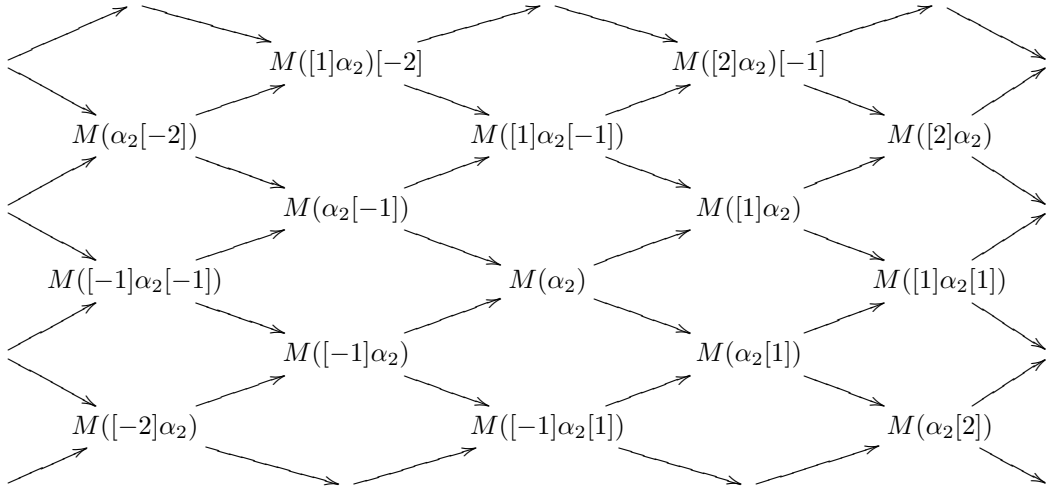
La situation peut être visualisée comme suit:

$$C'_{[t+2m+1-s, t]} = \begin{array}{c} C'_{t+2m+1-s} \diagup \diagdown \diagup \diagdown \cdots \diagup \diagdown \diagup \diagdown \\ \bullet \\ E \end{array}$$

$$C_{[s, 2n]}' = \begin{array}{c} C'_{2n} \diagup \diagdown \diagup \diagdown \cdots \diagup \diagdown \diagup \diagdown \\ \bullet \\ C'_{s+1} \end{array}$$

□

La composante contenant $M(\alpha_2) = \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \diagup \\ 3 \end{array}$ est de forme



où

$$\alpha_2[1] = \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \diagup \\ 2 \end{array}, \quad \alpha_2[-1] = \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \diagup \\ 2 \end{array},$$

$$[1]\alpha_2 = \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \diagup \\ 3 \end{array}, \quad [-1]\alpha_2 = \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \diagup \\ 3 \end{array}$$

Proposition 4.1.7 Soit $M \in Q(\alpha_2) \cup \Omega Q(\alpha_2)$. Alors $\text{Ext}_A^1(M, M) = 0$ ssi $M = \Omega^n \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \diagup \\ 2 \end{array} \right), n \in \mathbb{Z}$.

Dans ce cas, $\text{End}_A(M) = k[\epsilon]/\epsilon^2$.

Démonstration Comme ce sont des composantes de type $\mathbb{Z}A_\infty^\infty$, il suffit de regarder les modules dans la diagonale

$$M = [n] \begin{pmatrix} 2 \\ \searrow \\ 3 \end{pmatrix} \text{ pour } n \in \mathbb{Z}.$$

Comme $\text{Ext}_A^1(M, M) = \underline{\text{Hom}}_A(\Omega M, M)$, il faut calculer $\underline{\text{Hom}}_A(\Omega M, M)$.

(1) Si $n = 1$, $\Omega M = M((\alpha_2\beta_2)^{b-2}\alpha_2)^{-1}$.

Si $b = 2$, il s'injecte dans $M = 1 \begin{array}{c} \nearrow 3 \\ \searrow 2 \\ \boxed{2} \\ \nearrow 3 \\ \searrow 3 \end{array}$.

Si $b > 2$, alors le morphisme explicite

$$\Omega M = \begin{array}{c} \boxed{2} \\ \nearrow 3 \\ \searrow 2 \\ \boxed{3} \end{array} \rightarrow M = 1 \begin{array}{c} \nearrow 3 \\ \searrow 2 \\ \boxed{2} \\ \nearrow 3 \\ \searrow 3 \end{array}$$

n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.2.

(2) Si $n = 2$,

$$M = M([2]\alpha_2) = \begin{array}{c} \sim 2 \\ \nearrow 3 \quad \boxed{1} \quad \searrow 3 \\ \searrow 2 \\ 3 \end{array},$$

alors

$$\Omega M = \begin{array}{c} \boxed{1} \\ \nearrow 2 \\ \searrow 3 \end{array} \text{ avec } \begin{array}{c} 2 \\ \nearrow 3 \end{array} = ((\alpha_2\beta_2)^{b-2}\alpha_2)^{-1}.$$

Si $b = 2$, le seul morphisme de ΩM vers M est celui de cœur S_1 illustré dans les deux cordes, mais ce morphisme est projectif via

$$\Omega M = \begin{array}{c} \boxed{1} \\ \nearrow 2 \\ \searrow 3 \end{array} \rightarrow P_2 = \begin{array}{c} \boxed{2} \\ \nearrow 1 \quad \sim \quad \searrow 3 \\ \boxed{1} \quad \boxed{3} \\ \searrow 2 \end{array} \rightarrow M = \begin{array}{c} \boxed{2} \\ \nearrow 3 \quad \boxed{1} \quad \searrow 3 \\ \searrow 2 \\ 3 \end{array}$$

Cela signifie que si $b = 2$, $M([2]\alpha_2)$ est un module rigide et donc

$$\Omega M([2]\alpha_2) \cong M(\alpha_2[1]) = \begin{array}{c} 2 \\ \searrow 3 \quad \nearrow 1 \\ \searrow 2 \end{array}$$

l'est aussi (En effet, si $b = 2$, Ω est un auto-morphisme de $Q(\alpha_2)$).

Si $b > 2$, le morphisme explicite

$$\Omega M = \begin{array}{c} \boxed{2} \\ \nearrow 1 \quad \searrow 3 \\ \boxed{3} \end{array} \rightarrow M = \begin{array}{c} \sim 2 \\ \nearrow 3 \quad 1 \quad \searrow 2 \\ \boxed{2} \\ \searrow 3 \end{array}$$

n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.2.

(3) Si $n \geq 3$, le morphisme explicite

$$\Omega M = [n-3] \left(\begin{array}{c} \boxed{3} \\ 1 \diagup \quad 2 \diagdown \\ \quad \quad \quad 1 \quad 2 \\ \quad \quad \quad \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad 3 \end{array} \right) \rightarrow M = [n-3] \left(\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \\ 2 \diagdown \quad 3 \diagup \quad 1 \diagdown \quad 2 \diagup \\ \quad \quad \quad \sim \quad \quad \quad \\ \quad \quad \quad 3 \end{array} \right) \begin{array}{c} \boxed{3} \end{array}$$

n'est pas projectif, en vertu de Lemme 3.2.2 et Lemme 3.2.3 (Ici on a utilisé implicitement Proposition 1.6.11).

(4) Si $n = -1$, le seul morphisme explicite

$$\Omega M([-1]\alpha_2) = \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \sim \begin{array}{c} \boxed{1} \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ 2 \end{array} \rightarrow M([-1]\alpha_2) = \begin{array}{c} 3 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{1} \end{array} \begin{array}{c} 3 \end{array}$$

factorise par P_2 via

$$\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \sim \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \rightarrow P_2 = \begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array}} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 3 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{1} \end{array} \begin{array}{c} 3 \end{array}$$

On obtient donc que

$$\Omega^{-2} \left(\begin{array}{c} 3 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \end{array} \right) = \begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 2 \end{array}$$

est rigide.

(5) Si $n \leq -2$, alors le morphisme explicite

$$\Omega(M([n]\alpha_2)) = [n+2] \left(\begin{array}{c} 1 \quad 3 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ \boxed{2} \end{array} \right) \rightarrow M([n]\alpha_2) = [n+2] \left(\begin{array}{c} 3 \quad 2 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ 3 \end{array} \right) \begin{array}{c} \boxed{2} \end{array}$$

n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.2 et Lemme 3.2.3.

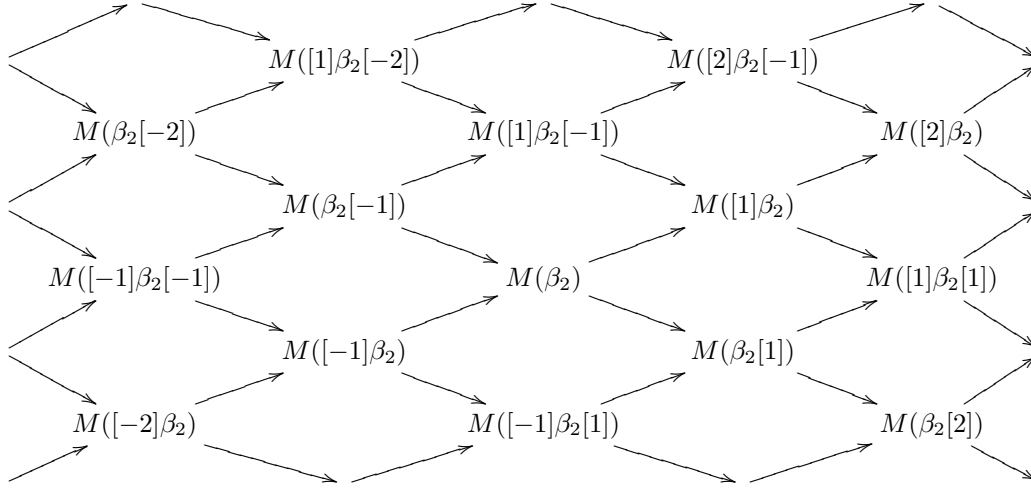
$\text{End}_A \left(\begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 2 \end{array} \right)$ est engendré par l'identité et

$$\epsilon : \begin{array}{c} \boxed{2} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \quad 2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \boxed{2} \end{array}$$

qui n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.3.

□

La composante contenant $M(\beta_2) = \begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix}$ est de forme



où

$$\beta_2[1] = \begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ / \\ 3 \end{smallmatrix}, \quad \beta_2[-1] = \begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ / \\ 3 \end{smallmatrix},$$

$$[1]\beta_2 = \begin{smallmatrix} 2 \\ / \\ 1 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix}, \quad [-1]\beta_2 = \begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \\ / \\ 2 \end{smallmatrix}$$

Proposition 4.1.8 Soit $M \in Q(\beta_2) \cup \Omega Q(\beta_2)$. Alors $\text{Ext}_A^1(M, M) = 0$ ssi $M = \Omega^n \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \\ / \\ 2 \end{smallmatrix} \right), n \in \mathbb{Z}$.

Dans ce cas, $\text{End}_A(M) = k[\epsilon]/\epsilon^2$.

La preuve de cette proposition est exactement la même que celle de Proposition 4.1.7.

Proposition 4.1.9 Soit M un module indécomposable non périodique qui n'est pas dans

$$Q(S_1) \cup Q(S_2) \cup Q(\alpha_2) \cup \Omega Q(\alpha_2) \cup Q(\beta_2) \cup \Omega Q(\beta_2).$$

Alors $\text{Ext}_A^1(M, M) \neq 0$.

La preuve de cette proposition occupe tout le reste de cette section.

Soit $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des sous-cordes de $\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix}$ et de $\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix}$ qui est de longueur $\leq n$. Noutons

$$\mathcal{A}_n^{-1} = \{C^{-1} : C \in \mathcal{A}_n\}.$$

Proposition 4.1.10 Soit $C = C_1 C_2 \cdots C_n$ une corde. Alors si C est une corde minimale, alors

(1) Si $n \geq 2$, alors C_1 et C_n appartiennent à $\mathcal{A}_{2b-2} \cup \mathcal{A}_{2b-2}^{-1}$.

(2) Si $n = 1$, $C \in \mathcal{A}_{2b-3} \cup \mathcal{A}_{2b-3}^{-1}$.

Démonstration Soit $C = C_1 \cdots C_n$ une corde minimale d'une composante régulières de type $\mathbb{Z}A_\infty^\infty$.

Supposons d'abord que $n \geq 2$. Si C_1 est directe et commence par l'une des flèches $\alpha_1, \beta_1, \alpha_3, \beta_3$, alors $|[1]C| < |C|$; si C_1 est inverse et commence par l'une des flèches $\alpha_1^{-1}, \beta_1^{-1}, \alpha_3^{-1}, \beta_3^{-1}$, alors $|[-1]C| < |C|$; si C_n est directe et termine par l'une des flèches $\alpha_1, \beta_1, \alpha_3, \beta_3$, alors $|C[-1]| < |C|$; si C_n est inverse et termine par l'une des flèches $\alpha_1^{-1}, \beta_1^{-1}, \alpha_3^{-1}, \beta_3^{-1}$, alors $|C[1]| < |C|$. Si C_1 est directe et $|C_1| = 2b - 1$, i.e. $C_1 = (\alpha_2\beta_2)^{b-1}\alpha_2$ ou $C_1 = (\beta_2\alpha_2)^{b-1}\beta_2$, alors $|[1]C| < |C|$; si C_1 est inverse et $|C_1| = 2b - 1$, i.e. $C_1 = ((\alpha_2\beta_2)^{b-1}\alpha_2)^{-1}$ ou $C_1 = ((\beta_2\alpha_2)^{b-1}\beta_2)^{-1}$, alors $|[-1]C| < |C|$; si C_n est directe et $|C_n| = 2b - 1$, i.e. $C_n = (\alpha_2\beta_2)^{b-1}\alpha_2$ ou $C_n = (\beta_2\alpha_2)^{b-1}\beta_2$, alors $|C[-1]| < |C|$; si C_n est inverse et $|C_n| = 2b - 1$, i.e. $C_n = ((\alpha_2\beta_2)^{b-1}\alpha_2)^{-1}$ ou $C_n = ((\beta_2\alpha_2)^{b-1}\beta_2)^{-1}$, alors $|C[1]| < |C|$. Cela montre que $C_1, C_n \in \mathcal{A}_{2b-2} \cup \mathcal{A}_{2b-2}^{-1}$.

Supposons maintenant que $n = 1$. On peut supposer que C soit directe. Si

$$C \in \{\alpha_1, \beta_1, \alpha_3, \beta_3, (\alpha_2\beta_2)^{b-1}\alpha_2, (\beta_2\alpha_2)^{b-1}\beta_2\},$$

$[1]C$ n'existe pas. Si $C = (\alpha_2\beta_2)^{b-1}$ ou $C = (\beta_2\alpha_2)^{b-1}\beta_2$, $[1]C[-1]$ n'existe pas. On en déduit que $C \in \mathcal{A}_{2b-3} \cup \mathcal{A}_{2b-3}^{-1}$. Cela achève la démonstration. $\square$

La preuve de Proposition 4.1.9 se décompose en une série de lemmes.

Soit d'abord C une corde minimale directe ou inverse. On peut supposer qu'elle soit directe, quitte à remplacer C par C^{-1} .

On voit facilement le lemme suivant qui permet de ne considérer que les cordes minimales de longueur $\leq b - 1$

Lemme 4.1.11 Si C est une corde minimale de longueur $l \leq b - 1$ (resp. $l \geq b - 1$), alors $\Omega(Q(C)) = Q(C')$ où C' est une corde minimale de longueur $l' = 2b - l - 2 \geq b - 1$ (resp. $l' = 2b - l - 2 \leq b - 1$).

Démonstration Supposons que C soit directe et commence par α_2 , l'autre cas étant analogue.

Si $C = (\alpha_2\beta_2)^i\alpha_2$ de longueur $l = 2i + 1$ avec $0 \leq l \leq 2b - 2$, alors $\Omega C = D = D_1D_2$ avec

$$D_1 = (\alpha_2\beta_2)^{b-1}\alpha_2 \text{ et } D_2 = ((\alpha_2\beta_2)^{b-i-1})^{-1}.$$

Alors $\Omega C = [-1](C')$ avec $C' = ((\alpha_2\beta_2)^{b-i-2}\alpha_2)^{-1}$ qui est une corde minimale de longueur $2b - 2i - 3 = 2b - l - 2$.

Si $C = (\alpha_2\beta_2)^i$ de longueur $l = 2i$ avec $1 \leq l \leq 2b - 2$, alors $\Omega C = D = D_1D_2$ avec $D_1 = (\alpha_2\beta_2)^{b-1}\alpha_2$ et $D_2 = (\beta_2(\alpha_2\beta_2)^{b-i-1})^{-1}$. Alors $\Omega C = [-1](C')$ avec $C' = ((\alpha_2\beta_2)^{b-i-1})^{-1}$ qui est une corde minimale de longueur $2b - 2i - 2 = 2b - l - 2$. $\square$

Lemme 4.1.12 Si $C = (\alpha_2\beta_2)^i\alpha_2$ est de longueur $l = 2i + 1$ avec $3 \leq l \leq b - 1$, alors tout module $M \in Q(C)$ vérifie $\text{Ext}_A^1(M, M) \neq 0$.

Démonstration Constatons que les conditions signifient que $b \geq 4$.

Il suffit de regarder les modules $M([n]C)$ avec $n \in \mathbb{Z}$, puisque tout module dans cette composante est un syzygy d'un certain $M([n]C)$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

Si $n \geq 1$, alors comme $2b - (l + 1) - 1 \geq b - 1 \geq 3$, le morphisme explicite

$$\Omega(M([n]C)) = \begin{array}{c} \cdots \quad \quad \quad \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ 3 \end{array} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \\ \hline \end{array} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 2 \end{array} \rightarrow M([n]C) = \begin{array}{c} \cdots \quad \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ 1 \quad 3 \end{array} \quad \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \\ \hline \end{array} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ 3 \end{array} \\ \hline \end{array} \end{array}$$

de cœur $\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array}$ n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.2.

Si $n \leq 0$, alors

$$\Omega(M([n]C)) = \begin{array}{c} \cdots \quad \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ 1 \quad 2 \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ 3 \end{array} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \\ \hline \end{array} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ 3 \end{array} \\ \hline \end{array} \end{array} \rightarrow M([n]C) = \begin{array}{c} \cdots \quad \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ 2 \quad 3 \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \\ \hline \end{array} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ 3 \end{array} \\ \hline \end{array} \end{array}$$

de cœur $\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array}$ n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.2.

□

Lemme 4.1.13 Si $C = (\alpha_2\beta_2)^i$ est de longueur $l = 2i$ avec $2 \leq l \leq b - 1$, alors tout module $M \in Q(C)$ vérifie $\text{Ext}_A^1(M, M) \neq 0$.

Démonstration Comme dans la preuve du lemme précédent, on regarde les modules $[n]C$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et on trouve un morphisme non projectif de $\Omega(M([n]C))$ à $M([n]C)$ de cœur $\begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 2 \end{array}$.

□

Lemme 4.1.14 Si $C = (\beta_2\alpha_2)^i\beta_2$ est de longueur $l = 2i + 1$ avec $3 \leq l \leq b - 1$, alors tout module $M \in Q(C)$ vérifie $\text{Ext}_A^1(M, M) \neq 0$.

Lemme 4.1.15 Si $C = (\beta_2\alpha_2)^i$ est de longueur $l = 2i$ avec $2 \leq l \leq b - 1$, alors tout module $M \in Q(C)$ vérifie $\text{Ext}_A^1(M, M) \neq 0$.

Ces deux lemmes sont vrais par symétrie.

Soit Q une composante de type $\mathbb{Z}A_\infty^\infty$ régulière qui est différente de

$$Q(S_1), Q(S_2), Q(\alpha_2), Q(\beta_2), \Omega Q(\alpha_2), \Omega Q(\beta_2)$$

et dont la corde minimale D a plus de deux segments. Comme tout module M dans cette composante Q est un syzygy d'un certain $M(D[m])$ avec $m \in \mathbb{Z}$. Il suffit de regarder les modules $M(D[m])$ avec $m \in \mathbb{Z}$. Toute corde C de la forme $D[m]$ avec $m \in \mathbb{Z}$ vérifie la condition que

$$C_1 \in \mathcal{A}_{2b-2} \cup \mathcal{A}_{2b-2}^{-1}$$

et par symétrie, on peut supposer que si C_1 est directe, $s(C_1) = 2$ et que si C_1 est inverse, $t(C_1) = 2$.

Lemme 4.1.16 Si $C_1 = \begin{smallmatrix} & 2 \\ & \diagup \diagdown \\ 3 & & 1 \end{smallmatrix}$, alors $\text{Ext}_A^1(M(C), M(C)) \neq 0$.

Démonstration Supposons que $\text{Ext}_A^1(M(C), M(C)) = 0$.

On a $n \geq 4$, car si $n = 2$,

$$\begin{smallmatrix} & 2 \\ & \diagup \diagdown \\ 3 & & 1 \end{smallmatrix} = 1_{(3,-1)}[1] \in Q(S_3)$$

et si $n = 3$,

$$\begin{smallmatrix} & 2 & & 3 \\ & \diagup \diagdown & & \diagup \diagdown \\ 3 & & 1 & \end{smallmatrix} = \alpha_2^{-1}[-1] \in Q(\alpha_2).$$

Si $|C_4| \leq 2b - 2$, alors $C_4 = \beta_2 C'_4$ et $\begin{smallmatrix} & 2 \\ & \parallel \\ 2 & & 2 \end{smallmatrix} \rightarrow M(C'_4)$. on a donc un morphisme non projectif en vertu de Lemme 3.2.2

$$\Omega(M(C)) = \begin{smallmatrix} & 2 & & 1 & & \cdots \\ & \parallel & \diagup \diagdown & & \diagup \diagdown & \\ 2 & & 2 & & 3 & \end{smallmatrix} \rightarrow M(C'_4) \hookrightarrow M(C)$$

On en déduit que $|C_4| = 2b - 1$. On va montrer que $n \geq 7$ et donc

$$C = \begin{smallmatrix} & 2 & & 3 & & 1 & & \cdots \\ & \diagup \diagdown & & \diagup \diagdown & & \sim & \diagup \diagdown & \\ 3 & & 1 & & 2 & & 3 & \end{smallmatrix}.$$

En effet, si $n = 4$,

$$\begin{smallmatrix} & 2 & & 3 \\ & \diagup \diagdown & & \sim \\ 3 & & 1 & & 2 \end{smallmatrix} = 1_{(3,-1)}[2] \in Q(S_3)$$

et si $n = 5$, le morphisme explicite

$$\Omega(M(C)) = \begin{smallmatrix} & 2 & & 1 & & 2 & & \boxed{3} \\ & \parallel & \diagup \diagdown & & \diagup \diagdown & & \diagup \diagdown & \\ 2 & & 2 & & 3 & & 1 & \end{smallmatrix} \rightarrow M(C) = \begin{smallmatrix} & 2 & & 3 & & 1 \\ & \diagup \diagdown & & \sim & \diagup \diagdown & \\ \boxed{3} & & 1 & & 2 & \end{smallmatrix}$$

n'est pas projectif, en vertu de Lemme 3.2.3. Si $n = 6$,

$$\begin{smallmatrix} & 2 & & 3 & & 1 \\ & \diagup \diagdown & & \sim & \diagup \diagdown & \\ 3 & & 1 & & 2 & & 3 \end{smallmatrix} = 1_{(3,-1)}[3] \in Q(S_3)$$

En utilisant les mêmes arguments, on montre par récurrence que

$$C = \left(\begin{smallmatrix} & 2 & & 3 & & 1 \\ & \diagup \diagdown & & \sim & \diagup \diagdown & \\ 3 & & 1 & & 2 & \end{smallmatrix} \right)^n E_n$$

avec E_n une corde de longueur strictement positive. Donc pour que $\text{Ext}_A^1(M(C), M(C)) = 0$, la longueur de C devrait être infinie, absurde.

□

Lemme 4.1.17 Si $C_1 = \begin{smallmatrix} & 2 \\ & \parallel \\ 2 & & 2 \end{smallmatrix}$, alors $\text{Ext}_A^1(M(C), M(C)) \neq 0$.

Démonstration Comme dans le lemme précédent, on montre que si $\text{Ext}_A^1(M(C), M(C)) = 0$, alors

$$C = \begin{array}{c} 2 \\ \parallel \\ 2 \end{array} \setminus \left(\begin{array}{c} 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \quad 2 \end{array} \setminus \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \sim \quad 3 \end{array} \setminus \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 3 \end{array} \right)^n E_n$$

avec E_n une corde de longueur strictement positive. Donc la longueur de C devrait être infinie, absurde.

□

Lemme 4.1.18 Si $C_1 = \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ d \quad c \end{array}$ est une corde inverse de longueur l telle que $2 \leq l \leq 2b - 3$ où $c, d \in \{2, 3\}$, alors $\text{Ext}_A^1(M(C), M(C)) \neq 0$.

Démonstration Le morphisme explicite

$$\Omega(M(C)) = \begin{array}{c} \lceil c \rceil \\ \diagdown \quad \diagup \\ \lfloor d \rfloor \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \cdots \rightarrow M(C) = \begin{array}{c} \lceil \quad \rceil \\ \diagdown \quad \diagup \\ \lfloor d \rfloor \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ c \end{array} \cdots$$

n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.2.

□

Lemme 4.1.19 Si $C_1 = \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array}$, alors $\text{Ext}_A^1(M(C), M(C)) \neq 0$.

Démonstration Comme dans le lemme 4.1.16, on montre que si $\text{Ext}_A^1(M(C), M(C)) = 0$, alors

$$C = \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \setminus \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \setminus \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \sim \quad 1 \end{array} \setminus \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \end{array} \right)^n E_n$$

avec E_n une corde de longueur strictement positive. Donc la longueur de C devrait être infinie, absurde.

□

Lemme 4.1.20 Si $C_1 = \begin{array}{c} 2 \\ \parallel \\ 2 \end{array}$, alors $\text{Ext}_A^1(M(C), M(C)) \neq 0$.

Démonstration Comme dans le lemme 4.1.16, si $\text{Ext}_A^1(M(C), M(C)) = 0$, alors

$$C = \begin{array}{c} 2 \\ \parallel \\ 2 \end{array} \setminus \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \setminus \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \end{array} \setminus \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \sim \quad 2 \end{array} \setminus \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \right)^n E_n$$

avec E_n une corde de longueur strictement positive. Donc la longueur de C devrait être infinie, absurde.

□

$$\begin{array}{c} 2 \\ \cdots c \\ \quad \diagdown d \\ \qquad \diagdown c \end{array}$$
$$\Omega(M(C)) = \begin{array}{c} \text{---} c \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \quad \text{---} d \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad \text{---} c \text{---} \end{array} \rightarrow M(C) = \begin{array}{c} 2 \quad \text{---} c \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} d \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} c \text{---} \end{array} \dots$$

n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.2 si $l > 2$ et en vertu de Lemme 3.2.1 si $l = 2$.

9

4.2 Deux facteurs

Dans tout le reste de ce chapitre, dans un lemme ou une proposition numéroté par $(i_1 + i_2 + \dots + i_n)$ pour $i_1, \dots, i_n \in \{1, 2, \dots, 8\}$, on cherche tous les modules rigides de la forme $M_{i_1} \oplus \dots \oplus M_{i_n}$ tel que M_{i_s} soit de type i_s pour tout $1 \leq s \leq n$ et on calcule le carquois avec relations de l'algèbre

$$\underline{\text{End}}_A(M_{i_1} \oplus \dots \oplus M_{i_n})$$

dans lequel le point noir numéroté par i_s désigne M_{i_s} le module indécomposable de type i_s pour tout $1 \leq s \leq n$.

On utilise souvent implicitement les faits suivants:

$$\text{Ext}_A^1(M, N) = \underline{\text{Hom}}_A(\Omega M, N) = \underline{\text{Hom}}_A(M, \Omega^{-1}N)$$

$$\text{Ext}_A^1(\Omega^i M, \Omega^i N) = \text{Ext}_A^1(M, N)$$

$$\underline{\text{Hom}}_A(\Omega^n M, \Omega^n N) = \underline{\text{Hom}}_A(M, N)$$

pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et pour tous les A -modules M et N ,

Lemme 4.2.1 (1+1, 2+2, 3+3, 4+4) Soient M et N deux modules non isomorphes de type (i) pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Alors $\text{Ext}_A^1(M \oplus N, M \oplus N) \neq 0$. On appelle cette situation "impossible" dans la suite.

Démonstration On montre le cas (2+2), les autres cas se faisant similairement.

$$\text{Ext}_A^1 \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array}, \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array} \right) = 0$$

est déjà montrée.

$$\text{Ext}_A^1 \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array}, \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 3 \end{array} \right) = \underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array}, \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array} \right) \neq 0$$

est évidente.

$$\text{Ext}_A^1 \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array}, \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \end{array} \right) = \underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array}, \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 3 \end{array} \right) \neq 0$$

car le morphisme explicite

$$\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array} \begin{array}{c} \boxed{3} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{1} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \boxed{3} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{1} \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 3 \end{array}$$

n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.1.

□

Lemme 4.2.2 (1+2)

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \end{array} \right), i \in \mathbb{Z} \quad \text{II2} \quad \begin{array}{c} \bullet \longrightarrow \bullet \\ 1 \quad 2 \end{array} \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \vdots \end{array}$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \sim / \\ 3 \quad 1 \\ \backslash \quad \backslash \\ 2 \quad 2 \end{array} \right), i \in \mathbb{Z} \quad \text{II3} \quad \begin{array}{c} \bullet \longleftarrow \bullet \\ 1 \qquad 2 \end{array} \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \vdots \end{array}$$

On explique notre façon de présentation. Ci-dessus signifie que $\text{Ext}_A^1(M_1 \oplus M_2, M_1 \oplus M_2) = 0$ avec M_1 (resp. M_2) est de type 1 (resp. de type 2) si et seulement s'il existe $i \in \mathbb{Z}$ tel que

$$M_1 \cong \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \text{ et } M_2 \cong \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \quad \backslash \\ 2 \quad 3 \\ \backslash \quad \backslash \\ 1 \quad 1 \end{array} \right)$$

ou

$$M_1 \cong \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \text{ et } M_2 \cong \Omega^{i-1} \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \quad \backslash \\ 2 \quad 3 \\ \backslash \quad \backslash \\ 1 \quad 1 \end{array} \right) = \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \sim / \\ 3 \quad 1 \\ \backslash \quad \backslash \\ 2 \quad 2 \end{array} \right)$$

Dans le premier cas, l'algèbre $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_2)$ est isomorphe à II2 et cette algèbre $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_2)$ est isomorphe à II3 dans le deuxième cas. On utilise cette notation dans la suite.

Démonstration On peut supposer que $M_1 = \begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array}$ et on va montrer que

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array}, \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \quad \backslash \\ 2 \quad 3 \\ \backslash \quad \backslash \\ 1 \quad 1 \end{array} \right) \right) = 0 \iff i \not\equiv 0 \pmod{3}.$$

En effet, comme $\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array}$ est Ω -périodique de période 3, il suffit de considérer

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array}, \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \quad \backslash \\ 2 \quad 3 \\ \backslash \quad \backslash \\ 1 \quad 1 \end{array} \right) \right)$$

pour $i \in \{0, 1, 2\}$.

Le seul morphisme explicite

$$\boxed{1} \backslash_2 \rightarrow \Omega \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \quad \backslash \\ 2 \quad 3 \\ \backslash \quad \backslash \\ 1 \quad 1 \end{array} \right) \cong \begin{array}{c} 3 \\ \backslash \quad \backslash \\ 1 \quad 2 \\ \backslash \quad \backslash \\ 1 \quad 3 \end{array} \sim$$

est de cœur S_1 illustré dans les deux modules et factorise par P_2 via

$$\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \hookrightarrow P_2 = \begin{array}{c} \boxed{1} \quad \begin{array}{c} 2 \\ \backslash \sim / \\ 3 \end{array} \\ \backslash \quad \backslash \\ 2 \quad 2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 3 \\ \backslash \quad \backslash \\ 1 \quad 2 \\ \backslash \quad \backslash \\ 1 \quad 3 \end{array} \sim$$

Il n'existe pas de morphismes explicites de $\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array}$ à $\Omega^2 \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \quad \backslash \\ 2 \quad 3 \\ \backslash \quad \backslash \\ 1 \quad 1 \end{array} \right) \cong \begin{array}{c} 2 \\ \backslash \sim / \\ 3 \quad 1 \\ \backslash \quad \backslash \\ 2 \quad 2 \end{array}$.

L'espace

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array}, \begin{array}{c} 1 \\ \backslash \quad \backslash \\ 2 \quad 3 \\ \backslash \quad \backslash \\ 1 \quad 1 \end{array} \right)$$

est engendré en tant qu'espace vectoriel par

$$\alpha : \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \hookrightarrow \begin{array}{c} \boxed{1} \\ \diagdown \\ \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \\ \boxed{2} \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \quad \text{et} \quad \beta : \begin{array}{c} \boxed{1} \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \boxed{1} \end{array},$$

parce que Théorème 1.5.1 montre que α et β engendrent $\text{Hom}_A\left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array}, \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{array}\right)$ où $\alpha \neq 0$, grâce à Lemme

3.2.1 où $\beta \neq 0$ grâce à Lemme 3.2.3.

De même, on montre que

$$\underline{\text{Hom}}_A\left(\Omega^i\left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{array}\right), \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array}\right) = 0 \iff i \neq -1 \pmod 3$$

et

$$\underline{\text{Hom}}_A\left(\Omega^{-1}\left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{array}\right), \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array}\right) = \underline{\text{Hom}}_A\left(\begin{array}{c} 2 \\ \sim \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array}, \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array}\right)$$

est engendré en tant qu'espace vectoriel par

$$\gamma : \begin{array}{c} 2 \\ \sim \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \boxed{1} \\ \diagdown \\ \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \\ \boxed{2} \end{array} \mapsto \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \quad \text{et} \quad \delta : \begin{array}{c} \boxed{2} \\ \sim \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ \boxed{2} \end{array}$$

On obtient donc que

$$\text{Ext}_A^1\left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \oplus \Omega^i\left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{array}\right), \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \oplus \Omega^i\left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{array}\right)\right) = 0 \iff i \neq 1 \pmod 3$$

Notons

$$\epsilon : \begin{array}{c} \boxed{1} \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \boxed{1} \end{array}.$$

Alors à part l'identité, ϵ est le seul morphisme explicite de $\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{array}$ à lui-même et $\epsilon \neq 0$ grâce à Lemme 3.2.3.

$$\underline{\text{End}}_A\left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{array}\right) = k\underline{\text{Id}} \oplus k\epsilon.$$

Notons aussi

$$\eta : \begin{array}{c} \boxed{2} \\ \sim \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 2 \\ \sim \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ \boxed{2} \end{array}.$$

Alors $\eta \neq 0$ grâce à Lemme 3.2.3. Les autres morphisme explicites de $\begin{array}{c} 2 \\ \sim \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array}$ à lui-même sont de cœur $(\alpha_2\beta_2)^s\alpha_2$ avec $0 \leq s \leq b-2$ et ils factorisent par P_2 via

$$\begin{array}{c} 2 \\ \sim \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} = \begin{array}{c} \boxed{2} \\ \diagdown \\ \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \\ \boxed{2} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \rightarrow P_2 = \begin{array}{c} \boxed{2} \\ \diagdown \\ \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \\ \boxed{2} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ \boxed{2} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 2 \\ \sim \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array}$$

où l'intersection des deux boîtes dans P_2 est $(\alpha_2\beta_2)^s\alpha_2$. On en déduit que

$$\underline{\text{End}}_A \left(\begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \backslash \quad / \\ 3 \quad 2 \end{array} \right) = k\underline{Id} \oplus k\underline{\eta}.$$

Si $i = 0$, on a vu que

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array}, \begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \backslash \quad / \\ 2 \quad 1 \end{array} \right) = k\underline{\alpha} \oplus k\underline{\beta}$$

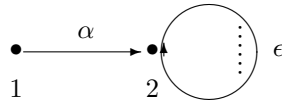
et

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \backslash \quad / \\ 2 \quad 1 \end{array}, \begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) = 0$$

On vérifie que $\epsilon \circ \alpha = \beta$ en tant qu'applications (et $\alpha\epsilon = \beta$ comme flèches). L'algèbre

$$\underline{\text{End}}_A \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \oplus \begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \backslash \quad / \\ 2 \quad 1 \end{array} \right)$$

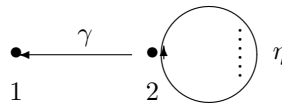
est donc isomorphe à II2



Si $i = -1$, on vérifie que $\eta\gamma = \delta$. L'algèbre

$$\underline{\text{End}}_A \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \oplus \begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \backslash \quad / \\ 3 \quad 2 \end{array} \right)$$

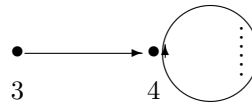
est donc isomorphe à II3



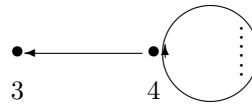
□

Lemme 4.2.3 (3+4)

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \backslash \quad / \\ 1 \quad 2 \end{array} \right), i \in \mathbb{Z} \quad \text{II2}$$



$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \backslash \quad / \\ 3 \quad 1 \end{array} \right), i \in \mathbb{Z} \quad \text{II3}$$



Démonstration La preuve est similaire à celle du cas **(1+2)** (Lemme 4.2.2).

□

Lemme 4.2.4 (1+3, 1+4, 2+3, 2+4) Pour tout module M de type (1) ou (2) et tout module N de type (3) ou (4),

$$\text{Ext}_A^1(M \oplus N, M \oplus N) = 0.$$

On appelle cette situation "arbitraire" dans la suite.

Démonstration On montre **(2+4)** le cas le plus compliqué, les autres cas se faisant similairement.

Grâce à la Ω -périodicité de $\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ & \diagdown & / \\ 2 & & 1 \end{smallmatrix}$, on peut supposer

$$M_2 = \begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ & \diagdown & / \\ 2 & & 1 \end{smallmatrix}, \quad M_4 = \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 2 \\ & \diagdown & / \\ 3 & & 1 \end{smallmatrix} \right)$$

avec $i \in \{0, 1, -1\}$.

$$\text{Hom}_A \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ & \diagdown & / \\ 2 & & 1 \end{smallmatrix}, \Omega^0 \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 2 \\ & \diagdown & / \\ 3 & & 1 \end{smallmatrix} \right) \right) = \text{Hom}_A \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ & \diagdown & / \\ 2 & & 1 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 1 & & 2 \\ & \diagdown & / \\ 3 & & 1 \end{smallmatrix} \right)$$

est engendré en tant qu'espace vectoriel par

$$\boxed{1} \begin{smallmatrix} & 3 \\ & \diagdown & / \\ 2 & & 1 \end{smallmatrix} \rightarrow \begin{smallmatrix} 1 & & 2 \\ & \diagdown & / \\ 3 & & 1 \end{smallmatrix} \text{ et } \begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ & \diagdown & / \\ 2 & & 1 \end{smallmatrix} \rightarrow \boxed{3} \begin{smallmatrix} & 2 \\ & \diagdown & / \\ 3 & & 1 \end{smallmatrix}$$

le premier morphisme explicite factorisant par P_2 via

$$\boxed{1} \begin{smallmatrix} & 3 \\ & \diagdown & / \\ 2 & & 1 \end{smallmatrix} \rightarrow P_2 = \begin{array}{c} \begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ & \diagdown & / \\ 1 & & 1 \end{smallmatrix} \\ \hline \begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ & \diagdown & / \\ 3 & & 2 \end{smallmatrix} \end{array} \rightarrow \begin{smallmatrix} 1 & & 2 \\ & \diagdown & / \\ 3 & & 1 \end{smallmatrix}$$

et le deuxième factorisant par P_1 via

$$\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ & \diagdown & / \\ 2 & & 1 \end{smallmatrix} \rightarrow P_1 = \begin{array}{c} \begin{smallmatrix} 1 & & 1 \\ & \diagdown & / \\ 3 & & 3 \end{smallmatrix} \\ \hline \begin{smallmatrix} 3 & & 2 \\ & \diagdown & / \\ 1 & & 1 \end{smallmatrix} \end{array} \rightarrow \begin{smallmatrix} 1 & & 2 \\ & \diagdown & / \\ 3 & & 1 \end{smallmatrix}.$$

On en déduit que $\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ & \diagdown & / \\ 2 & & 1 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 1 & & 2 \\ & \diagdown & / \\ 3 & & 1 \end{smallmatrix} \right) = 0$.

$$\text{Hom}_A \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ & \diagdown & / \\ 2 & & 1 \end{smallmatrix}, \Omega^1 \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 2 \\ & \diagdown & / \\ 3 & & 1 \end{smallmatrix} \right) \right) = \text{Hom}_A \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ & \diagdown & / \\ 2 & & 1 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ & \diagdown & / \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix} \right)$$

est engendré en tant qu'espace vectoriel par

$$\boxed{1} \searrow_2 \nearrow_3 \searrow_1 \rightarrow \begin{matrix} 2 \\ \searrow \\ \boxed{1} \end{matrix} \nearrow_3 \sim \begin{matrix} 3 \\ \searrow \\ 2 \end{matrix}$$

qui factorise par P_2 via

$$\boxed{1 \searrow_2 \nearrow_3} \searrow_1 \rightarrow P_2 = \boxed{\begin{matrix} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{matrix} \nearrow_3} \rightarrow \begin{matrix} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{matrix} \nearrow_3 \sim \begin{matrix} 3 \\ \searrow \\ 2 \end{matrix}$$

et donc

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{matrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{matrix} \nearrow_3 \searrow_1, \begin{matrix} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{matrix} \nearrow_3 \sim \begin{matrix} 3 \\ \searrow \\ 2 \end{matrix} \right) = 0.$$

$$\text{Hom}_A \left(\begin{matrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{matrix} \nearrow_3 \searrow_1, \Omega^{-1} \left(\begin{matrix} 1 \\ \searrow \\ 3 \end{matrix} \nearrow_2 \searrow_1 \right) \right) = \text{Hom}_A \left(\begin{matrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{matrix} \nearrow_3 \searrow_1, \begin{matrix} 3 \\ \searrow \\ 2 \end{matrix} \nearrow_1 \searrow_3 \right)$$

est engendré en tant qu'espace vectoriel par

$$1 \searrow_2 \nearrow_3 \searrow_1 \rightarrow \begin{matrix} 3 \\ \searrow \\ 2 \end{matrix} \nearrow_1 \searrow_3$$

qui factorise par P_1 via

$$1 \searrow_2 \nearrow_3 \searrow_1 \rightarrow P_1 = \boxed{\begin{matrix} 3 \\ \searrow \\ 1 \end{matrix} \nearrow_2} \rightarrow \begin{matrix} 3 \\ \searrow \\ 2 \end{matrix} \nearrow_1 \searrow_3.$$

On a donc que

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{matrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{matrix} \nearrow_3 \searrow_1, \Omega^i \left(\begin{matrix} 1 \\ \searrow \\ 3 \end{matrix} \nearrow_2 \searrow_1 \right) \right) = 0$$

pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

De même, on vérifie que

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\Omega^i \left(\begin{matrix} 1 \\ \searrow \\ 3 \end{matrix} \nearrow_2 \searrow_1 \right), \begin{matrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{matrix} \nearrow_3 \searrow_1 \right) = 0$$

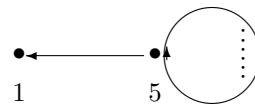
pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

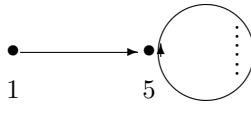
Le résultat voulu en découle, en vertu de l'égalité $\text{Ext}_A^1(M, M) = \underline{\text{Hom}}_A(\Omega M, M)$.

□

Lemme 4.2.5 (1+5)

$$\Omega^i \left(\begin{matrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{matrix} \right) \oplus \Omega^{i+3u} \left(\begin{matrix} 2 \\ \searrow \\ 3 \end{matrix} \nearrow_1 \searrow_2 \right), \quad i, u \in \mathbb{Z} \quad II3$$



$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^{i+3u} \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \sim \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \end{array} \right), \quad i, u \in \mathbb{Z} \quad II2$$


Démonstration Regardons les modules $\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right)$ pour $i \in \mathbb{Z}$.

Pour $n \geq 1$,

$$\Omega^{2n} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right) = \cdots \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ 3 \end{array} \sim \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ 3 \end{array} \sim \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ 3 \end{array} \cdots$$

Ce graphe signifie que

$$\Omega^2 \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right) = \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ 3 \end{array} \quad \text{et} \quad \Omega^4 \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right) = \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ 2 \end{array}.$$

Pour $n \geq 2$, $\Omega^{2n+2} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right)$ est obtenu par rajouter à $\Omega^{2n} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right)$ deux segments à gauche et deux segments à droite. Les quatre segments nouveaux sont présentés par des lignes pointillées ou des lignes noir, pour se distinguer d'anciens segments. Par exemple,

$$\Omega^6 \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right) = \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \sim \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ 3 \end{array} \sim \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array}$$

et

$$\Omega^8 \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right) = \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ 3 \end{array} \sim \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ 3 \end{array} \sim \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ 3 \end{array} \cdots$$

On utilisera dans la suite cette notation.

Pour $n \geq 0$,

$$\Omega^{-2n} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right) = \cdots \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ 3 \end{array} \sim \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ 3 \end{array} \sim \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ 3 \end{array} \cdots$$

$$\Omega^1 \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right) = \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ 1 \end{array}$$

Pour $n \geq 1$,

$$\Omega^{2n+1} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right) = \cdots \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ 3 \end{array} \sim \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ 3 \end{array} \cdots$$

Pour $n \geq 0$,

$$\Omega^{-2n-1} \left(\begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 2 \end{array} \right) = \cdots \sim \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 2 \end{array} \sim \begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \end{array} \sim \begin{array}{c} 3 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 3 \end{array} \sim \begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 2 \end{array} \sim \cdots$$

On distingue les cas suivants.

(1) Si $n \geq 1$,

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array}, \Omega^{2n} \left(\begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 2 \end{array} \right) \right) \neq 0 \iff 2n \equiv 4 \pmod{6} \text{ (i.e. } n \equiv 2 \pmod{3})$$

Si $2n = 2$, il existe un seul morphisme explicite

$$\boxed{1} \diagdown_2 \rightarrow \Omega^2 \left(\begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 2 \end{array} \right) = \begin{array}{c} 3 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{1} \quad 3 \end{array}.$$

Il factorise par P_2 via

$$1 \diagdown_2 \hookrightarrow P_2 = \begin{array}{c} \boxed{1} \quad 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagup \\ \quad 2 \quad \sim \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 3 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 3 \end{array}$$

Si $2n \equiv 2 \pmod{6}$ (i.e. $n \equiv 1 \pmod{3}$) et $n > 1$, tout morphisme explicite f

$$1 \diagdown_2 \rightarrow \Omega^{2n} \left(\begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 2 \end{array} \right) = \begin{array}{c} 3 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 3 \end{array} \sim \cdots \sim \begin{array}{c} 3 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 3 \end{array} \sim \cdots \sim \begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 2 \end{array} \sim \cdots \sim \begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 2 \end{array}$$

est de cœur S_1 . Donnons d'abord une numérotation à $\Omega^{2n} \left(\begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 2 \end{array} \right)$: numéroté

$$\Omega^4 \left(\begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 2 \end{array} \right) = \begin{array}{c} 1 \quad 3 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \quad 3 \end{array} \diagdown_2 = C_{-2} C_{-1} \cdots C_3$$

de gauche à droite tel que

$$C_{-2} = \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array}, \quad C_{-1} = \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ 2 \end{array}, \quad C_0 = \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{array}$$

et

$$C_1 = \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ 1 \end{array}, \quad C_2 = \begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 2 \end{array}, \quad C_3 = \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ 2 \end{array}$$

et étendre cette numérotation vers les deux directions. Soit s la position du cœur de f dans le but.

Si $s < 0$, alors $C_{s+1}C_{s+2} = \begin{array}{c} 2 \\ 1 \diagup \quad \diagdown 3 \end{array} \sim$ et donc f factorise par P_2 via

$$\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown 2 \end{array} \hookrightarrow P_2 = \begin{array}{c} 2 \\ \boxed{\begin{array}{c} 1 \diagup \quad \diagdown 2 \end{array}} \quad 3 \end{array} \sim \rightarrow M(C_{s+1}C_{s+2}) = \begin{array}{c} 2 \\ 1 \diagup \quad \diagdown 3 \end{array} \hookrightarrow \Omega^{2n} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown 3 \diagup 1 \diagdown 2 \end{array} \right).$$

Si $s = 0$, $C_1C_2 = \begin{array}{c} 2 \\ 1 \diagup \quad \diagdown 3 \\ \quad \diagdown 2 \end{array}$, alors f factorise par P_2 via

$$\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown 2 \end{array} \hookrightarrow P_2 = \begin{array}{c} 2 \\ \boxed{\begin{array}{c} 1 \diagup \quad \diagdown 2 \end{array}} \quad \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown 2 \end{array} \end{array} \sim \rightarrow M(C_1C_2) = \begin{array}{c} 2 \\ 1 \diagup \quad \diagdown 3 \\ \quad \diagdown 2 \end{array} \hookrightarrow \Omega^{2n} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown 3 \diagup 1 \diagdown 2 \end{array} \right).$$

Si $s > 0$, on regarde $C_{s-1}C_s = \begin{array}{c} 2 \\ \sim 3 \diagup \quad \diagdown 1 \end{array}$ et f factorise par P_2 via

$$\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown 2 \end{array} \hookrightarrow P_2 = \begin{array}{c} 2 \\ \boxed{\begin{array}{c} 1 \diagup \quad \diagdown 2 \end{array}} \quad 3 \end{array} \sim \rightarrow M(C_{s-1}C_s) = \begin{array}{c} 2 \\ \sim 3 \diagup \quad \diagdown 1 \end{array} \hookrightarrow \Omega^{2n} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown 3 \diagup 1 \diagdown 2 \end{array} \right).$$

Si $2n = 4$, le morphisme explicite

$$\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown 2 \end{array} \hookrightarrow \Omega^4 \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown 3 \diagup 1 \diagdown 2 \end{array} \right) = \begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown 2 \end{array}} \quad \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown 1 \diagup 2 \diagdown 3 \diagdown 1 \end{array} \end{array}$$

n'est pas projectif grâce à Lemme 3.2.1.

Si $2n \equiv 4 \pmod 6$ (i.e. $n \equiv 2 \pmod 3$) et $n > 2$, le morphisme explicite

$$\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown 2 \end{array} \hookrightarrow \begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown 2 \end{array}} \quad 3 \quad \diagdown 1 \quad \diagup 2 \quad \diagdown 3 \quad \diagup 1 \quad \diagdown 2 \quad \diagdown 3 \quad \diagup 1 \quad \diagdown 2 \quad \diagdown 3 \quad \diagup 1 \end{array}$$

n'est pas projectif grâce à Lemme 3.2.1.

Si $2n \equiv 0 \pmod 6$ (i.e. $n \equiv 0 \pmod 3$), tout morphisme explicite

$$\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown 2 \end{array} \rightarrow \Omega^{2n} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown 3 \diagup 1 \diagdown 2 \end{array} \right) = \begin{array}{c} 2 \\ \sim 3 \diagup 1 \diagdown 2 \end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown 1 \diagup 2 \end{array} \quad \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown 3 \diagup 1 \diagdown 2 \end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{c} 1 \\ \sim 3 \diagup 2 \end{array}$$

est de cœur S_1 . Conservons la numérotation ci-dessus. Notons s la position de son cœur dans le but de ce morphisme explicite, noté f .

Si $s < 0$, alors $C_{s+1}C_{s+2} = \begin{array}{c} 2 \\ 1 \diagup \quad \diagdown 3 \end{array} \sim$, alors f factorise par P_2 , via

$$\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown 2 \end{array} \hookrightarrow P_2 = \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \quad \diagdown 3 \\ \boxed{1 \quad 2} \end{array} \rightarrow M(C_{s+1}C_{s+2}) = \begin{array}{c} 2 \\ 1 \diagup \quad \diagdown 3 \end{array} \hookrightarrow \Omega^{2n} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown 3 \diagup 1 \diagdown 2 \end{array} \right)$$

Si $s = 0$, $C_1C_2 = \begin{array}{c} 2 \\ 1 \diagup \quad \diagdown 3 \\ \quad \diagdown 2 \end{array}$, alors f factorise par P_2 via

$$\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown 2 \end{array} \hookrightarrow P_2 = \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \quad \diagdown 3 \\ \boxed{1 \quad 2} \\ \quad \diagdown 2 \end{array} \rightarrow M(C_1C_2) = \begin{array}{c} 2 \\ 1 \diagup \quad \diagdown 3 \\ \quad \diagdown 2 \end{array} \hookrightarrow \Omega^{2n} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown 3 \diagup 1 \diagdown 2 \end{array} \right)$$

Si $s > 0$, on regarde $C_{s-1}C_s = \begin{array}{c} 2 \\ \sim \diagup 3 \diagdown 1 \end{array}$ et f factorise par P_2 via

$$\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown 2 \end{array} \hookrightarrow P_2 = \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \quad \diagdown 3 \\ \boxed{1 \quad 2} \end{array} \rightarrow M(C_{s-1}C_s) = \begin{array}{c} 2 \\ \sim \diagup 3 \diagdown 1 \end{array} \hookrightarrow \Omega^{2n} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown 3 \diagup 1 \diagdown 2 \end{array} \right).$$

(2) Si $n \geq 0$,

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown 2 \end{array}, \Omega^{-2n} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown 3 \diagup 1 \diagdown 2 \end{array} \right) \right) \neq 0 \iff -2n \equiv -2 \pmod{6}$$

Si $-2n = 0$, on observe qu'il n'existe pas de morphismes explicites de $\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown 2 \end{array}$ à $\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown 3 \diagup 1 \diagdown 2 \end{array}$.

Si $-2n \equiv 0 \pmod{6}$ et $n \geq 1$, tout morphisme explicite

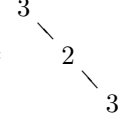
$$\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown 2 \end{array} \rightarrow \Omega^{-2n} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown 3 \diagup 1 \diagdown 2 \end{array} \right) = \begin{array}{c} 1 \\ \diagup 2 \diagdown 3 \diagup 1 \diagdown 2 \diagdown 3 \diagup 1 \diagdown 2 \diagdown 3 \diagup 1 \diagdown 2 \end{array}$$

est de cœur S_1 . Donnons d'abord une numérotation à $\Omega^{-2n} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown 3 \diagup 1 \diagdown 2 \end{array} \right)$: numéroté les segments de

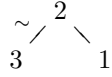
$$\Omega^{-2} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown 3 \diagup 1 \diagdown 2 \end{array} \right) = \begin{array}{c} 3 \\ 1 \diagup 2 \diagdown 3 \diagup 1 \diagdown 2 \diagdown 3 \diagup 1 \end{array}$$

comme $C_{-1}, \dots, C_4$ de gauche à droite et étendre cette numérotation vers les deux directions. Soit s la

position du cœur dans le but. Observons que s ne peut pas être 0, puisque $C_0 =$



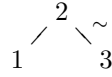
Si $s < 0$, alors $C_{s-1}C_s =$



, alors f factorise par P_2 via

$$1 \searrow 2 \hookrightarrow P_2 = \boxed{1 \begin{array}{c} 2 \\ \sim \\ 3 \end{array} 2} \rightarrow M(C_{s-1}C_s) = \begin{array}{c} 2 \\ \sim \\ 3 \end{array} 1 \hookrightarrow \Omega^{-2n} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \searrow \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \nearrow \\ 2 \end{array} \right)$$

Si $s > 0$, on regarde $C_{s+1}C_{s+2} =$



et f factorise par P_2 via

$$1 \searrow 2 \hookrightarrow P_2 = \boxed{1 \begin{array}{c} 2 \\ \sim \\ 3 \end{array} 2} \rightarrow M(C_{s+1}C_{s+2}) = \begin{array}{c} 2 \\ \nearrow \\ 1 \end{array} 3 \hookrightarrow \Omega^{-2n} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \searrow \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \nearrow \\ 2 \end{array} \right)$$

.

Si $-2n = -2$, alors le morphisme explicite

$$1 \searrow 2 \rightarrow \Omega^{-2} \left(\boxed{2} \begin{array}{c} 1 \\ \nearrow \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array} \right) = \boxed{1} \begin{array}{c} 3 \\ \nearrow \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \nearrow \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \searrow \\ 1 \end{array}$$

n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.3.

Si $-2n \equiv -2 \pmod{6}$ et $n \geq 2$, le morphisme explicite

$$\boxed{1} \searrow 2 \rightarrow \Omega^{-2n} \left(\begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \nearrow \\ 1 \end{array} \right) = \boxed{1} \begin{array}{c} 3 \\ \nearrow \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \cdots \\ \nearrow \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \searrow \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \nearrow \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \searrow \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \cdots \\ \nearrow \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \searrow \\ 1 \end{array}$$

n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.3.

Si $-2n = -4$, il existe deux morphismes explicites

$$\boxed{1} \searrow 2 \rightarrow \Omega^{-4} \left(\begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \nearrow \\ 1 \end{array} \right) = \begin{array}{c} 2 \\ \nearrow \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \searrow \\ 2 \end{array} \boxed{1} \begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \nearrow \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \searrow \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \nearrow \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \searrow \\ 3 \end{array}$$

qui factorisent par P_2

Si $-2n \equiv -4 \pmod 6$ et $n \geq 3$, tout morphisme explicite

$$f : \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \rightarrow \Omega^{-2n} \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ 1 \end{array} \right) = \begin{array}{c} \sim \\ \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \cdots \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \cdots \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \sim \\ \diagdown \\ 3 \end{array}$$

est de cœur S_1 . Conservons la numérotation ci-dessus. Notons s la position de son cœur dans le but de f .

On observe que s ne peut pas être 0, car $C_0 = \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 2 \\ \diagup \\ 3 \end{array}$.

Si $s < 0$, alors $C_{s-1}C_s = \begin{array}{c} \sim \\ \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 1 \end{array}$, alors f se factorise par P_2 , via

$$\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \hookrightarrow P_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \sim \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \\ \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array}} \end{array} \rightarrow M(C_{s-1}C_s) = \begin{array}{c} \sim \\ \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \hookrightarrow \Omega^{-2n} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ 2 \end{array} \right)$$

Si $s > 0$, on regarde $C_{s+1}C_{s+2} = \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \sim \\ \diagdown \\ 3 \end{array}$ et f factorise par P_2 via

$$\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \hookrightarrow P_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \sim \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \\ \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array}} \end{array} \rightarrow M(C_{s+1}C_{s+2}) = \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \sim \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \hookrightarrow \Omega^{-2n} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ 2 \end{array} \right)$$

(3) Si $n \geq 0$,

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array}, \Omega^{2n+1} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ 2 \end{array} \right) \right) \neq 0 \iff 2n+1 \equiv 1 \pmod 6$$

(4) Si $n \geq 0$,

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array}, \Omega^{-2n-1} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ 2 \end{array} \right) \right) \neq 0 \iff -2n-1 \equiv -5 \pmod 6$$

(5) Si $n \geq 1$,

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\Omega^{2n} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ 2 \end{array} \right), \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right) \neq 0 \iff 2n \equiv 0 \pmod 6$$

Si $2n \equiv 0 \pmod 6$, alors le morphisme explicite

$$\boxed{2} \begin{array}{c} \sim \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ \cdots \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ \cdots \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \sim \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ \boxed{2} \end{array}$$

n'est pas projectif, en vertu de Lemme 3.2.3.

Si $2n = 2$, alors le seul morphisme explicite

$$\Omega^2 \left(\begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \backslash \quad / \\ 3 \quad 2 \end{array} \right) = \begin{array}{c} 3 \quad 2 \\ \backslash \quad / \\ 1 \quad 3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array}$$

est de cœur S_2 et il factorise par P_1 via

$$\boxed{\begin{array}{c} 3 \quad 2 \\ \backslash \quad / \\ 1 \quad 1 \end{array}} \hookrightarrow P_1 = \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \quad / \\ 3 \quad 2 \\ \backslash \quad / \\ 1 \quad 1 \end{array}} \twoheadrightarrow \begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array}$$

Si $2n \equiv 2 \pmod 6$ et $n \geq 2$, alors tout morphisme explicite

$$f : \begin{array}{c} 3 \quad 2 \quad 1 \quad 3 \quad 2 \\ \backslash \quad / \quad \backslash \quad / \quad \backslash \quad / \\ 1 \quad \dots \quad 2 \quad 1 \quad 3 \quad 2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array}$$

est de cœur S_2 . Numérotions comme ci-dessus $\Omega^{2n} \left(\begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \backslash \quad / \\ 3 \quad 2 \end{array} \right)$ comme ci-dessus. Soit s la position du cœur de f dans sa source.

Si $s \leq 1$, alors $C_{s-1}C_s = \begin{array}{c} 3 \quad 2 \\ \backslash \quad / \\ 1 \quad 1 \end{array}$ et f factorise par P_1 via

$$\Omega^{2n} \left(\begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \backslash \quad / \\ 3 \quad 2 \end{array} \right) \twoheadrightarrow M(C_{s-1}C_s) = \begin{array}{c} 3 \quad 2 \\ \backslash \quad / \\ 1 \quad 1 \end{array} \hookrightarrow P_1 = \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \quad / \\ 3 \quad 2 \\ \backslash \quad / \\ 1 \quad 1 \end{array}} \twoheadrightarrow \begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array}.$$

Si $s > 1$, alors $C_{s+1}C_{s+2} = \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \backslash \quad / \\ 1 \quad 1 \end{array}$ et f factorise par P_1 via

$$\Omega^{2n} \left(\begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \backslash \quad / \\ 3 \quad 2 \end{array} \right) \twoheadrightarrow M(C_{s+1}C_{s+2}) = \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \backslash \quad / \\ 1 \quad 1 \end{array} \hookrightarrow P_1 = \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \quad / \\ 3 \quad 2 \\ \backslash \quad / \\ 1 \quad 1 \end{array}} \twoheadrightarrow \begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array}$$

Si $2n = 4$, alors le seul morphisme explicite de

$$\Omega^4 \left(\begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \backslash \quad / \\ 3 \quad 2 \end{array} \right) = \begin{array}{c} 1 \quad 3 \quad 2 \\ \backslash \quad / \quad \backslash \quad / \quad \backslash \quad / \\ 2 \quad 1 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \end{array}$$

à $\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array}$ est de cœur S_2 et il factorise par P_1 via

$$\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad \boxed{\begin{array}{c} 3 \quad 2 \\ \backslash \quad / \\ 1 \quad 1 \end{array}} \quad 3 \quad 2 \quad 1 \end{array} \rightarrow P_1 = \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \quad / \\ 3 \quad 2 \\ \backslash \quad / \\ 1 \quad 1 \end{array}} \twoheadrightarrow \begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array}$$

Si $2n \equiv 4 \pmod 6$ et $n \geq 3$, tout morphisme explicite

$$1 \searrow 2 \nearrow 3 \searrow \dots \nearrow 1 \searrow 2 \nearrow 3 \searrow 1 \nearrow 2 \searrow 3 \searrow 2 \nearrow 1 \searrow \dots \nearrow 3 \searrow 2 \nearrow 1 \rightarrow 1 \searrow 2$$

est de cœur S_2 . Numérotions $\Omega^{2n} \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ & \searrow & \nearrow \\ & 3 & \\ & & 2 \end{smallmatrix} \right)$ comme ci-dessus. Soit s la position du cœur de f dans sa source.

Si $s \leq 1$, alors $C_{s-1}C_s = \begin{smallmatrix} 3 & & 2 \\ & \searrow & \nearrow \\ & 1 & \end{smallmatrix}$ et f factorise par P_1 via

$$\Omega^{2n} \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ & \searrow & \nearrow \\ & 3 & \\ & & 2 \end{smallmatrix} \right) \twoheadrightarrow M(C_{s-1}C_s) = \begin{smallmatrix} 3 & & 2 \\ & \searrow & \nearrow \\ & 1 & \end{smallmatrix} \hookrightarrow P_1 = \boxed{\begin{smallmatrix} & 1 & \\ 3 & & 2 \\ & 1 & \end{smallmatrix}} \twoheadrightarrow 1 \searrow 2.$$

Si $s > 1$, alors $C_{s+1}C_{s+2} = \begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ & \searrow & \nearrow \\ & 1 & \end{smallmatrix}$ et f factorise par P_1 via

$$\Omega^{2n} \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ & \searrow & \nearrow \\ & 3 & \\ & & 2 \end{smallmatrix} \right) \twoheadrightarrow M(C_{s+1}C_{s+2}) = \begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ & \searrow & \nearrow \\ & 1 & \end{smallmatrix} \hookrightarrow P_1 = \boxed{\begin{smallmatrix} & 1 & \\ 3 & & 2 \\ & 1 & \end{smallmatrix}} \twoheadrightarrow 1 \searrow 2.$$

(6) Si $n \geq 0$,

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\Omega^{-2n} \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ & \searrow & \nearrow \\ & 3 & \\ & & 2 \end{smallmatrix} \right), \begin{smallmatrix} 1 & \\ & \searrow \\ & 2 \end{smallmatrix} \right) \neq 0 \iff -2n \equiv 0 \pmod 6$$

(7) Si $n \geq 0$,

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\Omega^{2n+1} \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ & \searrow & \nearrow \\ & 3 & \\ & & 2 \end{smallmatrix} \right), \begin{smallmatrix} 1 & \\ & \searrow \\ & 2 \end{smallmatrix} \right) \neq 0 \iff 2n+1 \equiv 3 \pmod 6$$

(8) Si $n \geq 0$,

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\Omega^{-2n-1} \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ & \searrow & \nearrow \\ & 3 & \\ & & 2 \end{smallmatrix} \right), \begin{smallmatrix} 1 & \\ & \searrow \\ & 2 \end{smallmatrix} \right) \neq 0 \iff -2n-1 \equiv -3 \pmod 6$$

Les démonstrations de (3), (4), (6), (7) et (8) sont similaires aux cas déjà traités.

On obtient que

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{smallmatrix} 1 & \\ & \searrow \\ & 2 \end{smallmatrix}, \Omega^n \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ & \searrow & \nearrow \\ & 3 & \\ & & 2 \end{smallmatrix} \right) \right) \neq 0 \iff n \equiv 1 \pmod 3$$

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\Omega^n \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ & \searrow & \nearrow \\ & 3 & \\ & & 2 \end{smallmatrix} \right), \begin{smallmatrix} 1 & \\ & \searrow \\ & 2 \end{smallmatrix} \right) \neq 0 \iff n \equiv 0 \pmod 3$$

et donc

$$\text{Ext}_A^1 \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \oplus \Omega^n \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right), \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \oplus \Omega^n \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right) \right) = 0 \iff n \not\equiv 2 \pmod 3$$

Cela signifie que

$$\text{Ext}_A^1(M_1 \oplus M_5, M_1 \oplus M_5) = 0$$

avec M_1 (resp. M_5) de type 1 (resp. 5) ssi il existe $i, n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$M_1 = \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right) \quad \text{et} \quad M_5 = \Omega^{i+n} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right)$$

avec $n \not\equiv 2 \pmod 3$.

Calculons maintenant l'algèbre des endomorphismes stable $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_5)$.

Quand $n \equiv 0 \pmod 3$, on peut supposer que $M_1 = \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array}$ et $M_5 = \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array}$ grâce à la Ω -périodicité de $\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array}$. Alors on note

$$\alpha : \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} \boxed{1} \\ \diagdown \\ \boxed{2} \end{array} \mapsto \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array}, \quad \beta : \begin{array}{c} \boxed{2} \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \mapsto \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ \boxed{2} \end{array}$$

et

$$\epsilon : \begin{array}{c} \boxed{2} \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \mapsto \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ \boxed{2} \end{array}$$

et ces morphismes engendrent les espaces des homomorphismes stables en question. Comme $\epsilon\alpha = \beta$, le carquois avec relations désiré est donc

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xleftarrow{\alpha} & \bullet \\ 1 & & 5 \end{array} \quad \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \vdots \\ \circlearrowright \end{array} \quad \epsilon$$

Le cas où $n \equiv 1 \pmod 3$ se fait similairement. On peut supposer que $M_1 = \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array}$ et

$$M_5 = \Omega^{-1} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right) = \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{array}$$

grâce à la Ω -périodicité de $\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array}$. Alors on note

$$\gamma : \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \hookrightarrow \begin{array}{c} \boxed{1} \\ \diagdown \\ \boxed{2} \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{array}, \quad \delta : \begin{array}{c} \boxed{1} \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \mapsto \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \boxed{1} \end{array}$$

et

$$\eta : \boxed{1} \searrow_2 \sim \nearrow_3 \searrow_1 \rightarrow 1 \searrow_2 \sim \nearrow_3 \boxed{1}$$

Les morphismes $\underline{\gamma}$ et $\underline{\delta}$ engendrent $\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \sim \nearrow_3 \searrow_1 \right)$, car il n'existe pas d'autres morphismes explicites de $\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix}$ à $\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \sim \nearrow_3 \searrow_1$. On a vu dans (4) que

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \sim \nearrow_3 \searrow_1, \begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \right) = 0.$$

On a aussi

$$\underline{\text{End}}_A \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \sim \nearrow_3 \searrow_1 \right) = k\underline{Id} \oplus k\underline{\eta},$$

car tout autre morphisme de $\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \sim \nearrow_3 \searrow_1$ à lui-même est de cœur $(\beta_2 \alpha_2)^s \beta_2$ avec $0 \leq s \leq b-2$ et ils factorisent par P_3 via

$$\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \sim \nearrow_3 \searrow_1 = \begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \begin{array}{c} \boxed{\begin{smallmatrix} 3 \\ \nearrow \\ 2 \\ \searrow \\ 3 \end{smallmatrix}} \end{array} \searrow_1 \rightarrow P_3 = \begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \begin{array}{c} \boxed{\begin{smallmatrix} 3 \\ \nearrow \\ 2 \\ \searrow \\ 3 \end{smallmatrix}} \end{array} \rightarrow \begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \sim \nearrow_3 \searrow_1$$

dans lequel l'intersection des deux cases dans P_3 est $(\beta_2 \alpha_2)^s \beta_2$. Comme $\gamma \eta = \delta$, le carquois avec relations désiré est donc

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\gamma} & \bullet \\ 1 & & 5 \end{array} \quad \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \vdots \\ \circlearrowright \end{array} \eta$$

□

Lemme 4.2.6 (3+6)

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^{i+3u} \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{smallmatrix} \nearrow_3 \searrow_2 \right), i, u \in \mathbb{Z} \quad II2$$

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ 3 & & 6 \end{array} \quad \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \vdots \\ \circlearrowright \end{array}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^{i+3u} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 3 \end{smallmatrix} \sim \nearrow_2 \searrow_1 \right), i, u \in \mathbb{Z} \quad II3$$

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xleftarrow{\quad} & \bullet \\ 3 & & 6 \end{array} \quad \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \vdots \\ \circlearrowright \end{array}$$

Démonstration Regardons les modules $\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ & 1 & \\ & & 2 \end{smallmatrix} \right)$ avec $i \in \mathbb{Z}$.

Pour $n \geq 0$,

$$\Omega^{2n} \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ & 1 & \\ & & 2 \end{smallmatrix} \right) = \cdots \begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ & 1 & \\ & & 2 \end{smallmatrix} \sim \begin{smallmatrix} 1 & & 2 \\ & 2 & \\ & & 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ & 1 & \\ & & 2 \end{smallmatrix} \cdots$$

Pour $n \geq 1$,

$$\Omega^{-2n} \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ & 1 & \\ & & 2 \end{smallmatrix} \right) = \cdots \begin{smallmatrix} 1 & & 2 \\ & 3 & \\ & & 1 \end{smallmatrix} \sim \begin{smallmatrix} 3 & & 1 \\ & 2 & \\ & & 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ & 1 & \\ & & 2 \end{smallmatrix} \cdots$$

Pour $n \geq 0$,

$$\Omega^{2n+1} \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ & 1 & \\ & & 2 \end{smallmatrix} \right) = \cdots \begin{smallmatrix} 3 & & 1 \\ & 2 & \\ & & 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ & 1 & \\ & & 2 \end{smallmatrix} \cdots$$

$$\Omega^{-1} \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ & 1 & \\ & & 2 \end{smallmatrix} \right) = \begin{smallmatrix} 1 & & 2 \\ & 3 & \\ & & 1 \end{smallmatrix}$$

Pour $n \geq 1$,

$$\Omega^{-2n-1} \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ & 1 & \\ & & 2 \end{smallmatrix} \right) = \cdots \begin{smallmatrix} 3 & & 1 \\ & 2 & \\ & & 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ & 1 & \\ & & 2 \end{smallmatrix} \cdots$$

On vérifie tout comme dans la preuve du lemme précédent que

(1) Pour $n \geq 0$,

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ & 1 & \\ & & 2 \end{smallmatrix}, \Omega^{2n} \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ & 1 & \\ & & 2 \end{smallmatrix} \right) \right) \neq 0 \iff 2n \equiv 0 \pmod{6}$$

(2) Pour $n \geq 1$,

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ & 1 & \\ & & 2 \end{smallmatrix}, \Omega^{-2n} \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ & 1 & \\ & & 2 \end{smallmatrix} \right) \right) \neq 0 \iff -2n \equiv -6 \pmod{6}$$

(3) Pour $n \geq 0$,

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ & 1 & \\ & & 2 \end{smallmatrix}, \Omega^{2n+1} \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ & 1 & \\ & & 2 \end{smallmatrix} \right) \right) \neq 0 \iff 2n+1 \equiv 3 \pmod{6}$$

(4) Pour $n \geq 0$,

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ & 1 & \\ & & 2 \end{smallmatrix}, \Omega^{-2n-1} \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ & 1 & \\ & & 2 \end{smallmatrix} \right) \right) \neq 0 \iff -2n-1 \equiv -3 \pmod{6}$$

(5) Pour $n \geq 0$,

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\Omega^{2n} \left(\begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array} \right), \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \right) \neq 0 \iff 2n \equiv 2 \pmod{6}$$

(6) Pour $n \geq 1$,

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\Omega^{-2n} \left(\begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array} \right), \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \right) \neq 0 \iff -2n \equiv -4 \pmod{6}$$

(7) Pour $n \geq 0$,

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\Omega^{2n+1} \left(\begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array} \right), \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \right) \neq 0 \iff 2n+1 \equiv 5 \pmod{6}$$

(8) Pour $n \geq 0$,

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\Omega^{-2n-1} \left(\begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array} \right), \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \right) \neq 0 \iff -2n-1 \equiv -1 \pmod{6}$$

On en déduit que

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 1 \end{array}, \Omega^n \left(\begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array} \right) \right) \neq 0 \iff n \equiv 0 \pmod{3}$$

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\Omega^n \left(\begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array} \right), \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \right) \neq 0 \iff n \equiv 2 \pmod{3}$$

et

$$\text{Ext}_A^1 \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \oplus \Omega^n \left(\begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array} \right), \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \oplus \Omega^n \left(\begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array} \right) \right) \neq 0 \iff n \equiv 1 \pmod{3}$$

Dans le cas $n \equiv 0 \pmod{3}$, on peut supposer que $M_3 = \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 1 \end{array}$ et $M_6 = \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array}$. Notons

$$\alpha : \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \hookrightarrow \begin{array}{c} \boxed{2} \quad \boxed{3} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{1} \quad \boxed{2} \end{array}, \quad \beta : \begin{array}{c} \boxed{2} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad \boxed{2} \end{array}$$

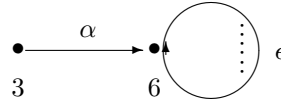
et

$$\epsilon : \begin{array}{c} \boxed{2} \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad \boxed{2} \end{array}$$

où $\underline{\alpha} \neq 0$ en vertu de Lemme 3.2.1 et où $\underline{\beta} \neq 0 \neq \underline{\epsilon}$ par Lemme 3.2.3 Alors

$$\underline{\text{Hom}}_A(M_3, M_6) = k\underline{\alpha} \oplus k\underline{\beta}, \quad \underline{\text{Hom}}_A(M_6, M_3) = 0, \quad \underline{\text{End}}_A(M_3) = k\underline{Id} \quad \text{et} \quad \underline{\text{End}}_A(M_6) = k\underline{\epsilon} \oplus k\underline{Id}.$$

On vérifie que $\alpha\epsilon = \beta$ et on obtient que l'algèbre $\underline{\text{End}}_A(M_3 \oplus M_6)$ est isomorphe à II_2 ,



Dans le cas $n \equiv -1 \pmod 3$, on peut supposer que

$$M_3 = \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \quad \text{et} \quad M_6 = \Omega^{-1} \left(\begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array} \right) = \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \end{array}.$$

Notons

$$\gamma : \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \end{array} \xrightarrow{\quad} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \quad \delta : \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array}$$

et

$$\eta : \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \end{array}$$

où $\underline{\gamma} \neq 0 \neq \underline{\eta}$ en vertu de Lemme 3.2.1 et où $\underline{\delta} \neq 0$ par Lemme 3.2.3. Il est facile de voir que

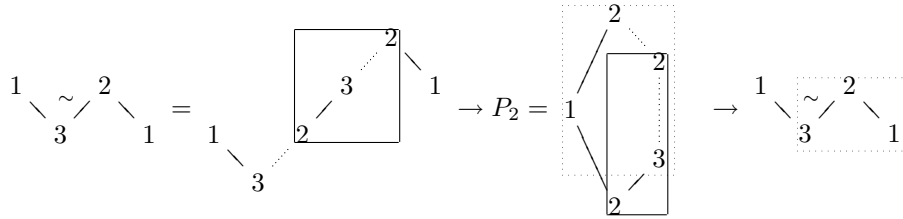
$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \end{array}, \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \right) = k\underline{\gamma} \oplus k\underline{\delta},$$

car il n'existe pas d'autres morphismes explicites de $\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \end{array}$ à $\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array}$. On a vu dans (4) que

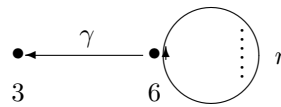
$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array}, \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \end{array} \right) = 0.$$

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \end{array}, \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \end{array} \right) = k\underline{Id} \oplus k\underline{\eta},$$

car tout autre morphisme est de cœur $((\alpha_2\beta_2)^s\alpha_2)^{-1}$ avec $0 \leq s \leq b-2$ et ces morphismes factorisent par P_2 via



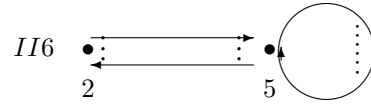
dans lequel l'intersection des deux cases dans P_2 est $(\alpha_2\beta_2)^s\alpha_2$. On vérifie que $\eta\gamma = \delta$ et on obtient que l'algèbre $\underline{\text{End}}_A(M_3 \oplus M_6)$ est isomorphe à $\Pi 3$,



□

Lemme 4.2.7 (2+5)

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \quad 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^{i+3u} \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \sim \diagup \\ 2 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \quad 1 \end{array} \right), \quad i, u \in \mathbb{Z}$$



Démonstration On utilise la description des syzygies de $\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \quad 2 \end{array}$ donnée dans la preuve du cas **(1+5)** (Lemme 4.2.5).

(1) Si $n \geq 1$,

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \quad 1 \end{array}, \Omega^{2n} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \quad 2 \end{array} \right) \right) = 0 \iff 2n \equiv 0 \pmod{6}$$

En effet, si $n = 1$, le morphisme explicite

$$\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \quad 1 \end{array} \xrightarrow{\begin{array}{c} \lceil 3 \quad - \quad \rceil \\ \lceil \quad - \quad 1 \rceil \end{array}} \Omega^2 \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \quad 2 \end{array} \right) = \begin{array}{c} \lceil 3 \quad - \quad \rceil \\ \lceil \quad - \quad 1 \rceil \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \quad 2 \end{array}$$

n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.1.

Si $2n \equiv 2 \pmod{6}$ et $n > 1$, le morphisme explicite

$$\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \quad 1 \end{array} \xrightarrow{\begin{array}{c} \lceil 3 \quad - \quad \rceil \\ \lceil \quad - \quad 1 \rceil \end{array}} \Omega^{2n} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \quad 2 \end{array} \right) = \begin{array}{c} \lceil 3 \quad - \quad \rceil \\ \lceil \quad - \quad 1 \rceil \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \quad 2 \end{array} \sim \cdots \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \quad 3 \end{array} \cdots \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \quad 2 \end{array} \sim \cdots \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \quad 2 \end{array}$$

n'est pas projectif, en vertu de Lemme 3.2.1.

Si $2n = 4$, le morphisme explicite

$$\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \quad 1 \end{array} \hookrightarrow \Omega^4 \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \quad 2 \end{array} \right) = \begin{array}{c} \lceil 1 \quad - \quad - \quad - \quad \rceil \\ \lceil \quad - \quad 2 \quad - \quad 1 \rceil \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \quad 2 \end{array}$$

n'est pas projectif, en vertu de Lemme 3.2.1.

Si $2n \equiv 4 \pmod 6$ et $n > 2$, le morphisme explicite

$$1 \searrow_2 \nearrow_3 \searrow_1 \hookrightarrow \boxed{\begin{array}{ccc} 1 & & 3 \\ \swarrow & \searrow & \swarrow \\ 2 & & 1 \end{array}} \cdots 2 \searrow_3 \nearrow_1 \searrow_2 \searrow_3 \cdots 1 \searrow_3 \nearrow_2 \searrow_1$$

n'est pas projectif, en vertu de Lemme 3.2.1.

Si $2n \equiv 0 \pmod 6$ et $n \geq 1$,

$$\Omega^{2n} \left(\begin{array}{ccc} 2 & & 1 \\ \swarrow & \searrow & \swarrow \\ 3 & & 2 \end{array} \right) = \begin{array}{ccccccc} 2 & \sim & 1 & & \cdots & 3 & 2 \\ \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow \\ 3 & & 2 & & 2 & 1 & 3 \end{array} \searrow_2 \searrow_3 \cdots 2 \searrow_2 \nearrow_1 \sim 2$$

Les quotients explicites de $\begin{array}{ccc} 1 & & 3 \\ \swarrow & \searrow & \swarrow \\ 2 & & 1 \end{array}$ sont $S_1, S_3, \begin{array}{ccc} 3 & & \\ \swarrow & \searrow & \swarrow \\ & & 1 \end{array}$ et lui-même. On voit que les deux derniers ne peuvent pas être des sous-cordes explicites de $\Omega^{2n} \left(\begin{array}{ccc} 2 & & 1 \\ \swarrow & \searrow & \swarrow \\ 3 & & 2 \end{array} \right)$ avec $2n \equiv 0 \pmod 6$ et $n \geq 1$.

En cas de S_1 , donnons d'abord une numérotation à $\Omega^{2n} \left(\begin{array}{ccc} 2 & & 1 \\ \swarrow & \searrow & \swarrow \\ 3 & & 2 \end{array} \right)$, i.e. numéroter

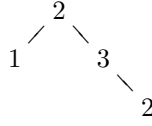
$$\Omega^4 \left(\begin{array}{ccc} 2 & & 1 \\ \swarrow & \searrow & \swarrow \\ 3 & & 2 \end{array} \right) = \begin{array}{ccccccc} 1 & & 3 & & 2 & & \\ \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow \\ 2 & & 1 & & 3 & & 1 \end{array} = C_{-2} \cdots C_3$$

de gauche à droite et étendre cette numérotation à gauche et à droite. Supposons f un morphisme explicite de $\begin{array}{ccc} 2 & & 1 \\ \swarrow & \searrow & \swarrow \\ 3 & & 2 \end{array}$ vers $\Omega^{2n} \left(\begin{array}{ccc} 1 & & 3 \\ \swarrow & \searrow & \swarrow \\ 2 & & 1 \end{array} \right)$ de cœur S_1 . Notons s la position de son cœur dans $\Omega^{2n} \left(\begin{array}{ccc} 2 & & 1 \\ \swarrow & \searrow & \swarrow \\ 3 & & 2 \end{array} \right)$.

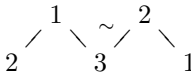
Si $s < 0$, alors $C_{s+1}C_{s+2}C_{s+3}C_{s+4} = \begin{array}{ccc} 2 & \sim & 1 \\ \swarrow & \searrow & \swarrow \\ 1 & & 2 \end{array}$, alors f factorise par $P_2 \oplus P_1$, via

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 3 \\ \swarrow & \searrow & \swarrow \\ 2 & & 1 \end{array} \hookrightarrow P_2 \oplus P_1 \rightarrow M(C_{s+1}C_{s+2}C_{s+3}C_{s+4}) = \begin{array}{ccc} 2 & \sim & 1 \\ \swarrow & \searrow & \swarrow \\ 1 & & 2 \end{array} \hookrightarrow \Omega^{2n} \left(\begin{array}{ccc} 2 & & 1 \\ \swarrow & \searrow & \swarrow \\ 3 & & 2 \end{array} \right)$$

où le premier morphisme est l'injection de $\begin{array}{ccc} 1 & & 3 \\ \swarrow & \searrow & \swarrow \\ 2 & & 1 \end{array}$ dans son enveloppe injective et où le deuxième morphisme est la surjection de la couverture projective de $\begin{array}{ccc} 1 & & 3 \\ \swarrow & \searrow & \swarrow \\ 2 & & 1 \end{array}$ vers ce module.

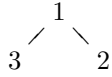
Si $s = 0$, $C_1 C_2 =$ , alors f factorise par P_2 via

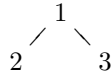
$$\boxed{\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array}} \backslash_1 \twoheadrightarrow \begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \hookrightarrow P_2 \twoheadrightarrow M(C_1 C_2) = \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \quad 3 \\ \quad \diagdown \quad \diagup \\ \quad 2 \end{array} \hookrightarrow \Omega^{2n} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \quad \diagdown \quad \diagup \\ \quad 2 \end{array} \right)$$

Si $s > 0$, on regarde $C_{s-3} C_{s-2} C_{s-1} C_s =$  et f factorise par $P_2 \oplus P_1$ via

$$\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array} \hookrightarrow P_2 \oplus P_1 \twoheadrightarrow M(C_{s-3} C_{s-2} C_{s-1} C_s) = \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \end{array} \hookrightarrow \Omega^{2n} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \quad \diagdown \quad \diagup \\ \quad 2 \end{array} \right)$$

En cas de S_3 , on conserve la même numérotation de ci-dessus. Supposons $s = \text{Pos}(E)$ la position du cœur

$E = S_3$ dans le but de f . Alors si $s < 0$, la corde $C_{s+1} C_{s+2}$ est  ou si $s \geq 0$, la corde $C_{s-1} C_s$

est , donc f est projectif via

$$\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array} \rightarrow P_1 = \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 3 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array}} \twoheadrightarrow \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \hookrightarrow \Omega^{2n} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \quad \diagdown \quad \diagup \\ \quad 2 \end{array} \right)$$

(2) Si $n \geq 0$,

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array}, \Omega^{-2n} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \quad \diagdown \quad \diagup \\ \quad 2 \end{array} \right) \right) = 0 \iff -2n \equiv 0 \pmod{6}$$

(3) Si $n \geq 0$,

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array}, \Omega^{2n+1} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \quad \diagdown \quad \diagup \\ \quad 2 \end{array} \right) \right) = 0 \iff 2n+1 \equiv 3 \pmod{6}$$

(4) Si $n \geq 0$,

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array}, \Omega^{-2n-1} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \quad \diagdown \quad \diagup \\ \quad 2 \end{array} \right) \right) = 0 \iff -2n-1 \equiv -3 \pmod{6}$$

(5) Si $n \geq 1$,

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\Omega^{2n} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \quad \diagdown \quad \diagup \\ \quad 2 \end{array} \right), \begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array} \right) = 0 \iff 2n \equiv 2 \pmod{6}$$

Si $2n = 4$, alors le morphisme

$$\Omega^4 \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \right) = \begin{array}{c} \boxed{1} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \quad 2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \boxed{1} \end{array}$$

n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.3.

Si $2n \equiv 4 \pmod 6$ et $n > 2$, alors le morphisme explicite

$$\Omega^{2n} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \right) = \begin{array}{c} \boxed{1} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \dots \\ 2 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 3 \quad 2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \dots \\ 3 \quad 2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \end{array}$$

vers $\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \boxed{1} \end{array}$ n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.3.

Si $2n = 6$, alors le morphisme explicite

$$\Omega^6 \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \right) = \begin{array}{c} \boxed{2} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \quad 2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \quad 2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \sim 2 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{2} \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \end{array}$$

n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.3 et Lemme 3.2.2. En effet, désignons par f ce morphisme explicite. D'après Remarque 2.2.2, il existe un module indécomposable projectif P et deux morphismes explicites

$$g : M(C) \rightarrow P \text{ et } h : P \rightarrow M(D)$$

tels que $h \circ g = f + f'$ pour f' un autre morphisme explicite de cœur disjoint de celui de f ou le morphisme nul. Evidemment le modules P n'est pas isomorphe à P_2 , Lemme 3.2.3 montre que $P \not\cong P_1$ et si $P \cong P_3$, f' serait de la forme

$$\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad \boxed{1} \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \quad 2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \quad 2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \sim 2 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \boxed{1} \end{array}$$

Si f' est projectif, il existe un module indécomposable projectif P' et deux morphismes explicites

$$g' : M(C) \rightarrow P' \text{ et } h' : P' \rightarrow M(D)$$

tels que $h' \circ g' = f' + f''$ pour f'' un autre morphisme explicite de cœur disjoint de celui de f' ou le morphisme nul. Or, en ce moment, $P' = P_3$ et $f'' = f$. C'est-à-dire que f n'est pas projectif, d'après Remarque 2.2.2.

Si $2n = 2$, le seul morphisme explicite de

$$\Omega^2 \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \right) = \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad \boxed{2} \\ \diagup \quad \diagdown \\ 3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{2} \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \end{array}$$

est de cœur S_2 et factorise par P_1 via

$$\boxed{\begin{array}{c} 3 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array}} \setminus_3 \rightarrow P_1 = \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ 3 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array}} \rightarrow \begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array}$$

Si $2n \equiv 2 \pmod 6$ et $n > 1$,

$$\Omega^{2n} \left(\begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 2 \end{array} \right) = \begin{array}{c} 3 \quad \cdots \quad 3 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \quad 1 \quad 3 \quad 2 \quad \cdots \quad 1 \quad 3 \end{array}$$

Soit f un morphisme explicite de $\Omega^{2n} \left(\begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 2 \end{array} \right)$ à $\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array}$. Les cœurs possibles de f sont $E = S_1$ et $E = S_2$. Numérotions $\Omega^{2n} \left(\begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 2 \end{array} \right)$ en définissant

$$\Omega^4 \left(\begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 2 \end{array} \right) = \begin{array}{c} 1 \quad 3 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \quad 3 \quad 1 \quad 2 \end{array} = C_{-2} \cdots C_3.$$

Notons s la position de son cœur E dans la source de f .

En cas $E = S_2$, si $s \leq 1$, $C_{s-1}C_s = \begin{array}{c} 3 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array}$ et si $s > 1$, $C_{s+1}C_{s+2} = \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array}$, f factorise par P_1 via

$$\Omega^{2n} \left(\begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 2 \end{array} \right) \twoheadrightarrow \begin{array}{c} 3 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \hookrightarrow P_1 = \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ 3 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array}} \rightarrow \begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array}$$

En cas $E = S_1$, si $s \leq 0$,

$$C_{s-2}C_{s-1}C_s = \begin{array}{c} 3 \quad 2 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 3 \end{array}$$

et si $s > 0$,

$$C_{s+1}C_{s+2}C_{s+3} = \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \end{array},$$

f factorise par $P_1 \oplus P_3$ via

$$\Omega^{2n} \left(\begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 2 \end{array} \right) \twoheadrightarrow \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \end{array} \hookrightarrow P_1 \oplus P_3 \twoheadrightarrow \begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array}$$

(6) Si $n \geq 0$,

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\Omega^{-2n} \left(\begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 2 \end{array} \right), \begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array} \right) = 0 \iff -2n \equiv -4 \pmod 6$$

(7) Si $n \geq 0$,

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\Omega^{2n+1} \left(\begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 2 \end{array} \right), \begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array} \right) = 0 \iff 2n+1 \equiv 5 \pmod{6}$$

(8) Si $n \geq 0$,

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\Omega^{-2n-1} \left(\begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 2 \end{array} \right), \begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array} \right) = 0 \iff -2n-1 \equiv -1 \pmod{6}$$

Les démonstrations de (2), (3), (4), (6), (7) et (8) sont similaires aux cas déjà traités.
En combinant tout ci-dessus, on obtient que

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array}, \Omega^n \left(\begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 2 \end{array} \right) \right) = 0 \iff n \equiv 0 \pmod{3}$$

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\Omega^n \left(\begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 2 \end{array} \right), \begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array} \right) = 0 \iff n \equiv 2 \pmod{3}$$

$$\text{Ext}_A^1 \left(\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array} \oplus \Omega^n \left(\begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 2 \end{array} \right), \begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array} \oplus \Omega^n \left(\begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 2 \end{array} \right) \right) = 0 \iff n \equiv 1 \pmod{3}$$

On calcule l'algèbre $\underline{\text{End}}_A(M_2 \oplus M_5)$ où

$$M_2 = \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array} \right) \text{ et } M_5 = \Omega^{i+3u+1} \left(\begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 2 \end{array} \right)$$

avec $i, u \in \mathbb{Z}$. On peut supposer

$$M_2 = \begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array} \text{ et } M_5 = \Omega^1 \left(\begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 2 \end{array} \right) = \begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array}.$$

Notons

$$\alpha : M_2 = \begin{array}{c} \boxed{1} \quad \boxed{3} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{2} \quad \boxed{1} \end{array} \rightarrow M_5 = \begin{array}{c} \boxed{1} \quad \boxed{3} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{2} \quad \boxed{1} \end{array} \quad , \quad \gamma : M_2 = \begin{array}{c} \boxed{1} \quad \boxed{3} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{2} \quad \boxed{1} \end{array} \rightarrow M_5 = \begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array}$$

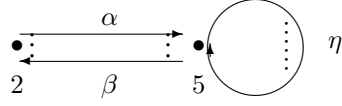
$$\beta : M_5 = \begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array} \rightarrow M_2 = \begin{array}{c} \boxed{1} \quad \boxed{3} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{2} \quad \boxed{1} \end{array}, \quad \delta : M_5 = \begin{array}{c} \boxed{1} \quad \boxed{3} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{2} \quad \boxed{1} \end{array} \rightarrow M_2 = \begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array}$$

$$\epsilon : M_2 = \begin{array}{c} \boxed{1} \quad \boxed{3} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{2} \quad \boxed{1} \end{array} \rightarrow M_2 = \begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array}, \quad \eta : M_5 = \begin{array}{c} \boxed{1} \quad \boxed{3} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{2} \quad \boxed{1} \end{array} \rightarrow M_5 = \begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array}$$

On vérifie que

$$\eta\beta = \delta, \alpha\eta = \gamma, \gamma\beta = \epsilon, \alpha\beta = 0 \text{ et } \beta\alpha = 0.$$

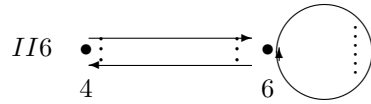
On en déduit le carquois avec relations de $\underline{\text{End}}_A(M_2 \oplus M_5)$, puisque ces morphismes explicites avec les identités engendrent les espaces des homomorphismes stables en question en tant qu'espace vectoriel.



□

Lemme 4.2.8 (4+6)

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \backslash 1 / 3 \\ \sim \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^{i+3u} \left(\begin{array}{c} 2 \backslash 1 / 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right), \quad i, u \in \mathbb{Z}$$



Démonstration On utilise la description des syzygies de $\begin{array}{c} 2 \backslash 1 / 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array}$ donnée dans la preuve du cas **(3+6)**.

Pour simplifier les calculs, on utilise

$$\Omega^{-1} \left(\begin{array}{c} 2 \backslash 1 / 3 \\ \sim \\ 2 \end{array} \right) = \begin{array}{c} 1 \backslash 3 / 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array}$$

En utilisant des arguments similaires dans la preuve du cas **(2+5)** (Lemme 4.2.7), on vérifie que

(1) Pour $n \geq 0$,

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{array}{c} 1 \backslash 3 / 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array}, \Omega^{2n} \left(\begin{array}{c} 2 \backslash 1 / 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \right) = 0 \iff 2n \equiv 4 \pmod{6}$$

(2) Pour $n \geq 1$,

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{array}{c} 1 \backslash 3 / 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array}, \Omega^{-2n} \left(\begin{array}{c} 2 \backslash 1 / 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \right) = 0 \iff -2n \equiv -2 \pmod{6}$$

(3) Pour $n \geq 0$,

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{array}{c} 1 \backslash 3 / 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array}, \Omega^{2n+1} \left(\begin{array}{c} 2 \backslash 1 / 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \right) = 0 \iff 2n+1 \equiv 1 \pmod{6}$$

(4) Pour $n \geq 0$,

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{array}{c} 1 \backslash 3 / 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array}, \Omega^{-2n-1} \left(\begin{array}{c} 2 \backslash 1 / 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \right) = 0 \iff -2n-1 \equiv -5 \pmod{6}$$

(5) Pour $n \geq 0$,

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\Omega^{2n} \left(\begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array} \right), \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \end{array} \right) = 0 \iff 2n \equiv 0 \pmod{6}$$

(6) Pour $n \geq 1$,

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\Omega^{-2n} \left(\begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array} \right), \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \end{array} \right) = 0 \iff -2n \equiv -6 \pmod{6}$$

(7) Pour $n \geq 0$,

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\Omega^{2n+1} \left(\begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array} \right), \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \end{array} \right) = 0 \iff 2n+1 \equiv 3 \pmod{6}$$

(8) Pour $n \geq 0$,

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\Omega^{-2n-1} \left(\begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array} \right), \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \end{array} \right) = 0 \iff -2n-1 \equiv -3 \pmod{6}$$

On en déduit que

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \end{array}, \Omega^n \left(\begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array} \right) \right) = 0 \iff n \equiv 1 \pmod{3}$$

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\Omega^n \left(\begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array} \right), \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \end{array} \right) = 0 \iff n \equiv 0 \pmod{3}$$

$$\text{Ext}_A^1 \left(\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \end{array} \oplus \Omega^n \left(\begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array} \right), \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \end{array} \oplus \Omega^n \left(\begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array} \right) \right) = 0 \iff n \equiv 2 \pmod{3}$$

$$\text{Ext}_A^1 \left(\begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array} \oplus \Omega^n \left(\begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array} \right), \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array} \oplus \Omega^n \left(\begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array} \right) \right) = 0 \iff n \equiv 0 \pmod{3}$$

On a donc que

$$\text{Ext}_A^1(M_4 \oplus M_6, M_4 \oplus M_6) = 0 \iff M_4 = \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array} \right), M_6 = \Omega^{i+3u} \left(\begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array} \right) \quad i, u \in \mathbb{Z}.$$

On calcule ensuite l'algèbre $\underline{\text{End}}_A(M_4 \oplus M_6)$. On peut supposer

$$M_4 = \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \end{array} \quad \text{et} \quad M_6 = \Omega^{-1} \left(\begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array} \right) = \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \end{array}.$$

Notons

$$\alpha : M_4 = \begin{array}{c} \boxed{1} \quad \boxed{2} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{3} \quad \boxed{1} \end{array} \rightarrow M_6 = \begin{array}{c} \boxed{1} \quad \boxed{2} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{3} \quad \boxed{1} \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array}, \quad \gamma : M_4 = \begin{array}{c} \boxed{1} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \rightarrow M_6 = \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \end{array} \boxed{1}$$

$$\begin{aligned} \beta : M_6 = 1 \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \boxed{2} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ 1 \end{array} \rightarrow M_4 = 1 \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \boxed{2} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array}, \quad \delta : M_6 = \begin{array}{c} \boxed{1} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \sim \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \rightarrow M_4 = 1 \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \sim \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{1} \end{array} \\ \epsilon : M_4 = \begin{array}{c} \boxed{1} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \sim \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \rightarrow M_4 = 1 \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \sim \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{1} \end{array}, \quad \eta : M_6 = \begin{array}{c} \boxed{1} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \sim \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \rightarrow M_6 = 1 \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \sim \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{1} \end{array} \end{aligned}$$

On vérifie facilement que

$$\underline{\text{Hom}}_A(M_4, M_6) = k\alpha \oplus k\gamma, \quad \underline{\text{Hom}}_A(M_6, M_4) = k\beta \oplus k\delta, \quad \underline{\text{End}}_A(M_4) = kId \oplus k\epsilon,$$

car il n'existe pas d'autres morphismes explicites et aucun morphisme d'entre eux n'est projectif grâce à Lemme 3.2.1 et Lemme 3.2.3. On a aussi que $\underline{\text{End}}_A(M_6) = kId \oplus k\eta$, car à part Id et η , les seuls morphismes explicites sont de cœur $(\alpha_2/\beta_2)^s \alpha_2$ avec $0 \leq s \leq b-2$ et ils factorisent par P_2 via

$$M_6 = 1 \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \sim \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} = 1 \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \boxed{2} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \rightarrow P_2 = 1 \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \boxed{2} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \rightarrow M_6 = 1 \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \sim \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array}$$

On vérifie que

$$\eta\beta = \delta, \alpha\eta = \gamma, \gamma\beta = \epsilon, \alpha\beta = 0, \beta\alpha = 0.$$

On en déduit que $\underline{\text{End}}_A(M_4 \oplus M_6)$ est isomorphe à II_6

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\alpha} & \bullet \\ \vdots & & \vdots \\ 4 & \xrightarrow{\beta} & 6 \end{array} \quad \eta$$

□

Lemme 4.2.9 (1+6,2+6,3+5,4+5) arbitraires.

Démonstration On donne la preuve du cas le plus compliqué (4+5), les autres cas étant analogues.

On montre que

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(1 \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \sim \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array}, \Omega^n \left(2 \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \sim \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \right) \right) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

En effet, les quotients explicites de $1 \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \sim \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array}$ sont

$$S_1, S_2, 1 \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \sim \\ 2 \end{array}, 1 \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \sim \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array}.$$

On voit facilement, en utilisant les descriptions données dans la preuve du cas **(1+5)**, que les deux derniers ne peuvent pas être des sous-cordes explicites de $\Omega^n \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ & \backslash & / \\ & 3 & \\ & / & \backslash \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix} \right) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$. Notons f un morphisme explicite de cœur $E \in \{S_1, S_2\}$ de $\begin{smallmatrix} 1 & & 2 \\ & \backslash & / \\ & 3 & \\ & / & \backslash \\ 1 & & 1 \end{smallmatrix}$ à $\Omega^n \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ & \backslash & / \\ & 3 & \\ & / & \backslash \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix} \right)$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

(1) Pour $n \geq 1$,

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 2 \\ & \backslash & / \\ & 3 & \\ & / & \backslash \\ 1 & & 1 \end{smallmatrix}, \Omega^{2n} \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ & \backslash & / \\ & 3 & \\ & / & \backslash \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix} \right) \right) = 0$$

On conserve la numérotation de $\Omega^{2n} \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ & \backslash & / \\ & 3 & \\ & / & \backslash \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix} \right)$ établie dans la preuve du cas (1+5) (Lemme 4.2.5) dans laquelle

$$\Omega^4 \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ & \backslash & / \\ & 3 & \\ & / & \backslash \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix} \right) = \begin{smallmatrix} 1 & & 3 & & 2 \\ & \backslash & / & \backslash & / \\ & 2 & & 1 & \\ & / & \backslash & / & \backslash \\ & 3 & & 2 & \\ & & & & 1 \end{smallmatrix} = C_{-2} \cdots C_3$$

Notons s la position du cœur de f dans $\Omega^{2n} \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ & \backslash & / \\ & 3 & \\ & / & \backslash \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix} \right)$. Il est facile de voir que tout morphisme de $\begin{smallmatrix} 1 & & 2 \\ & \backslash & / \\ & 3 & \\ & / & \backslash \\ 1 & & 1 \end{smallmatrix}$ à $\Omega^{2n} \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ & \backslash & / \\ & 3 & \\ & / & \backslash \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix} \right)$ est de cœur S_1 ou S_2 .

En cas $E = S_1$, si $s \leq 0$, $C_{s-1}C_s = \begin{smallmatrix} 3 \\ / \backslash \\ 2 \quad 1 \end{smallmatrix}$ ou $\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash / \\ 1 \quad 1 \end{smallmatrix}$ (ce dernier est possible ssi C_s est le premier segment), f factorise par P_3 ; si $s > 0$, $C_{s+1}C_{s+2} = \begin{smallmatrix} 3 \\ / \backslash \\ 1 \quad 2 \end{smallmatrix}$ ou $\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash / \\ 1 \quad 1 \end{smallmatrix}$ (ce dernier est possible ssi C_{s+1} est le dernier segment), f factorise par P_3 .

En cas $E = S_2$, si $s \leq 0$, $C_{s-1}C_s = \begin{smallmatrix} 1 \\ / \backslash \\ 3 \quad 2 \end{smallmatrix}$ ou $\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash / \\ 2 \quad 2 \end{smallmatrix}$ (ce dernier est possible ssi C_s est le premier segment), f factorise par P_1 ; si $s > 0$, $C_{s+1}C_{s+2} = \begin{smallmatrix} 1 \\ / \backslash \\ 2 \quad 3 \end{smallmatrix}$ ou $\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash / \\ 2 \quad 2 \end{smallmatrix}$ (ce dernier est possible ssi C_{s+1} est le dernier segment), f factorise par P_1 .

(2) Pour $n \geq 0$,

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 2 \\ & \backslash & / \\ & 3 & \\ & / & \backslash \\ 1 & & 1 \end{smallmatrix}, \Omega^{-2n} \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ & \backslash & / \\ & 3 & \\ & / & \backslash \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix} \right) \right) = 0$$

On conserve la numérotation de $\Omega^{-2n} \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ & \backslash & / \\ & 3 & \\ & / & \backslash \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix} \right)$ établie dans la preuve du cas (1+5) (Lemme 4.2.5) dans laquelle

$$\Omega^{-2} \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ & \backslash & / \\ & 3 & \\ & / & \backslash \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix} \right) = \begin{smallmatrix} 3 \\ / \backslash \\ 1 \quad 2 \\ & \backslash & / \\ & 3 & \\ & / & \backslash \\ 1 \quad 2 & & 3 \\ & \backslash & / \\ & 2 & \\ & / & \backslash \\ & 1 \end{smallmatrix} = C_{-1} \cdots C_4$$

Il est facile de voir que tout morphisme f de $\begin{smallmatrix} 1 & & 2 \\ & \searrow & / \\ & 3 & \\ & / & \searrow \\ & 1 & \end{smallmatrix}$ à $\Omega^{2n} \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ & \searrow & / \\ & 3 & \\ & / & \searrow \\ & 2 & \end{smallmatrix} \right)$ est de cœur S_1 ou S_2 . Notons s la position du cœur de f dans $\Omega^{2n} \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ & \searrow & / \\ & 3 & \\ & / & \searrow \\ & 2 & \end{smallmatrix} \right)$.

En cas $E = S_1$, si $s < -2$, $C_{s+1}C_{s+2} = \begin{smallmatrix} 3 \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad 2 \end{smallmatrix}$, f factorise par P_3 ; si $s = -2$, $C_{s+1}C_{s+2} = \begin{smallmatrix} 3 \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad 2 \end{smallmatrix}$, f factorise par P_3 ; si $s > 0$, $C_{s-1}C_s = \begin{smallmatrix} 3 \\ / \quad \backslash \\ 2 \quad 1 \end{smallmatrix}$, f factorise par P_3 .

En cas $E = S_2$, si $s < 0$, $C_{s+1}C_{s+2} = \begin{smallmatrix} 1 \\ / \quad \backslash \\ 2 \quad 3 \end{smallmatrix}$, f factorise par P_1 ; si $s > 0$, $C_{s-1}C_s = \begin{smallmatrix} 1 \\ / \quad \backslash \\ 3 \quad 2 \end{smallmatrix}$, f factorise par P_1 .

(3) Pour $n \geq 0$,

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 2 \\ & \searrow & / \\ & 3 & \\ & / & \searrow \\ & 1 & \end{smallmatrix}, \Omega^{2n+1} \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ & \searrow & / \\ & 3 & \\ & / & \searrow \\ & 2 & \end{smallmatrix} \right) \right) = 0$$

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 2 \\ & \searrow & / \\ & 3 & \\ & / & \searrow \\ & 1 & \end{smallmatrix}, \Omega^1 \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ & \searrow & / \\ & 3 & \\ & / & \searrow \\ & 2 & \end{smallmatrix} \right) \right) = \underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 2 \\ & \searrow & / \\ & 3 & \\ & / & \searrow \\ & 1 & \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ & \sim & / \\ & 2 & \\ & / & \searrow \\ & 1 & \end{smallmatrix} \right) = 0$$

car les seuls morphismes explicites entre eux sont

$$\boxed{1} \begin{smallmatrix} 2 \\ / \quad \backslash \\ 3 \quad 1 \end{smallmatrix} \rightarrow \begin{smallmatrix} 1 \\ / \quad \backslash \\ 2 \quad 3 \end{smallmatrix} \boxed{1}, \text{ et } \begin{smallmatrix} 1 \\ / \quad \backslash \\ 3 \quad 1 \end{smallmatrix} \boxed{2} \rightarrow \begin{smallmatrix} 1 \\ / \quad \backslash \\ 2 \quad 3 \end{smallmatrix} \boxed{2},$$

le premier factorisant par $P_3 \oplus P_1$ et le deuxième par P_1 .

On conserve la numérotation de $\Omega^{2n+1} \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ & \searrow & / \\ & 3 & \\ & / & \searrow \\ & 2 & \end{smallmatrix} \right)$ établie dans la preuve du cas (1+5) (Lemme 4.2.5) dans laquelle

$$\Omega^3 \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ & \searrow & / \\ & 3 & \\ & / & \searrow \\ & 2 & \end{smallmatrix} \right) = \begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ & \sim & / \\ & 3 & \\ & / & \searrow \\ & 2 & \end{smallmatrix} = C_{-1} \cdots C_2$$

Il est facile de voir que tout morphisme f de $\begin{smallmatrix} 1 & & 2 \\ & \searrow & / \\ & 3 & \\ & / & \searrow \\ & 1 & \end{smallmatrix}$ à $\Omega^{2n+1} \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ & \searrow & / \\ & 3 & \\ & / & \searrow \\ & 2 & \end{smallmatrix} \right)$ est de cœur S_1 ou S_2 . Notons s la position du cœur de f dans $\Omega^{2n+1} \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ & \searrow & / \\ & 3 & \\ & / & \searrow \\ & 2 & \end{smallmatrix} \right)$.

En cas $E = S_1$, si $s < 0$, $C_{s-1}C_s = \begin{smallmatrix} 3 \\ / \quad \backslash \\ 2 \quad 1 \end{smallmatrix}$ ou $\begin{smallmatrix} 3 \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad 1 \end{smallmatrix}$ (ce dernier est possible ssi C_s est le premier segment), f factorise par P_3 ; si $s > 0$, $C_{s+1}C_{s+2} = \begin{smallmatrix} 3 \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad 2 \end{smallmatrix}$ ou $\begin{smallmatrix} 3 \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad 1 \end{smallmatrix}$ (ce dernier est possible ssi C_{s+1} est le dernier segment), f factorise par P_3 .

En cas $E = S_2$, si $s \leq 1$, $C_{s-1}C_s = \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 3 \quad 2 \end{array}$ ou $\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \end{array}$ (ce dernier est possible ssi C_s est le premier segment), f factorise par P_1 ; si $s > 1$, $C_{s+1}C_{s+2} = \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \quad 3 \end{array}$ ou $\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \end{array}$ (ce dernier est possible ssi C_{s+1} est le dernier segment), f factorise par P_1 .

(4) Pour $n \geq 0$,

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 3 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array}, \Omega^{-2n-1} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \right) \right) = 0$$

Numérotions $\Omega^{-2n-1} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \right)$ tel que

$$\Omega^{-1} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \right) = \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 3 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \sim \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \quad 3 \end{array} = C_{-1} \cdots C_2$$

Il est facile de voir que tout morphisme f de $\begin{array}{c} 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 3 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array}$ à $\Omega^{-2n-1} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \right)$ est de cœur S_1 ou S_2 . Notons s la position du cœur de f dans $\Omega^{-2n-1} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \right)$.

En cas $E = S_1$, si $s < 0$, $C_{s+1}C_{s+2} = \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \quad 2 \end{array}$, f factorise par P_3 ; si $s = 0$, $C_{-1}C_0 = \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 3 \quad 1 \end{array}$, f factorise par P_3 ; si $s > 0$, $C_{s-1}C_s = \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \quad 1 \end{array}$, f factorise par P_3 .

En cas $E = S_2$, si $s < 0$, $C_{s+1}C_{s+2} = \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \quad 3 \end{array}$, f factorise par P_1 ; si $s > 0$, $C_{s-1}C_s = \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 3 \quad 2 \end{array}$, f factorise par P_1 .

De même, on vérifie que

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\Omega^n \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \right), \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 3 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \right) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

□

Lemme 4.2.10 (5+5,6+6) impossibles.

Démonstration On montre d'abord que (5+5) est impossible. On va montrer que

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \right), \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \right) = 0 \iff i \in \{-2, 1\}$$

On en déduit que

$$\text{Ext}_A^1 \left(\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \right), \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \right) = 0 \iff i \in \{-3, 0\}$$

et

$$\text{Ext}_A^1 \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array}, \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \right) \right) = 0 \iff i \in \{0, 3\}$$

Par conséquent, pour tout $i \in \mathbb{Z} - \{0\}$,

$$\text{Ext}_A^1 \left(\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \right) \oplus \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array}, \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \right) \oplus \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \right) \neq 0$$

et (5+5) est donc impossible.

(1) Pour $n \geq 1$,

$$\Omega^{2n} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \right) = \Omega^{2n-2} \left(\begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad \begin{array}{c} \boxed{2} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{3} \end{array} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \begin{array}{c} \boxed{2} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{3} \end{array} \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} \boxed{2} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{3} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array}$$

n'est pas projectif, en vertu de Lemme 3.2.1.

(2)

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\Omega^0 \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \right), \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \right) \neq 0$$

est évidente.

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\Omega^{-2} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \right), \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \right) = 0,$$

car les seuls morphismes explicites

$$\Omega^{-2} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \right) = 1 \begin{array}{c} \boxed{3} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \boxed{3} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array}$$

vers $\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{3} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array}$ sont ceux de cœur S_3 , qui factorisent par P_1 via

$$\begin{array}{c} \boxed{3} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \rightarrow P_1 = \begin{array}{c} \boxed{1} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{3} \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{1} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{3} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \boxed{3} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{1} \end{array} \rightarrow P_1 = \begin{array}{c} \boxed{1} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{3} \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{1} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{3} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array}.$$

Pour $n \geq 2$,

$$\Omega^{-2n} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \right) = \Omega^{-2n+4} \left(\begin{array}{c} \sim 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 1 \quad \begin{array}{c} \boxed{2} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{3} \end{array} \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} \boxed{2} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{3} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array}$$

n'est pas projectif, d'après Lemme 3.2.1.

(3)

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\Omega^1 \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \right), \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \right) = \text{Ext}_A^1 \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array}, \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \right) = 0$$

est déjà montrée.

Pour $n \geq 1$,

$$\Omega^{2n+1} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \right) = \Omega^{2n-2} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array}} \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array}} \end{array}$$

n'est pas projectif, en vertu de Lemme 3.2.1, où $\begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ 2 \end{array} = ((\beta_2 \alpha_2)^{b-2} \beta_2)^{-1}$.

(4) Pour $n \geq 0$,

$$\Omega^{-2n-1} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \right) = \Omega^{-2n} \left(\begin{array}{c} 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array}} \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array}} \end{array}$$

n'est pas projectif, en vertu de Lemme 3.2.1.

On montre ensuite que **(6+6)** est impossible. On va montrer que

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \right), \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \right) = 0 \iff i \in \{-2, 1\}$$

On en déduit que

$$\text{Ext}_A^1 \left(\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \right), \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \right) = 0 \iff i \in \{-3, 0\}$$

et

$$\text{Ext}_A^1 \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array}, \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \right) \right) = 0 \iff i \in \{0, 3\}$$

Par conséquent, pour tout $i \in \mathbb{Z} - \{0\}$,

$$\text{Ext}_A^1 \left(\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \right) \oplus \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array}, \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \right) \oplus \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \right) \neq 0$$

et **(6+6)** est donc impossible.

(1) Evidemment

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array}, \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \right) \neq 0$$

Pour $n \geq 1$,

$$\Omega^{2n} \left(\begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array} \right) = \Omega^{2n-2} \left(\begin{array}{c} 1 \quad \overline{2} \quad \overline{3} \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ 3 \quad 1 \quad 2 \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array}$$

n'est pas projectif, en vertu de Lemme 3.2.1.

(2) Pour $n \geq 2$,

$$\Omega^{-2n} \left(\begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array} \right) = \Omega^{-2n+4} \left(\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ 2 \quad 1 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 2 \quad 1 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad \boxed{2} \end{array}$$

n'est pas projectif, d'après Lemme 3.2.2 et Lemme 3.2.3.

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\Omega^{-2} \left(\begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array} \right), \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array} \right) = 0,$$

car le seul morphisme explicite de $\Omega^{-2} \left(\begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array} \right) = \begin{array}{c} 3 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \end{array}$ vers $\begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array}$ est celui de cœur S_1 , qui factorise par P_3 via

$$\begin{array}{c} 3 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \end{array} \rightarrow P_3 = \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{1} \quad 2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array}$$

(3)

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\Omega^1 \left(\begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array} \right), \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array} \right) = 0$$

est déjà montrée.

Pour $n \geq 1$,

$$\Omega^{2n+1} \left(\begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array} \right) = \Omega^{2n-2} \left(\begin{array}{c} 2 \quad 3 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ 1 \quad 2 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \quad 2 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad \boxed{2} \end{array}$$

n'est pas projectif, en vertu de Lemme 3.2.2 et Lemme 3.2.3.

(4) Pour $n \geq 1$,

$$\Omega^{-2n-1} \left(\begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 2 \end{array} \right) = \Omega^{-2n+2} \left(\begin{array}{c} \boxed{2} \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \quad 2 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad \boxed{2} \end{array}$$

n'est pas projectif, en vertu de Lemme 3.2.2 et Lemme 3.2.3.

Le morphisme explicite

$$f : \Omega^{-1} \left(\begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 2 \end{array} \right) = \begin{array}{c} \boxed{1} \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad \boxed{1} \end{array}$$

n'est pas projectif. En effet, d'après Remarque 2.2.2, il existe un module indécomposable projectif P et deux morphisme explicites $g : M(C) \rightarrow P$ et $h : P \rightarrow M(D)$ tels que $h \circ g = f + f'$ pour f' un autre morphisme explicite de cœur disjoint de celui de f ou le morphisme nul, où

$$C = \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \end{array} \quad \text{et} \quad D = \begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 2 \end{array}.$$

On a évidemment que $P = P_3$ et que

$$f' : \begin{array}{c} 1 \quad \boxed{2} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad \boxed{2} \end{array}$$

Comme $\underline{f} + \underline{f'} = 0$, $\underline{f} = 0 \iff \underline{f'} = 0$. Or, si f' est projectif, il existe un module indécomposable projectif P' et deux morphisme explicites $g' : M(C) \rightarrow P'$ et $h' : P' \rightarrow M(D)$ tels que $h' \circ g' = f' + f''$ pour $f'' \neq f$ un autre morphisme explicite de cœur disjoint de celui de f' ou le morphisme nul. Le module P' est forcément P_3 en vertu de Lemme 3.2.3. En ce moment, on a $f'' = f$, ce qui est absurde et f est donc non projectif.

□

Lemme 4.2.11 (5+6) impossible

Démonstration On va montrer que

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 2 \end{array} \right), \begin{array}{c} 3 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \end{array} \right) \neq 0$$

pour tout i en utilisant la description de $\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 2 \end{array} \right)$ donnée dans la preuve du cas **(1+5)** (Lemme 4.2.5).

(1) Le morphisme explicite

$$f : \begin{array}{c} \boxed{2} \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 3 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{2} \quad 3 \end{array}$$

n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.2 et Lemme 3.2.3. En effet, d'après Remarque 2.2.2, il existe un module indécomposable projectif P et deux morphisme explicites $g : M(C) \rightarrow P$ et $h : P \rightarrow M(D)$ tels que $h \circ g = f + f'$ pour f' un autre morphisme explicite de cœur disjoint de celui de f ou le morphisme nul. Le modules P n'est évidemment pas isomorphe à P_2 , Lemme 3.2.3 montre que $P \not\cong P_1$ et Lemme 3.2.2 montre que $P \not\cong P_2$. f est donc non projectif.

Le morphisme explicite

$$\Omega^2 \left(\begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 2 \end{array} \right) = \begin{array}{c} \boxed{3} \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 3 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad \boxed{3} \end{array},$$

noté f , n'est pas projectif, car sinon, d'après Remarque 2.2.2, il existe un module indécomposable projectif P et deux morphisme explicites $g : M(C) \rightarrow P$ et $h : P \rightarrow M(D)$ tels que $h \circ g = f + f'$ pour f' un autre morphisme explicite de cœur disjoint de celui de f ou le morphisme nul, où $C = \begin{array}{c} 3 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 3 \end{array}$ et

$D = \begin{array}{c} 3 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \end{array}$. On a évidemment que $P = P_1$ et que

$$f' : \begin{array}{c} 3 \quad \boxed{2} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 3 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{2} \quad 3 \end{array}$$

Comme $\underline{f} + \underline{f}' = 0$, $\underline{f} = 0 \iff \underline{f}' = 0$. Or, si f' est projectif, il existe un module indécomposable projectif P' et deux morphisme explicites $g' : M(C) \rightarrow P'$ et $h' : P' \rightarrow M(D)$ tels que $h' \circ g' = f' + f''$ pour $f'' \neq f$ un autre morphisme explicite de cœur disjoint de celui de f' ou le morphisme nul. Le module P' est isomorphe à P_1 ou P_3 . Si $P = P_1$, alors $f'' = f$, ce qui est absurde. Lemme 3.2.2 montre que $P \not\cong P_3$. Le morphisme f n'est pas projectif.

Pour $n \geq 2$,

$$\Omega^{2n} \left(\begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 2 \end{array} \right) = \Omega^{2n-4} \left(\begin{array}{c} 1 \quad 3 \quad \boxed{2} \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} 3 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{2} \quad 3 \end{array}$$

n'est pas projectif. En effet, notons ce morphisme f . D'après Remarque 2.2.2, il existe un module indécomposable projectif P et deux morphisme explicites $g : M(C) \rightarrow P$ et $h : P \rightarrow M(D)$ tels que $h \circ g = f + f'$ pour f' un autre morphisme explicite de cœur disjoint de celui de f ou le morphisme nul avec

$$C = \Omega^{2n-4} \left(\begin{array}{c} 1 \quad 3 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \end{array} \right) \text{ et } D = \begin{array}{c} 3 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \end{array}.$$

Comme les sous-cordes explicites de D contenant le cœur de f sont S_2 , $\begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 2 \end{array}$ et $\begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ 3 \end{array}$, le module P doit être P_3 ou P_1 . Lemme 3.2.2 montre que $P \not\cong P_3$ et si $P = P_1$, alors $h \circ g = f + f'$ avec

$$f' : \Omega^{2n-4} \left(\begin{array}{c} 1 \quad \boxed{3} \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} 3 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad \boxed{3} \end{array}$$

Pour f' , il existe un module indécomposable projectif P' et deux morphisme explicites $g' : M(C) \rightarrow P'$ et $h' : P' \rightarrow M(D)$ tels que $h' \circ g' = f' + f''$ pour $f'' \neq f$ un autre morphisme explicite de cœur disjoint de celui de f' ou le morphisme nul. Or, en ce moment, $P' = P_1$ et $f'' = f$. C'est-à-dire que f n'est pas projectif, d'après Remarque 2.2.2.

(2) Pour $n \geq 1$,

$$\Omega^{-2n} \left(\begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 2 \end{array} \right) = \Omega^{-2n+2} \left(\begin{array}{c} \boxed{3} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad \boxed{2} \quad 3 \quad 1 \quad 3 \quad 1 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} \boxed{3} \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{2} \quad 3 \end{array}$$

n'est pas projectif, d'après Lemme 3.2.1.

(3)

$$\Omega^1 \left(\begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \backslash \quad / \\ 3 \quad 2 \end{array} \right) = 1 \quad \begin{array}{c} \boxed{2} \\ \backslash \quad / \\ 2 \quad 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \boxed{3} \quad 1 \\ \backslash \quad / \\ \boxed{2} \quad 3 \end{array}$$

n'est pas projectif, en vertu de Lemme 3.2.1.

Le morphisme explicite

$$f : \Omega^3 \left(\begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \backslash \quad / \\ 3 \quad 2 \end{array} \right) = 2 \quad \begin{array}{c} \sim \\ \backslash \quad / \\ 3 \quad 2 \end{array} \quad \begin{array}{c} \boxed{2} \\ \backslash \quad / \\ 2 \quad 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 3 \quad 1 \\ \backslash \quad / \\ \boxed{2} \quad 3 \end{array}$$

n'est pas projectif. En effet, f fait partie d'un morphisme projectif factorisant par P_1 ou P_3 selon la description des sous-cordes de $\begin{array}{c} 3 \quad 1 \\ \backslash \quad / \\ 2 \quad 3 \end{array}$. Or, Lemme 3.2.2 montre que $P \not\cong P_3$ et Lemme 3.2.3 montre que $P \not\cong P_1$.

Pour $n \geq 2$,

$$\Omega^{2n+1} \left(\begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \backslash \quad / \\ 3 \quad 2 \end{array} \right) = \Omega^{2n-4} \left(\begin{array}{c} 3 \quad 2 \quad 1 \\ \backslash \quad / \quad \backslash \quad / \\ 1 \quad 3 \quad 2 \end{array} \quad \begin{array}{c} \boxed{2} \\ \backslash \quad / \\ 2 \quad 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} 3 \\ \backslash \quad / \\ 1 \quad 3 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} 3 \quad 1 \\ \backslash \quad / \\ \boxed{2} \quad 3 \end{array}$$

n'est pas projectif. En effet, notons ce morphisme f . D'après Remarque 2.2.2, il existe un module indécomposable projectif P et deux morphisme explicites $g : M(C) \rightarrow P$ et $h : P \rightarrow M(D)$ tels que $h \circ g = f + f'$ pour f' un autre morphisme explicite de cœur disjoint de celui de f ou le morphisme nul avec

$$C = \Omega^{2n-4} \left(\begin{array}{c} 3 \quad 2 \quad 1 \\ \backslash \quad / \quad \backslash \quad / \\ 1 \quad 3 \quad 2 \end{array} \quad \begin{array}{c} \sim \\ \backslash \quad / \\ 2 \quad 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \boxed{2} \\ \backslash \quad / \\ 2 \quad 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} 3 \\ \backslash \quad / \\ 1 \quad 3 \end{array} \right) \text{ et } D = \begin{array}{c} 3 \quad 1 \\ \backslash \quad / \\ 2 \quad 3 \end{array}.$$

Comme les sous-cordes explicites de D contenant le cœur de f sont S_2 , $\begin{array}{c} 3 \\ \backslash \quad / \\ 2 \quad 3 \end{array}$ et $\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \quad / \\ 2 \quad 3 \end{array}$, le module P doit être P_3 ou P_1 . Lemme 3.2.2 montre que $P \not\cong P_3$ et si $P = P_1$, alors $h \circ g = f + f'$ avec

$$f' : \Omega^{2n-4} \left(\begin{array}{c} 3 \quad 2 \quad 1 \\ \backslash \quad / \quad \backslash \quad / \\ 1 \quad 3 \quad 2 \end{array} \quad \begin{array}{c} \sim \\ \backslash \quad / \\ 2 \quad 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \boxed{3} \\ \backslash \quad / \\ 2 \quad 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} 3 \\ \backslash \quad / \\ 1 \quad 3 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} 3 \quad 1 \\ \backslash \quad / \\ 2 \quad \boxed{3} \end{array}$$

Pour f' , il existe un module indécomposable projectif P' et deux morphisme explicites $g' : M(C) \rightarrow P'$ et $h' : P' \rightarrow M(D)$ tels que $h' \circ g' = f' + f''$ pour $f'' \neq f$ un autre morphisme explicite de cœur disjoint de celui de f' ou le morphisme nul. Or, en ce moment, $P' = P_1$ et $f'' = f$. C'est-à-dire que f n'est pas projectif, d'après Remarque 2.2.2.

(4) Pour $n \geq 0$,

$$\Omega^{-2n-1} \left(\begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \backslash \quad / \\ 3 \quad 2 \end{array} \right) = \Omega^{-2n} \left(\begin{array}{c} \boxed{3} \\ \backslash \quad / \\ \boxed{2} \quad 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \sim \\ \backslash \quad / \\ 2 \quad 3 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} \boxed{3} \quad 1 \\ \backslash \quad / \\ \boxed{2} \quad 3 \end{array}$$

n'est pas projectif, en vertu de Lemme 3.2.1, où $\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \quad / \\ 3 \end{array} = ((\alpha_2 \beta_2)^{b-2} \alpha_2)^{-1}$.

□

Soit $M = M(C)$ un module dans une composante de type $\mathbb{Z}A_\infty^\infty$. Rappelons des notations

$$\text{sdiag}(M) = \{M(C[n]) | n \in \mathbb{Z}\} \quad \text{et} \quad \text{diag}(M) = \{M([n]C) | n \in \mathbb{Z}\}.$$

Lemme 4.2.12 (1+7)

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag}(S_1)$$

$$II1 \quad \begin{array}{ccc} \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ 1 & & 7 \end{array}$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag} \left(\begin{array}{ccc} 2 & \sim & 1 \\ & 3 & / \end{array} \right)$$

$$II1 \quad \begin{array}{ccc} \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ 7 & & 1 \end{array}$$

Lemme 4.2.13 (1+8)

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag}(S_2)$$

$$II1 \quad \begin{array}{ccc} \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ 8 & & 1 \end{array}$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag} \left(\begin{array}{ccc} & 3 & \\ 1 & / & \searrow \\ & 2 & \end{array} \right)$$

$$II1 \quad \begin{array}{ccc} \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ 1 & & 8 \end{array}$$

Preuve de (1+7) et (1+8) Il suffit de regarder trois diagonales: $\text{sdiag}(S_1)$, $\text{sdiag} \left(\begin{array}{ccc} 2 & \sim & 1 \\ & 3 & / \end{array} \right)$ et $\text{sdiag} \left(\begin{array}{ccc} & 2 & \\ \sim & / & \searrow \\ 3 & & 1 \end{array} \right)$,
grâce à la Ω -périodicité de $\begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array}$.

(1) Pour $\text{sdiag}(S_1)$,

(i) Le morphisme explicite $\alpha : \begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \rightarrow S_1$ n'est pas projectif, en vertu de Lemme 3.2.1.

(ii) Pour $n \geq 1$, le morphisme explicite

$$\alpha : \begin{smallmatrix} \boxed{1} \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \rightarrow S_1[n] = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \swarrow \sim \searrow \\ \boxed{1} \end{smallmatrix} \right) [n-1]$$

n'est projectif, en vertu de Lemme 3.2.3.

(iii) Pour $n \geq 1$, le morphisme explicite

$$\alpha : \begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \hookrightarrow S_1[-n] = \left(\begin{smallmatrix} \overline{1} & \overline{1} & \overline{1} & 3 \\ | & \searrow & \swarrow & \sim \\ \overline{1} & 2 & \overline{2} \end{smallmatrix} \right) [-n+1]$$

n'est pas projectif, en vertu de Lemme 3.2.1.

(2) Pour la diagonale $\text{sdiag}(\begin{smallmatrix} 2 \\ \searrow \sim \swarrow \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ \swarrow \end{smallmatrix})$,

(i) si $n \geq 1$,

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix}, \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \searrow \sim \swarrow \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ \swarrow \end{smallmatrix} \right) [n] \right) = \underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix}, \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \parallel \\ 2 \end{smallmatrix} \right) [n-1] \right) = 0$$

Comme $\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix}$ n'est pas une sous-corde explicite de $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \parallel \\ 2 \end{smallmatrix} \right) [n-1]$, tout morphisme explicite f de $\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix}$ à $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \parallel \\ 2 \end{smallmatrix} \right) [n-1]$ est de cœur $E = S_1$. Numérotions $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \parallel \\ 2 \end{smallmatrix} \right) [n-1] = C_0 C_1 \dots$.

Notons s la position de E dans son but, alors $C_{s-1} C_s = \begin{smallmatrix} 2 \\ \swarrow \searrow \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ \swarrow \end{smallmatrix}$ et f factorise via

$$\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \hookrightarrow P_2 = \begin{smallmatrix} & 2 \\ \swarrow & \searrow \\ \boxed{1} & 3 \\ \searrow & \swarrow \\ & 2 \end{smallmatrix} \twoheadrightarrow M(C_{s-1} C_s) = \begin{smallmatrix} 2 \\ \swarrow \searrow \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ \swarrow \end{smallmatrix} \hookrightarrow \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \parallel \\ 2 \end{smallmatrix} \right) [n-1]$$

(ii) Pour $n \geq 0$, numérotions

$$\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \searrow \sim \swarrow \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ \swarrow \end{smallmatrix} \right) [-n] = C_0 C_1 \dots$$

Alors tout morphisme explicite f de $\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix}$ à $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \searrow \sim \swarrow \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ \swarrow \end{smallmatrix} \right) [-n]$ est de cœur $E = S_1$. Notons s la position de E dans son but, alors $C_{s+1} C_{s+2} = \begin{smallmatrix} 2 \\ \swarrow \searrow \\ 1 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 2 \\ \swarrow \end{smallmatrix}$ ou $\begin{smallmatrix} 2 \\ \swarrow \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 2 \\ \swarrow \end{smallmatrix}$ (ce dernier est possible ssi C_{s+1} est le dernier segment) et f factorise via

$$\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \hookrightarrow P_2 \twoheadrightarrow M(C_{s+1} C_{s+2}) \hookrightarrow \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \searrow \sim \swarrow \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ \swarrow \end{smallmatrix} \right) [-n]$$

(3) Pour la diagonale $\text{sdiag}(\begin{smallmatrix} \sim & 2 \\ 3 & \diagdown & 1 \end{smallmatrix})$,

(i) si $n \geq 0$, $\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \diagdown & 2 \end{smallmatrix}, \left(\begin{smallmatrix} \sim & 2 \\ 3 & \diagdown & 1 \end{smallmatrix} \right) [n] \right) = 0$, car tout morphisme explicite entre eux est de cœur S_1 et factorise par P_2 . En effet, numérotions

$$\left(\begin{smallmatrix} \sim & 2 \\ 3 & \diagdown & 1 \end{smallmatrix} \right) [n] = C_0 C_1 \cdots .$$

Alors tout morphisme explicite f de $\begin{smallmatrix} 1 \\ \diagdown & 2 \end{smallmatrix}$ à $\left(\begin{smallmatrix} \sim & 2 \\ 3 & \diagdown & 1 \end{smallmatrix} \right) [n]$ est de cœur $E = S_1$. Notons s la position de E dans son but, alors $C_{s-1}C_s = \begin{smallmatrix} 2 \\ \diagdown & 1 \end{smallmatrix}$ (si $s > 1$) ou $C_{s-1}C_s = \begin{smallmatrix} \sim & 2 \\ 3 & \diagdown & 1 \end{smallmatrix}$ (si $s = 1$) et f factorise via

$$\begin{smallmatrix} 1 \\ \diagdown & 2 \end{smallmatrix} \hookrightarrow P_2 \twoheadrightarrow M(C_{s-1}C_s) \hookrightarrow \left(\begin{smallmatrix} \sim & 2 \\ 3 & \diagdown & 1 \end{smallmatrix} \right) [n]$$

(ii) Pour $n \geq 1$,

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \diagdown & 2 \end{smallmatrix}, \left(\begin{smallmatrix} \sim & 2 \\ 3 & \diagdown & 1 \end{smallmatrix} \right) [-n] \right) = \underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \diagdown & 2 \end{smallmatrix}, \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \diagdown & 3 \end{smallmatrix} \right) [-n+1] \right) = 0,$$

car tout morphisme explicite est de cœur S_1 et factorise par P_2 . En effet, numérotions

$$\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \diagdown & 3 \end{smallmatrix} \right) [-n+1] = C_0 C_1 \cdots .$$

Alors tout morphisme explicite f de $\begin{smallmatrix} 1 \\ \diagdown & 2 \end{smallmatrix}$ à $\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \diagdown & 3 \end{smallmatrix} \right) [-n+1]$ est de cœur $E = S_1$. Notons s la position de E dans son but, alors $C_{s+1}C_{s+2} = \begin{smallmatrix} 2 \\ \diagdown & 3 \end{smallmatrix}$ ou $\begin{smallmatrix} 2 \\ \diagdown & 1 \end{smallmatrix}$ (ce dernier est possible ssi C_{s+1} est le dernier segment) et f factorise via

$$\begin{smallmatrix} 1 \\ \diagdown & 2 \end{smallmatrix} \hookrightarrow P_2 \twoheadrightarrow M(C_{s+1}C_{s+2}) \hookrightarrow \left(\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \diagdown & 3 \end{smallmatrix} \right) [-n+1] \right)$$

On obtient donc que pour $M_7 \in Q(S_1)$,

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \diagdown & 2 \end{smallmatrix}, M_7 \right) \neq 0 \iff M_7 \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag}(S_1)$$

De même, on montre que

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(M_7, \begin{smallmatrix} 1 \\ \diagdown & 2 \end{smallmatrix} \right) \neq 0 \iff M_7 \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag}(\begin{smallmatrix} 2 \\ \diagdown & \sim & 1 \\ 3 & \diagdown & 3 \end{smallmatrix})$$

et donc que

$$\mathrm{Ext}_A^1 \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \oplus M_7, \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \oplus M_7 \right) = 0 \iff M_7 \notin \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \mathrm{sdiag} \left(\begin{array}{c} \sim \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ 1 \end{array} \right)$$

En effet,

(1) Pour $\mathrm{sdiag}(S_1)$,

$$(i) \quad \underline{\mathrm{Hom}}_A \left(S_1, \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right) = 0.$$

(ii) Pour $n \geq 1$, tout morphisme explicite f de $S_1[n] = \left(\begin{array}{c} 3 \\ \diagup \diagdown \\ 1 \quad 2 \end{array} \right) [n-1]$ à $\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array}$ est de cœur $E = S_2$. Numérotions

$$S_1[n] = \left(\begin{array}{c} 3 \\ \diagup \diagdown \\ 1 \quad 2 \end{array} \right) [n-1] = C_1 C_2 \cdots C_{2n}$$

comme ci-dessus et notons s la position de F dans sa source. Alors $C_{s+1} C_{s+2} = \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ 1 \end{array}$ ou $\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 1 \end{array}$ (ce dernier est possible ssi C_{s+1} est le dernier segment) et f factorise par P_1 via

$$S_1[n] \twoheadrightarrow M(C_{s+1} C_{s+2}) \hookrightarrow P_1 \twoheadrightarrow \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array}$$

(iii) Pour $n \geq 1$, tout morphisme explicite f de $S_1[-n] = \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \diagup \\ 2 \quad 3 \end{array} \right) [-n+1]$ à $\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array}$ est de cœur $E = S_2$. Numérotions

$$S_1[-n] = C_1 C_2 \cdots C_{2n}$$

et notons s la position de E dans sa source. Alors $C_{s-1} C_s = \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ 1 \end{array}$ et f factorise par P_1 via

$$S_1[n] \twoheadrightarrow \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ 1 \end{array} \hookrightarrow P_1 \twoheadrightarrow \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array}$$

(2) Pour la diagonale $\mathrm{sdiag} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \sim \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ 3 \end{array} \right)$,

(i) si $n \geq 1$, le morphisme explicite

$$\beta : \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \sim \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ 3 \end{array} \right) [n] = \left(\begin{array}{c} \boxed{2} \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right) [n-1] \rightarrow \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ \boxed{2} \end{array}$$

n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.3.

(ii) Pour $n \geq 0$, le morphisme explicite

$$\beta : \left(\begin{array}{c} \boxed{2} \\ \sim \\ 3 \end{array} \nearrow 1 \right) [-n] \rightarrow \begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ \boxed{2} \end{array}$$

n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.3

(3) Pour la diagonale $\text{sdiag}(\begin{array}{c} \sim \\ 3 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{array})$,

(i) si $n \geq 0$, $\underline{\text{Hom}}_A \left(\left(\begin{array}{c} \sim \\ 3 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{array} \right) [n], \begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array} \right) = 0$. En effet, conservons la numérotation de $\left(\begin{array}{c} \sim \\ 3 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{array} \right) [n]$

de ci-dessus. Alors tout morphisme explicite f de $\left(\begin{array}{c} \sim \\ 3 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{array} \right) [n]$ à $\begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array}$ est de cœur $E = S_2$.

Notons s la position de E dans son but, alors $C_{s+1}C_{s+2} = \begin{array}{c} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 3 \\ \searrow \\ 1 \end{array}$ ou $\begin{array}{c} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{array}$ (ce dernier est possible ssi C_{s+1} est le dernier segment) et f factorise via

$$\left(\begin{array}{c} \sim \\ 3 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{array} \right) [n] \twoheadrightarrow M(C_{s+1}C_{s+2}) \hookrightarrow P_1 \twoheadrightarrow \begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array}$$

(ii) Pour $n \geq 1$,

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\left(\begin{array}{c} \sim \\ 3 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{array} \right) [-n], \begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array} \right) = 0.$$

En effet, conservons la numérotation de $\left(\begin{array}{c} \sim \\ 3 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{array} \right) [n]$ de ci-dessus. Alors tout morphisme explicite

$$f : \left(\begin{array}{c} \text{ } \\ 3 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 3 \\ \searrow \\ 1 \end{array} \right) [-n+1] \rightarrow \begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array}$$

est de cœur $E = S_2$. Notons s la position de E dans son but, alors $C_{s-1}C_s = \begin{array}{c} 3 \\ \searrow \\ 1 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{array}$ et f factorise via

$$\left(\begin{array}{c} \sim \\ 3 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{array} \right) [-n] \twoheadrightarrow M(C_{s-1}C_s) = \begin{array}{c} 3 \\ \searrow \\ 1 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{array} \hookrightarrow P_1 \twoheadrightarrow \begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array}$$

Calculons maintenant l'algèbre $\underline{\text{End}}_A \left(\begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array} \oplus M_7 \right)$ avec $M_7 \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag}(S_1)$. On a vu que

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(M_7, \begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array} \right) = 0, \quad \underline{\text{End}}_A(M_7) = k\underline{Id}, \quad \underline{\text{End}}_A \left(\begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array} \right) = k\underline{Id}.$$

On considère $\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array}, M_7 \right)$. On peut supposer $M_7 \in \text{sdiag}(S_1)$.

$$(1) \underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array}, S_1 \right) = k\underline{\alpha} \text{ où } \alpha : \begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array} \twoheadrightarrow S_1.$$

(2) Si $n > 0$,

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array}, S_1[n] \right) = \underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array}, \left(\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \quad 2 \end{array} \sim \right) [n-1] \right) = k\underline{\alpha}$$

où

$$\alpha : \begin{array}{c} \boxed{1} \\ \searrow \\ 2 \end{array} \twoheadrightarrow \left(\begin{array}{c} 3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \boxed{1} \quad 2 \end{array} \sim \right) [n-1],$$

car tout autre morphisme explicite est ou bien bilatéral donc projectif d'après Proposition 2.3.1 ou bien faiblement unilatéral (de cœur S_1) de la forme

$$\begin{array}{c} \boxed{1} \\ \searrow \\ 2 \end{array} \twoheadrightarrow \left(\begin{array}{c} 3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \quad 2 \end{array} \sim \right) [n-1] = \begin{array}{c} 3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \quad 2 \end{array} \sim \dots \sim \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 3 \quad \boxed{1} \end{array}$$

(quand $n \equiv 0 \pmod{3}$) qui factorise par P_2 .

(3) Si $n > 0$,

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array}, S_1[-n] \right) = \underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array}, \left(\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 2 \quad 1 \end{array} \sim \right) [-n+1] \right) = k\underline{\alpha}$$

où

$$\alpha : \begin{array}{c} \boxed{1} \\ \searrow \\ 2 \end{array} \twoheadrightarrow \left(\begin{array}{c} \boxed{1} \quad 3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \boxed{1} \quad 2 \end{array} \sim \right) [-n+1],$$

car tout autre morphisme explicite (de cœur S_1) est bilatéral donc projectif en vertu de Proposition 2.3.1.

On obtient donc $\underline{\text{End}}_A \left(\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \right)$ où $M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag} (S_1)$ est

$$\begin{array}{ccc} & \alpha & \\ III1 & \bullet \longrightarrow \bullet & \\ & 1 & 7 \end{array}$$

Calculons ensuite l'algèbre $\underline{\text{End}}_A \left(\begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array} \oplus M_7 \right)$ avec $M_7 \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag} \left(\begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \sim \quad \swarrow \\ 3 \end{array} \right)$. On a vu que

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array}, M \right) = 0, \quad \underline{\text{End}}_A(M_7) = k\underline{Id}, \quad \underline{\text{End}}_A \left(\begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array} \right) = k\underline{Id}.$$

On considère $\underline{\text{Hom}}_A \left(M_7, \begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array} \right)$. On peut supposer $M_7 \in \text{sdiag} \left(\begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \sim \quad \swarrow \\ 3 \end{array} \right)$.

(i) si $n \geq 1$,

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\left(\begin{array}{c} 2 \\ \sim \\ 3 \end{array} \nearrow 1 \right) [n], \begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array} \right) = \underline{\text{Hom}}_A \left(\left(\begin{array}{c} 2 \\ \parallel \\ 2 \end{array} \right) [n-1], \begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array} \right) = k\underline{\beta},$$

où

$$\beta : \left(\begin{array}{c} \boxed{2} \\ \parallel \\ 2 \end{array} \right) [n-1] \rightarrow \begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ \boxed{2} \end{array},$$

car tout autre morphisme explicite (de cœur S_1) est bilatéral et donc projectif en vertu de Proposition 2.3.1.

(ii) Pour $n \geq 0$,

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\left(\begin{array}{c} 2 \\ \sim \\ 3 \end{array} \nearrow 1 \right) [-n], \begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array} \right) = k\underline{\beta},$$

où

$$\beta : \left(\begin{array}{c} \boxed{2} \\ \sim \\ 3 \end{array} \nearrow 1 \right) [n] \rightarrow \begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ \boxed{2} \end{array},$$

car tout autre morphisme explicite est ou bien bilatéral donc projectif en vertu de Proposition 2.3.1, et ou bien faiblement unilatéral (de cœur S_2) de la forme

$$\left(\begin{array}{c} 2 \\ \sim \\ 3 \end{array} \nearrow 1 \right) [-n] = \begin{array}{c} 2 \\ \sim \\ 3 \end{array} \nearrow 1 \searrow \dots \nearrow 3 \searrow 1 \nearrow \boxed{2} \rightarrow \begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ \boxed{2} \end{array}$$

(quand $n \equiv 0 \pmod{3}$) qui factorise par P_1 .

Pour le cas **(1+8)**, comme $Q(S_1)$ et $Q(S_2)$ sont Ω -isomorphes, ce cas découle du cas **(1+7)**, car

$$\begin{aligned} M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag}(S_1) &\iff \Omega^3 M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag} \left(\begin{array}{c} 3 \\ \nearrow 1 \searrow 2 \end{array} \right) \\ M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \sim \\ 3 \end{array} \nearrow 1 \right) &\iff \Omega^3 M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag}(S_2) \end{aligned}$$

□

Lemme 4.2.14 (3+7)

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag}(S_1)$$

$$\text{III1} \quad \bullet \longrightarrow \bullet \\ 7 \qquad \qquad 3$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag} \left(\begin{array}{c} 3 \\ \nearrow 1 \searrow 2 \end{array} \right)$$

$$III1 \quad \bullet \xrightarrow{\quad} \bullet \\ 3 \qquad \qquad 7$$

Lemme 4.2.15 (3+8)

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag}(S_2)$$

$$III1 \quad \bullet \xrightarrow{\quad} \bullet \\ 3 \qquad \qquad 8$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \quad \nearrow \\ 3 \quad 1 \end{array} \right)$$

$$III1 \quad \bullet \xrightarrow{\quad} \bullet \\ 8 \qquad \qquad 3$$

Preuve de (3+7) et (3+8) Il suffit de regarder trois diagonales: $\text{diag}(S_1)$, $\text{diag} \left(\begin{array}{c} 3 \\ \nearrow \quad \backslash \\ 1 \quad 2 \end{array} \right)$ et $\text{sdiag} \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \quad \nearrow \\ 2 \quad 3 \end{array} \right)$,
grâce à la Ω -périodicité de $\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array}$.

(1) Pour $\text{diag}(S_1)$,

$$(i) \quad \underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array}, S_1 \right) = 0$$

(ii) Pour $n \geq 1$,

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array}, [n]S_1 \right) = \underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array}, [n-1] \left(\begin{array}{c} \sim \\ \nearrow \quad \backslash \\ 3 \quad 2 \\ \quad \backslash \\ \quad 1 \end{array} \right) \right) = 0.$$

Comme $\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array}$ n'est pas une sous-corde explicite de $[n-1] \left(\begin{array}{c} \sim \\ \nearrow \quad \backslash \\ 3 \quad 2 \\ \quad \backslash \\ \quad 1 \end{array} \right)$, tout morphisme explicite

f de $\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array}$ à $[n-1] \left(\begin{array}{c} \sim \\ \nearrow \quad \backslash \\ 3 \quad 2 \\ \quad \backslash \\ \quad 1 \end{array} \right)$ est de cœur $E = S_2$. Numérotions

$$[n-1] \left(\begin{array}{c} \sim \\ \nearrow \quad \backslash \\ 3 \quad 2 \\ \quad \backslash \\ \quad 1 \end{array} \right) = \cdots C_{-1} C_0.$$

Notons s la position de E dans son but, alors $C_{s+1}C_{s+2} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \nearrow \searrow 3 \end{array}$ et f factorise par P_1 via

$$\begin{array}{c} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{array} \hookrightarrow P_1 = \begin{array}{c} \boxed{2} \begin{array}{c} 1 \\ \nearrow \searrow \\ 1 \end{array} 3 \end{array} \rightarrow M(C_{s+1}C_{s+2}) = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \nearrow \searrow 3 \end{array} \hookrightarrow [n-1] \left(\begin{array}{c} 2 \\ \sim \nearrow \\ 3 \end{array} \searrow 1 \right)$$

(iii) Pour $n \geq 1$,

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{array}{c} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{array}, [-n]S_1 \right) = \underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{array}{c} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{array}, [-n+1] \left(\begin{array}{c} 2 \\ \sim \nearrow \\ 3 \end{array} \nearrow 1 \right) \right) = 0.$$

Comme $\begin{array}{c} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{array}$ n'est pas une sous-corde explicite de $[-n+1] \left(\begin{array}{c} 2 \\ \sim \nearrow \\ 3 \end{array} \nearrow 1 \right)$, tout morphisme explicite f de $\begin{array}{c} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{array}$ à $[-n+1] \left(\begin{array}{c} 2 \\ \sim \nearrow \\ 3 \end{array} \nearrow 1 \right)$ est de cœur $E = S_2$. Numérotions

$$[-n+1] \left(\begin{array}{c} 2 \\ \sim \nearrow \\ 3 \end{array} \nearrow 1 \right) = \cdots C_{-1}C_0.$$

Notons s la position de E dans son but, alors $C_{s-1}C_s = \begin{array}{c} 1 \\ 3 \nearrow \searrow 2 \end{array}$ ou $\begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array}$ (ce dernier est possible ssi C_s est le premier segment) et f factorise par P_1 via

$$\begin{array}{c} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{array} \hookrightarrow P_1 \rightarrow M(C_{s-1}C_s) \hookrightarrow [-n+1] \left(\begin{array}{c} 2 \\ \sim \nearrow \\ 3 \end{array} \nearrow 1 \right)$$

(2) Pour la diagonale $\text{diag}(\begin{array}{c} 3 \\ 1 \nearrow \searrow 2 \end{array} \sim)$,

(i) Si $n \geq 0$, $\alpha : \begin{array}{c} \boxed{2} \\ \searrow \\ 1 \end{array} \rightarrow [n] \left(\begin{array}{c} 3 \\ 1 \nearrow \searrow \boxed{2} \end{array} \sim \right)$ n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.3.

(ii) si $n \geq 0$,

$$\alpha : \begin{array}{c} \boxed{2} \\ \searrow \\ 1 \end{array} \rightarrow [-n] \left(\begin{array}{c} 3 \\ 1 \nearrow \searrow 2 \end{array} \sim \right) = [-n+1] \left(\begin{array}{c} 2 \\ \searrow \\ \boxed{2} \end{array} \right)$$

n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.3.

(3) Pour la diagonale $\text{diag}(\begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array} \sim \begin{array}{c} 3 \\ \nearrow \end{array})$,

(i) si $n \geq 1$,

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{array}{c} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{array}, [n] \left(\begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array} \sim \begin{array}{c} 3 \\ \nearrow \end{array} \right) \right) = \underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{array}{c} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{array}, [n-1] \left(\begin{array}{c} 3 \\ \nearrow \\ 3 \end{array} \right) \right) = 0,$$

car tout morphisme explicite est de cœur S_2 et factorise par P_1 . En effet, numérotions

$$[n-1] \left(\begin{array}{c} 3 \\ \text{\textbackslash} \text{\textbackslash} \text{\textbackslash} \\ 3 \end{array} \right) = \cdots C_{-1} C_0.$$

Alors tout morphisme explicite f de $\begin{array}{c} 2 \\ \text{\textbackslash} \\ 1 \end{array}$ à $[n-1] \left(\begin{array}{c} 3 \\ \text{\textbackslash} \text{\textbackslash} \text{\textbackslash} \\ 3 \end{array} \right)$ est de cœur $E = S_2$. Notons s la position de E dans son but, alors $C_{s+1}C_{s+2} = \begin{array}{c} 1 \\ \text{\textbackslash} \text{\textbackslash} \text{\textbackslash} \\ 2 \quad 3 \end{array}$ et f factorise par P_1 via

$$\begin{array}{c} 2 \\ \text{\textbackslash} \\ 1 \end{array} \hookrightarrow P_1 \twoheadrightarrow M(C_{s+1}C_{s+2}) = \begin{array}{c} 1 \\ \text{\textbackslash} \text{\textbackslash} \text{\textbackslash} \\ 2 \quad 3 \end{array} \hookrightarrow [n-1] \left(\begin{array}{c} 3 \\ \text{\textbackslash} \text{\textbackslash} \text{\textbackslash} \\ 3 \end{array} \right)$$

(ii) Pour $n \geq 0$,

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{array}{c} 2 \\ \text{\textbackslash} \\ 1 \end{array}, [-n] \left(\begin{array}{c} 1 \\ \text{\textbackslash} \text{\textbackslash} \text{\textbackslash} \\ 2 \quad 3 \end{array} \right) \right) = 0,$$

car tout morphisme explicite est de cœur S_2 et factorise par P_1 . En effet, numérotions

$$[-n] \left(\begin{array}{c} 1 \\ \text{\textbackslash} \text{\textbackslash} \text{\textbackslash} \\ 2 \quad 3 \end{array} \right) = \cdots C_{-1} C_0.$$

Alors tout morphisme explicite f de $\begin{array}{c} 2 \\ \text{\textbackslash} \\ 1 \end{array}$ à $[-n] \left(\begin{array}{c} 1 \\ \text{\textbackslash} \text{\textbackslash} \text{\textbackslash} \\ 2 \quad 3 \end{array} \right)$ est de cœur $E = S_2$. Notons s la position de E dans son but, alors $C_{s-1}C_s = \begin{array}{c} 1 \\ \text{\textbackslash} \text{\textbackslash} \text{\textbackslash} \\ 3 \quad 2 \end{array}$ ou $\begin{array}{c} 1 \\ \text{\textbackslash} \\ 2 \end{array}$ (ce dernier est possible ssi C_s est le premier segment) et f factorise par P_1 via

$$\begin{array}{c} 2 \\ \text{\textbackslash} \\ 1 \end{array} \hookrightarrow P_1 \twoheadrightarrow M(C_{s-1}C_s) \hookrightarrow [-n] \left(\begin{array}{c} 1 \\ \text{\textbackslash} \text{\textbackslash} \text{\textbackslash} \\ 2 \quad 3 \end{array} \right)$$

On obtient donc que pour $M_7 \in Q(S_1)$

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{array}{c} 2 \\ \text{\textbackslash} \\ 1 \end{array}, M_7 \right) \neq 0 \iff M_7 \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag} \left(\begin{array}{c} 3 \\ \text{\textbackslash} \text{\textbackslash} \text{\textbackslash} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right)$$

De même, on montre pour $M_7 \in Q(S_1)$,

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(M_7, \begin{array}{c} 2 \\ \text{\textbackslash} \\ 1 \end{array} \right) \neq 0 \iff M_7 \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag}(S_1)$$

et donc

$$\text{Ext}_A^1 \left(\begin{array}{c} 2 \\ \text{\textbackslash} \\ 1 \end{array} \oplus M_7, \begin{array}{c} 2 \\ \text{\textbackslash} \\ 1 \end{array} \oplus M_7 \right) = 0 \iff M_7 \notin \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag} \left(\begin{array}{c} 1 \\ \text{\textbackslash} \text{\textbackslash} \text{\textbackslash} \\ 2 \quad 3 \end{array} \right)$$

Calculons maintenant l'algèbre $\underline{\text{End}}_A \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus M_7 \right)$ avec $M_7 \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag}(S_1)$. On a vu que

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix}, M_7 \right) = 0, \quad \underline{\text{End}}_A(M) = k\underline{Id}, \quad \underline{\text{End}}_A \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) = k\underline{Id}.$$

On considère $\underline{\text{Hom}}_A \left(M_7, \begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$. On peut supposer $M_7 \in \text{diag}(S_1)$.

(1) $\underline{\text{Hom}}_A \left(S_1, \begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) = k\underline{\alpha}$ où $\alpha : S_1 \hookrightarrow \begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix}$.

(2) Si $n \geq 1$,

$$\underline{\text{Hom}}_A \left([-n]S_1, \begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) = \underline{\text{Hom}}_A \left([-n+1] \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \nearrow 1 \right), \begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) = k\underline{\alpha}$$

où

$$\alpha : [-n+1] \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \nearrow \boxed{1} \right) \rightarrow \begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ \boxed{2} \end{smallmatrix}$$

car tout autre morphisme explicite est ou bien bilatéral et donc projectif d'après Proposition 2.3.1 ou bien faiblement unilatéral (de cœur S_1) de la forme

$$[-n+1] \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \nearrow 1 \right) = \boxed{1} \searrow \begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \dots \begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \nearrow 1 \rightarrow \begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ \boxed{1} \end{smallmatrix}$$

(quand $n \equiv 2 \pmod{3}$) qui factorise par P_2 .

(3) Si $n \geq 1$,

$$\underline{\text{Hom}}_A \left([n]S_1, \begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) = \underline{\text{Hom}}_A \left([n-1] \left(\begin{smallmatrix} \nearrow 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \backslash 1 \right), \begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) = k\underline{\alpha}$$

où

$$\alpha : [n-1] \left(\begin{smallmatrix} \nearrow 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \backslash \begin{smallmatrix} \boxed{1} \\ \backslash \\ \boxed{1} \end{smallmatrix} \right) \twoheadrightarrow \begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix}$$

car tout autre morphisme explicite est bilatéral et donc projectif en vertu de Proposition 2.3.1.

On obtient donc $\underline{\text{End}}_A \left(\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M_7) \right)$ où $M_7 \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag}(S_1)$ est

$$\begin{array}{ccc} & \alpha & \\ \text{II1} & \bullet \longrightarrow \bullet & \\ & 7 & 3 \end{array}$$

L'autre cas se fait similairement.

Pour le cas **(3+8)**, comme $Q(S_1)$ et $Q(S_2)$ sont Ω -isomorphes, ce cas découle du cas **(3+7)**.

□

Lemme 4.2.16 (2+7) $\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M), i \in \mathbb{Z}, M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag}(S_1)$

$$II2 \quad \begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ 2 & & 7 \end{array}$$

Lemme 4.2.17 (2+8) $\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M), i \in \mathbb{Z}, M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag} \left(\begin{array}{c} 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \quad 2 \end{array} \right)$

$$II2 \quad \begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ 2 & & 8 \end{array}$$

Preuve de (2+7) et (2+8) Grâce à la Ω -périodicité de $\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \end{array}$, il suffit de considérer les trois diagonales $\text{sdiag}(S_1)$, $\text{sdiag} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \end{array} \right)$ et $\text{sdiag} \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 2 \end{array} \right)$.

(1) Pour $M_7 \in \text{sdiag}(S_1)$,

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \end{array}, M_7 \right) = k \underline{\alpha}$$

où α est définie comme suit:

(i) $\alpha : \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \end{array} \rightarrow S_1$ n'est pas projectif, en vertu de Lemme 3.2.1 et il n'existe pas d'autres morphismes explicites de $\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \end{array}$ à S_1 .

(ii) Pour $n \geq 1$,

$$\alpha : \boxed{1} \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \end{array} \rightarrow S_1[n] = \left(\boxed{1} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \quad 2 \end{array} \right) [n-1]$$

n'est pas projectif, en vertu de Lemme 3.2.3. Numérotions

$$\left(\begin{array}{c} 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \quad 2 \end{array} \right) [n-1] = C_0 C_1 \cdots$$

Tout morphisme explicite f de $\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \quad 1 \end{array}$ à $\left(\begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{1} \quad 2 \end{array} \right) [n-1]$ autre que α est de cœur $E \in \{S_1, S_3\}$. Notons s la position de E dans son but. En cas $E = S_1$, alors $C_{s-1}C_s = \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 3 \quad 1 \end{array}$ et f factorise par P_2 via

$$\boxed{\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \quad 1 \end{array}} \hookrightarrow P_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \quad 3 \end{array} \\ \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \quad 2 \end{array}} \end{array} \twoheadrightarrow M(C_{s-1}C_s) = \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 3 \quad 1 \end{array} \hookrightarrow \left(\begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array} \right) [n-1]$$

En cas $E = S_3$, alors $C_{s-1}C_s = \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \quad 3 \end{array}$ et f factorise par P_1 via

$$\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad \boxed{\begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \quad 1 \end{array}} \end{array} \hookrightarrow P_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 3 \quad 2 \end{array} \\ \boxed{\begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 1 \end{array}} \end{array} \twoheadrightarrow M(C_{s-1}C_s) = \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \quad 3 \end{array} \hookrightarrow \left(\begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array} \right) [n-1]$$

(iii) Pour $n \geq 1$,

$$\alpha : \begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \quad 1 \end{array}} \end{array} \rightarrow S_1[-n] = \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \end{array} \right) [-n+1] = \left(\begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \quad 1 \end{array}} \end{array} \right) [-n+1]$$

n'est pas projectif, en vertu de Lemme 3.2.1. Numérotions

$$\left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \end{array} \right) [-n+1] = \cdots C_{-1}C_0.$$

Alors tout morphisme explicite f de $\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \quad 1 \end{array}$ à $\left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \end{array} \right) [-n+1]$ autre que α est de cœur

$E \in \{S_1, S_3\}$. Notons s la position de E dans son but. En cas $E = S_1$, alors $C_{s+1}C_{s+2} = \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \quad 3 \end{array}$

ou $\begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ 1 \end{array}$ (ce dernier est possible ssi C_{s+1} est le dernier segment) et f factorise par P_2 via

$$\boxed{\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \quad 1 \end{array}} \rightarrow \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \quad 1 \end{array} \hookrightarrow P_2 \twoheadrightarrow M(C_{s+1}C_{s+2}) \rightarrow \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \end{array} \right) [-n+1]$$

En cas $E = S_3$, alors $C_{s+1}C_{s+2} = \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 3 \quad 2 \end{array}$ ou $\begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ 3 \end{array}$ (ce dernier est possible ssi C_{s+1} est le dernier segment) et f factorise par P_1 via

$$\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad \boxed{\begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \quad 1 \end{array}} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array} \hookrightarrow P_2 \twoheadrightarrow M(C_{s+1}C_{s+2}) \rightarrow \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \end{array} \right) [-n+1]$$

(2) Pour la diagonale $M \in \text{sdiag}(\begin{smallmatrix} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ \diagup \end{smallmatrix}), \underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \\ \diagdown \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ \diagup \end{smallmatrix}, M \right) = 0$.

(i) si $n \geq 1$,

$$\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ \diagup \end{smallmatrix} \right) [n] = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \parallel \\ 2 \end{smallmatrix} \right) [n-1]$$

Comme $\begin{smallmatrix} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \\ \diagdown \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ \diagup \end{smallmatrix}$ n'est pas une sous-corde explicite de $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \parallel \\ 2 \end{smallmatrix} \right) [n-1]$, tout morphisme explicite f de $\begin{smallmatrix} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \\ \diagdown \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ \diagup \end{smallmatrix}$ à $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \parallel \\ 2 \end{smallmatrix} \right) [n-1]$ est de cœur $E \in \{S_1, S_3\}$. Numérotions

$$\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \parallel \\ 2 \end{smallmatrix} \right) [n-1] = C_0 C_1 \cdots$$

Notons s la position de E dans son but. En cas $E = S_1$, alors $C_{s-1}C_s = \begin{smallmatrix} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ \diagup \end{smallmatrix}$ et f factorise par P_2 via

$$\boxed{\begin{smallmatrix} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \\ \diagdown \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ \diagup \end{smallmatrix}} \hookrightarrow P_2 = \boxed{\begin{smallmatrix} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \\ \diagdown \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ \diagup \end{smallmatrix}} \rightarrow M(C_{s-1}C_s) = \begin{smallmatrix} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ \diagup \end{smallmatrix} \hookrightarrow \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \parallel \\ 2 \end{smallmatrix} \right) [n-1]$$

En cas $E = S_3$, alors $C_{s-1}C_s = \begin{smallmatrix} 1 \\ \diagup \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{smallmatrix}$ et f factorise par P_1 via

$$\begin{smallmatrix} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{smallmatrix} \boxed{\begin{smallmatrix} 3 \\ \diagdown \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ \diagup \end{smallmatrix}} \hookrightarrow P_1 = \begin{smallmatrix} 1 \\ \diagup \end{smallmatrix} \boxed{\begin{smallmatrix} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ \diagup \end{smallmatrix}} \rightarrow M(C_{s-1}C_s) = \begin{smallmatrix} 1 \\ \diagup \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{smallmatrix} \hookrightarrow \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \parallel \\ 2 \end{smallmatrix} \right) [n-1]$$

(ii) Pour $n \geq 0$, numérotions

$$\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ \diagup \end{smallmatrix} \right) [-n] = C_0 C_1 \cdots$$

Alors tout morphisme explicite f de $\begin{smallmatrix} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \\ \diagdown \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ \diagup \end{smallmatrix}$ à $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ \diagup \end{smallmatrix} \right) [-n]$ est de cœur $E = S_1$ ou S_3 .

Notons s la position de E dans son but. En cas $E = S_1$, alors $C_{s+1}C_{s+2} = \begin{smallmatrix} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ \diagup \end{smallmatrix}$ ou $\begin{smallmatrix} 2 \\ \diagup \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{smallmatrix}$ (ce dernier est possible ssi C_{s+1} est le dernier segment) et f factorise par P_2 via

$$\boxed{\begin{smallmatrix} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \\ \diagdown \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ \diagup \end{smallmatrix}} \rightarrow \begin{smallmatrix} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \\ \diagdown \end{smallmatrix} \hookrightarrow P_2 \rightarrow M(C_{s+1}C_{s+2}) \hookrightarrow \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ \diagup \end{smallmatrix} \right) [-n]$$

En cas $E = S_3$, alors $C_{s+1}C_{s+2} = \begin{array}{c} 1 \\ 3 \diagdown \diagup 2 \end{array}$ ou $\begin{array}{c} 1 \\ 3 \diagup \diagdown 2 \end{array}$ (ce dernier est possible ssi C_{s+1} est le dernier segment) et f factorise par P_1 via

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \diagdown \diagup \boxed{\begin{array}{c} 3 \\ 1 \end{array}} \end{array} \twoheadrightarrow \begin{array}{c} 3 \\ 1 \end{array} \hookrightarrow P_2 \twoheadrightarrow M(C_{s+1}C_{s+2}) \hookrightarrow \left(\begin{array}{c} 2 \\ 3 \diagdown \diagup 1 \end{array} \right) [-n]$$

(3) Pour $M \in \text{sdiag}(\begin{array}{c} 2 \\ 3 \diagup \diagdown 1 \end{array})$, $\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \diagdown \diagup 3 \\ 1 \end{array}, M \right) = k\underline{\alpha}$.

(i) si $n \geq 0$,

$$\alpha : \begin{array}{c} \boxed{1} \\ 2 \diagdown \diagup 3 \\ 1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{c} 2 \\ 3 \diagup \diagdown 1 \end{array} \right) [n]$$

n'est pas projectif. En effet, si α est projectif, d'après Remarque 2.2.2, il existe un module indécomposable projectif P et deux morphisme explicites $g : M(C) \rightarrow P$ et $h : P \rightarrow M(D)$ tels que $h \circ g = \alpha + \alpha'$ pour α' un autre morphisme explicite de cœur disjoint de celui de α ou le morphisme nul avec

$$C = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \diagdown \diagup 3 \\ 1 \end{array} \text{ et } D = \left(\begin{array}{c} 2 \\ 3 \diagup \diagdown 1 \end{array} \right) [n]$$

On a que $P = P_2$ en vertu de Lemme 3.2.3, alors $h \circ g = \alpha + \alpha'$ avec

$$\alpha' : \begin{array}{c} 1 \\ 2 \diagdown \diagup \boxed{3} \\ 1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{c} 2 \\ \boxed{3} \diagup \diagdown 1 \end{array} \right) [n]$$

Pour α' , il existe un module indécomposable projectif P' et deux morphisme explicites $g' : M(C) \rightarrow P'$ et $h' : P' \rightarrow M(D)$ tels que $h' \circ g' = \alpha' + \alpha''$ pour $\alpha'' \neq \alpha$ un autre morphisme explicite de cœur disjoint de celui de α' ou le morphisme nul. Or, en ce moment, $P' = P_2$ et $\alpha'' = \alpha$. C'est-à-dire que α n'est pas projectif, d'après Remarque 2.2.2. Constatons que $\underline{\alpha'} \neq 0$.

Tout autre morphisme explicite f autre que α et α' de $\begin{array}{c} 1 \\ 2 \diagdown \diagup 3 \\ 1 \end{array}$ à $\left(\begin{array}{c} 2 \\ 3 \diagup \diagdown 1 \end{array} \right) [n]$ est de cœur $E \in \{S_1, S_3\}$. Numérotions

$$\left(\begin{array}{c} 2 \\ 3 \diagup \diagdown 1 \end{array} \right) [n] = C_0 C_1 \cdots .$$

Notons s la position de E dans son but. En cas $E = S_1$, forcément $s > 0$ et $C_{s-1}C_s = \begin{array}{c} 2 \\ 3 \diagup \diagdown 1 \end{array}$ et f factorise par P_2 via

$$\boxed{\begin{array}{c} 1 \\ 2 \diagdown \diagup 3 \end{array}} \twoheadrightarrow \begin{array}{c} 1 \\ 2 \diagdown \diagup 3 \end{array} \hookrightarrow P_2 = \boxed{\begin{array}{c} 2 \\ 1 \diagdown \diagup 3 \\ 2 \end{array}} \twoheadrightarrow M(C_{s-1}C_s) = \begin{array}{c} 2 \\ 3 \diagup \diagdown 1 \end{array} \hookrightarrow \left(\begin{array}{c} 2 \\ 3 \diagup \diagdown 1 \end{array} \right) [n]$$

En cas $E = S_3$, alors $s > 0$ et $C_{s-1}C_s = \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \quad 3 \end{array}$ et f factorise par P_1 via

$$\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad \boxed{\begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array}} \end{array} \rightarrow P_1 = \begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \end{array}} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \rightarrow M(C_{s-1}C_s) = \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \quad 3 \end{array} \hookrightarrow \left(\begin{array}{c} \sim 2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 3 \quad 1 \end{array} \right) [n]$$

On obtient donc que

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \\ 1 \end{array}, M \right) = k\underline{\alpha} + k\underline{\alpha}' = k\underline{\alpha},$$

puisque $\underline{\alpha}' = -\underline{\alpha}$.

(ii) Pour $n \geq 1$, $\left(\begin{array}{c} \sim 2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 3 \quad 1 \end{array} \right) [-n] = \left(\begin{array}{c} 3 \\ \parallel \\ 3 \end{array} \right) [-n+1]$. Le morphisme explicite

$$\alpha : \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad \boxed{3} \\ 1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{c} 3 \\ \parallel \\ \boxed{3} \end{array} \right) [n]$$

n'est pas projectif. Si α est projectif, en vertu de Lemme 3.2.2 et Lemme 3.2.3.

Numérotions

$$\left(\begin{array}{c} 3 \\ \parallel \\ 3 \end{array} \right) [-n+1] = C_0 C_1 \cdots$$

Alors tout morphisme explicite f autre que α de $\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \\ 1 \end{array}$ à $\left(\begin{array}{c} 3 \\ \parallel \\ 3 \end{array} \right) [-n+1]$ est de cœur

$E \in \{S_1, S_3\}$. Notons s la position de E dans son but. En cas S_1 , alors $C_{s+1}C_{s+2} = \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \quad 3 \end{array}$ ou $\begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ 1 \end{array}$ (ce dernier est possible ssi C_{s+1} est le dernier segment) et f factorise par P_2 via

$$\boxed{\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \end{array}} \diagdown \quad 1 \rightarrow \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \end{array} \hookrightarrow P_2 \twoheadrightarrow M(C_{s+1}C_{s+2}) \hookrightarrow \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \end{array} \right) [-n]$$

En cas $E = S_3$, alors $C_{s+1}C_{s+2} = \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 3 \quad 2 \end{array}$ ou $\begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ 3 \end{array}$ (ce dernier est possible ssi C_{s+1} est le dernier segment) et f factorise par P_1 via

$$\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad \boxed{\begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array}} \end{array} \twoheadrightarrow \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \hookrightarrow P_2 \twoheadrightarrow M(C_{s+1}C_{s+2}) \hookrightarrow \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \end{array} \right) [-n]$$

On obtient donc que

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \\ 1 \end{array}, M \right) = 0 \iff M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \end{array} \right)$$

De même, on montre que

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(M, \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \end{array} \right) = 0 \iff M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag} \left(\begin{array}{c} \sim 2 \\ 3 \quad 1 \end{array} \right)$$

et donc que

$$\text{Ext}_A^1 \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \end{array} \oplus M, \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \end{array} \oplus M \right) = 0 \iff M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag}(S_1)$$

et

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(M, \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \end{array} \right) = k\underline{\beta}$$

Le morphisme β est définie comme suit.

$$(i) \quad \beta : S_1 \hookrightarrow \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \boxed{1} \end{array}.$$

$$(ii) \quad \text{Pour } n \geq 1, \beta : S_1[n] = \left(\begin{array}{c} 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \quad 2 \end{array} \right) [n-1] = \left(\begin{array}{c} \boxed{3} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \boxed{1} \quad \boxed{2} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{2} \end{array} \right) [n-1] \rightarrow \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \boxed{1} \end{array}$$

$$(iii) \quad \text{Pour } n \geq 1, \beta : S_1[-n] = \left(\begin{array}{c} \boxed{1} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \end{array} \right) [-n+1] \rightarrow \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \boxed{1} \end{array}$$

Calculons l'algèbre $\underline{\text{End}}_A \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \end{array} \oplus M_7 \right)$ avec $M_7 \in \text{sdiag}(S_1)$. On a vu que

$$\underline{\text{End}}_A(M_7) = k\underline{Id}, \quad \underline{\text{End}}_A \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \end{array} \right) = k\underline{Id} \oplus k\underline{\epsilon},$$

$$\underline{\text{Hom}} \left(M, \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \end{array} \right) = k\underline{\beta}, \quad \underline{\text{Hom}} \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \end{array}, M \right) = k\underline{\alpha}.$$

On vérifie que $\alpha\beta = \epsilon, \beta\alpha = 0$. On en déduit que l'algèbre $\underline{\text{End}}_A \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \end{array} \oplus M_7 \right)$ où $M_7 \in \text{sdiag}(S_1)$ est

$$II2 \quad \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\alpha} & \\ \bullet & & \bullet \\ & \xleftarrow{\beta} & \\ 2 & & 7 \end{array}$$

L'autre cas se fait similairement.

Pour le cas **(2+8)**, comme $Q(S_1)$ et $Q(S_2)$ sont Ω -isomorphes, ce cas découle du cas **(2+7)**.

□

Lemme 4.2.18 (4+7)

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \sim \right) \oplus \Omega^i(M), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag} \left(\begin{array}{c} 3 \\ \nearrow \\ 1 \end{array} \backslash \begin{array}{c} \sim \\ 2 \end{array} \right)$$

$$II2 \quad \begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ 4 & & 7 \end{array}$$

Lemme 4.2.19 (4+8)

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \sim \right) \oplus \Omega^i(M), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag}(S_2)$$

$$II2 \quad \begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ 4 & & 8 \end{array}$$

Démonstration La preuve des cas **(4+7)** et **(4+8)** est analogue a celle des cas **(2+7)** et **(2+8)** (Lemme 4.2.16 et 4.2.17).

□

Lemme 4.2.20 (5+7) impossible**Lemme 4.2.21 (5+8)**

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \text{sdiag}(S_2)$$

$$II2 \quad \begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ 5 & & 8 \end{array}$$

Preuve de (5+7) et (5+8) (1) Pour $M_7 \in Q(S_1)$,

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array}, M_7 \right) = 0 \iff M_7 \in \text{sdiag}([1]S_1) = \text{sdiag} \left(\begin{array}{c} \sim \\ 3 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right)$$

On en déduit que pour $M_8 \in Q(S_2)$,

$$\text{Ext}_A^1 \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array}, M_8 \right) = 0 \iff M_8 \in \text{sdiag}(S_2)$$

(i) $\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array}, S_1 \right) \neq 0$, car $\begin{array}{c} \boxed{2} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \twoheadrightarrow S_1$ n'est pas projectif en vertu de Lemme 3.2.1.

(ii) Si $n \geq 1$, le morphisme explicite

$$\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad \boxed{1} \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \rightarrow S_1[n] = \left(\begin{array}{c} 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \boxed{1} \quad 2 \end{array} \right) [n-1]$$

n'est pas projectif. Si ce morphisme, noté f , est projectif, d'après Remarque 2.2.2, il existe un module indécomposable projectif P et deux morphisme explicites $g : M(C) \rightarrow P$ et $h : P \rightarrow M(D)$ avec

$$C = \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \quad \text{et} \quad D = \left(\begin{array}{c} 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \quad 2 \end{array} \right) [n-1]$$

tels que $h \circ g = f + f'$ pour f' un autre morphisme explicite de cœur disjoint de celui de f ou le morphisme nul. Lemme 3.2.2 montre que $P \not\cong P_2$ et donc $P = P_3$, alors $h \circ g = f + f'$ avec

$$f' : \begin{array}{c} \boxed{2} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{c} 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \quad \boxed{2} \end{array} \right) [n-1]$$

Pour f' , il existe un module indécomposable projectif P' et deux morphisme explicites $g' : M(C) \rightarrow P'$ et $h' : P' \rightarrow M(D)$ tels que $h' \circ g' = f' + f''$ pour $f'' \neq f$ un autre morphisme explicite de cœur disjoint de celui de f' ou le morphisme nul. Or, en ce moment, $P' = P_3$ et $f'' = f$. Ceci est une contradiction.

(iii) Si $n \geq 1$, le morphisme explicite

$$\begin{array}{c} \boxed{2} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \rightarrow [-n]S_1[1] = [-n+1] \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{2} \end{array} \right)$$

n'est pas projectif, d'après Lemme 3.2.2

(iv) Si $n \geq 1$ et $m \geq 2$, le morphisme explicite

$$\begin{array}{c} \boxed{2} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \rightarrow [-n]S_1[m] = [-n+1] \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{2} \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 3 \end{array} \right) [m-2]$$

n'est pas projectif, d'après Lemme 3.2.2 et Lemme 3.2.3.

(v) Si $n, m \geq 1$, le morphisme explicite

$$\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \hookrightarrow [-n]S_1[-m] = [-n+1] \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{2} \quad \boxed{1} \\ \diagup \quad \diagdown \\ 3 \quad 2 \end{array} \right) [-m+1]$$

n'est pas projectif, d'après Lemme 3.2.1

(vi) Si $n \geq 1$, le morphisme explicite

$$\begin{array}{c} \boxed{2} \quad \boxed{1} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{3} \quad 2 \end{array} \hookrightarrow [-n]S_1 = [-n+1] \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{2} \quad \boxed{1} \\ \diagup \quad \diagdown \\ 3 \end{array} \right)$$

n'est pas projectif, d'après Lemme 3.2.1.

(vii) Si $n \geq 1$, le morphisme explicite

$$2 \searrow_3 \nearrow_1 \searrow_2 \hookrightarrow S_1[-n] = \left(\begin{array}{c} \boxed{1} \quad \boxed{3} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{2} \end{array} \right)$$

n'est pas projectif, d'après Lemme 3.2.1.

(viii) Si $n \geq 2$ et $m \in \mathbb{Z}$, le morphisme explicite

$$2 \searrow_3 \nearrow_1 \searrow_2 \hookrightarrow [n]S_1[m] = [n-1] \left(\begin{array}{c} \boxed{2} \quad \boxed{3} \quad \dots \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagup \\ \boxed{2} \quad \boxed{3} \end{array} \right)$$

n'est pas projectif, d'après Lemme 3.2.1

$$(ix) \underline{\text{Hom}}_A \left(2 \searrow_3 \nearrow_1 \searrow_2, M_7 \right) = 0, \text{ si } M_7 \in \text{sdiag}([1]S_1) = \text{sdiag} \left(\begin{array}{c} \sim 2 \\ \nearrow_3 \searrow_1 \end{array} \right).$$

Les quotients explicites de $2 \searrow_3 \nearrow_1 \searrow_2$ sont $S_1, S_2, \begin{array}{c} 1 \\ \searrow_2 \end{array}, \begin{array}{c} 2 \\ \searrow_3 \nearrow_1 \searrow_2 \end{array}$. Les deux derniers ne peuvent pas être des sous-cordes explicites de M_7 . Soit f un morphisme explicite de $2 \searrow_3 \nearrow_1 \searrow_2$ à M_7 de cœur $E \in \{S_1, S_2\}$. Numérotions

$$M_7 = \left(\begin{array}{c} \sim 2 \\ \nearrow_3 \searrow_1 \end{array} \right) [n] = C_0 C_1 \dots$$

et soit s la position du cœur E dans son but. En cas $E = S_1$, alors si $n \geq 0$, $C_{s-1}C_s = \begin{array}{c} \sim 2 \\ \nearrow_3 \searrow_1 \end{array}$ et

si $n < 0$, $C_{s+1}C_{s+2} = \begin{array}{c} 2 \\ \nearrow_1 \searrow_3 \end{array}$ ou $C_{s+1} = \begin{array}{c} 2 \\ \nearrow_1 \end{array}$ (si C_{s+1} est le dernier segment), f factorise par P_2 via

$$2 \searrow_3 \nearrow_1 \searrow_2 \hookrightarrow 1 \searrow_2 \hookrightarrow P_2 \twoheadrightarrow M(C_{s-1}C_s) \text{ ou } M(C_{s+1}C_{s+2}) \hookrightarrow M_7$$

En cas $E = S_2$, alors si $n \geq 0$,

$$C_{s-3}C_{s-2}C_{s-1}C_s = \begin{array}{c} \sim 2 \\ \nearrow_3 \searrow_1 \nearrow_3 \searrow_2 \end{array}$$

et si $n < 0$,

$$C_{s+1}C_{s+2}C_{s+3}C_{s+4} = \begin{array}{c} \sim 3 \\ \nearrow_2 \searrow_1 \nearrow_2 \searrow_3 \end{array}$$

ou si C_{s+3} est le dernier segment

$$C_{s+1}C_{s+2}C_{s+3} = \begin{array}{c} \sim 3 \\ \nearrow_2 \searrow_1 \nearrow_2 \end{array}$$

ou si C_{s+1} est le dernier segment, $C_{s+1} = \begin{smallmatrix} & 3 \\ & \diagup \diagdown \\ 2 \end{smallmatrix}$, f factorise par $P_3 \oplus P_1$ via

$$\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ & \diagdown & \diagup \\ & 3 & \\ & & 2 \end{smallmatrix} \hookrightarrow P_3 \oplus P_1 \twoheadrightarrow M(C_{s-3}C_{s-2}C_{s-1}C_s) \text{ ou } M(C_{s+1}C_{s+2}C_{s+3}C_{s+4}) \hookrightarrow M_7$$

(2) De même, pour $M_7 \in Q(S_1)$,

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(M_7, \begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ & \diagdown & \diagup \\ & 3 & \\ & & 2 \end{smallmatrix} \right) = 0 \iff M_7 \in \text{sdiag}(S_1)$$

(i) Si $n \geq 1$,

$$[n]S_1[-1] = [n-1] \left(\begin{smallmatrix} & \boxed{3} \\ & \diagup \diagdown \\ 3 \end{smallmatrix} \right) \rightarrow \begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ & \diagdown & \diagup \\ & \boxed{3} & \\ & & 2 \end{smallmatrix}$$

n'est pas projectif, d'après Lemme 3.2.2 et Lemme 3.2.3.

(ii) Si $n \geq 1$ et $m \geq 2$,

$$[n]S_1[-m] = [n-1] \left(\begin{smallmatrix} & \boxed{3} & & 2 \\ & \diagup & \diagdown & \\ 3 & & 1 & \end{smallmatrix} \right) [-m+2] \rightarrow \begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ & \diagdown & \diagup \\ & \boxed{3} & \\ & & 2 \end{smallmatrix}$$

n'est pas projectif. Si ce morphisme, noté f , est projectif, d'après Remarque 2.2.2, il existe un module indécomposable projectif P et deux morphisme explicites $g : M(C) \rightarrow P$ et $h : P \rightarrow M(D)$ avec

$$C = [n-1] \left(\begin{smallmatrix} & 3 & & 2 \\ & \diagup & \diagdown & \\ 3 & & 1 & \end{smallmatrix} \right) [-m+2] \text{ et } D = \begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ & \diagdown & \diagup \\ & 3 & \\ & & 2 \end{smallmatrix}$$

tels que $h \circ g = f + f'$ pour f' un autre morphisme explicite de cœur disjoint de celui de f ou le morphisme nul. Lemme 3.2.2 montre que $P \not\cong P_2, P_3$ et donc $P = P_1$, alors $h \circ g = f + f'$ avec

$$f' : [n-1] \left(\begin{smallmatrix} & 3 & & \boxed{2} \\ & \diagup & \diagdown & \\ 3 & & 1 & \end{smallmatrix} \right) [-m+2] \rightarrow \begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ & \diagdown & \diagup \\ & 3 & \\ & & \boxed{2} \end{smallmatrix}$$

Pour f' , il existe un module indécomposable projectif P' et deux morphisme explicites $g' : M(C) \rightarrow P'$ et $h' : P' \rightarrow M(D)$ tels que $h' \circ g' = f' + f''$ pour $f'' \neq f$ un autre morphisme explicite de cœur disjoint de celui de f' ou le morphisme nul. Or, en ce moment, $P' = P_1$ et $f'' = f$. Ceci est une contradiction.

(iii) Si $n \geq 1$, le morphisme explicite

$$[-n]S_1 = [-n+1] \left(\begin{smallmatrix} \boxed{2} & & & \\ \diagdown & & & \\ \boxed{3} & & & \\ \diagup & & & \\ & 3 & & 1 \end{smallmatrix} \right) \rightarrow \begin{smallmatrix} \boxed{2} & & & \\ \diagdown & & & \\ \boxed{3} & & & \\ \diagup & & & \\ & 3 & & 1 \\ & & & 2 \end{smallmatrix}$$

n'est pas projectif, d'après Lemme 3.2.1

(iv) Si $n \geq 1$ et $m \geq 1$, le morphisme explicite

$$[-n]S_1[m] = [-n+1] \left(\begin{smallmatrix} 2 & & & \\ & \diagdown & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{smallmatrix} \right) [m-1] = [-n+1] \left(\begin{smallmatrix} \boxed{2} & & & \\ \diagdown & & & \\ \boxed{3} & & & \\ \diagup & & & \\ & 3 & & \end{smallmatrix} \right) [m-1] \rightarrow \begin{smallmatrix} \boxed{2} & & & \\ \diagdown & & & \\ \boxed{3} & & & \\ \diagup & & & \\ & 3 & & 1 \\ & & & 2 \end{smallmatrix}$$

n'est pas projectif, d'après Lemme 3.2.1.

(v) Si $n \geq 1$ et $m \geq 0$, le morphisme explicite

$$[n]S_1[m] = [n-1] \left(\begin{array}{c} \sim \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \\ 1 \end{array} \right) [m] = [n-1] \left(\begin{array}{c} \begin{array}{c} \lceil \quad \quad \rceil \\ \vdots \quad \diagup \quad \diagdown \\ \vdots \quad 3 \quad \vdots \end{array} \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \\ 1 \end{array} \right) [-m] \rightarrow \begin{array}{c} \lceil 2 \quad \rceil \\ \vdots \quad \diagdown \quad \diagup \\ \vdots \quad 3 \quad \vdots \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \\ 2 \end{array}$$

n'est pas projectif, d'après Lemme 3.2.1

(vi) $\underline{\text{Hom}}_A \left(M_7, \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \\ 2 \end{array} \right) = 0$, si $M_7 \in \text{sdiag}(S_1)$.

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(S_1, \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \\ 2 \end{array} \right) = 0$$

car il n'existe pas de morphismes explicites.

Soit f un morphisme explicite de M_7 à $\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \\ 2 \end{array}$ de cœur $E \in \{S_2, S_3\}$. Numérotions

$$M = S_1[n] = C_0 C_1 \dots$$

et soit s la position du cœur E dans son but. En cas $E = S_3$, alors si $n < 0$, $C_{s-1}C_s = \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} \sim \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \diagup \\ 3 \end{array}$ et

si $n > 0$, $C_{s+1}C_{s+2} = \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} \sim \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \diagup \\ 1 \end{array}$ ou $\begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} \sim \\ 2 \end{array}$ (ce dernier est possible ssi C_{s+1} est le dernier segment),
 f factorise par P_2 via

$$M_7 \twoheadrightarrow M(C_{s-1}C_s) \text{ ou } M(C_{s+1}C_{s+2}) \hookrightarrow P_2 \rightarrow \begin{array}{c} \lceil 2 \quad \rceil \\ \vdots \quad \diagdown \quad \diagup \\ \vdots \quad 3 \quad \vdots \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \\ 2 \end{array}$$

En cas $E = S_2$, alors si $n < 0$,

$$C_{s-3}C_{s-2}C_{s-1}C_s = \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} \sim \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \diagup \\ 2 \end{array}$$

et f factorise par $P_1 \oplus P_2$ via

$$M_7 \twoheadrightarrow M(C_{s-3}C_{s-2}C_{s-1}C_s) = \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} \sim \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \diagup \\ 2 \end{array} \hookrightarrow P_1 \oplus P_3 \twoheadrightarrow \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \\ 2 \end{array};$$

si $n > 0$, quand C_{s+4} existe,

$$C_{s+1}C_{s+2}C_{s+3}C_{s+4} = \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \end{array} \begin{array}{c} \sim \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \end{array},$$

f factorise par $P_1 \oplus P_2$ via

$$M_7 \twoheadrightarrow M(C_{s+1}C_{s+2}C_{s+3}C_{s+4}) = \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \end{array} \begin{array}{c} \sim \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \end{array} \hookrightarrow P_1 \oplus P_2 \twoheadrightarrow \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \\ 2 \end{array}$$

quand C_{s+3} est le dernier segment,

$$C_{s+1}C_{s+2}C_{s+3} = \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ 2 \end{array} \sim,$$

f factorise par $P_1 \oplus P_2$ via

$$M_7 \rightarrow M(C_{s+1}C_{s+2}C_{s+3}) = \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ 2 \end{array} \sim \hookrightarrow P_1 \oplus P_2 \twoheadrightarrow \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ 2 \end{array}$$

et quand C_{s+1} est le dernier segment, $C_{s+1} = \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 1 \end{array}$ et f factorise par P_1 via

$$M \rightarrow M(C_{s+1}) = \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \hookrightarrow P_1 \rightarrow \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ 2 \end{array}$$

(3) Pour $M_8 \in Q(S_2)$,

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ 2 \end{array}, M_8 \right) = 0 \iff M_8 \in \text{sdiag}(S_3)$$

(4) Pour $M_8 \in Q(S_2)$,

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(M_8, \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ 2 \end{array} \right) = 0 \iff M_8 \in \text{sdiag}([1]S_2) = \text{sdiag} \left(\begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right)$$

La preuve de (3) et (4) sont similaires aux preuves de (1) et (2). On en déduit que pour $M \in Q(S_1) \cup Q(S_2)$,

$$\text{Ext}^1 \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ 2 \end{array} \oplus M, \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ 2 \end{array} \oplus M \right) = 0 \iff M \in \text{sdiag}(S_2)$$

Cela signifie que $(5 + 7)$ n'est pas possible.

Maintenant on calcule l'algèbre des endomorphismes stable

$$\underline{\text{End}}_A \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ 2 \end{array} \oplus M_8 \right)$$

pour $M_8 \in \text{sdiag}(S_2)$.

Notons

$$\epsilon : \begin{array}{c} \boxed{2} \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ 2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ \boxed{2} \end{array}.$$

On a $\underline{\text{End}}_A \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ 2 \end{array} \right) = k\text{Id} \oplus k\epsilon$ et $\underline{\text{End}}_A(M) = k\text{Id}$. Pour déterminer $\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ 2 \end{array}, M \right)$

et $\underline{\text{Hom}}_A \left(M, \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ 2 \end{array} \right)$, on distingue des cas.

- (1) Si $M_8 = S_2$, notons $\alpha : \begin{array}{c} \boxed{2} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \rightarrow S_2$ qui engendre $\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array}, S_2 \right)$, et $\beta : S_2 \hookrightarrow \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \boxed{2} \end{array}$ qui engendre $\underline{\text{Hom}}_A \left(S_2, \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \right)$. On vérifie $\alpha\beta = \epsilon, \beta\alpha = 0$. Alors $\underline{\text{End}}_A \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \oplus S_2 \right)$ est isomorphe à l'algèbre II2.

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\alpha} & \bullet \\ \vdots & & \vdots \\ 5 & \xrightarrow{\beta} & 8 \end{array}$$

- (2) Si $n \geq 1$, numérotions

$$M = S_2[n] = \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \end{array} \right) [n-1] = C_1 C_2 \cdots C_{2n}.$$

Comme les morphismes bilatéraux deviennent nuls dans la catégorie stable (Proposition 2.3.1), les seuls morphismes explicites faiblement unilatéraux de $\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array}$ à M sont

$$\alpha : \begin{array}{c} \boxed{2} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{2} \quad 3 \end{array} \right) [n-1]$$

et

$$\alpha' : \begin{array}{c} \boxed{2} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \end{array} \right) [n-1] = \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \cdots \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \boxed{2} \end{array}$$

(α' existe ssi $n \equiv 0 \pmod{3}$). Mais il est facile de voir que α' factorise par $P_3 \oplus P_2$ via

$$\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \hookrightarrow P_3 \oplus P_2 \rightarrow M(C_{2n-3} C_{2n-2} C_{2n-1} C_{2n}) = \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \hookrightarrow \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \end{array} \right) [n-1]$$

On a donc que

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array}, \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \end{array} \right) [n-1] \right) = k\underline{\alpha}$$

Similairement,

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \end{array} \right) [n-1], \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \right) = k\underline{\beta},$$

où si $n = 1$,

$$\beta : \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \end{array} \hookrightarrow \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{3} \quad \boxed{1} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \boxed{2} \end{array}$$

et si $n \geq 2$,

$$\beta : \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \swarrow \searrow \\ 3 \end{array} \right) [n-1] = \left(\begin{array}{c} \overline{1} \quad \overline{2} \\ \overline{1} \swarrow \searrow \overline{2} \\ \overline{2} \quad \overline{3} \quad \overline{1} \end{array} \right) [n-2] \twoheadrightarrow \begin{array}{c} 2 \\ \searrow \\ 3 \swarrow \searrow \\ 2 \end{array}$$

On vérifie que $\alpha\beta = \epsilon$ et que si $n = 1$, $\beta\alpha = 0$. Si $n \geq 2$, $\beta\alpha$ est de la forme

$$\left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \swarrow \searrow \\ 3 \end{array} \right) [n-1] = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \swarrow \searrow \\ 3 \quad \boxed{2} \\ \quad \quad 1 \end{array} \right) [n-2] \rightarrow \left(\begin{array}{c} 1 \\ \boxed{2} \swarrow \searrow \\ 3 \end{array} \right) [n-1]$$

et on montre que $\beta\alpha = 0$. En effet, notons $C_1 = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \swarrow \\ 2 \end{array}$, $C_2 = \begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 3 \end{array}$, $C_3 = \begin{array}{c} 2 \\ \swarrow \\ 3 \end{array}$, $C_4 = \begin{array}{c} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{array}$,

$$C_5 = \begin{array}{c} 3 \\ \swarrow \\ 1 \end{array}, C_6 = \begin{array}{c} 3 \\ \searrow \\ 2 \end{array}.$$

Alors $C_i = C_j$ ssi $i \equiv j \pmod 6$ et

$$P_1 = \begin{array}{c} C_1 \quad C_2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ C_4 \quad C_5 \end{array}, \quad P_2 = \begin{array}{c} C_3 \quad C_4 \\ \swarrow \quad \searrow \\ C_6 \quad C_1 \end{array}, \quad P_3 = \begin{array}{c} C_5 \quad C_6 \\ \swarrow \quad \searrow \\ C_2 \quad C_3 \end{array}$$

On vérifie que

$$\Omega \left(\left(\left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \swarrow \searrow \\ 3 \end{array} \right) [n-1] \right)_{[0,2n-2]} \right) = \Omega(C_1 \cdots C_{2n-2}) = C_5 \cdots C_{2n} = \left(\left(\left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \swarrow \searrow \\ 3 \end{array} \right) [n-1] \right)_{[4,2n]} \right)$$

et on obtient que $\beta\alpha$ factorise via

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \swarrow \searrow \\ 3 \end{array} \right) [n-1] &\twoheadrightarrow \left(\left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \swarrow \searrow \\ 3 \end{array} \right) [n-1] \right)_{[3,2n]} \hookrightarrow I \left(\left(\left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \swarrow \searrow \\ 3 \end{array} \right) [n-1] \right)_{[3,2n]} \right) \twoheadrightarrow \\ &\left(\left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \swarrow \searrow \\ 3 \end{array} \right) [n-1] \right)_{[0,2n-2]} \hookrightarrow \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \swarrow \searrow \\ 3 \end{array} \right) [n-1] \end{aligned}$$

où $I \left(\left(\left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \swarrow \searrow \\ 3 \end{array} \right) [n-1] \right)_{[3,2n]} \right)$ est l'enveloppe injective de $\left(\left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \swarrow \searrow \\ 3 \end{array} \right) [n-1] \right)_{[3,2n]}$ qui est

aussi projectif. On obtient alors que l'algèbre d'endomorphismes stable $\underline{\text{End}}_A \left(\begin{array}{c} 2 \\ \searrow \\ 3 \swarrow \searrow \\ 2 \end{array} \oplus M_8 \right)$ est

II2.

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\alpha} & \bullet \\ \leftarrow \beta & & \\ 5 & & 8 \end{array}$$

(3) Regardons maintenant $S_2[-n] = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ / \end{smallmatrix} \right) [-n+1]$ pour $n \geq 1$.

Si $n = 1$,

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ / \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ / \end{smallmatrix} \right) = k\underline{\alpha},$$

où

$$\alpha : \begin{array}{c} \overline{2} \quad \overline{1} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \boxed{3} \quad \boxed{2} \end{array} \twoheadrightarrow \begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ / \end{smallmatrix}$$

Si $n \geq 2$,

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ / \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix}, \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ / \end{smallmatrix} \right) [-n+1] \right) = k\underline{\alpha},$$

où

$$\alpha : \begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ / \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \hookrightarrow \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ / \end{smallmatrix} \right) [-n+1] = \left(\begin{array}{c} \overline{2} \quad \overline{1} \quad \overline{3} \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \\ \boxed{3} \quad \boxed{2} \quad \sim \end{array} \right) [-n+2]$$

En effet, il est facile de montrer qu'il n'y plus d'autres morphismes explicites faiblement unilatéraux

$$\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ / \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \rightarrow \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ / \end{smallmatrix} \right) [-n+1].$$

$$\underline{\text{Hom}}_A \left(\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ / \end{smallmatrix} \right) [-n+1], \begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ / \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) = k\underline{\beta},$$

où

$$\beta : \left(\begin{array}{c} \boxed{2} \\ \backslash \\ 3 \end{array} \begin{smallmatrix} 1 \\ / \end{smallmatrix} \right) [-n+1] \rightarrow \begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ / \end{smallmatrix} \begin{array}{c} \boxed{2} \end{array},$$

car les seuls morphismes explicites faiblement unilatéraux sont β et si $n \equiv 0 \pmod 3$,

$$\beta' : \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ / \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) [-n+1] = \begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ / \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ \dots \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \\ / \end{smallmatrix} \begin{array}{c} \boxed{2} \end{array} \rightarrow \begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ / \end{smallmatrix} \begin{array}{c} \boxed{2} \end{array},$$

Mais β' est projectif factorisant par $P_1 \oplus P_2$.

On vérifie que $\alpha\beta = 0$ et que si $n = 1$, $\beta\alpha = 0$. Si $n \geq 2$, $\beta\alpha$ est de la forme

$$\left(\begin{array}{c} \boxed{2} \\ \backslash \\ 3 \end{array} \begin{smallmatrix} 1 \\ / \end{smallmatrix} \right) [-n+1] \rightarrow \left(\begin{array}{c} \boxed{2} \\ \backslash \\ 3 \end{array} \begin{smallmatrix} 1 \\ / \end{smallmatrix} \right) [-n+1] = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ / \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \\ / \end{smallmatrix} \end{array} \right) [-n+2]$$

et on montre que $\underline{\beta\alpha} = 0$. En effet, $\beta\alpha$ factorise via

$$\begin{aligned} \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ / \end{smallmatrix} \right) [-n+1] &\twoheadrightarrow \left(\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ / \end{smallmatrix} \right) [-n+1] \right)_{[0, 2n-2]} \hookrightarrow I \left(\left(\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ / \end{smallmatrix} \right) [-n+1] \right)_{[0, 2n-2]} \right) \\ &\rightarrow \left(\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ / \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \\ / \end{smallmatrix} \end{array} \right) [-n+1] \right)_{[3, 2n]} \hookrightarrow \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ / \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \\ / \end{smallmatrix} \end{array} \right) [-n+1] \end{aligned}$$

On obtient alors que l'algèbre d'endomorphismes stable $\underline{\text{End}}_A \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \diagdown \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ \diagup \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \\ \diagdown \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 2 \\ \diagup \end{smallmatrix} \oplus M_8 \right)$ est II2.

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\alpha} & \bullet \\ \leftarrow \beta & & \end{array}$$

5 8

□

Les deux cas suivants se démontrent similairement.

Lemme 4.2.22 (6+7)impossible

Lemme 4.2.23 (6+8)

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \diagdown \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \\ \diagup \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ \diagdown \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 2 \\ \diagup \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M), i \in \mathbb{Z}, M \in \text{diag}(S_2) \text{ II2}$$

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ \leftarrow & & \\ 6 & & 8 \end{array}$$

On considère dès maintenant les composantes non régulières $Q(S_1)$ et $Q(S_2)$.

Lemme 4.2.24 Soient $C \in Q(S_1) \cup Q(S_2)$ et $s, t \in \mathbb{N} - \{0\}$. Alors

- (i) Si $s \geq 2$, $\underline{\text{Hom}}_A(M([s]C), M(C[t])) \neq 0$.
- (ii) Si $t \geq 2$, $\underline{\text{Hom}}_A(M(C[t]), M([s]C)) \neq 0$.

Démonstration Comme

$$\underline{\text{Hom}}_A(\Omega^n M, \Omega^n M) = \underline{\text{Hom}}_A(M, M),$$

on peut supposer que $C \in Q(S_2)$ et $C = [u]S_2[v+1] = [u] \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \diagup \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 2 \\ \diagdown \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \\ \diagup \end{smallmatrix} \right) [v]$ avec $u, v \gg 0$. Comme $u, v \gg 0$, on peut donc supposer que C est de la forme

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc} & b & & \cdots & & 1 & & 2 & & 3 & & 1 & & 2 & & 3 & & 1 & & \cdots & & e \\ & \diagdown & & & & \diagdown & & \sim & & \diagdown & & \diagdown & & \diagdown & & \sim & & \diagdown & & \diagdown & & \diagdown \\ a & & c & & 2 & & 3 & & 1 & & 2 & & 3 & & 1 & & 2 & & 3 & & d & & f \end{array}$$

On met une numérotation sur C , $[s]C$ et $C[t]$, i.e numérotter les deux segments de gauche à droite de $S_2[1] = \begin{smallmatrix} 1 \\ \diagup \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 2 \\ \diagdown \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \\ \diagup \end{smallmatrix}$ comme C_0 et C_1 et étendre celle-ci à gauche et à droite. On obtient donc que

$$C = C_{-2u} \cdots C_0 C_1 \cdots C_{2v+1}.$$

Il est facile de voir que pour $i \in \mathbb{Z}$, $C_i = C_{i+6}$ sauf pour $i \in \{-1, -4\}$,

$$C_{-1} = \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \neq C_5 = \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \sim$$

et

$$C_{-4} = \begin{array}{c} \sim \\ \diagup \\ 3 \end{array}^2 \neq C_2 = \begin{array}{c} \diagup \\ 3 \end{array}^2.$$

(i) si $s \geq 2$,

$$[s]C = C_{-2u-2s} \cdots C_{-2u-4} C_{-2u-3} C_{-2u-2} C_{-2u-1} C_{-2u} \cdots C_0 C_1 \cdots C_{2v+1}$$

est de la forme

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccc} g & \diagup & h & \diagdown & i & \cdots & \diagup & a & \diagdown & c & \diagup & b & \diagdown & c & \diagup & a & \diagdown & c & \diagup & 2 & \diagdown & 1 & \sim & 2 & \diagdown & 1 & \boxed{3} & \diagdown & 2 & \diagup & 1 & \diagdown & 3 & \diagup & 2 & \diagdown & 1 & \diagdown & 3 & \sim & 2 & \diagup & 1 & \diagdown & 3 & \cdots & \diagup & e & \diagdown & f \end{array}$$

et

$$C[t] = C_{-2u} \cdots C_0 C_1 \cdots C_{2v+1} \cdots C_{2v+2t+1}$$

est de la forme

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccc} a & \diagup & b & \diagdown & c & \cdots & \diagup & 1 & \diagdown & 2 & \sim & 3 & \diagdown & 1 & \diagup & 2 & \diagdown & 1 & \boxed{3} & \diagdown & 2 & \diagup & 1 & \diagdown & 3 & \sim & 2 & \diagup & 1 & \diagdown & 3 & \cdots & \diagup & e & \diagdown & f & \cdots & \diagup & n & \diagdown & p \end{array}$$

Pour alléger les notations, dans cette démonstration, pour un segment directe de numéro positif, si on écrit $\begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 2 \end{array}$, cela veut dire $\begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \sim$. Et similairement, pour un segment inverse de numéro négatif, si on écrit $\begin{array}{c} \sim \\ \diagup \\ 3 \end{array}^2$, cela veut dire $\begin{array}{c} \sim \\ \diagup \\ 3 \end{array}^2$.

On va montrer que le morphisme explicite de cœur S_3 illustré ci-dessus, noté $f = f_0$, n'est pas projectif. En effet, si f_0 est projectif, d'après Remarque 2.2.2, il existe un module indécomposable projectif $P^{(0)}$ et deux morphisme explicites $g_0 : M([s]C) \rightarrow P^{(0)}$ et $h_0 : P^{(0)} \rightarrow M(C[t])$ tels que $h_0 \circ g_0 = f_0 + f_1$ pour f_1 un autre morphisme explicite de cœur disjoint de celui de f_0 ou le morphisme nul. On voit bien que $P = P_1$ ou $P = P_2$. Lemme 3.2.2 montre que $P^{(0)} \not\cong P_2$, alors f_1 est le morphisme explicite illustré par

$$[s]C = \begin{array}{cccccccccccccccccccccccc} g & \diagup & h & \diagdown & i & \cdots & \diagup & a & \diagdown & c & \diagup & b & \diagdown & c & \diagup & a & \diagdown & c & \diagup & 2 & \diagdown & 1 & \sim & 2 & \diagdown & 1 & \boxed{2} & \diagdown & 3 & \diagup & 2 & \diagdown & 1 & \diagdown & 3 & \sim & 2 & \diagup & 1 & \diagdown & 3 & \cdots & \diagup & e & \diagdown & f \end{array}$$

et

$$C[t] = \begin{array}{cccccccccccccccccccccccc} a & \diagup & b & \diagdown & c & \cdots & \diagup & 1 & \diagdown & 2 & \sim & 3 & \diagdown & 1 & \diagup & 2 & \diagdown & 1 & \boxed{2} & \diagdown & 3 & \diagup & 2 & \diagdown & 1 & \diagdown & 3 & \sim & 2 & \diagup & 1 & \diagdown & 3 & \cdots & \diagup & e & \diagdown & f & \cdots & \diagup & n & \diagdown & p \end{array}$$

Pour f_1 , il existe un module indécomposable projectif $P^{(1)}$ et deux morphisme explicites $g_1 : M([s]C) \rightarrow P^{(1)}$ et $h_1 : P^{(1)} \rightarrow M(C[t])$ tels que $h_1 \circ g_1 = f_1 + f_2$ pour $f_2 \neq f_0$ un autre morphisme explicite de cœur disjoint

de celui de f' ou le morphisme nul. On obtient donc $P^{(1)} = P_3$ car sinon, si $P = P_1$, $f_2 = f_0$, ce qui est absurde. Maintenant f_2 est de la forme

$$[s]C = \begin{array}{cccccccccccccccccccccccc} & h & & \cdots & & a & & c & & b & & \cdots & & \boxed{1} & & \sim & & 2 & & 3 & & 1 & & 2 & & 3 & & \sim & & 1 & & \cdots & & e \\ g & \swarrow & & & \searrow & & c & \swarrow & & b & \searrow & & c & \swarrow & & 2 & \searrow & & 3 & \swarrow & & 1 & \searrow & & 2 & \swarrow & & 3 & \searrow & & 1 & \swarrow & & d & \searrow & f \end{array}$$

et

$$C[t] = \begin{array}{cccccccccccccccccccccccc} & b & & \cdots & & 1 & & \sim & & 2 & & 3 & & 1 & & 2 & & 3 & & \sim & & 1 & & \cdots & & e & & \cdots & & n \\ a & \swarrow & & & \searrow & & 2 & \swarrow & & 3 & \searrow & & \boxed{1} & \swarrow & & 2 & \searrow & & 3 & \swarrow & & 1 & \searrow & & 2 & \swarrow & & 3 & \searrow & & d & \swarrow & & f & \searrow & & m & \swarrow & & p \end{array}$$

Pour f_2 , il existe un module indécomposable projectif $P^{(2)}$ et deux morphisme explicites $g_2 : M([s]C) \rightarrow P^{(2)}$ et $h_2 : P^{(2)} \rightarrow M(C[t])$ tels que $h_2 \circ g_2 = f_2 + f_3$ pour $f_3 \neq f_1$ un autre morphisme explicite de cœur disjoint de celui de f_2 ou le morphisme nul. On obtient donc $P^{(2)} = P_2$ car sinon, si $P = P_3$, $f_3 = f_1$, ce qui est absurde. On continue par récurrence. Pour f_u de la forme

$$[s]C = \begin{array}{cccccccccccccccccccccccc} & h & & \cdots & & a & & \boxed{c} & & b & & \cdots & & 1 & & \sim & & 2 & & 3 & & 1 & & 2 & & 3 & & \sim & & 1 & & \cdots & & e \\ g & \swarrow & & & \searrow & & c & \swarrow & & b & \searrow & & c & \swarrow & & 2 & \searrow & & 3 & \swarrow & & 1 & \searrow & & 2 & \swarrow & & 3 & \searrow & & 1 & \swarrow & & d & \searrow & f \end{array}$$

et

$$C[t] = \begin{array}{cccccccccccccccccccccccc} & b & & \cdots & & 1 & & \sim & & 2 & & 3 & & 1 & & 2 & & 3 & & \sim & & 1 & & \cdots & & e & & \cdots & & n \\ a & \swarrow & & & \searrow & & 2 & \swarrow & & 3 & \searrow & & \boxed{c} & \swarrow & & 2 & \searrow & & 3 & \swarrow & & 1 & \searrow & & 2 & \swarrow & & 3 & \searrow & & d & \swarrow & & f & \searrow & & m & \swarrow & & p \end{array}$$

il existe un module indécomposable projectif $P^{(u)}$ et deux morphisme explicites $g_u : M([s]C) \rightarrow P^{(u)}$ et $h_u : P^{(u)} \rightarrow M(C[t])$ tels que $h_u \circ g_u = f_u + f_{u+1}$ pour $f_{u+1} \neq f_{u-1}$ un autre morphisme explicite de cœur disjoint de celui de f_u ou le morphisme nul. On obtient donc $P^{(u)} = P_b$ car sinon, si $P_u = P_a$, $f_{u+1} = f_{u-1}$. Maintenant f_{u+1} est de la forme

$$[s]C = \begin{array}{cccccccccccccccccccccccc} & h & & \cdots & & \boxed{a} & & c & & b & & \cdots & & 1 & & \sim & & 2 & & 3 & & 1 & & 2 & & 3 & & \sim & & 1 & & \cdots & & e \\ g & \swarrow & & & \searrow & & c & \swarrow & & b & \searrow & & c & \swarrow & & 2 & \searrow & & 3 & \swarrow & & 1 & \searrow & & 2 & \swarrow & & 3 & \searrow & & 1 & \swarrow & & d & \searrow & f \end{array}$$

et

$$C[t] = \begin{array}{cccccccccccccccccccccccc} & b & & \cdots & & 1 & & \sim & & 2 & & 3 & & 1 & & 2 & & 3 & & \sim & & 1 & & \cdots & & e & & \cdots & & n \\ a & \swarrow & & & \searrow & & 2 & \swarrow & & 3 & \searrow & & \boxed{a} & \swarrow & & 2 & \searrow & & 3 & \swarrow & & 1 & \searrow & & 2 & \swarrow & & 3 & \searrow & & d & \swarrow & & f & \searrow & & m & \swarrow & & p \end{array}$$

Pour f_{u+1} , il existe un module indécomposable projectif $P^{(u+1)}$ et deux morphisme explicites $g_{(u+1)} : M([s]C) \rightarrow P^{(u+1)}$ et $h_{(u+1)} : P^{(u+1)} \rightarrow M(C[t])$ tels que $h_{(u+1)} \circ g_{(u+1)} = f_{(u+1)} + f_{(u+2)}$ pour $f_{(u+2)} \neq f_{(u)}$ un autre morphisme explicite de cœur disjoint de celui de $f_{(u+1)}$ ou le morphisme nul. On voit bien que $P^{(u+1)} = P_b$ et donc que $f_{(u+2)} = f_{(u)}$, ce qui est absurde.

(ii) Similairement, $[s]C$ est de la forme

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccc} & h & & \cdots & & b & & \cdots & & \sim & & 2 & & 3 & & 1 & & \sim & & \cdots & & e \\ g & \swarrow & & & \searrow & & c & \swarrow & & 3 & \searrow & & 1 & \swarrow & & \boxed{2} & \searrow & & 3 & \swarrow & & 1 & \searrow & & 2 & \swarrow & & \cdots & & d & \swarrow & & f \end{array}$$

et si $t \geq 2$, $C[t]$ est de forme

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccc} & b & & \cdots & & \sim & & 2 & & 3 & & 1 & & \sim & & \cdots & & e & & d & & f & & \cdots & & n \\ a & \swarrow & & & \searrow & & 3 & \swarrow & & 1 & \searrow & & 2 & \swarrow & & \boxed{2} & \searrow & & 3 & \swarrow & & \sim & & d & \swarrow & & f & \searrow & & e & \swarrow & & d & \swarrow & & m & \swarrow & & p \end{array}$$

Le morphisme explicite de cœur S_2 de $M(C[t])$ à $M([s]C)$ illustré ci-dessus n'est pas projectif.

□

Lemme 4.2.25 Soit $C \in Q(S_1) \cup Q(S_2)$. Alors

$$\underline{\text{Hom}}_A(M([1]C), M(C[2])) = 0, \quad \underline{\text{Hom}}_A(M(C[1]), M([2]C)) = 0$$

Démonstration On montre la première assertion, la deuxième étant pareille. On peut supposer comme dans la preuve du lemme précédent que

$$C = C_{-2u} \cdots C_{2v+1}$$

est de la forme

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} & b & & \cdots & & 2 & & 3 & & 1 & & 2 & & 3 & & \cdots & & e \\ & \diagdown & & & & \diagup & & \diagdown & & \diagup & & \diagdown & & \diagup & & \diagdown & & \diagdown \\ a & & c & & \sim & 3 & & 1 & & 2 & & 3 & & 1 & & 2 & & d & & f \end{array}$$

$$[1]C = C_{-2u-2} C_{-2u-1} C_{-2u} \cdots C_{2v+1}$$

est de la forme

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} & c & & b & & \cdots & & 2 & & 3 & & 1 & & 2 & & 3 & & \cdots & & e \\ & \diagdown & & \diagup & & \diagdown & & \diagup & & \diagdown & & \diagup & & \diagdown & & \diagup & & \diagdown & & \diagdown \\ b & & a & & c & & \sim & 3 & & 1 & & 2 & & 3 & & 1 & & 2 & & d & & f \end{array}$$

$$C[2] = C_{-2u} \cdots C_{2v+1} \cdots C_{-2v+5}$$

est de la forme

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} & b & & \cdots & & 2 & & 3 & & 1 & & 2 & & 3 & & \cdots & & e & & d & & f \\ & \diagdown & & & & \diagup & & \diagdown & & \diagup & & \diagdown & & \diagup & & \diagdown & & \diagdown & & \diagup & & \diagdown \\ a & & c & & \sim & 3 & & 1 & & 2 & & 3 & & 1 & & 2 & & d & & f & & d \end{array}$$

En utilisant les descriptions des sous-modules explicites et des quotients explicites, on obtient que les cœurs possibles sont S_1, S_2, S_3 et les sous-cordes $\begin{smallmatrix} i \\ \diagdown \\ j \end{smallmatrix}$ et $\begin{smallmatrix} i \\ \diagup \\ j \end{smallmatrix}$ avec $i, j \in \{2, 3\}$ de $\begin{smallmatrix} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{smallmatrix}$ ou de $\begin{smallmatrix} 3 \\ \diagdown \\ 2 \end{smallmatrix}$ qui sont de longueur l telle que $1 \leq l \leq 2b - 2$.

- (1) Un morphisme explicite f de $M([1]C)$ vers $M(C[2])$ de cœur $E = \begin{smallmatrix} 3 \\ \diagdown \\ 2 \end{smallmatrix} \subset \begin{smallmatrix} 3 \\ \diagdown \\ 2 \end{smallmatrix}$ qui est de longueur l telle que $1 \leq l \leq 2b - 3$ factorise par P_3 via

$$M([1]C) = \cdots \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \cdots \rightarrow P_3 = \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \cdots \rightarrow \cdots \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \cdots = M(C[2])$$

- (2) Un morphisme explicite f de $M([1]C)$ vers $M(C[2])$ de cœur $E = \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \subset \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \sim$ qui est de longueur l telle que $1 \leq l \leq 2b - 3$ factorise par P_2 via

$$M([1]C) = \cdots \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \cdots \xrightarrow{P_2} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \cdots \xrightarrow{\sim} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \cdots = M(C[2])$$

- (3) Un morphisme explicite f de $M([1]C)$ vers $M(C[2])$ de cœur $E = \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array}$ qui est de longueur l telle que $1 \leq l \leq 2b - 3$ factorise par P_2 via

$$M([1]C) = \cdots \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \cdots \xrightarrow{P_2} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \cdots \xrightarrow{\sim} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \cdots = M(C[2])$$

- (4) Un morphisme explicite f de $M([1]C)$ vers $M(C[2])$ de cœur $E = \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array}$ qui est de longueur l telle que $1 \leq l \leq 2b - 3$ factorise par P_3 via

$$M([1]C) = \cdots \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \cdots \xrightarrow{P_3} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \cdots \xrightarrow{\sim} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \cdots = M(C[2])$$

- (5) Un morphisme explicite f de $M([1]C)$ vers $M(C[2])$ de cœur $E = \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array}$ factorise par $P_2 \oplus P_3$ ou P_3 . En effet, notons $s = \text{Pos}_{[1]C}(E)$ et $t = \text{Pos}_{C[2]}(E)$. Alors si C_{s-3} existe, f factorise via

$$M([1]C) \twoheadrightarrow M(C_{s-3}C_{s-2}C_{s-1}C_s) = \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \hookrightarrow P_2 \oplus P_3 \twoheadrightarrow$$

$$\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \sim = M(C_{t-3}C_{t-2}C_{t-1}C_t) \hookrightarrow M(C[2])$$

Si C_{s-2} est le premier segment de $[1]C$, alors f factorise via

$$M([1]C) \twoheadrightarrow M(C_{s-2}C_{s-1}C_s) = \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \hookrightarrow P_2 \oplus P_3 \twoheadrightarrow \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \sim = M(C_{t-2}C_{t-1}C_t) \hookrightarrow M(C[2])$$

Si C_s est le premier segment de $[1]C$, alors f factorise via

$$M([1]C) \twoheadrightarrow M(C_s) = \begin{smallmatrix} \sim \\ 3 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix} \hookrightarrow P_3 \twoheadrightarrow \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix} \sim = M(C_{t-1}C_t) \hookrightarrow M(C[2])$$

(6) Similairement, un morphisme explicite f de $M([1]C)$ vers $M(C[2])$ de coeur $E = \begin{smallmatrix} 3 \\ \Downarrow \\ 3 \end{smallmatrix}$ factorise par $P_2 \oplus P_3$ ou P_2 .

(7) Maintenant soit f un morphisme explicite de coeur $E = S_i$. Notons $s = \text{Pos}_{[1]C}(E)$ et $t = \text{Pos}_{C[2]}(E)$.

(i) $s \leq 0$ et $t > 0$ et $E = S_1$.

Si $s > 2u - 2$ f factorise via

$$M([1]C) \twoheadrightarrow M(C_{s-1}C_s) = \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \searrow \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \hookrightarrow P_2 \twoheadrightarrow M(C_{t-1}C_t) = \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \hookrightarrow M(C[2])$$

Si $s = 2u - 2$ et donc C_s est le premier segment de $M([1]C)$, f factorise via

$$M([1]C) \twoheadrightarrow M(C_s) = \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \nearrow \hookrightarrow P_2 \twoheadrightarrow M(C_{t-1}C_t) = \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \hookrightarrow M(C[2])$$

(ii) $s \leq 0$ et $t > 0$ et $E = S_2$,

Alors $C_s = \begin{smallmatrix} \sim \\ 3 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \twoheadrightarrow \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}$. Si $s > -2u - 2$, f factorise via

$$M([1]C) \twoheadrightarrow M(C_{s-1}C_s) = \begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix} \searrow \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \twoheadrightarrow \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \nearrow \hookrightarrow P_3 \twoheadrightarrow M(C_{t-1}C_t) = \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \sim \hookrightarrow C[2]$$

et si $s = -2u - 2$, C_s est le premier segment de $M([1]C)$ et f factorise via

$$M([1]C) \twoheadrightarrow M(C_s) = \begin{smallmatrix} \sim \\ 3 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \twoheadrightarrow \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \nearrow \hookrightarrow P_3 \twoheadrightarrow M(C_{t-1}C_t) = \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \sim \hookrightarrow C[2]$$

(iii) $s \leq 0$ et $t > 1$ et $E = S_3$

$M(C_{s-2}C_{s-1}C_s) = \begin{smallmatrix} \sim \\ 3 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \searrow \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \twoheadrightarrow \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \searrow \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \twoheadrightarrow \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \searrow \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}$. Si $s > -2u - 2$, f factorise via

$$M([1]C) \twoheadrightarrow \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \searrow \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \hookrightarrow P_3 \oplus P_1 \twoheadrightarrow M(C_{t-2}C_{t-1}C_t) = \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \sim \begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix} \searrow \hookrightarrow C[2]$$

Si $s = -2u - 2$, f factorise via

$$M([1]C) \twoheadrightarrow M(C_s) = \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \nearrow \hookrightarrow P_1 \twoheadrightarrow M(C_{t-1}C_t) = \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix} \hookrightarrow M(C[2])$$

(iv) $s \geq 0, t < 0$ et $E = S_1$

Si $s < 2v + 1$, f factorise via

$$M([1]C) \twoheadrightarrow M(C_{s+1}C_{s+2}) = \begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \hookrightarrow P_3 \twoheadrightarrow M(C_{t+1}C_{t+2}) = \begin{array}{c} 3 \\ \nearrow \\ 1 \end{array} \backslash \begin{array}{c} 2 \\ \nearrow \\ 2 \end{array} \hookrightarrow M(C[2])$$

Si $s = 2v + 1$, f factorise via

$$M([1]C) \twoheadrightarrow M(C_{s+1}) = \begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \hookrightarrow P_2 \twoheadrightarrow M(C_{t+1}C_{t+2}) = \begin{array}{c} 3 \\ \nearrow \\ 1 \end{array} \backslash \begin{array}{c} 2 \\ \nearrow \\ 2 \end{array} \hookrightarrow M(C[2])$$

.

(v) $s \geq 0$ et $t < -1$ et $E = S_2$ $M(C_{s+1}C_{s+2}C_{s+3}C_{s+4}) = \begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 3 \\ \sim \\ 2 \end{array} \twoheadrightarrow \begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array}$. Si $s < 2v + 1$,

f factorise via

$$M([1]C) \twoheadrightarrow \begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \hookrightarrow P_1 \oplus P_2 \twoheadrightarrow M(C_{t+1}C_{t+2}C_{t+3}) = \begin{array}{c} 1 \\ \nearrow \\ 2 \end{array} \backslash \begin{array}{c} 2 \\ \sim \\ 3 \end{array} \backslash \begin{array}{c} 2 \\ \nearrow \\ 1 \end{array} \hookrightarrow M(C[2])$$

Si $s = 2v + 1$, f factorise via

$$M([1]C) \twoheadrightarrow M(C_{s+1}) = \begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \hookrightarrow P_1 \twoheadrightarrow M(C_{t+1}C_{t+2}) = \begin{array}{c} 1 \\ \nearrow \\ 2 \end{array} \backslash \begin{array}{c} 2 \\ \nearrow \\ 3 \end{array} \hookrightarrow M(C[2])$$

.

(vi) $s \geq 0$ et $t < 0$ et $E = S_3$

Alors $C_{s+1} = \begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \sim \begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \twoheadrightarrow \begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array}$. f factorise via

$$M([1]C) \twoheadrightarrow M(C_{s+1}C_{s+2}) = \begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \text{ ou } \begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \sim \begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \twoheadrightarrow \begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \hookrightarrow P_2 \twoheadrightarrow M(C_{t+1}C_{t+2}) = \begin{array}{c} 2 \\ \sim \\ 3 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \hookrightarrow M(C[2])$$

(vii) $s \geq 0$ et $t > 0$ et $s < t$ et $E = S_1$. Alors en ce moment, $t \equiv s \pmod{3}$.

$$([1]C)_{[-2,s]} = C_{-1}C_0 \cdots C_s = \begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \cdots \nearrow \begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \sim \begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array}$$

et

$$(C[2])_{[t-s-2,t]} = C_{t-s-1} \cdots C_t = \begin{array}{c} 2 \\ \nearrow \\ 3 \end{array} \backslash \begin{array}{c} 2 \\ \nearrow \\ 1 \end{array} \cdots \backslash \begin{array}{c} 2 \\ \nearrow \\ 3 \end{array} \backslash \begin{array}{c} 2 \\ \nearrow \\ 1 \end{array}$$

On obtient donc que

$$\Omega((C[2])_{[t-s-2,t]}) = \Omega(C_{t-s-1} \cdots C_{t-1}) = \left(\begin{array}{c} 2 \\ \llcorner \\ 2 \end{array} \right) C_0 \cdots C_{s-1}$$

qui contient $([1]C)_{[-2,s]}$ comme sous-corde explicite. Le morphisme f factorise via

$$M([1]C) \twoheadrightarrow M(([1]C)_{[-2,s]}) \hookrightarrow I(M(([1]C)_{[-2,s]})) \twoheadrightarrow M((C[2])_{[t-s-2,t]}) \hookrightarrow M(C[2])$$

où $I(M(([1]C)_{[-2,s]}))$ est l'enveloppe injective de $M(([1]C)_{[-2,s]})$ et est aussi la couverture projective de $M((C[2])_{[t-s-2,t]})$.

(viii) $s > 0$ et $t > 0$ et $s < t$ et $E = S_2$

Le morphisme f factorise via

$$M([1]C) \twoheadrightarrow M(([1]C)_{[-2,s]}) \hookrightarrow I(M(([1]C)_{[-2,s]})) \twoheadrightarrow M((C[2])_{[t-s-2,t]}) \hookrightarrow M(C[2])$$

où $I(M(([1]C)_{[-2,s]}))$ est l'enveloppe injective de $M(([1]C)_{[-2,s]})$ et est aussi la couverture projective de $M((C[2])_{[t-s-2,t]})$.

(ix) $s > 0$ et $t > 0$ et $s < t$ et $E = S_3$

Le morphisme f factorise via

$$M([1]C) \twoheadrightarrow M(([1]C)_{[-2,s]}) \hookrightarrow I(M(([1]C)_{[-2,s]})) \twoheadrightarrow M((C[2])_{[t-s-2,t]}) \hookrightarrow M(C[2])$$

où $I(M(([1]C)_{[-2,s]}))$ est l'enveloppe injective de $M(([1]C)_{[-2,s]})$ et est aussi la couverture projective de $M((C[2])_{[t-s-2,t]})$.

(x) $s > 0$ et $t > 0$ et $s > t$ et $E = S_1$

Le morphisme f factorise via

$$M([1]C) \twoheadrightarrow M(([1]C)_{[s,2v+1]}) \hookrightarrow I(M(([1]C)_{[s,2v+1]})) \twoheadrightarrow M((C[2])_{[t,t-s+2v+2]}) \hookrightarrow M(C[2])$$

où $I(M(([1]C)_{[s,2v+1]}))$ est l'enveloppe injective de $M(([1]C)_{[s,2v+1]})$ et est aussi la couverture projective de $M((C[2])_{[t,t-s+2v+2]})$.

(xi) $s > 0$ et $t \geq -1$, $s > t$ et $E = S_2$

Le morphisme f factorise via

$$M([1]C) \twoheadrightarrow M(([1]C)_{[s,2v+1]}) \hookrightarrow I(M(([1]C)_{[s,2v+1]})) \twoheadrightarrow M((C[2])_{[t,t-s+2v+2]}) \hookrightarrow M(C[2])$$

où $I(M(([1]C)_{[s,2v+1]}))$ est l'enveloppe injective de $M(([1]C)_{[s,2v+1]})$ et est aussi la couverture projective de $M((C[2])_{[t,t-s+2v+2]})$.

(xii) $s > 0$ et $t > 0$, $s > t$ et $E = S_3$

Le morphisme f factorise via

$$M([1]C) \twoheadrightarrow M(([1]C)_{[s,2v+1]}) \hookrightarrow I(M(([1]C)_{[s,2v+1]})) \twoheadrightarrow M((C[2])_{[t,t-s+2v+2]}) \hookrightarrow M(C[2])$$

où $I(M(([1]C)_{[s,2v+1]}))$ est l'enveloppe injective de $M(([1]C)_{[s,2v+1]})$ et est aussi la couverture projective de $M((C[2])_{[t,t-s+2v+2]})$.

(xiii) $s < 0$ et $t < 0$ et $s > t$ et $E = S_1$

Le morphisme f factorise via

$$M([1]C) \twoheadrightarrow M((([1]C)_{[s,2]})) \hookrightarrow I(M((([1]C)_{[s,2]})) \twoheadrightarrow M((C[2])_{[t,t+2-s]}) \hookrightarrow M(C[2])$$

où $I(M((([1]C)_{[s,2]}))$ est l'enveloppe injective de $M((([1]C)_{[s,2]}))$ et est aussi la couverture projective de $M((C[2])_{[t,t+2-s]})$.

(xiv) $s < 0$ et $t < -1$ et $s > t$ et $E = S_2$

Le morphisme f factorise via

$$M([1]C) \twoheadrightarrow M((([1]C)_{[s,2]})) \hookrightarrow I(M((([1]C)_{[s,2]})) \twoheadrightarrow M((C[2])_{[t,t+2-s]}) \hookrightarrow M(C[2])$$

où $I(M((([1]C)_{[s,2]}))$ est l'enveloppe injective de $M((([1]C)_{[s,2]}))$ et est aussi la couverture projective de $M((C[2])_{[t,t+2-s]})$.

(xv) $s < 0$ et $t < 0$ et $s > t$ et $E = S_3$

Le morphisme f factorise via

$$M([1]C) \twoheadrightarrow M((([1]C)_{[s,2]})) \hookrightarrow I(M((([1]C)_{[s,2]})) \twoheadrightarrow M((C[2])_{[t,t+2-s]}) \hookrightarrow M(C[2])$$

où $I(M((([1]C)_{[s,2]}))$ est l'enveloppe injective de $M((([1]C)_{[s,2]}))$ et est aussi la couverture projective de $M((C[2])_{[t,t+2-s]})$.

(xvi) $s < 0$ et $t < 0$ et $s < t$ et $E = S_1$

Le morphisme f factorise via

$$M([1]C) \twoheadrightarrow M((([1]C)_{[-2u-2,s]})) \hookrightarrow I((([1]C)_{[-2u-2,s]})) \twoheadrightarrow (C[2])_{[t-s-2u-3,t]} \hookrightarrow M(C[2])$$

où $I((([1]C)_{[-2u-2,s]}))$ est l'enveloppe injective de $([1]C)_{[-2u-2,s]}$ et est aussi la couverture projective de $M((C[2])_{[t-s-2u-3,t]})$.

(xvii) $s < 0$ et $t < -1$ et $s < t$ et $E = S_2$

Le morphisme f factorise via

$$M([1]C) \twoheadrightarrow M((([1]C)_{[-2u-2,s]})) \hookrightarrow I(M((([1]C)_{[-2u-2,s]})) \twoheadrightarrow M((C[2])_{[t-s-2u-3,t]}) \hookrightarrow M(C[2])$$

où $I(M((([1]C)_{[-2u-2,s]}))$ est l'enveloppe injective de $M((([1]C)_{[-2u-2,s]}))$ et est aussi la couverture projective de $M((C[2])_{[t-s-2u-3,t]})$.

(xviii) $s < 0$ et $t < 0$ et $s < t$ et $E = S_3$

Le morphisme f factorise via

$$M([1]C) \twoheadrightarrow M((([1]C)_{[-2u-2,s]})) \hookrightarrow I(M((([1]C)_{[-2u-2,s]})) \twoheadrightarrow M((C[2])_{[t-s-2u-3,t]}) \hookrightarrow M(C[2])$$

où $I(M((([1]C)_{[-2u-2,s]}))$ est l'enveloppe injective de $M((([1]C)_{[-2u-2,s]}))$ et est aussi la couverture projective de $M((C[2])_{[t-s-2u-3,t]})$.

□

Lemme 4.2.26 (7+7,8+8) Soient $M, N \in Q(S_1)$ ou $Q(S_2)$ deux modules mon isomorphes. Alors $\text{Ext}_A^1(M \oplus N, M \oplus N) \neq 0$.

Démonstration Il existe $C \in Q(S_2)$, $n \gg 0$ et $s, t \in \mathbb{N} - \{0\}$ tels que

$$\Omega^n(M) = M([s]C) \text{ et } \Omega^n(N) = M(C[t])$$

ou

$$\Omega^n(N) = M([s]C) \text{ et } \Omega^n(M) = M(C[t]).$$

Sans perdre de généralité, on peut supposer

$$\Omega^n(M) = M([s]C) \text{ et } \Omega^n(N) = M(C[t])$$

et donc

$$\Omega^{-2}M = M([s+1]C[1]) \text{ et } \Omega^{-2}N = M([1]C[t+1]).$$

Supposons $\text{Ext}_A^1(M \oplus N, M \oplus N) = 0$. Alors

$$\underline{\text{Hom}}_A(\Omega^{-2}N, M) = D\text{Ext}_A^1(M, N) = 0, \quad \underline{\text{Hom}}_A(\Omega^{-2}M, N) = D\text{Ext}_A^1(N, M) = 0$$

D'après Lemme 4.2.24, $\underline{\text{Hom}}_A(\Omega^{-2}N, M) = 0$ implique $t+1 \leq 1$ et $\underline{\text{Hom}}_A(\Omega^{-2}M, N) = 0$ implique $s+1 \leq 1$. On obtient $s = t = 0$ et donc $M \cong N$.

□

Proposition 4.2.27 (7+8) Soient $M_7 = M(C) \in Q(S_1)$ et $M_8 = M(D) \in Q(S_2)$. Alors $\text{Ext}_A^1(M_7 \oplus M_8, M_7 \oplus M_8) = 0 \iff D = \Omega([-1]C[2])$ ou $D = \Omega([2]C[-1])$. L'algèbre $\underline{\text{End}}_A(M_7 \oplus M_8)$ est

$$II3 \quad \begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ 7 & & 8 \end{array}$$

Démonstration Les lemmes 4.2.24 et 4.2.25 montrent les relations entre M_7 et M_8 .

On calcule $\underline{\text{End}}_A(M_7 \oplus M_8)$ pour $N = \Omega([-1]M[2])$. Notons $C = [-1]M$ et alors $N = M(C[2])$.

On peut supposer que $C = [u] \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \nearrow \searrow 3 \end{array} \right) [v]$ avec $u, v \gg 0$. Alors

$$[1]C = [u+1] \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \nearrow \searrow 3 \end{array} \right) [v] = [u] \left(\begin{array}{c} 3 \\ 1 \nearrow \searrow 2 \end{array} \right) [v+1] = \cdots \searrow_1 \nearrow_3 \searrow_2 \nearrow \cdots,$$

$$C[2] = [u] \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \nearrow \searrow 3 \end{array} \right) [v+2]$$

et

$$\Omega C[2] = [u] \left(\begin{array}{c} 3 \\ 1 \nearrow \searrow 2 \end{array} \right) [v+1] = \cdots \searrow_1 \nearrow_3 \searrow_2 \nearrow \cdots$$

Notons

$$\alpha : M([1]C) = \cdots \searrow \begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{ccc} & 3 & \\ \nearrow & & \searrow \\ 1 & & 2 \end{array}} \searrow \cdots \rightarrow \Omega M(C[2]) = \cdots \searrow \begin{array}{c} 3 \\ \nearrow \sim \searrow \\ 1 \quad 2 \end{array} \searrow \cdots = \cdots \searrow \begin{array}{c} 3 \\ \nearrow \searrow \\ 1 \quad \boxed{\begin{array}{ccc} & 3 & \\ \nearrow & & \searrow \\ & 2 & \end{array}} \searrow \cdots \end{array}$$

et

$$\beta : \Omega M(C[2]) = \cdots \searrow \begin{array}{c} 3 \\ \nearrow \sim \searrow \\ 1 \quad 2 \end{array} \searrow \cdots = \boxed{\begin{array}{ccc} & 3 & \\ \nearrow & & \searrow \\ 1 & & 2 \end{array}} \searrow \cdots \rightarrow M([1]C) = \boxed{\begin{array}{ccc} & 3 & \\ \nearrow & & \searrow \\ & 1 & 2 \end{array}} \searrow \cdots$$

En utilisant la même méthode que dans la preuve de Lemme 4.2.25, on peut montrer que tout autre morphisme explicite entre M_7 et M_8 devient nul dans la catégorie stable et on obtient donc que

$$\underline{\text{Hom}}_A(M_7, M_8) = k\underline{\alpha} \text{ et } \underline{\text{Hom}}_A(M_7, M_8) = k\underline{\beta}.$$

On vérifie en plus $\alpha\beta = 0$ et $\beta\alpha = 0$, car $\beta\alpha$ factorise par P_3 . Rappelons que

$$\underline{\text{End}}_A(M_7) = k\underline{Id} \text{ et } \underline{\text{End}}_A(M_8) = k\underline{Id},$$

l'algèbre des endomorphismes stable est isomorphe à II_3 .

$$II_3 \quad \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\alpha} & \\ \bullet & \xrightarrow{\beta} & \bullet \\ 7 & & 8 \end{array}$$

□

Remarque 4.2.28 Les expressions sont symétriques, i.e. si on écrit $D = \Omega([-1]C[2])$ alors $C = \Omega([2]D[-1])$.

Remarque 4.2.29 On résume ce que l'on a obtenu par le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 5 & & \\ & & \downarrow & \searrow & \\ & & 6 & 7 & 8 \\ & & \nearrow & & \\ 3 & 4 & 6 & & \end{array}$$

Dans le diagramme, un trait reliant deux nombres i et j signifie que deux modules de type respectivement i et j n'apparaissent pas comme facteurs d'un module rigide; deux modules de type i dans la première ligne et de type j dans la troisième ligne sont indépendants, i.e. il n'existe pas de morphismes explicites non projectifs entre ces deux modules.

Remarque 4.2.30 D'après le résumé précédent, on peut trouver tous les types possibles des modules rigides à plusieurs facteurs directes indécomposables. Il existe au plus 6 facteurs directes indécomposables non isomorphes non projectifs dans un module rigide M et donc le carquois avec relations $\underline{\text{End}}_A(M)$ a au plus 6 sommets. On va calculer dans les prochaines sections les modules rigides à plus de deux facteurs directes indécomposables non isomorphes non projectifs et leur algèbres des endomorphismes stables.

4.3 Trois facteurs

A partir de cette section, on commence à calculer les modules rigides à plus de trois facteurs indécomposables non projectifs non isomorphes. Les calculs sont essentiellement plus simple que les cas d'un seul facteur et de deux facteurs, puisque pour un module rigide de la forme

$$M = M_{i_1} \oplus \cdots M_{i_n}$$

avec M_{i_s} indécomposable de type $i_s \in \{1, 2, \dots, 8\}$,

$$\text{Ext}_A^1(M, M) = 0 \iff \text{Ext}_A^1(M_{i_s}, M_{i_t}) = 0, \forall 1 \leq s, t \leq n$$

Les possibilités des modules rigides de type $(i_1 + \cdots + i_n)$ découlent immédiatement des calculs des deux sections précédentes. Ce qui reste est de calculer l'algèbre des endomorphismes stable $\underline{\text{End}}_A(M_{i_1} \oplus \cdots M_{i_n})$.

Lemme 4.3.1 (1+2+3, 1+2+4, 1+2+6, 3+4+1, 3+4+2, 3+4+5, 1+5+3, 1+5+4, 2+5+3, 2+5+4, 3+6+1, 3+6+2, 4+6+1, 4+6+2) Soient i_1, i_2 deux indices dans la première ligne (resp. la troisième ligne) du résumé

dans la section précédente (Remarque 4.2.29) et soit i_3 un indice dans la troisième ligne (resp. la première ligne). Si $\{5, 6\} \not\subset \{i_1, i_2, i_3\}$, alors tout module rigide de type $(i_1 + i_2 + i_3)$ est de la forme suivante: $M_{i_1} \oplus M_{i_2}$ est un module rigide de type $(i_1 + i_2)$ déterminé dans le cas $(i_1 + i_2)$ et M_{i_3} est un module indécomposable de type (i_3) arbitraire.

L'algèbre des endomorphismes stable $\underline{\text{End}}_A(M_{i_1} \oplus M_{i_2} \oplus M_{i_3})$ est le produit des algèbres $\underline{\text{End}}_A(M_{i_1} \oplus M_{i_2})$ déterminée dans le cas $(i_1 + i_2)$ et $\underline{\text{End}}_A(M_{i_3})$ calculée dans Section 4.1.

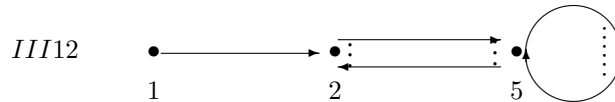
Démonstration C'est immédiat d'après le résumé de la section précédente (Remarque 4.2.29). □

Lemme 4.3.2 (1+5+6, 2+5+6, 3+5+6, 4+5+6, 5+6+7, 5+6+8, 1+6+7, 2+6+7, 3+6+7, 4+6+7, 6+7+8, 1+5+7, 2+5+7, 3+5+7, 4+5+7, 5+7+8) impossibles

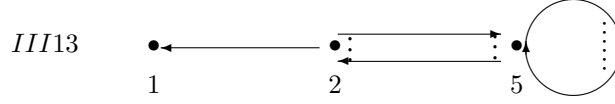
Démonstration C'est immédiat d'après le résumé de la section précédente (Remarque 4.2.29). □

Lemme 4.3.3 (1+2+5)

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^{i+3u} \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \sim \diagup \\ 1 \end{array} \right), i, u \in \mathbb{Z}$$



$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^{i+3u} \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \sim \diagup \\ 1 \end{array} \right), i, u \in \mathbb{Z}$$



Démonstration On cherche les modules rigides de la forme $M_1 \oplus M_2 \oplus M_5$ où pour tout $i \in \{1, 2, 5\}$ le module indécomposable M_i est de type (i) . D'après le cas **(2+5)** (Lemme 4.2.7), il existe $i, u \in \mathbb{Z}$ tels que

$$M_2 = \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \right) \text{ et } M_5 = \Omega^{i+3u} \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \right);$$

d'après le cas **(1+5)** (Lemme 4.2.5), si $M_5 = \Omega^{i+3u} \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \right)$, alors $M_1 = \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right)$ ou $\Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \right)$;
d'après le cas **(1+2)** (Lemme 4.2.2), les modules M_1 et M_2 ainsi obtenus sont compatibles, i.e.

$$\text{Ext}_A^1(M_1 \oplus M_2, M_1 \oplus M_2) = 0.$$

On obtient donc les possibilités dans l'énoncé.

Calculons maintenant l'algèbre $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_2 \oplus M_5)$.

Supposons d'abord que $M_1 = \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array}$, $M_2 = \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{array}$ et $M_5 = \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{array}$. Notons

$$\alpha : M_1 = \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \hookrightarrow M_2 = \begin{array}{c} \boxed{1} \quad \diagdown \quad \diagup \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{2} \quad \boxed{1} \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{array}$$

$$\beta : M_2 = \begin{array}{c} \boxed{1} \quad \diagdown \quad \diagup \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{2} \quad \boxed{1} \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \rightarrow M_5 = \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} = \begin{array}{c} \boxed{1} \quad \diagdown \quad \diagup \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{2} \quad \boxed{1} \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{array}$$

$$\gamma : M_5 = \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} = \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array} \begin{array}{c} \boxed{3} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{2} \quad \boxed{1} \end{array} \rightarrow M_2 = \begin{array}{c} \boxed{1} \quad \diagdown \quad \diagup \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{2} \quad \boxed{1} \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{array}$$

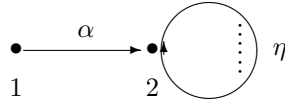
$$\epsilon : M_5 = \begin{array}{c} \boxed{1} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \rightarrow M_5 = \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \boxed{1} \end{array}$$

$$\delta : M_1 = \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \hookrightarrow M_5 = \begin{array}{c} \boxed{1} \quad \diagdown \quad \diagup \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{2} \quad \boxed{1} \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{array}$$

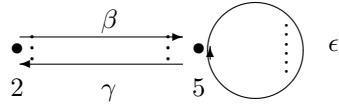
et

$$\eta : M_2 = \begin{array}{c} \boxed{1} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \rightarrow M_2 = \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \boxed{1} \end{array}$$

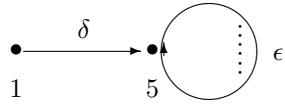
Le cas **(1+2)** (Lemme 4.2.2) montre que $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_2)$ est isomorphe à l'algèbre



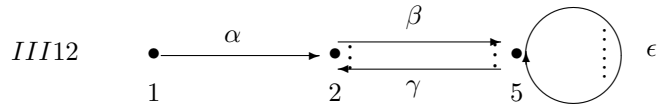
Le cas **(2+5)** (Lemme 4.2.7) montre que $\underline{\text{End}}_A(M_2 \oplus M_5)$ est isomorphe à l'algèbre



Le cas **(1+5)** (Lemme 4.2.5) montre que $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_5)$ est isomorphe à l'algèbre



On vérifie que $\delta = \alpha\beta$ (et que $\eta = \beta\epsilon\gamma$) et on obtient donc que $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_2 \oplus M_5)$ est isomorphe à l'algèbre



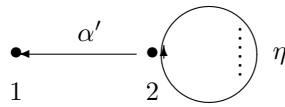
Supposons maintenant que $M_1 = \begin{smallmatrix} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{smallmatrix}$, $M_2 = \begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ \diagdown & \diagup \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}$ et $M_5 = \begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ \diagdown & \diagup \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}$. Notons

$$\alpha' : M_1 = \begin{smallmatrix} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{smallmatrix} \leftarrow M_2 = \begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ \diagdown & \diagup \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}$$

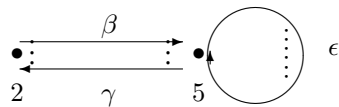
et

$$\delta' : M_1 = \begin{smallmatrix} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{smallmatrix} \leftarrow M_5 = \begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ \diagdown & \diagup \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}$$

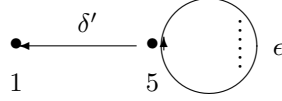
Le cas **(1+2)** (Lemme 4.2.2) montre que $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_2)$ est isomorphe à l'algèbre



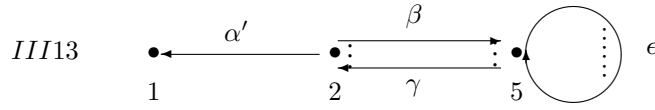
Le cas **(2+5)**(Lemme 4.2.7) montre que $\underline{\text{End}}_A(M_2 \oplus M_5)$ est isomorphe à l'algèbre



Le cas **(1+5)** (Lemme 4.2.5) montre que $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_5)$ est isomorphe à l'algèbre



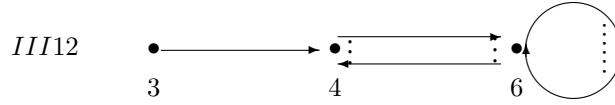
On vérifie que $\delta' = \gamma\alpha'$ (et que $\eta = \beta\epsilon\gamma$) et on obtient que $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_2 \oplus M_5)$ est isomorphe à l'algèbre



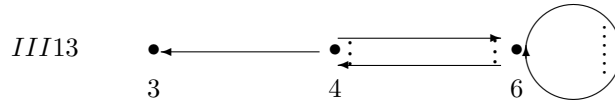
□

Lemme 4.3.4 (3+4+6)

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ / \\ 2 \end{array} \sim \right) \oplus \Omega^{i+3u} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ / \\ 2 \end{array} \right), i, u \in \mathbb{Z}$$



$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ / \\ 2 \end{array} \sim \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ / \\ 2 \end{array} \sim \right) \oplus \Omega^{i+3u} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ / \\ 2 \end{array} \right), i, u \in \mathbb{Z}$$



Démonstration La preuve est similaire à celle du cas **(1+2+5)** (Lemme 4.3.3).

□

Lemme 4.3.5 (1+2+7)

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ / \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M), i \in \mathbb{Z}, M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag}(S_1)$$



$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ / \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag}(S_1)$$



Démonstration On cherche les modules rigides de la forme $M_1 \oplus M_2 \oplus M_7$ où pour tout $i \in \{1, 2, 7\}$ le module indécomposable M_i est de type (i) . D'après le cas **(2+7)** (Lemme 4.2.16), il existe $i \in \mathbb{Z}$ tel que

$$M_2 = \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ / \\ 1 \end{array} \right) \quad \text{et} \quad \Omega^{-i} M_7 \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag}(S_1);$$

d'après le cas **(1+7)** (Lemme 4.2.12), si $\Omega^{-i} M_7 \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag}(S_1)$, $M_1 = \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right)$ ou $\Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right)$;
d'après le cas **(1+2)** (Lemme 4.2.2), les modules M_1 et M_2 ainsi obtenus sont compatibles, i.e.

$$\text{Ext}_A^1(M_1 \oplus M_2, M_1 \oplus M_2) = 0.$$

On obtient donc les possibilités dans l'énoncé.

Calculons maintenant l'algèbre $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_2 \oplus M_7)$.

Supposons d'abord que $M_1 = \begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array}$, $M_2 = \begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ / \\ 1 \end{array}$ et $M_7 \in \text{diag}(S_1)$. Notons

$$\alpha : M_1 = \begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \hookrightarrow M_2 = \begin{array}{c} \boxed{1} \\ \backslash \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ / \\ 1 \end{array}$$

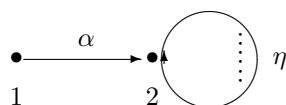
et

$$\eta : M_2 = \begin{array}{c} \boxed{1} \\ \backslash \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ / \\ 1 \end{array} \rightarrow M_2 = \begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ / \\ \boxed{1} \end{array}$$

(1) $M_7 = S_1$. Notons

$$\beta : M_2 = \begin{array}{c} \boxed{1} \\ \backslash \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ / \\ 1 \end{array} \twoheadrightarrow M_7 = S_1, \quad \gamma : M_7 = S_1 \hookrightarrow M_2 = \begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ / \\ \boxed{1} \end{array}, \quad \delta : M_1 = \begin{array}{c} \boxed{1} \\ \backslash \\ 2 \end{array} \twoheadrightarrow M_7 = S_1$$

Le cas **(1+2)** (Lemme 4.2.2) montre que $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_2)$ est isomorphe à l'algèbre


$$\bullet \xrightarrow{\delta} \bullet$$

1 7

III4

Diagram III4 shows a directed graph with three nodes labeled 1, 2, and 7. Node 1 is on the left, node 2 is in the middle, and node 7 is on the right. There is a directed edge from 1 to 2 labeled α . There is a directed edge from 2 to 7 labeled β . There is a directed edge from 7 to 2 labeled γ .

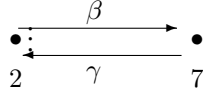
$$\beta : M_2 = \begin{array}{c} \boxed{1} \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \rightarrow M_7 = S_1[n] = \left(\begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \boxed{1} \end{array} \begin{array}{c} \sim \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right) [n-1]$$

$$\gamma : M_7 = \left(\begin{array}{c} 3 \\ 1 \nearrow \quad \nwarrow 2 \\ \sim \end{array} \right) [n-1] = \left(\begin{array}{ccc} \boxed{} & \overline{3} & \boxed{} \\ \boxed{1} & \diagdown & \boxed{2} \\ - & - & \underline{\underline{2}} \end{array} \right) [n-1] \rightarrow M_2 = {}^1 \searrow \begin{array}{c} \boxed{} \overline{3} \boxed{} \\ \boxed{2} \nearrow \quad \nwarrow \boxed{1} \\ - \quad - \quad - \end{array}$$

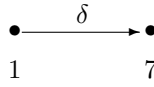
$$\delta : M_1 = \begin{array}{c} \boxed{1} \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \hookrightarrow M_7 = S_1[n] = \left(\begin{array}{c} 3 \\ \boxed{1} \diagdown 2 \end{array} \right) [n-1]$$

A diagram illustrating the mapping α from a point 1 to a point 2, which is part of a set η . The mapping is represented by an arrow labeled α pointing from point 1 to point 2. Point 2 is located on the boundary of a circle representing the set η .

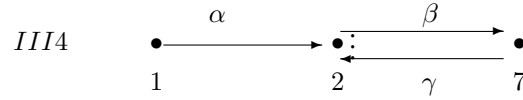
Le cas **(2+7)** (Lemme 4.2.16) montre que $\underline{\text{End}}_A(M_2 \oplus M_7)$ est isomorphe à l'algèbre



Le cas **(1+7)** (Lemme 4.2.12) montre que $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_7)$ est isomorphe à l'algèbre



On vérifie que $\delta = \alpha\beta$ (et que $\eta = \beta\gamma$) et on obtient que $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_2 \oplus M_7)$ est isomorphe à l'algèbre



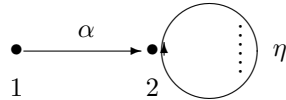
(3) Pour $n \geq 1$, $M_7 = S_1[-n] = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \sim \begin{smallmatrix} 3 \\ / \end{smallmatrix} \right) [-n+1]$. Notons

$$\beta : M_2 = \left(\begin{smallmatrix} \boxed{1} \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \sim \begin{smallmatrix} \boxed{3} \\ / \end{smallmatrix} \right) \rightarrow M_7 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \sim \begin{smallmatrix} 3 \\ / \end{smallmatrix} \right) [n-1] = \left(\begin{smallmatrix} \boxed{1} \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \sim \begin{smallmatrix} \boxed{3} \\ / \end{smallmatrix} \right) [n-1]$$

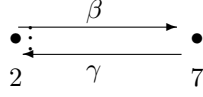
$$\gamma : M_7 = S_1[-n] = \left(\begin{smallmatrix} \boxed{1} \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \sim \begin{smallmatrix} 3 \\ / \end{smallmatrix} \right) [n-1] \rightarrow M_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \sim \begin{smallmatrix} \boxed{3} \\ / \end{smallmatrix} \right)$$

$$\delta : M_1 = \begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \hookrightarrow M_7 = S_1[-n] = \left(\begin{smallmatrix} \boxed{1} \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \sim \begin{smallmatrix} 3 \\ / \end{smallmatrix} \right) [n-1]$$

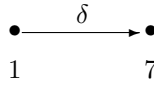
Le cas **(1+2)** (Lemme 4.2.2) montre que $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_2)$ est isomorphe à l'algèbre



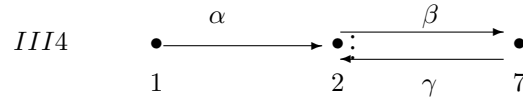
Le cas **(2+7)** (Lemme 4.2.16) montre que $\underline{\text{End}}_A(M_2 \oplus M_7)$ est isomorphe à l'algèbre



Le cas **(1+7)** (Lemme 4.2.12) montre que $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_7)$ est isomorphe à l'algèbre



On vérifie que $\delta = \alpha\beta$ (et quq $\eta = \beta\gamma$) et on obtient que $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_2 \oplus M_7)$ est isomorphe à l'algèbre



Supposons maintenant que $M_1 = \begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix}$, $M_2 = \begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ & \backslash & / \\ & 2 & \\ & / & \backslash \\ & 1 & \end{smallmatrix}$ et $M_7 \in \text{diag}(S_1)$. Notons

$$\alpha' : M_1 = \begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \leftarrow M_2 = \begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ & \backslash & / \\ & 2 & \\ & / & \backslash \\ & 1 & \end{smallmatrix}$$

Dans ci-dessus, on a défini les morphismes η, β et γ où

$$\beta : M_2 = \begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ & \backslash & / \\ & 2 & \\ & / & \backslash \\ & 1 & \end{smallmatrix} \rightarrow M_7$$

$$\gamma : M_7 \rightarrow M_2 = \begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ & \backslash & / \\ & 2 & \\ & / & \backslash \\ & 1 & \end{smallmatrix}$$

On définit en plus

(1) Si $M_7 = S_1$,

$$\delta' : M_1 = \begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \leftrightarrow M_7 = S_1$$

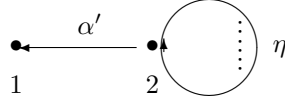
(2) Si $M_7 = S_1[n] = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ / \backslash \\ 1 \quad 2 \end{smallmatrix} \right) [n-1]$ avec $n \geq 1$,

$$\delta' : M_1 = \begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \leftarrow M_7 = S_1[n] = \left(\begin{smallmatrix} \lceil 3 \\ / \backslash \\ \lfloor 1 \quad 2 \end{smallmatrix} \right) [n-1]$$

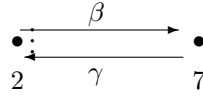
(3) Si $M_7 = S_1[-n] = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \sim \begin{smallmatrix} 3 \\ / \end{smallmatrix} \right) [-n+1]$ avec $n \geq 1$,

$$\delta' : M_1 = \begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ \boxed{1} \end{smallmatrix} \leftarrow M_7 = \left(\begin{smallmatrix} \boxed{1} \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \sim \begin{smallmatrix} 3 \\ / \end{smallmatrix} \right) [-n+1]$$

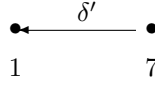
Le cas **(1+2)** (Lemme 4.2.2) montre que $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_2)$ est isomorphe à l'algèbre



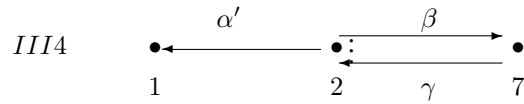
Le cas **(2+7)** (Lemme 4.2.16) montre que $\underline{\text{End}}_A(M_2 \oplus M_7)$ est isomorphe à l'algèbre



Le cas **(1+7)** (Lemme 4.2.12) montre que $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_7)$ est isomorphe à l'algèbre



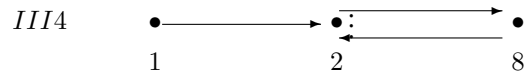
On vérifie que $\delta' = \gamma\alpha'$ et on obtient que $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_2 \oplus M_7)$ est isomorphe à l'algèbre



□

Lemme 4.3.6 (1+2+8)

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \\ / \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag} \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ / \\ 1 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \end{smallmatrix} \right)$$



$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ / \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag} \left(\begin{array}{c} 3 \\ / \backslash \\ 1 \quad 2 \end{array} \right)$$

$$III5 \quad \begin{array}{ccc} \bullet & \xleftarrow{\quad} & \bullet \xrightarrow{\quad} \bullet \\ 1 & 2 & 8 \end{array}$$

Démonstration La preuve est similaire à celle du cas **(1+2+7)** (Lemme 4.3.5). □

Lemme 4.3.7 (3+4+7)

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ / \\ \sim \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag} \left(\begin{array}{c} 3 \\ / \backslash \\ 1 \quad 2 \end{array} \right)$$

$$III4 \quad \begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \xrightarrow{\quad} \bullet \\ 3 & 4 & 7 \end{array}$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ / \\ \sim \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag} \left(\begin{array}{c} 3 \\ / \backslash \\ 1 \quad 2 \end{array} \right)$$

$$III5 \quad \begin{array}{ccc} \bullet & \xleftarrow{\quad} & \bullet \xrightarrow{\quad} \bullet \\ 3 & 4 & 7 \end{array}$$

Démonstration La preuve est similaire à celle du cas **(1+2+7)** (Lemme 4.3.5). □

Lemme 4.3.8 (3+4+8)

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ / \\ \sim \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag}(S_2)$$

$$III4 \quad \begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \xrightarrow{\quad} \bullet \\ 3 & 4 & 8 \end{array}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 3 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag}(S_2)$$

$$III5 \quad \begin{array}{ccccc} \bullet & \xleftarrow{\quad} & \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ 3 & & 4 & & 8 \end{array}$$

Démonstration La preuve est similaire à celle du cas **(1+2+7)** (Lemme 4.3.5).

□

Lemme 4.3.9 (1+7+3)

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \{ [3m]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$

$$III3 \quad \begin{array}{ccccc} \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ 1 & & 7 & & 3 \end{array}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 3 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \{ [3m]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$

$$III2 \quad \begin{array}{ccccc} \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet & \xleftarrow{\quad} & \bullet \\ 1 & & 7 & & 3 \end{array}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 3 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \{ [3m]S_1[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$

$$III3 \quad \begin{array}{ccccc} \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ 1 & & 7 & & 3 \end{array}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \{ [3m]S_1[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$

$$III2 \quad \begin{array}{ccccc} \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet & \xleftarrow{\quad} & \bullet \\ 1 & & 7 & & 3 \end{array}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \setminus \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \setminus \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \{ [3m]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$

$$III3 \quad \begin{array}{ccccc} \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ & & \nearrow \text{dotted} & & \\ & & 7 & & \\ 1 & & & & 3 \end{array}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \setminus \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \setminus \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \{ [3m]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$

$$III2 \quad \begin{array}{ccccc} \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet & \xleftarrow{\quad} & \bullet \\ 1 & & 7 & & 3 \end{array}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \setminus \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \setminus \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \{ [3m-1]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$

$$III1 \quad \begin{array}{ccccc} \bullet & \xleftarrow{\quad} & \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ 1 & & 7 & & 3 \end{array}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \setminus \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \setminus \\ 3 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \{ [3m-1]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$

$$III3 \quad \begin{array}{ccccc} \bullet & \xleftarrow{\quad} & \bullet & \xleftarrow{\quad} & \bullet \\ & & \nearrow \text{dotted} & & \\ & & 7 & & \\ 1 & & & & 3 \end{array}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \setminus \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \setminus \\ 3 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \{ [3m-1]S_1[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$

$$III1 \quad \begin{array}{ccccc} & \bullet & \longleftarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ & 1 & & 7 & & 3 \end{array}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \setminus \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \setminus \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \{ [3m-1]S_1[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$

$$III3 \quad \begin{array}{ccccc} & \bullet & \longleftarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ & 1 & & 7 & & 3 \end{array}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \setminus \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \setminus \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \{ [3m-1]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$

$$III1 \quad \begin{array}{ccccc} & \bullet & \longleftarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ & 1 & & 7 & & 3 \end{array}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \setminus \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \setminus \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \{ [3m-1]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$

$$III3 \quad \begin{array}{ccccc} & \bullet & \longleftarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ & 1 & & 7 & & 3 \end{array}$$

Démonstration Le cas **(1+7)**(Lemme 4.2.12) montre qu'il existe $i \in \mathbb{Z}$ tel que $M_1 = \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \setminus \\ 2 \end{smallmatrix} \right)$ et

$$\Omega^{-i}M_7 \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag}(S_1) = \{ [3m]S_1[n] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$

ou

$$\Omega^{-i}M_7 \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag} \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \sim \\ 3 \end{smallmatrix} \nearrow 1 \right) = \{ [3m-1]S_1[n] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}.$$

Comme une sdiag et une diag se coupent et M_1 et M_3 sont indépendants, le cas **(3+7)** (Lemme 4.2.14) implique que

(1) Si

$$\Omega^{-i}M_7 \in \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag}(S_1) \right) \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag}(S_1) \right) = \{ [3m]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$

$$\text{alors } \Omega^{-i}M_3 = \begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \text{ ou } \Omega^{-i}M_3 = \begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix}.$$

(2) Si

$$\Omega^{-i}M_7 \in \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag}(S_1) \right) \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \nearrow 3 \right) \right) = \{ [3m]S_1[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$

$$\text{alors } \Omega^{-i}M_3 = \begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \text{ ou } \Omega^{-i}M_3 = \begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \sim \\ 2 \end{smallmatrix}.$$

(3) Si

$$\Omega^{-i}M_7 \in \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag}(S_1) \right) \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \nearrow 3 \\ \backslash \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \right) = \{ [3m]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$

$$\text{alors } \Omega^{-i}M_3 = \begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \text{ ou } \Omega^{-i}M_3 = \begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix}.$$

(4) Si

$$\Omega^{-i}M_7 \in \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag} \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \sim \\ 3 \end{smallmatrix} \nearrow 1 \right) \right) \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag}(S_1) \right) = \{ [3m-1]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$

$$\text{alors } \Omega^{-i}M_3 = \begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \text{ ou } \Omega^{-i}M_3 = \begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix}.$$

(5) Si

$$\Omega^{-i}M_7 \in \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag} \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \sim \\ 3 \end{smallmatrix} \nearrow 1 \right) \right) \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \nearrow 3 \right) \right) = \{ [3m-1]S_1[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$

$$\text{alors } \Omega^{-i}M_3 = \begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \text{ ou } \Omega^{-i}M_3 = \begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \sim \\ 2 \end{smallmatrix}.$$

(6) Si

$$\Omega^{-i}M_7 \in \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag} \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ & \sim & \\ & 3 & \end{smallmatrix} \right) \right) \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag} \left(\begin{smallmatrix} & 3 & \\ 1 & & \sim \\ & & 2 \end{smallmatrix} \right) \right) = \{ [3m-1]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$

$$\text{alors } \Omega^{-i}M_3 = \begin{smallmatrix} 3 & \\ & \sim \\ & 2 \end{smallmatrix} \text{ ou } \Omega^{-i}M_3 = \begin{smallmatrix} 21 & \\ & \\ & 1 \end{smallmatrix}.$$

On en déduit les possibilités dans l'énoncé.

Calculons maintenant l'algèbre $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_7 \oplus M_3)$.

- (1) (i) Si $M_1 = \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & \\ & \sim \\ & 2 \end{smallmatrix} \right)$, $\Omega^{-i}M_7 \in \{ [3m]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$ et $M_3 = \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & \\ & \sim \\ & 1 \end{smallmatrix} \right)$, alors le cas **(1+7)**(Lemme 4.2.12) montre que est isomorphe à l'algèbre $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_7)$ est

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\alpha} & \bullet \\ 1 & & 7 \end{array}$$

(pour la définition du morphisme α , voir la preuve du cas **(1+7)**) et le cas **(3+7)** (Lemme 4.2.14) montre que $\underline{\text{End}}_A(M_7 \oplus M_3)$ est isomorphe à l'algèbre

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\beta} & \bullet \\ 7 & & 3 \end{array}$$

(pour la définition du morphisme β , voir la preuve du cas **(3+7)**). Comme M_1 et M_3 sont indépendents, $\alpha\beta = 0$ et on obtient donc que $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_7 \oplus M_3)$ est isomorphe à l'algèbre

$$\text{III3} \quad \begin{array}{ccccc} \bullet & \xrightarrow{\alpha} & \bullet & \xrightarrow{\beta} & \bullet \\ 1 & & 7 & & 3 \end{array}$$

- (ii) Si $M_1 = \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & \\ & \sim \\ & 2 \end{smallmatrix} \right)$, $\Omega^{-i}M_7 \in \{ [3m]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$ et $M_3 = \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & \\ & \sim \\ & 3 \end{smallmatrix} \right)$, alors le cas **(1+7)** (Lemme 4.2.12) montre que $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_7)$ est isomorphe à l'algèbre

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\alpha} & \bullet \\ 1 & & 7 \end{array}$$

(pour la définition du morphisme α , voir la preuve du cas **(1+7)** Lemme 4.2.12) et le cas **(3+7)** (Lemme 4.2.14) montre que $\underline{\text{End}}_A(M_7 \oplus M_3)$ est isomorphe à l'algèbre

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xleftarrow{\beta} & \bullet \\ 7 & & 3 \end{array}$$

(pour la définition du morphisme β , voir la preuve du cas **(3+7)**). On obtient donc que $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_7 \oplus M_3)$ est isomorphe à l'algèbre

$$III3 \quad \begin{array}{ccccc} \bullet & \xrightarrow{\alpha} & \bullet & \xleftarrow{\beta} & \bullet \\ 1 & & 7 & & 3 \end{array}$$

Les 10 autres cas se font similairement.

□

Lemme 4.3.10 (1+8+3)

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \setminus \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \setminus \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \{ [3m]S_2[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$

$$III3 \quad \begin{array}{ccccc} \bullet & \xleftarrow{\quad} & \bullet & \xleftarrow{\quad} & \bullet \\ 1 & & 8 & & 3 \end{array}$$

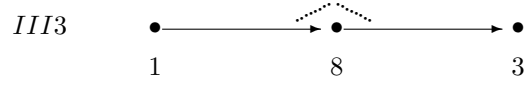
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \setminus \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \setminus \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \{ [3m]S_2[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$

$$III1 \quad \begin{array}{ccccc} \bullet & \xleftarrow{\quad} & \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ 1 & & 8 & & 3 \end{array}$$

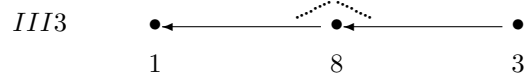
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \setminus \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \setminus \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \{ [3m+1]S_2[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$

$$III2 \quad \begin{array}{ccccc} \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet & \xleftarrow{\quad} & \bullet \\ 1 & & 8 & & 3 \end{array}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \{ [3m+1]S_2[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \{ [3m]S_2[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$



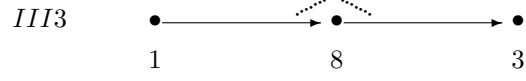
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \{ [3m]S_2[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$



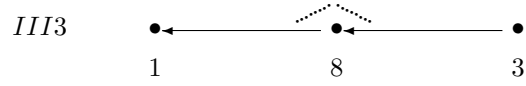
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \{ [3m+1]S_2[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \{ [3m+1]S_2[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \setminus \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \setminus \\ 3 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \{ [3m]S_2[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$



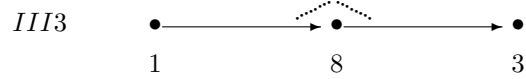
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \setminus \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \setminus \\ 3 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \{ [3m]S_2[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \setminus \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \setminus \\ 3 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \{ [3m+1]S_2[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \setminus \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \setminus \\ 3 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \{ [3m+1]S_2[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$

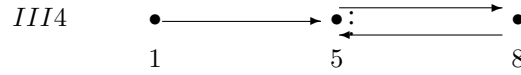


Démonstration La preuve est similaire à celle du cas **(1+7+3)** (Lemme 4.3.9).

□

Lemme 4.3.11 (1+5+8)

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \sim \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \quad 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \text{sdiag}(S_2)$$



$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \quad 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \text{sdiag}(S_2)$$



Démonstration On cherche les modules rigides de la forme $M_1 \oplus M_5 \oplus M_8$ où pour tout $i \in \{1, 5, 8\}$ le module indécomposable M_i est de type (i) . D'après le cas **(5+8)** (Lemme 4.2.21), il existe $i \in \mathbb{Z}$ tel que

$$M_5 = \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \quad 2 \end{array} \right) \quad \text{et} \quad \Omega^{-i} M_8 \in \text{sdiag}(S_2);$$

d'après le cas **(1+5)** (Lemme 4.2.5), si $M_5 = \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \quad 2 \end{array} \right)$, alors $M_1 = \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \right)$ ou $\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \sim \\ 3 \end{array} \right)$;

d'après le cas **(1+8)** (Lemme 4.2.13), M_1 et M_8 sont compatibles. On obtient donc les possibilités dans l'énoncé.

Calculons maintenant l'algèbre $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_5 \oplus M_8)$.

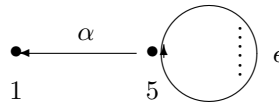
Supposons d'abord que $M_1 = \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array}$, $M_5 = \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \quad 2 \end{array}$ et $M_8 \in \text{sdiag}(S_2)$. Notons

$$\alpha : M_1 = \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \leftarrow M_5 = \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \quad 2 \end{array}$$

et

$$\epsilon : M_5 = \begin{array}{c} \boxed{1} \\ \diagdown \quad \sim \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \quad 1 \end{array} \rightarrow M_5 = \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \sim \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \end{array} \boxed{1}$$

Le cas **(1+5)** (Lemme 4.2.5) montre que $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_5)$ est isomorphe à l'algèbre



On distingue ensuite les cas suivant la position de M_8 .

(1) $M_8 = S_2$. Notons

$$\beta : M_5 = \begin{array}{c} \boxed{2} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \quad \quad \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad 2 \end{array} \twoheadrightarrow M_8 = S_2$$

$$\gamma : M_5 = \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \quad \quad \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \boxed{2} \end{array} \leftrightarrow M_8 = S_2$$

$$\delta : M_1 = \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \boxed{2} \end{array} \leftrightarrow M_8 = S_2$$

Le cas **(1+8)** (Lemme 4.2.13) montre que $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_8)$ est isomorphe à l'algèbre

$$\begin{array}{ccc} & \delta & \\ \bullet & \xleftarrow{\quad} & \bullet \\ 8 & & 1 \end{array}$$

Le cas **(5+8)** (Lemme 4.2.21) montre que $\underline{\text{End}}_A(M_5 \oplus M_8)$ est isomorphe à l'algèbre

$$\begin{array}{ccc} & \beta & \\ \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ \vdots & & \vdots \\ \bullet & \xleftarrow{\quad} & \bullet \\ 5 & & 8 \end{array}$$

On vérifie que $\delta = \gamma\alpha$ (et que $\epsilon = \beta\gamma$) et on obtient que $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_5 \oplus M_8)$ est isomorphe à l'algèbre

$$III5 \quad \begin{array}{ccccc} & \alpha & & \beta & \\ \bullet & \xleftarrow{\quad} & \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ & & \vdots & & \\ \bullet & \xleftarrow{\quad} & \bullet & \xleftarrow{\quad} & \bullet \\ 1 & & 5 & & 8 \end{array}$$

(2) Pour $n \geq 1$, $M_8 = S_2[n] = \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \quad 3 \end{array} \right) [n-1]$. Notons

$$\beta : M_5 = \begin{array}{c} \boxed{2} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \quad \quad \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad 2 \end{array} \twoheadrightarrow M_8 = S_2[n] = \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \boxed{2} \quad 3 \end{array} \right) [n-1]$$

Si $n = 1$,

$$\gamma : M_5 = \begin{array}{c} 2 \quad \boxed{1} \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{3} \quad \quad \quad \boxed{2} \end{array} \leftrightarrow M_8 = S_2[1] = \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \quad 3 \end{array}$$

et si $n \geq 2$,

$$\gamma : M_5 = \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \leftarrow M_8 = S_2[n] = \left(\begin{array}{c} \lceil \quad \quad \lceil \quad \quad \lceil \\ \lfloor 2 \quad \quad \lfloor 3 \quad \lfloor \quad \lfloor \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \end{array} \right) [n-2]$$

$$\delta : M_1 = \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \leftarrow M_8 = S_2[n] = \left(\begin{array}{c} \lceil \quad \lceil \\ \lfloor 2 \quad \lfloor \quad 3 \end{array} \right) [n-1]$$

Le cas **(1+8)**(Lemme 4.2.13) montre que $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_8)$ est isomorphe à l'algèbre

$$\begin{array}{ccc} & \delta & \\ \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ 8 & & 1 \end{array}$$

Le cas **(5+8)** (Lemme 4.2.21) montre que $\underline{\text{End}}_A(M_5 \oplus M_8)$ est isomorphe à l'algèbre

$$\begin{array}{ccc} & \beta & \\ \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ \vdots & & \vdots \\ 5 & \xleftarrow{\quad} & 8 \\ & \gamma & \end{array}$$

On vérifie que $\delta = \gamma\alpha$ (et $\epsilon = \beta\gamma$ qui est déjà montré dans la preuve du cas **(5+8)**). On obtient que $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_5 \oplus M_8)$ est isomorphe à l'algèbre

$$III4 \quad \begin{array}{ccc} & \alpha & \beta \\ \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \quad \xrightarrow{\quad} \bullet \\ 1 & & 5 \quad \gamma \quad 8 \end{array}$$

(3) Pour $n \geq 1$, $M_8 = S_2[-n] = \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \end{array} \right) [n-1]$. Notons si $n = 1$,

$$\beta : M_5 = \begin{array}{c} \lceil 2 \quad \quad \lceil 1 \\ \lfloor \quad \diagdown \quad \diagup \quad \lfloor \\ \quad \quad \quad 3 \quad \quad \quad 2 \end{array} \rightarrow M_8 = S_2[-1] = \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \end{array}$$

et si $n \geq 2$,

$$\beta : M_5 = \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \hookrightarrow M_8 = S_2[-n] = \left(\begin{array}{c} \lceil 2 \quad \quad \lceil 1 \quad \quad \lceil 3 \\ \lfloor \quad \diagdown \quad \diagup \quad \lfloor \quad \lfloor \quad \diagup \quad \sim \\ \quad \quad \quad 3 \quad \quad \quad 2 \end{array} \right) [n-2]$$

$$\gamma : M_5 = \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \sim \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \boxed{2} \end{array} \leftarrow M_8 = S_2[-n] = \left(\begin{array}{c} \lceil \boxed{2} \\ \lfloor \quad \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad 3 \quad 1 \end{array} \right) [n-1]$$

$$\delta : M_1 = \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ \boxed{2} \end{array} \leftarrow M_8 = S_2[-n] = \left(\begin{array}{c} \boxed{2} \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \nearrow 1 \right) [n-1]$$

Le cas **(1+8)**(Lemme 4.2.13) montre que $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_8)$ est isomorphe à l'algèbre

$$III1 \quad \begin{array}{ccc} & \delta & \\ \bullet & \xleftarrow{\quad} & \bullet \\ 8 & & 1 \end{array}$$

Le cas **(5+8)**(Lemme 4.2.21) montre que $\underline{\text{End}}_A(M_5 \oplus M_8)$ est isomorphe à l'algèbre

$$II2 \quad \begin{array}{ccc} & \beta & \\ \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ \vdots & & \\ 5 & \xleftarrow{\quad \gamma & 8 \end{array}$$

On vérifie que $\delta = \gamma\alpha$ et on obtient que $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_5 \oplus M_8)$ est isomorphe à l'algèbre

$$III5 \quad \begin{array}{ccc} & \alpha & \beta \\ \bullet & \xleftarrow{\quad} & \bullet \xrightarrow{\quad} \bullet \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & & 5 \xleftarrow{\quad \gamma & 8 \end{array}$$

Supposons maintenant que $M_1 = \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \sim \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array}$, $M_5 = \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \nearrow 1 \diagdown 2$ et $M_8 \in \text{sdiag}(S_2)$. Alors similairement, on montre que l'algèbre $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_5 \oplus M_8)$ est isomorphe à l'algèbre

$$III4 \quad \begin{array}{ccc} & & \\ \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \xrightarrow{\quad} \bullet \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & & 5 \xleftarrow{\quad \gamma & 8 \end{array}$$

□

Lemme 4.3.12 (3+6+8)

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \nearrow 3 \diagdown 2 \right) \oplus \Omega^i(M), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \text{diag}(S_2)$$

$$III4 \quad \begin{array}{ccc} & & \\ \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \xrightarrow{\quad} \bullet \\ \vdots & & \vdots \\ 3 & & 6 \xleftarrow{\quad \gamma & 8 \end{array}$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \sim \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \backslash \quad / \\ 1 \quad 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \text{diag}(S_2)$$

$$III5 \quad \begin{array}{ccc} \bullet & \xleftarrow{\quad} \bullet & \xrightarrow{\quad} \bullet \\ 3 & 6 & 8 \end{array}$$

Démonstration La preuve est similaire à celle du cas **(1+5+8)** (Lemme 4.3.11).

□

Lemme 4.3.13 (2+5+8)

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \sim \quad \backslash \\ 3 \quad 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \backslash \quad / \\ 3 \quad 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \text{sdiag}(S_2)$$

$$III10 \quad \begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\quad} \bullet & \xrightarrow{\quad} \bullet \\ 2 & 5 & 8 \end{array}$$

Démonstration Le cas **(5+8)**(Lemme 4.2.21) montre qu'il existe $i \in \mathbb{Z}$ tel que

$$M_5 = \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \backslash \quad / \\ 3 \quad 2 \end{array} \right) \quad \text{et} \quad \Omega^{-i} M_8 \in \text{sdiag}(S_2),$$

le cas **(2+5)** (Lemme 4.2.7) montre que si $M_5 = \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \backslash \quad / \\ 3 \quad 2 \end{array} \right)$, alors $M_2 = \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \sim \quad \backslash \\ 3 \quad 2 \end{array} \right)$; le cas **(2+8)** (Lemme 4.2.17) montre que M_2 et M_8 sont compatibles. On en déduit les possibilités de l'énoncé.

Calculons maintenant l'algèbre $\text{End}_A(M_2 \oplus M_5 \oplus M_8)$. On peut supposer que $M_2 = \begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \sim \quad \backslash \\ 3 \quad 2 \end{array}$, $M_5 = \begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \backslash \quad / \\ 3 \quad 2 \end{array}$ et $M_8 \in \text{sdiag}(S_2)$. Notons

$$\begin{aligned} \alpha : M_2 &= \begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \sim \quad \backslash \\ 3 \quad 2 \end{array} = \begin{array}{c} \boxed{2} \quad \boxed{1} \\ \backslash \quad / \\ \boxed{3} \quad \boxed{2} \end{array} \rightarrow M_5 = \begin{array}{c} \boxed{2} \quad \boxed{1} \\ \backslash \quad / \\ \boxed{3} \quad \boxed{2} \end{array} \\ \beta : M_2 &= \begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \sim \quad \backslash \\ 3 \quad 2 \end{array} = \begin{array}{c} \boxed{2} \quad \boxed{1} \\ \backslash \quad / \\ \boxed{3} \quad \boxed{2} \end{array} \leftrightarrow M_5 = \begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \backslash \quad / \\ 3 \quad 2 \end{array} \end{aligned}$$

et

$$\eta : M_5 = \begin{array}{c} \boxed{2} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \rightarrow M_5 = \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \boxed{2} \end{array}$$

Le cas **(2+5)** (Lemme 4.2.7) montre que $\underline{\text{End}}_A(M_2 \oplus M_5)$ est isomorphe à l'algèbre

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\alpha} & \bullet \\ \vdots & & \vdots \\ 2 & \xleftarrow{\beta} & 5 \end{array} \quad \eta$$

(1) $M_8 = S_2$. Notons

$$\begin{aligned} \gamma : M_5 &= \begin{array}{c} \boxed{2} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \rightarrow M_8 = S_2, & \delta : M_5 &= \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \boxed{2} \end{array} \leftarrow M_8 = S_2 \\ \theta : M_2 &= \begin{array}{c} \boxed{2} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \rightsquigarrow M_8 = S_2, & \delta : M_2 &= \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \boxed{2} \end{array} \leftarrow M_8 = S_2 \end{aligned}$$

Le cas **(5+8)** (Lemme 4.2.21) montre que $\underline{\text{End}}_A(M_5 \oplus M_8)$ est isomorphe à l'algèbre

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\gamma} & \bullet \\ \vdots & & \vdots \\ 5 & \xleftarrow{\delta} & 8 \end{array}$$

Le cas **(2+8)** montre que $\underline{\text{End}}_A(M_2 \oplus M_8)$ est isomorphe à l'algèbre

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\theta} & \bullet \\ \vdots & & \vdots \\ 2 & \xleftarrow{\lambda} & 8 \end{array}$$

On vérifie que $\theta = \alpha\gamma$ et $\lambda = \delta\beta$ (et $\eta = \gamma\delta$ qui est déjà montrée dans la preuve du cas **(5+8)**). On obtient donc que $\underline{\text{End}}_A(M_2 \oplus M_5 \oplus M_8)$ est isomorphe à l'algèbre

$$\text{III10} \quad \begin{array}{ccccc} & \alpha & & \gamma & \\ \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 2 & \xleftarrow{\beta} & 5 & \xleftarrow{\delta} & 8 \end{array}$$

(2) Pour $n \geq 1$, $M_8 = S_2[n] = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \diagup \quad \diagdown 3 \end{array} \right) [n-1]$. Notons

$$\gamma : M_5 = \begin{array}{c} \boxed{2} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \quad \quad 2 \end{array} \rightarrow M_8 = \left(\begin{array}{c} 1 \\ \boxed{2} \diagup \quad \diagdown 3 \end{array} \right) [n-1]$$

Si $n = 1$,

$$\delta : M_5 = \begin{array}{c} 2 \quad \begin{array}{|c|} \hline \diagup \quad \diagdown \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \diagdown \quad \diagup \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \diagdown \quad \diagup \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \end{array} \leftrightarrow M_8 = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \diagup \quad \diagdown 3 \end{array}$$

et si $n \geq 2$,

$$\delta : M_5 = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \diagdown \quad \diagup \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \diagdown \quad \diagup \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \diagdown \quad \diagup \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \end{array} \leftarrow M_8 = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \diagup \quad \diagdown 3 \end{array} \right) [n-1] = \left(\begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline \diagdown \quad \diagup \\ \hline \end{array} \quad 1 \quad \begin{array}{|c|} \hline \diagdown \quad \diagup \\ \hline \end{array} \quad 2 \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \diagdown \quad \diagup \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \diagdown \quad \diagup \\ \hline \end{array} \quad 1 \end{array} \right) [n-2]$$

$$\theta : M_2 = \begin{array}{c} \boxed{2} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \quad \quad 2 \end{array} \rightarrow M_8 = \left(\begin{array}{c} 1 \\ \boxed{2} \diagup \quad \diagdown 3 \end{array} \right) [n-1]$$

Si $n = 1$,

$$\lambda : M_2 = \begin{array}{c} 2 \quad \begin{array}{|c|} \hline \diagup \quad \diagdown \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \diagdown \quad \diagup \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \diagdown \quad \diagup \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \end{array} \leftarrow M_8 = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \diagup \quad \diagdown 3 \end{array}$$

et si $n \geq 2$,

$$\lambda : M_2 = \begin{array}{c} 2 \quad \sim \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 2 \end{array} = \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \begin{array}{|c|} \hline 2 \quad \begin{array}{|c|} \hline \diagdown \quad \diagup \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \diagdown \quad \diagup \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \diagdown \quad \diagup \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \end{array} \leftarrow M_8 = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \diagup \quad \diagdown 3 \end{array} \right) [n-1] = \left(\begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline \diagdown \quad \diagup \\ \hline \end{array} \quad 1 \quad \begin{array}{|c|} \hline \diagdown \quad \diagup \\ \hline \end{array} \quad 2 \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \diagdown \quad \diagup \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \diagdown \quad \diagup \\ \hline \end{array} \quad 1 \end{array} \right) [n-2]$$

Le cas **(5+8)**(Lemme 4.2.21) montre que $\underline{\text{End}}_A(M_5 \oplus M_8)$ est isomorphe à l'algèbre

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\gamma} & \\ \bullet & \xrightarrow{\quad \quad} & \bullet \\ & \xleftarrow{\delta} & \\ 5 & & 8 \end{array}$$

Le cas **(2+8)** (Lemme 4.2.17) montre que $\underline{\text{End}}_A(M_2 \oplus M_8)$ est isomorphe à l'algèbre

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\theta} & \\ \bullet & \xrightarrow{\quad \quad} & \bullet \\ & \xleftarrow{\lambda} & \\ 2 & & 8 \end{array}$$

On vérifie que $\theta = \alpha\gamma$ et $\lambda = \delta\beta$ (et $\eta = \gamma\delta$ qui est déjà montrée dans la preuve du cas **(5+8)**). On obtient donc que $\underline{\text{End}}_A(M_2 \oplus M_5 \oplus M_8)$ est isomorphe à l'algèbre

(3) Pour $n \geq 1$, $M_8 = S_2[-n] = \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ & \searrow & \nearrow \\ & 3 & \end{smallmatrix} \right) [-n+1]$. Notons si $n = 1$,

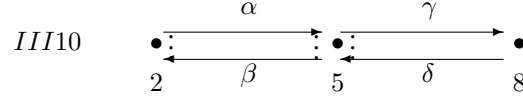
et si $n \geq 2$,

$$\delta : M_5 = \begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad \boxed{2} \end{array} \leftarrow M_8 = \left(\begin{array}{c} \boxed{2} \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \right) [-n+1]$$

$$\lambda : M_2 = \begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \quad \diagdown \quad \diagup \\ \quad 3 \quad \boxed{2} \end{array} \leftarrow M_8 = \left(\begin{array}{c} \boxed{2} \quad 1 \\ \quad \diagdown \quad \diagup \\ \quad 3 \end{array} \right) [-n+1]$$

Diagram II2 shows a directed graph with two nodes, 5 and 8. Node 5 is on the left and node 8 is on the right. There is a directed edge from 5 to 8 labeled with the Greek letter γ above it. There is also a directed edge from 8 to 5 labeled with the Greek letter δ below it.

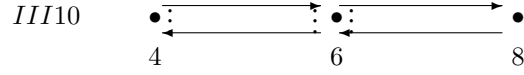
On vérifie que $\theta = \alpha\gamma$ et $\lambda = \delta\beta$ (et $\eta = \gamma\delta$ qui est déjà montrée dans la preuve du cas **(5+8)**). On obtient donc que $\text{End}_A(M_2 \oplus M_5 \oplus M_8)$ est isomorphe à l'algèbre



□

Lemme 4.3.14 (4+6+8)

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \sim \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \text{diag}(S_2)$$

**Démonstration** La preuve est similaire à celle du cas **(2+5+8)** (Lemme 4.3.13)

□

Lemme 4.3.15 (1+7+8)

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag}(S_1), \quad N = \Omega([-1]M[2])$$



$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag}(S_1), \quad N = \Omega([2]M[-1])$$



$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 1 \end{array} \right), \quad N = \Omega([-1]M[2])$$



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag} \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \searrow \sim \\ 3 \end{smallmatrix} \nearrow 1 \right), \quad N = \Omega([2]M[-1])$$



Démonstration Le cas **(1+7)**(Lemme 4.2.12) montre qu'il existe $i \in \mathbb{Z}$ tel que

$$M_1 = \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \quad \text{et} \quad \Omega^{-i} M_7 \in \bigcup_{6n \in \mathbb{Z}} \Omega^n \text{sdiag} (S_1)$$

ou

$$M_1 = \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \quad \text{et} \quad \Omega^{-i} M_7 \in \bigcup_{6n \in \mathbb{Z}} \Omega^n \text{sdiag} \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \searrow \sim \\ 3 \end{smallmatrix} \nearrow 1 \right);$$

le cas **(7+8)** (Lemme 4.2.27) montre qu'étant fixé M_7 , $M_8 = \Omega([-1]M_7[2])$ ou $M_8 = \Omega([2]M_7[-1])$; le cas **(1+8)**(Lemme 4.2.13) montre que les modules M_1 et M_8 ainsi obtenus sont compatibles.

Calculons maintenant $\text{End}_A(M_1 \oplus M_7 \oplus M_8)$. On distingue des cas.

- (1) $M_1 = \begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix}$, $M_7 \in \bigcup_{6n \in \mathbb{Z}} \Omega^n \text{sdiag} (S_1)$ $M_8 = \Omega([-1]M_7[2])$. On peut supposer que $M_1 = \begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix}$, $M_7 \in \text{sdiag} (S_1)$ et $M_8 = \Omega([-1]M_7[2])$.

- (i) $M_7 = S_1$ et donc $M_8 = \begin{smallmatrix} & 2 \\ & \searrow \\ 1 & \nearrow 3 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix}$. Notons

$$\alpha : M_1 = \begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \hookrightarrow M_8 = \begin{smallmatrix} & 2 \\ & \searrow \\ 1 & \nearrow 3 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \quad \delta : M_1 = \begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \twoheadrightarrow M_7 = S_1$$

$$\beta : M_8 = \begin{smallmatrix} & 2 \\ & \searrow \\ 1 & \nearrow 3 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \twoheadrightarrow M_7 = S_1, \quad \gamma : M_8 = \begin{smallmatrix} & 2 \\ & \searrow \\ 1 & \nearrow 3 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \hookrightarrow M_7 = S_1$$

Le cas **(1+7)** (Lemme 4.2.12) montre que $\text{End}_A(M_1 \oplus M_7)$ est isomorphe à l'algèbre

$$\begin{array}{ccc} & \delta & \\ \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ 1 & & 7 \end{array}$$

Le cas **(1+8)** (Lemme 4.2.13) montre que $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_8)$ est isomorphe à l'algèbre

$$\begin{array}{ccc} & \alpha & \\ \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ 1 & & 8 \end{array}$$

Le cas **(7+8)** (Lemme 4.2.27) montre que $\underline{\text{End}}_A(M_7 \oplus M_8)$ est isomorphe à l'algèbre

$$\begin{array}{ccc} & \beta & \\ \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ 8 & \xleftarrow{\quad} & 7 \\ & \gamma & \end{array}$$

On vérifie que $\delta = \alpha\beta$ et on obtient donc que $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_7 \oplus M_8)$ est

$$III8 \quad \begin{array}{ccc} & \alpha & \beta \\ \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ 1 & & 8 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & \beta & \\ \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ 8 & \xleftarrow{\quad} & 7 \\ & \gamma & \end{array}$$

$$(ii) \text{ Pour } n \geq 1, M_7 = S_1[n] = \left(\begin{array}{c} 3 \\ 1 \nearrow 2 \end{array} \right) [n-1] \text{ et } M_8 = \left(\begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ 1 \searrow 2 \end{array} \right) [n-1].$$

Notons

$$\alpha : M_1 = \begin{array}{c} 1 \\ \searrow 2 \end{array} \hookrightarrow M_8 = \left(\begin{array}{c} \boxed{1} \quad 2 \quad 3 \\ \swarrow \quad \searrow \quad \nearrow \\ \boxed{1} \quad 2 \end{array} \right) [n-1]$$

$$\delta : M_1 = \begin{array}{c} \boxed{1} \\ \searrow 2 \end{array} \rightarrow M_7 = \left(\begin{array}{c} 3 \\ \boxed{1} \nearrow 2 \end{array} \right) [n-1]$$

$$\beta : M_8 = \left(\begin{array}{c} \boxed{1} \quad 2 \quad 3 \\ \swarrow \quad \searrow \quad \nearrow \\ \boxed{1} \quad 2 \end{array} \right) [n-1] \rightarrow M_7 = \left(\begin{array}{c} 3 \\ \boxed{1} \nearrow 2 \end{array} \right) [n-1]$$

$$\gamma : M_8 = \left(\begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ 1 \searrow 2 \end{array} \right) [n-1] = \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ 1 \searrow 2 \end{array} \left(\begin{array}{c} \boxed{1} \quad 2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \boxed{1} \quad 2 \end{array} \right) \hookrightarrow M_7 = \left(\begin{array}{c} 3 \\ 1 \nearrow 2 \end{array} \right) [n-1]$$

Le cas **(1+7)** (Lemme 4.2.12) montre que $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_7)$ est isomorphe à l'algèbre

$$\begin{array}{ccc} & \delta & \\ \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ 1 & & 7 \end{array}$$

Le cas **(1+8)** (Lemme 4.2.13) montre que $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_8)$ est isomorphe à l'algèbre

$$\begin{array}{ccc} & \alpha & \\ \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ 1 & & 8 \end{array}$$

Le cas **(7+8)** (Lemme 4.2.27) montre que $\underline{\text{End}}_A(M_7 \oplus M_8)$ est isomorphe à l'algèbre

$$\begin{array}{ccc} & \beta & \\ \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ \vdots & & \vdots \\ 8 & \xrightarrow{\quad \gamma \quad} & 7 \end{array}$$

On vérifie que $\delta = \alpha\beta$ et on obtient donc que $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_7 \oplus M_8)$ est isomorphe à l'algèbre

$$III8 \quad \begin{array}{ccc} & \alpha & \beta \\ \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \xrightarrow{\quad} \bullet \\ 1 & & 8 \quad \gamma \quad 7 \end{array}$$

(iii) Pour $n \geq 1$,

$$M_7 = S_1[-n] = \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \sim \begin{array}{c} 3 \\ / \end{array} \right) [-n+1] \text{ et } M_8 = \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 3 \end{array} \right) [-n+1].$$

$$\delta : M_1 = \begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \hookrightarrow M_7 = S_1[-n] = \left(\begin{array}{c} \overline{1} \\ \backslash \\ \overline{2} \end{array} \sim \begin{array}{c} \overline{3} \\ / \end{array} \right) [-n+1]$$

$$\alpha : M_1 = \begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \hookrightarrow M_8 = \left(\begin{array}{c} \overline{1} \\ \backslash \\ \overline{2} \end{array} \nearrow \begin{array}{c} \overline{3} \end{array} \right) [-n+1]$$

si $n = 1$,

$$\beta : M_8 = \begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 3 \end{array} \hookrightarrow M_7 = \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \sim \begin{array}{c} 3 \\ / \end{array} \right) [-n+1] = \left(\begin{array}{c} \overline{1} \\ \backslash \\ \overline{2} \end{array} \nearrow \begin{array}{c} \overline{3} \end{array} \right) [-n+1]$$

et si $n \geq 2$,

$$\beta : M_8 = \left(\begin{array}{c} \overline{1} \\ \backslash \\ \overline{2} \end{array} \nearrow \begin{array}{c} \overline{3} \end{array} \right) [-n+1] \rightarrow M_7 = \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \sim \begin{array}{c} 3 \\ / \end{array} \right) [-n+1] = \left(\begin{array}{c} \overline{1} \\ \backslash \\ \overline{2} \end{array} \nearrow \begin{array}{c} \overline{3} \end{array} \right) [-n+1]$$

$$\gamma : M_8 = \left(\begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \end{array} \right) [-n+1] = \left(\begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \boxed{3} \\ \searrow \\ \boxed{2} \end{array} \begin{array}{c} \cdots \end{array} \right) [-n+1] \leftarrow M_7 = \left(\begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \boxed{2} \\ \searrow \\ \boxed{3} \end{array} \begin{array}{c} \cdots \end{array} \right) [-n+1]$$

Le cas **(1+7)** (Lemme 4.2.12) montre que $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_7)$ est isomorphe à l'algèbre

$$\begin{array}{ccc} & \delta & \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ 1 & & 7 \end{array}$$

Le cas **(1+8)** (Lemme 4.2.13) montre que $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_8)$ est isomorphe à l'algèbre

$$\begin{array}{ccc} & \alpha & \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ 1 & & 8 \end{array}$$

Le cas **(7+8)** (Lemme 4.2.27) montre que $\underline{\text{End}}_A(M_7 \oplus M_8)$ est isomorphe à l'algèbre

$$\begin{array}{ccc} & \beta & \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ \vdots & & \vdots \\ \bullet & \xleftarrow{\gamma} & \bullet \\ 8 & & 7 \end{array}$$

On vérifie que $\delta = \alpha\beta$ et on obtient donc que $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_7 \oplus M_8)$ est isomorphe à l'algèbre

$$III8 \quad \begin{array}{ccc} & \alpha & \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ 1 & & 8 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & \beta & \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ \vdots & & \vdots \\ \bullet & \xleftarrow{\gamma} & \bullet \\ 8 & & 7 \end{array}$$

(2) $M_1 = \begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array}$, $M_7 \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag}(S_1)$ $M_8 = \Omega([2]M_7[-1])$. On peut supposer que $M_7 \in \text{sdiag}(S_1)$

(i) Pour $n \geq 1$, $M_7 = S_1$ et $M_8 = \begin{array}{c} 3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \quad 2 \\ \quad \searrow \quad \swarrow \\ \quad \quad 3 \quad 1 \end{array}$.

$$\alpha' : M_1 = \boxed{1} \begin{array}{c} \searrow \\ 2 \end{array} \rightarrow M_8 = \boxed{1} \begin{array}{c} 3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 2 \quad 1 \\ \quad \searrow \quad \swarrow \\ \quad \quad 3 \quad 1 \end{array}$$

$$\gamma' : M_7 = S_1 \hookrightarrow M_8 = \left(\boxed{1} \begin{array}{c} 3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 2 \quad 1 \\ \quad \searrow \quad \swarrow \\ \quad \quad 3 \quad 2 \end{array} \begin{array}{c} \sim \\ 3 \end{array} \right) [-n+1]$$

$$\beta' : M_7 = S_1 \leftarrow M_8 = \begin{array}{c} 3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \quad 2 \\ \quad \searrow \\ \quad 3 \end{array} \boxed{1}$$

Le cas **(1+7)** (Lemme 4.2.12) montre que $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_7)$ est isomorphe à l'algèbre

$$\begin{array}{ccc} & \delta & \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ 1 & & 7 \end{array}$$

Le cas **(1+8)** (Lemme 4.2.13) montre que $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_8)$ est isomorphe à l'algèbre

$$\begin{array}{ccc} & \alpha' & \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ 1 & & 8 \end{array}$$

Le cas **(7+8)** (Lemme 4.2.27) montre que $\underline{\text{End}}_A(M_7 \oplus M_8)$ est isomorphe à l'algèbre

$$\begin{array}{ccc} & \gamma' & \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ \vdots & & \vdots \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ 7 & \xrightarrow{\beta'} & 8 \end{array}$$

On vérifie que $\alpha' = \delta\gamma'$ et on obtient donc que $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_7 \oplus M_8)$ est isomorphe à l'algèbre

$$III8 \quad \begin{array}{ccc} & \delta & \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ 1 & & 7 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & \gamma' & \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ \vdots & & \vdots \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ 7 & \xrightarrow{\beta'} & 8 \end{array}$$

(ii) Pour $n \geq 1$, $M_7 = S_1[n] = \left(\begin{array}{c} 3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \quad 2 \end{array} \right) [n-1]$ et $M_8 = \left(\begin{array}{c} 3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \quad 2 \end{array} \right) [n-1]$.

$$\alpha' : M_1 = \boxed{1} \searrow 2 \rightarrow M_8 = \left(\begin{array}{c} 3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \boxed{1} \quad 2 \end{array} \right) [n-1]$$

si $n = 1$,

$$\gamma' : M_7 = \begin{array}{c} 3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \quad 2 \end{array} \sim \begin{array}{c} \boxed{1} \quad \boxed{3} \quad \boxed{2} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \boxed{1} \quad \boxed{2} \end{array} \xrightarrow{\quad} M_8 = \begin{array}{c} 3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \quad 2 \end{array}$$

et si $n \geq 2$,

$$\gamma' : M_7 = \left(\begin{array}{c} 3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \quad 2 \end{array} \right) [n-1] = \left(\begin{array}{c} \boxed{1} \quad \boxed{3} \quad \boxed{2} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \boxed{1} \quad \boxed{2} \end{array} \right) [n-1] \rightarrow M_8 = \left(\begin{array}{c} \boxed{1} \quad \boxed{3} \quad \boxed{2} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \boxed{1} \quad \boxed{2} \end{array} \right) [n-2]$$

$$\beta' : M_7 = \left(\begin{array}{c} 1 \nearrow 3 \searrow \sim 2 \end{array} \right) [n-1] = \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \boxed{3} \quad \boxed{\cdot} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \leftarrow M_8 = \left(\begin{array}{c} 1 \nearrow 3 \searrow 2 \end{array} \right) [n-1] = \begin{array}{c} \boxed{3} \quad \boxed{\cdot} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array}$$

Le cas **(1+7)** (Lemme 4.2.12) montre que $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_7)$ est isomorphe à l'algèbre

$$\begin{array}{ccc} & \alpha & \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ 1 & & 7 \end{array}$$

où le morphisme δ est défini dans (1). Le cas **(1+8)** montre que $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_8)$ est isomorphe à l'algèbre

$$\begin{array}{ccc} & \alpha' & \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ 1 & & 8 \end{array}$$

Le cas **(7+8)** (Lemme 4.2.27) montre que $\underline{\text{End}}_A(M_7 \oplus M_8)$ est isomorphe à l'algèbre

$$\begin{array}{ccc} & \gamma' & \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ \vdots & & \vdots \\ \bullet & \longleftarrow & \bullet \\ 7 & & 8 \end{array}$$

On vérifie que $\alpha' = \delta\gamma'$ et on obtient donc que $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_7 \oplus M_8)$ est isomorphe à l'algèbre

$$III8 \quad \begin{array}{ccc} & \delta & \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ & & \vdots \\ & & \bullet \\ & & \vdots \\ & & \bullet \end{array} \begin{array}{ccc} & \gamma' & \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ \vdots & & \vdots \\ \bullet & \longleftarrow & \bullet \\ 7 & & 8 \end{array}$$

(iii) Pour $n \geq 1$, $M_7 = S_1[-n] = \left(\begin{array}{c} 1 \searrow \sim 2 \nearrow 3 \end{array} \right) [-n+1]$ et $M_8 = \left(\begin{array}{c} 1 \nearrow 3 \searrow 2 \searrow 3 \nearrow 1 \searrow \sim 2 \nearrow 3 \end{array} \right) [-n+1]$. Notons

$$\alpha' : M_1 = \boxed{1} \searrow 2 \rightarrow M_8 = \left(\begin{array}{c} \boxed{1} \nearrow 3 \searrow 2 \searrow 3 \nearrow 1 \searrow \sim 2 \nearrow 3 \end{array} \right) [-n+1]$$

$$\gamma' : M_7 = \left(\begin{array}{c} \boxed{1} \searrow \sim 2 \nearrow 3 \end{array} \right) [-n+1] \rightarrow M_8 = \left(\begin{array}{c} \boxed{1} \nearrow 3 \searrow 2 \searrow 3 \nearrow 1 \searrow \sim 2 \nearrow 3 \end{array} \right) [-n+1]$$

$$\beta' : M_7 = \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \dots \end{array} \leftarrow M_8 = \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 3 \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & \sim & 3 \\ \hline \end{array} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & \dots & \dots \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Le cas **(1+7)** (Lemme 4.2.12) montre que $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_7)$ est isomorphe à l'algèbre

$$\begin{array}{ccc} & \delta & \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ 1 & & 7 \end{array}$$

Le cas **(1+8)** (Lemme 4.2.13) montre que $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_8)$ est isomorphe à l'algèbre

$$\begin{array}{ccc} & \alpha' & \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ 1 & & 8 \end{array}$$

Le cas **(7+8)** (Lemme 4.2.27) montre que $\underline{\text{End}}_A(M_7 \oplus M_8)$ est isomorphe à l'algèbre

$$\begin{array}{ccc} & \gamma' & \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ \vdots & & \vdots \\ \bullet & \longleftarrow & \bullet \\ 7 & & 8 \end{array}$$

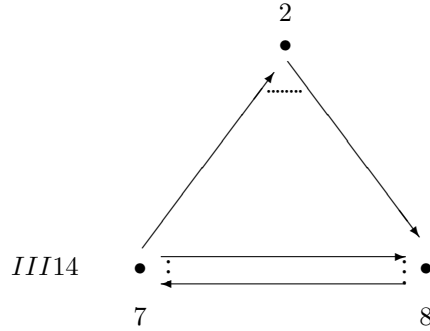
On vérifie que $\alpha' = \delta\gamma'$ et on obtient donc que $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_7 \oplus M_8)$ est isomorphe à l'algèbre

$$III8 \quad \begin{array}{ccc} & \delta & \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ & & \vdots \\ & & \bullet \\ & & \vdots \\ & & \bullet \end{array} \begin{array}{ccc} & \gamma' & \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ \vdots & & \vdots \\ \bullet & \longleftarrow & \bullet \\ 7 & & 8 \end{array}$$

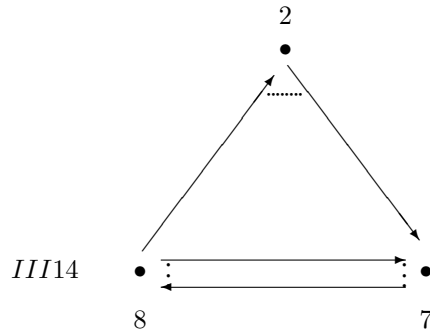
□

Lemme 4.3.16 (2+7+8)

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \bigcup_{6n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag}(S_1), \quad N = \Omega([-1]N[2])$$



$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \backslash \quad / \\ 2 \quad 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \bigcup_{6n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag}(S_1), \quad N = \Omega([2]N[-1])$$



Démonstration Le cas **(2+7)** (Lemme 4.2.16) montre qu'il existe $i \in \mathbb{Z}$ tel que

$$M_2 = \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \backslash \quad / \\ 2 \quad 1 \end{array} \right) \quad \text{et} \quad \Omega^{-i} M_7 \in \bigcup_{6n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag}(S_1);$$

le cas **(7+8)** (Lemme 4.2.27) montre qu'étant fixé M_7 , $M_8 = \Omega([-1]M_7[2])$ ou $M_8 = \Omega([2]M_7[-1])$; le cas **(2+8)** (Lemme 4.2.17) montre que M_1 et M_8 sont compatibles, en effet, si $\Omega^{-i} M_7 \in \bigcup_{6n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag}(S_1)$ et

$$M_8 = \Omega([-1]M_7[2]) \text{ ou } M_8 = \Omega([2]M_7[-1]), \text{ alors } M_8 \in \bigcup_{6n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag} \left(\begin{array}{c} 3 \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad 2 \end{array} \right).$$

Calculons maintenant $\text{End}_A(M_2 \oplus M_7 \oplus M_8)$. On distingue des cas.

- (1) $M_2 = \begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \backslash \quad / \\ 2 \quad 1 \end{array}$, $M_7 \in \bigcup_{6n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag}(S_1)$ et $M_8 = \Omega([-1]M_7[2])$. On peut supposer que $M_7 \in \text{sdiag}(S_1)$.

- (i) $M_7 = S_1$ et donc $M_8 = \begin{array}{c} 2 \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad 1 \end{array}$. Notons

$$\gamma : M_2 = \begin{array}{c} \boxed{1} \\ / \quad \backslash \\ 2 \quad 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ / \quad \backslash \\ 2 \quad 1 \end{array} \rightarrow M_7 = S_1, \quad \delta : M_2 = \begin{array}{c} 1 \\ / \quad \backslash \\ 2 \quad 3 \end{array} \begin{array}{c} \boxed{1} \\ / \quad \backslash \\ 2 \quad 1 \end{array} \leftarrow M_7 = S_1$$

$$\theta : M_2 = \begin{array}{c} \boxed{1} \quad \boxed{3} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{2} \end{array} \rightarrow M_8 = \begin{array}{c} \boxed{1} \quad \boxed{3} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{2} \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array}, \quad \alpha : M_7 = S_1 \hookrightarrow M_8 = \begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{1} \end{array}$$

$$\lambda : M_2 = \begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \boxed{1} \end{array} \leftarrow M_8 = \begin{array}{c} \boxed{1} \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \end{array}, \quad \beta : M_7 = S_1 \leftarrow M_8 = \begin{array}{c} \boxed{1} \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \end{array}$$

Le cas **(2+7)**(Lemme 4.2.16) montre que $\underline{\text{End}}_A(M_2 \oplus M_7)$ est isomorphe à l'algèbre

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\gamma} & \\ \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ \vdots & & \vdots \\ 2 & \xrightarrow{\delta} & 7 \end{array}$$

Le cas **(2+8)**(Lemme 4.2.17) montre que $\underline{\text{End}}_A(M_2 \oplus M_8)$ est isomorphe à l'algèbre

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\theta} & \\ \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ \vdots & & \vdots \\ 2 & \xrightarrow{\lambda} & 7 \end{array}$$

Le cas **(7+8)** (Lemme 4.2.27) montre que $\underline{\text{End}}_A(M_7 \oplus M_8)$ est isomorphe à l'algèbre

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\alpha} & \\ \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ \vdots & & \vdots \\ 7 & \xrightarrow{\beta} & 8 \end{array}$$

On vérifie que $\theta\beta = \gamma$, $\beta\delta = \lambda$ et $\delta\theta = 0$. On obtient donc que $\underline{\text{End}}_A(M_2 \oplus M_7 \oplus M_8)$ est isomorphe à l'algèbre

$$\begin{array}{ccc} & 2 & \\ & \bullet & \\ & \vdots & \\ \delta \nearrow & & \searrow \theta \\ \bullet & & \bullet \\ \vdots & \xrightarrow{\alpha} & \vdots \\ 7 & \xrightarrow{\beta} & 8 \end{array}$$

III14

(ii) Pour $n \geq 1$,

$$M_7 = S_1[n] = \left(\begin{array}{c} 1 \diagup 3 \diagdown 2 \\ \sim \end{array} \right) [n-1] \text{ et } M_8 = \left(\begin{array}{c} 1 \diagdown 2 \diagup 3 \diagdown 1 \diagup 3 \diagdown 2 \\ \sim \end{array} \right) [n-1].$$

$$\gamma : M_2 = \begin{array}{c} \boxed{1} \\ \diagdown 2 \diagup 3 \diagdown 1 \end{array} \rightarrow M_7 = \left(\begin{array}{c} \boxed{1} \diagup 3 \diagdown 2 \\ \sim \end{array} \right) [n-1]$$

$$\delta : M_2 = \begin{array}{c} 1 \diagdown 2 \diagup 3 \diagdown 1 \\ \boxed{2} \diagdown 1 \end{array} \leftarrow M_7 = \left(\begin{array}{c} 1 \diagup 3 \diagdown 2 \\ \sim \end{array} \right) [n-1] = \left(\begin{array}{c} \boxed{1} \diagdown 2 \diagup 3 \diagdown 1 \\ \sim \end{array} \right) [n-1]$$

$$\theta : M_2 = \begin{array}{c} \boxed{1} \diagdown 2 \diagup 3 \diagdown 1 \\ \boxed{2} \diagdown 1 \end{array} \rightarrow M_8 = \left(\begin{array}{c} \boxed{1} \diagdown 2 \diagup 3 \diagdown 1 \diagup 3 \diagdown 2 \\ \sim \end{array} \right) [n-1]$$

$$\lambda : M_2 = \begin{array}{c} 1 \diagdown 2 \diagup 3 \diagdown 1 \\ \boxed{2} \diagdown 1 \end{array} \leftarrow M_8 = \left(\begin{array}{c} \boxed{1} \diagdown 2 \diagup 3 \diagdown 1 \diagup 3 \diagdown 2 \\ \sim \end{array} \right) [n-1]$$

$$\alpha : M_7 = \begin{array}{c} 1 \diagup 3 \diagdown 2 \diagup \cdots \\ \sim \end{array} \hookrightarrow M_8 = \begin{array}{c} 1 \diagdown 2 \diagup 3 \diagdown 1 \diagup 3 \diagdown 2 \diagup \cdots \\ \sim \end{array}$$

$$\beta : M_7 = \left(\begin{array}{c} \boxed{1} \diagup 3 \diagdown 2 \\ \sim \end{array} \right) [n-1] \leftarrow M_8 = \left(\begin{array}{c} \boxed{1} \diagdown 2 \diagup 3 \diagdown 1 \diagup 3 \diagdown 2 \\ \sim \end{array} \right) [n-1]$$

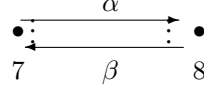
Le cas **(2+7)** (Lemme 4.2.16) montre que $\underline{\text{End}}_A(M_2 \oplus M_7)$ est isomorphe à l'algèbre

$$II2 \quad \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\gamma} & \\ \bullet & \xrightarrow{\delta} & \bullet \\ 2 & & 7 \end{array}$$

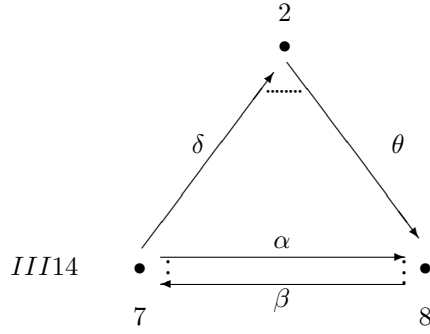
Le cas **(2+8)** (Lemme 4.2.17) montre que $\underline{\text{End}}_A(M_2 \oplus M_8)$ est isomorphe à l'algèbre

$$II2 \quad \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\theta} & \\ \bullet & \xrightarrow{\lambda} & \bullet \\ 2 & & 8 \end{array}$$

Le cas **(7+8)** (Lemme 4.2.27) montre que $\underline{\text{End}}_A(M_7 \oplus M_8)$ est isomorphe à l'algèbre



On vérifie que $\theta\beta = \gamma$, $\beta\delta = \lambda$ et $\delta\theta = 0$. On obtient donc que $\underline{\text{End}}_A(M_2 \oplus M_7 \oplus M_8)$ est isomorphe à l'algèbre



(iii) Pour $n \geq 1$, $M_7 = S_1[-n] = \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ & \sim & \\ & 2 & \nearrow \end{smallmatrix} \right) [n-1]$ et $M_8 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ & \searrow & \\ & 2 & \nearrow \end{smallmatrix} \right) [n-1]$.

$$\gamma : M_2 = \begin{array}{c} \lceil 1 \quad \bar{} \quad \bar{} \quad \bar{3} \rceil \\ \lfloor \quad \searrow \quad \nearrow \quad \rfloor \\ \quad 2 \quad \end{array} \rightarrow M_7 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ & \sim & \\ & 2 & \nearrow \end{smallmatrix} \right) [n-1] = \left(\begin{array}{c} \lceil 1 \quad \bar{} \quad \bar{} \quad \bar{3} \rceil \\ \lfloor \quad \searrow \quad \nearrow \quad \rfloor \\ \quad 2 \quad \end{array} \right) \begin{array}{c} \nearrow \\ \nearrow \\ \nearrow \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ 3 \\ 3 \end{array} \right) [n-1]$$

$$\delta : M_2 = \begin{array}{c} 1 \quad \searrow \quad 3 \\ \quad 2 \quad \nearrow \quad \boxed{1} \end{array} \leftarrow M_7 = \left(\begin{array}{c} \boxed{1} \quad \searrow \quad 3 \\ \quad 2 \quad \nearrow \end{array} \right) [n-1]$$

si $n = 1$,

$$\theta : M_2 = \begin{array}{c} \lceil 1 \quad \bar{} \quad \bar{} \quad \bar{3} \rceil \\ \lfloor \quad \searrow \quad \nearrow \quad \rfloor \\ \quad 2 \quad \end{array} \rightarrow M_8 = \begin{array}{c} 1 \quad \searrow \quad 3 \\ \quad 2 \quad \nearrow \end{array}$$

et si $n \geq 2$,

$$\theta : M_2 = \begin{array}{c} 1 \quad \searrow \quad 3 \\ \quad 2 \quad \nearrow \quad 1 \end{array} \hookrightarrow M_8 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ & \searrow & \\ & 2 & \nearrow \end{smallmatrix} \right) [n-1] = \left(\begin{array}{c} \lceil 1 \quad \bar{} \quad \bar{} \quad \bar{3} \rceil \\ \lfloor \quad \searrow \quad \nearrow \quad \rfloor \\ \quad 2 \quad \end{array} \right) \begin{array}{c} \nearrow \\ \nearrow \\ \nearrow \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ 2 \\ 2 \end{array} \right) [n-2]$$

$$\lambda : M_2 = \begin{array}{c} 1 \quad \searrow \quad 3 \\ \quad 2 \quad \nearrow \quad \boxed{1} \end{array} \leftarrow M_8 = \left(\begin{array}{c} \boxed{1} \quad \searrow \quad 3 \\ \quad 2 \quad \nearrow \end{array} \right) [n-1]$$

$$\alpha : M_7 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ & \sim & \\ & 2 & \nearrow \end{smallmatrix} \right) [n-1] = \begin{array}{c} 1 \quad \searrow \quad 3 \\ \quad 2 \quad \nearrow \quad \begin{array}{c} \lceil 3 \rceil \\ \lfloor \quad \searrow \quad \nearrow \quad \rfloor \\ \quad 2 \quad \end{array} \end{array} \rightarrow M_8 = \begin{array}{c} 1 \quad \searrow \quad 3 \\ \quad 2 \quad \nearrow \quad \begin{array}{c} \lceil 3 \rceil \\ \lfloor \quad \searrow \quad \nearrow \quad \rfloor \\ \quad 2 \quad \end{array} \end{array}$$

si $n = 1$,

$$\beta : M_7 = \left(\begin{array}{c} 1 \quad \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \right) [n-1] = \left(\begin{array}{c} \boxed{1} \quad \quad \boxed{3} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{2} \end{array} \right) [n-1] \leftarrow M_8 = \begin{array}{c} 1 \quad \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array}$$

si $n \geq 2$,

$$\beta : M_7 = \left(\begin{array}{c} 1 \quad \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \right) [n-1] = \left(\begin{array}{c} \boxed{1} \quad \quad \boxed{3} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{2} \end{array} \right) [n-1] \leftarrow M_8 = \left(\begin{array}{c} \boxed{1} \quad \quad \boxed{3} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{2} \end{array} \right) [n-2] \begin{array}{c} 1 \quad \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array}$$

Le cas **(2+7)** (Lemme 4.2.16) montre que $\underline{\text{End}}_A(M_2 \oplus M_7)$ est isomorphe à l'algèbre

$$II2 \quad \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\gamma} & \\ \bullet & & \bullet \\ & \xleftarrow{\delta} & \\ 2 & & 7 \end{array}$$

Le cas **(2+8)** (Lemme 4.2.17) montre que $\underline{\text{End}}_A(M_1 \oplus M_8)$ est isomorphe à l'algèbre

$$II2 \quad \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\theta} & \\ \bullet & & \bullet \\ & \xleftarrow{\lambda} & \\ 2 & & 8 \end{array}$$

Le cas **(7+8)** (Lemme 4.2.27) montre que $\underline{\text{End}}_A(M_7 \oplus M_8)$ est isomorphe à l'algèbre

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\alpha} & \\ \bullet & & \bullet \\ & \xleftarrow{\beta} & \\ 7 & & 8 \end{array}$$

On vérifie que $\theta\beta = \gamma$, $\beta\delta = \lambda$ et $\delta\theta = 0$. On obtient donc que $\underline{\text{End}}_A(M_2 \oplus M_7 \oplus M_8)$ est isomorphe à l'algèbre

$$III14 \quad \begin{array}{ccc} & 2 & \\ & \bullet & \\ & \vdots & \\ \delta \nearrow & & \nwarrow \theta \\ \bullet & & \bullet \\ & \xrightarrow{\alpha} & \\ & \xleftarrow{\beta} & \\ 7 & & 8 \end{array}$$

(2) $M_2 = \begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \nearrow \\ 3 \\ \searrow \\ 1 \end{smallmatrix}$, $M_7 \in \bigcup_{6n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag}(S_1)$ et $M_8 = \Omega([2]M_7[-1])$. On utilise la même méthode que celle de (1). On obtient le carquois avec relations désiré.

□

Lemme 4.3.17 (3+7+8)

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \bigcup_{6n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag}(S_1), \quad N = \Omega([-1]M[2])$$

$$III9 \quad \begin{array}{ccccc} \bullet & \xleftarrow{\quad} & \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ 3 & & 8 & & 7 \end{array}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \bigcup_{6n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag}(S_1), \quad N = \Omega([2]M[-1])$$

$$III9 \quad \begin{array}{ccccc} \bullet & \xleftarrow{\quad} & \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ 3 & & 7 & & 8 \end{array}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \bigcup_{6n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag} \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \nearrow \\ 1 \end{smallmatrix} \sim \begin{smallmatrix} \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \right), \quad N = \Omega([-1]M[2])$$

$$III8 \quad \begin{array}{ccccc} \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ 3 & & 7 & & 8 \end{array}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \bigcup_{6n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag} \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \nearrow \\ 1 \end{smallmatrix} \sim \begin{smallmatrix} \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \right), \quad N = \Omega([2]M[-1])$$

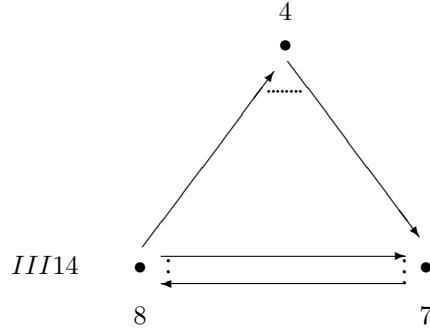
$$III8 \quad \begin{array}{ccccc} \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ 3 & & 8 & & 7 \end{array}$$

Démonstration La preuve est similaire à celle du cas **(1+7+8)** (Lemme 4.3.15).

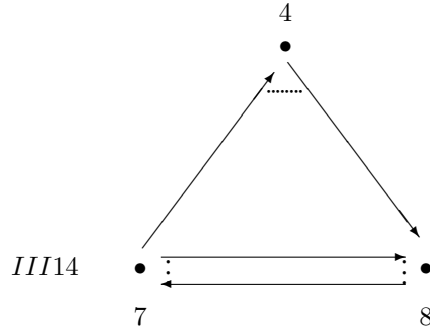
□

Lemme 4.3.18 (4+7+8)

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ / \\ 2 \end{array} \sim \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \bigcup_{6n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag} \left(\begin{array}{c} 3 \\ / \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \backslash \end{array} \right), \quad N = \Omega([-1]M[2])$$



$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ / \\ 2 \end{array} \sim \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \bigcup_{6n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag} \left(\begin{array}{c} 3 \\ / \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \backslash \end{array} \right), \quad N = \Omega([2]M[-1])$$



Démonstration La preuve est similaire à celle du cas **(2+7+8)** (Lemme 4.3.16).

□

Lemme 4.3.19 (1+8+6)

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ / \\ 2 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \{ [3m]S_2 \mid m \in \mathbb{Z} \}$$

$$III6 \quad \begin{array}{ccccc} \bullet & \xleftarrow{\hspace{1.5cm}} & \bullet & \xrightarrow{\hspace{1.5cm}} & \bullet \\ 1 & & 8 & & 6 \end{array}$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ \searrow & \nearrow \\ 1 & 2 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \{ [3m+1]S_2 \mid m \in \mathbb{Z} \}$$

$$III7 \quad \begin{array}{ccccc} \bullet & \xrightarrow{\hspace{1.5cm}} & \bullet & \xleftarrow{\hspace{1.5cm}} & \bullet \\ 1 & & 8 & & 6 \end{array}$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \searrow \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ \searrow & \nearrow \\ 1 & 2 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \{ [3m+1]S_2 \mid m \in \mathbb{Z} \}$$

$$III6 \quad \begin{array}{ccccc} \bullet & \xleftarrow{\hspace{1.5cm}} & \bullet & \xrightarrow{\hspace{1.5cm}} & \bullet \\ 1 & & 8 & & 6 \end{array}$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \searrow \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ \searrow & \nearrow \\ 1 & 2 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \{ [3m-1]S_2 \mid m \in \mathbb{Z} \}$$

$$III7 \quad \begin{array}{ccccc} \bullet & \xrightarrow{\hspace{1.5cm}} & \bullet & \xleftarrow{\hspace{1.5cm}} & \bullet \\ 1 & & 8 & & 6 \end{array}$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \searrow \\ 3 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ \searrow & \nearrow \\ 1 & 2 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \{ [3m-1]S_2 \mid m \in \mathbb{Z} \}$$

$$III6 \quad \begin{array}{ccccc} \bullet & \xleftarrow{\hspace{1.5cm}} & \bullet & \xrightarrow{\hspace{1.5cm}} & \bullet \\ 1 & & 8 & & 6 \end{array}$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \sim \\ 3 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \quad \nearrow \\ 1 \quad 3 \\ \quad \quad \backslash \quad \nearrow \\ \quad \quad \quad 2 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \{ [3m]S_2 \mid m \in \mathbb{Z} \}$$



Démonstration Le cas **(6+8)** (Lemme 4.2.23) montre qu'il existe $i \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\Omega^{-i}M_8 \in \text{diag}(S_2) \quad \text{et} \quad M_6 = \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \quad \nearrow \\ 1 \quad 3 \\ \quad \quad \backslash \quad \nearrow \\ \quad \quad \quad 2 \end{array} \right).$$

Le cas **(1+8)** (Lemme 4.2.13) montre que

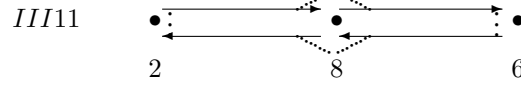
- (i) $M_1 = \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right), M_8 = \Omega^i(M), i \in \mathbb{Z}, M \in \bigcup_{6n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag}(S_2)$
- (ii) $M_1 = \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right), M_8 = \Omega^i(M), i \in \mathbb{Z}, M \in \bigcup_{6n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag} \left(\begin{array}{c} 3 \\ \nearrow \backslash \\ 1 \quad 2 \end{array} \right)$
- (iii) $M_1 = \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right), M_8 = \Omega^i(M), i \in \mathbb{Z}, M \in \bigcup_{6n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag} \left(\begin{array}{c} 3 \\ \nearrow \backslash \\ 1 \quad 2 \end{array} \right)$
- (iv) $M_1 = \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right), M_8 = \Omega^i(M), i \in \mathbb{Z}, M \in \bigcup_{6n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag}(S_3)$
- (v) $M_1 = \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \sim \\ 3 \end{array} \right), M_8 = \Omega^i(M), i \in \mathbb{Z}, M \in \bigcup_{6n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag}(S_3)$
- (vi) $M_1 = \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \sim \\ 3 \end{array} \right), M_8 = \Omega^i(M), i \in \mathbb{Z}, M \in \bigcup_{6n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag}(S_2)$

Comme M_1 et M_6 sont indépendents, en calculant les intersections des diags et sdiags, on obtient les possibilités dans l'énoncé et si on a un morphisme non projectif de M_1 à M_8 et un morphisme non projectif de M_8 à M_6 (ou la direction réciproque), alors leur composé est nul dans la catégorie stable et les carquois avec relations en déroulent.

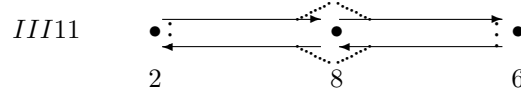
□

Lemme 4.3.20 (2+8+6)

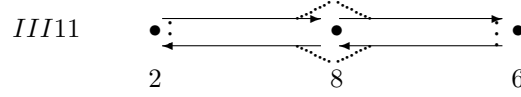
$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \quad \nearrow \\ 2 \quad 3 \\ \quad \quad \backslash \quad \nearrow \\ \quad \quad \quad 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \quad \nearrow \\ 1 \quad 3 \\ \quad \quad \backslash \quad \nearrow \\ \quad \quad \quad 2 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \{ [3m+1]S_2 \mid m \in \mathbb{Z} \}$$



$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \sim \quad 3 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \{ [3m-1]S_2 \mid m \in \mathbb{Z} \}$$



$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \sim \quad 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \{ [3m]S_2 \mid m \in \mathbb{Z} \}$$



Démonstration Le cas **(6+8)** (Lemme 4.2.23) montre qu'il existe $i \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\Omega^{-i}M_8 \in \text{diag}(S_2) \text{ et } M_6 = \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \right).$$

Le cas **(2+8)** (Lemme 4.2.17) montre que

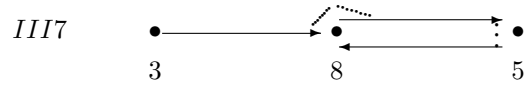
- (i) $M_2 = \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \end{array} \right), M_8 = \Omega^i(M), i \in \mathbb{Z}, M \in \bigcup_{6n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag} \left(\begin{array}{c} 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \quad 2 \end{array} \right)$
- (ii) $M_2 = \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \sim \quad 3 \end{array} \right), M_8 = \Omega^i(M), i \in \mathbb{Z}, M \in \bigcup_{6n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag}(S_3)$
- (iii) $M_2 = \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \sim \quad 2 \end{array} \right), M_8 = \Omega^i(M), i \in \mathbb{Z}, M \in \bigcup_{6n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag}(S_2)$

Comme M_2 et M_6 sont indépendents, en calculant les intersections des diags et sdiags, on obtient les possibilités dans l'énoncé et si on a un morphisme non projectif de M_1 à M_8 et un morphisme non projectif de M_8 à M_6 (ou la direction réciproque), alors leur composé est nul dans la catégorie stable et les carquois avec relations en déroulent.

□

Lemme 4.3.21 (3+8+5)

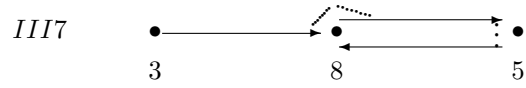
$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \{ S_2[3n] \mid n \in \mathbb{Z} \}$$



$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \{ S_2[3n-1] \mid n \in \mathbb{Z} \}$$



$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \{ S_2[3n+1] \mid n \in \mathbb{Z} \}$$



$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \{ S_2[3n] \mid n \in \mathbb{Z} \}$$



$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \{ S_2[3n-1] \mid n \in \mathbb{Z} \}$$



$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right), i \in \mathbb{Z}, M \in \{ S_2[3n+1] \mid n \in \mathbb{Z} \}$$

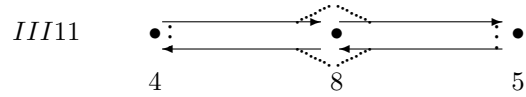


Démonstration La preuve est similaire à celle du cas **(1+8+6)** (Lemme 4.3.19).

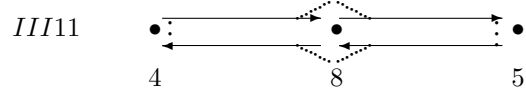
□

Lemme 4.3.22 (4+8+5)

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right), i \in \mathbb{Z}, M \in \{ S_2[3n] \mid n \in \mathbb{Z} \}$$

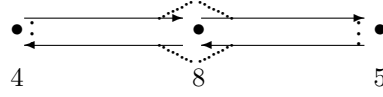


$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right), i \in \mathbb{Z}, M \in \{ S_2[3n+1] \mid n \in \mathbb{Z} \}$$



$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right), i \in \mathbb{Z}, M \in \{ S_2[3n-1] \mid n \in \mathbb{Z} \}$$

III11



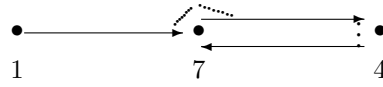
Démonstration La preuve est similaire à celle du cas **(2+8+6)** (Lemme 4.3.20).

□

Lemme 4.3.23 (1+7+4)

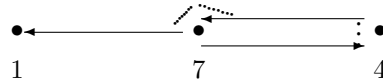
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 3 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \sim \right), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \{ [3m]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$

III7



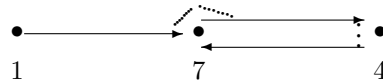
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 3 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \sim \right), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \{ [3m-1]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$

III6



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \searrow \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 3 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \sim \right), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \{ [3m+1]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$

III7



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \searrow \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 3 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \sim \right), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \{ [3m]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \searrow \\ 3 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \searrow & \nearrow & \searrow \\ & 1 & 2 \end{smallmatrix} \right), i \in \mathbb{Z}, M \in \{ [3m-1]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \searrow \\ 3 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \searrow & \nearrow & \searrow \\ & 1 & 2 \end{smallmatrix} \right), i \in \mathbb{Z}, M \in \{ [3m+1]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$



Démonstration La preuve est similaire à celle du cas **(1+8+4)** (Lemme 4.3.24).

□

Lemme 4.3.24 (1+8+4)

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \searrow & \nearrow & \searrow \\ & 1 & 2 \end{smallmatrix} \right), i \in \mathbb{Z}, M \in \{ [3m]S_2[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \searrow & \nearrow & \searrow \\ & 1 & 2 \end{smallmatrix} \right), i \in \mathbb{Z}, M \in \{ [3m+1]S_2[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \searrow \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ \searrow & \nearrow \\ 1 & 2 \end{smallmatrix} \sim \right), i \in \mathbb{Z}, M \in \{ [3m+1]S_2[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \searrow \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ \searrow & \nearrow \\ 1 & 2 \end{smallmatrix} \sim \right), i \in \mathbb{Z}, M \in \{ [3m-1]S_2[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \searrow \\ 3 \end{smallmatrix} \sim \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ \searrow & \nearrow \\ 1 & 2 \end{smallmatrix} \sim \right), i \in \mathbb{Z}, M \in \{ [3m-1]S_2[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \searrow \\ 3 \end{smallmatrix} \sim \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ \searrow & \nearrow \\ 1 & 2 \end{smallmatrix} \sim \right), i \in \mathbb{Z}, M \in \{ [3m]S_2[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$



Démonstration Le cas **(4+8)** (Lemme 4.2.19) montre qu'il existe $i \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\Omega^{-i} M_8 \in \bigcup_{6n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag}(S_2) \text{ et } M_4 = \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \backslash \quad \quad \quad 3 \\ \quad \quad 1 \quad \quad \quad \sim \\ \quad \quad \quad \quad \quad 2 \end{array} \right).$$

Le cas **(1+8)** (Lemme 4.2.13) explicité dans la preuve du cas **(1+8+6)** (Lemme 4.3.19) donne les possibilités de $M_1 \oplus M_8$. Comme M_1 et M_4 sont indépendents, en calculant les intersections des diags et sdiags, on déduit les possibilités dans l'énoncé et si on a un morphisme non projectif de M_1 à M_8 et un morphisme non projectif de M_8 à M_4 (ou la direction réciproque), alors leur composé est nul dans la catégorie stable et les carquois avec relations en déroulent.

□

Lemme 4.3.25 (3+7+2)

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \backslash \quad \quad \quad 3 \\ \quad \quad 1 \quad \quad \quad \sim \\ \quad \quad \quad \quad \quad 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \backslash \quad \quad \quad 3 \\ \quad \quad 2 \quad \quad \quad \sim \\ \quad \quad \quad \quad \quad 1 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \{ [3m]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$

$$III6 \quad \begin{array}{ccccc} \bullet & \xleftarrow{\quad} & \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ 3 & & 7 & & 2 \end{array}$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \backslash \quad \quad \quad 3 \\ \quad \quad 1 \quad \quad \quad \sim \\ \quad \quad \quad \quad \quad 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \backslash \quad \quad \quad 3 \\ \quad \quad 2 \quad \quad \quad \sim \\ \quad \quad \quad \quad \quad 1 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \{ [3m]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$

$$III7 \quad \begin{array}{ccccc} \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet & \xleftarrow{\quad} & \bullet \\ 3 & & 7 & & 2 \end{array}$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \backslash \quad \quad \quad \sim \\ \quad \quad \quad \quad \quad 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \backslash \quad \quad \quad 3 \\ \quad \quad 2 \quad \quad \quad \sim \\ \quad \quad \quad \quad \quad 1 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \{ [3m]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$

$$III6 \quad \begin{array}{ccccc} \bullet & \xleftarrow{\quad} & \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ 3 & & 7 & & 2 \end{array}$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \backslash \quad \quad \quad \sim \\ \quad \quad \quad \quad \quad 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \backslash \quad \quad \quad 3 \\ \quad \quad 2 \quad \quad \quad \sim \\ \quad \quad \quad \quad \quad 1 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \{ [3m]S_1[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$



$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ / \\ 1 \end{array} \right), i \in \mathbb{Z}, M \in \{ [3m]S_1[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$



$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ / \\ 1 \end{array} \right), i \in \mathbb{Z}, M \in \{ [3m]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$

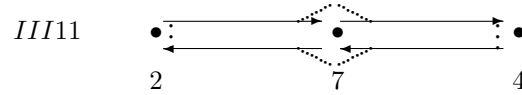


Démonstration La preuve est similaire à celle du cas **(3+8+2)** (Lemme 4.3.27).

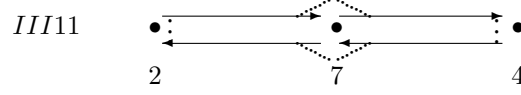
□

Lemme 4.3.26 (2+7+4)

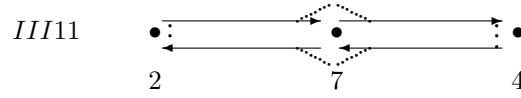
$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ / \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ / \\ 2 \end{array} \right), i \in \mathbb{Z}, M \in \{ [3m]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$



$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ / \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ / \\ 3 \end{array} \right), i \in \mathbb{Z}, M \in \{ [3m]S_1[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$



$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ / \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ / \\ 1 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \{ [3m]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$



Démonstration La preuve est similaire à celle du cas **(2+8+4)** (Lemme 4.3.28).

□

Lemme 4.3.27 (3+8+2)

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ / \\ 1 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \{ [3m+1]S_2[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$



$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ / \\ 1 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \{ [3m+1]S_2[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$



$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ / \\ 1 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad M \in \{ [3m+1]S_2[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$



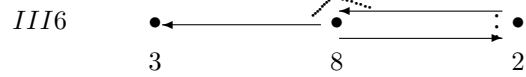
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ & \searrow & / \\ & 2 & \\ & & 1 \end{smallmatrix} \right), i \in \mathbb{Z}, M \in \{ [3m+1]S_2[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 3 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ & \searrow & / \\ & 2 & \\ & & 1 \end{smallmatrix} \right), i \in \mathbb{Z}, M \in \{ [3m+1]S_2[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 3 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ & \searrow & / \\ & 2 & \\ & & 1 \end{smallmatrix} \right), i \in \mathbb{Z}, M \in \{ [3m+1]S_2[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$



Démonstration Le cas **(2+8)**(Lemme 4.2.17) montre qu'il existe $i \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\Omega^{-i}M_8 \in \bigcup_{6n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag} \left(\begin{smallmatrix} & 3 \\ / & \searrow \\ 1 & 2 \end{smallmatrix} \right) \text{ et } M_2 = \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ & \searrow & / \\ & 2 & \\ & & 1 \end{smallmatrix} \right).$$

Le cas **(3+8)**(Lemme 4.2.15) montre que

$$(i) \quad M_3 = \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{smallmatrix} \right), M_8 = \Omega^i(M), i \in \mathbb{Z}, M \in \bigcup_{6n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag} (S_2)$$

$$(ii) \ M_3 = \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \right), \ M_8 = \Omega^i(M), \ i \in \mathbb{Z}, \ M \in \bigcup_{6n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \end{array} \right)$$

$$(iii) \ M_3 = \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \sim \\ 2 \end{array} \right), \ \Omega^i(M), \ i \in \mathbb{Z}, \ M \in \bigcup_{6n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag} (S_3)$$

$$(iv) \ M_3 = \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \sim \\ 3 \end{array} \right), \ M_8 = \Omega^i(M), \ i \in \mathbb{Z}, \ M \in \bigcup_{6n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag} (S_2)$$

$$(v) \ M_1 = \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \sim \\ 3 \end{array} \right), \ M_8 = \Omega^i(M), \ i \in \mathbb{Z}, \ M \in \bigcup_{6n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \end{array} \right)$$

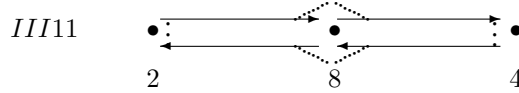
$$(vi) \ M_1 = \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \sim \\ 3 \end{array} \right), \ M_8 = \Omega^i(M), \ i \in \mathbb{Z}, \ M \in \bigcup_{6n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag} (S_3)$$

Comme M_3 et M_2 sont indépendents, en calculant les intersections des diags et sdiags, on obtient les possibilités dans l'énoncé et si on a un morphisme non projectif de M_3 à M_8 et un morphisme non projectif de M_8 à M_2 (ou la direction réciproque), alors leur composé est nul dans la catégorie stable et les carquois avec relations en déroulent.

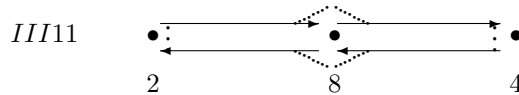
□

Lemme 4.3.28 (2+8+4)

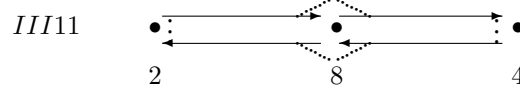
$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \sim \\ 2 \end{array} \right), \ i \in \mathbb{Z}, \ M \in \{ [3m+1]S_2[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$



$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \sim \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 3 \end{array} \right), \ i \in \mathbb{Z}, \ M \in \{ [3m+1]S_2[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$



$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \right), \ i \in \mathbb{Z}, \ M \in \{ [3m+1]S_2[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$



Démonstration Le cas **(2+8)** (Lemme 4.2.17) montre qu'il existe $i \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\Omega^{-i}M_8 \in \bigcup_{6n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag} \left(\begin{array}{c} 3 \\ 1 \diagup \quad \diagdown 2 \end{array} \right) \text{ et } M_2 = \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \diagdown \quad \diagup 3 \\ 2 \quad 1 \end{array} \right).$$

Le cas **(4+8)** (Lemme 4.2.19) montre que

- (i) $M_4 = \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \diagdown \quad \diagup 3 \\ 1 \quad 2 \end{array} \right)$, $M_8 = \Omega^i(M)$, $i \in \mathbb{Z}$, $M \in \bigcup_{6n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag} (S_2)$
- (ii) $M_4 = \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \diagdown \quad \diagup 1 \\ 2 \quad 3 \end{array} \right)$, $M_8 = \Omega^i(M)$, $i \in \mathbb{Z}$, $M \in \bigcup_{6n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag} (S_3)$
- (iii) $M_4 = \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \diagdown \quad \diagup 2 \\ 3 \quad 1 \end{array} \right)$, $M_8 = \Omega^i(M)$, $i \in \mathbb{Z}$, $M \in \bigcup_{6n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag} \left(\begin{array}{c} 2 \diagdown \quad \diagup 1 \\ 3 \quad \end{array} \right)$

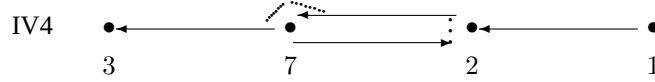
Comme M_2 et M_4 sont indépendents, en calculant les intersections des diags et sdiags, on obtient les possibilités dans l'énoncé et si on a un morphisme non projectif de M_2 à M_8 et un morphisme non projectif de M_8 à M_4 (ou la direction réciproque), alors leur composé est nul dans la catégorie stable et les carquois avec relations en déroulent.

□

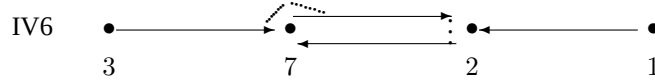
4.4 Quatre facteurs

Lemme 4.4.1 (1+2+7+3) IV3, IV4, IV5, IV6

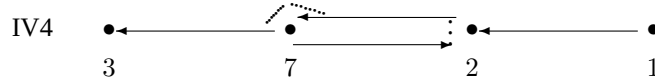
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ \backslash & / & \backslash \\ 2 & & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$



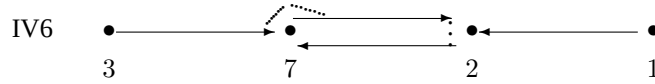
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ \backslash & / & \backslash \\ 2 & & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$



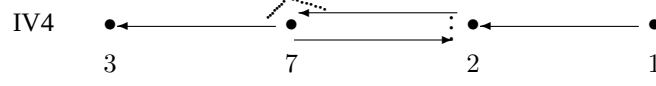
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ \backslash & / & \backslash \\ 2 & & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$



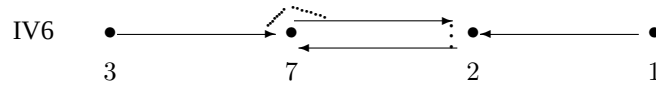
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ \backslash & / & \backslash \\ 2 & & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$



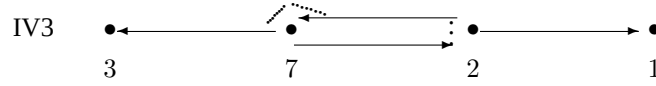
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ \backslash & / & \backslash \\ 2 & & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$



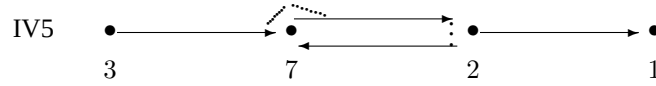
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ \backslash & & / \\ 2 & & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$



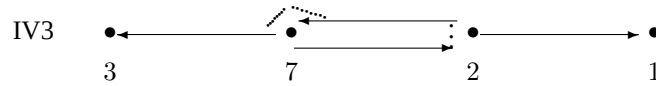
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ \backslash & & / \\ 2 & & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$



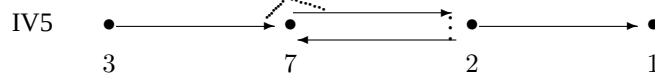
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ \backslash & & / \\ 2 & & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$



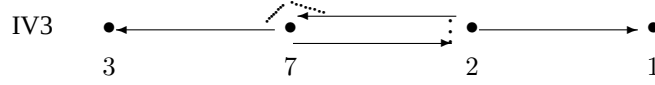
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ \backslash & & / \\ 2 & & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$



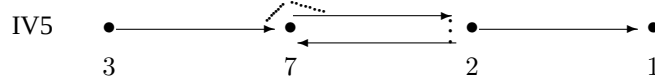
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ \backslash & & / \\ 2 & & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ \backslash & & / \\ & 2 & \\ & \backslash & / \\ & & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ \backslash & & / \\ & 2 & \\ & \backslash & / \\ & & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$



Démonstration Le cas **(1+2+7)** (Lemme 4.3.5) montre qu'il existe $i \in \mathbb{Z}$ tel que $M_1 = \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right)$ ou $\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$, $M_2 = \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ \backslash & & / \\ & 2 & \\ & \backslash & / \\ & & 1 \end{smallmatrix} \right)$ et $\Omega^{-i}M_7 \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag}(S_1)$. Le cas **(3+7)** (Lemme 4.2.14) montre que

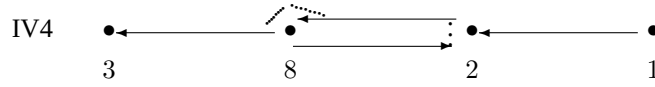
- (i) $M_3 = \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$, $\Omega^{-i}(M_7) \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag}(S_1)$
- (ii) $M_3 = \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$, $\Omega^{-i}(M_7) \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag} \left(\begin{smallmatrix} & 3 \\ / & \backslash \\ 1 & 2 \end{smallmatrix} \right)$
- (iii) $M_3 = \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right)$, $\Omega^{-i}(M_7) \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag} \left(\begin{smallmatrix} & 3 \\ / & \backslash \\ 1 & 2 \end{smallmatrix} \right)$
- (iv) $M_3 = \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right)$, $\Omega^{-i}(M_7) \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag} \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ \backslash & & / \\ & 2 & \\ & \sim & / \\ & & 3 \end{smallmatrix} \right)$
- (v) $M_3 = \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \right)$, $\Omega^{-i}(M_7) \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag} \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ \backslash & & / \\ & 2 & \\ & \sim & / \\ & & 3 \end{smallmatrix} \right)$
- (vi) $M_3 = \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \right)$, $\Omega^{-i}(M_7) \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag}(S_1)$

En calculant les intersections des diag et sdiag, on obtient les possibilités dans l'énoncé. Comme $M_1 \oplus M_2$ est indépendant de M_3 , on déduit le carquois avec relations voulu de ceux du cas **(1+2+7)** (Lemme 4.3.5) et du cas **(3+7)** (Lemme 4.2.14).

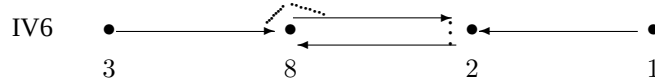
□

Lemme 4.4.2 (1+2+8+3)

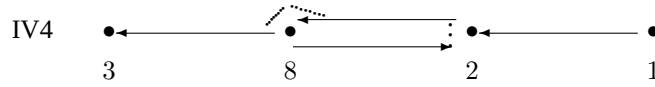
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ \backslash & & / \\ 2 & & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_2[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$



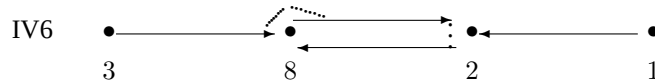
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ \backslash & & / \\ 2 & & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_2[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$



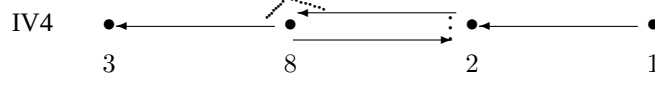
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ \backslash & & / \\ 2 & & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_2[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$



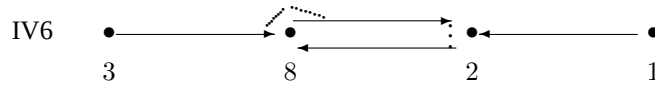
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ \backslash & & / \\ 2 & & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_2[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$



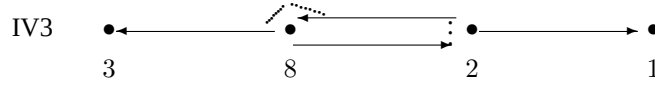
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ \backslash & & / \\ 2 & & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_2[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$



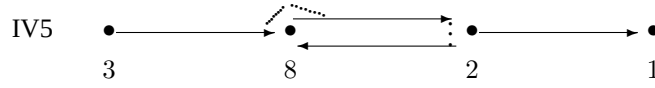
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \\ / \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_2[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$



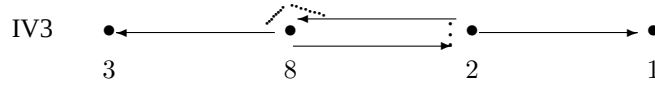
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \\ / \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_2[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$



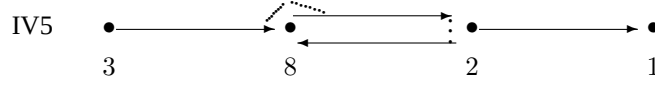
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \\ / \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_2[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$



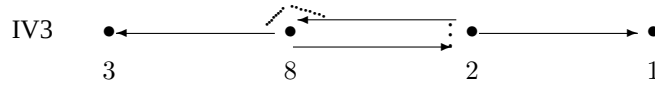
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \\ / \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_2[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$



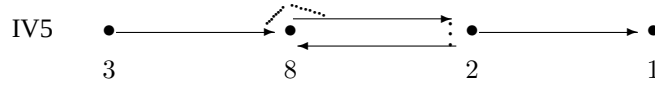
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \\ / \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_2[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ \backslash & / & \backslash \\ 2 & & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_2[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ \backslash & / & \backslash \\ 2 & & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_2[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$



Démonstration La preuve est similaire à celle du cas **(1+2+7+3)** (Lemme 4.4.1).

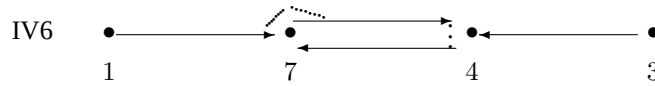
□

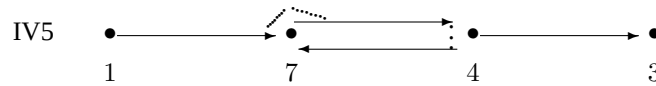
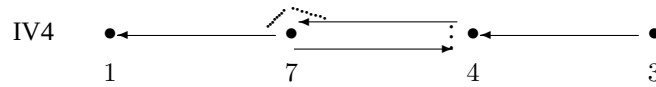
Lemme 4.4.3 (3+4+7+1)

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & / & \sim \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

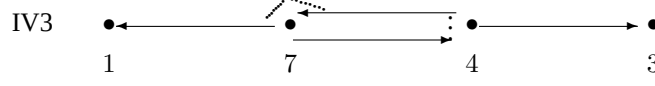
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & / & \sim \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & / & \sim \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$





$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ & 1 & \sim \\ & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \sim \\ 3 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$



Démonstration La preuve est similaire à celle du cas **(1+2+7+3)** (Lemme 4.4.1).

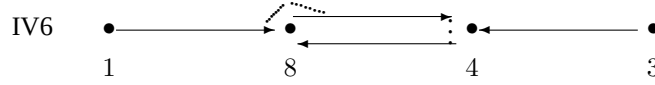
□

Lemme 4.4.4 (3+4+8+1)

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \sim \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_2[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \sim \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_2[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

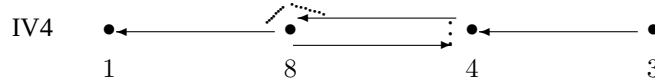
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \sim \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \sim \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_2[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \sim \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_2[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \sim \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_2[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

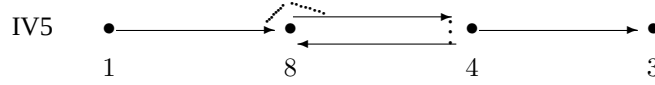
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \sim \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \sim \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_2[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \sim \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \sim \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_2[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_2[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

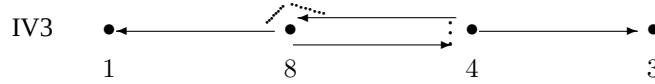
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_2[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_2[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_2[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_2[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$



Démonstration La preuve est similaire à celle du cas **(1+2+7+3)** (Lemme 4.4.1).

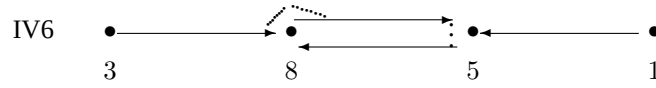
□

Lemme 4.4.5 (1+5+8+3)

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n] \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n+1] \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

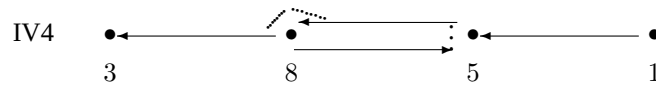
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n-1] \mid n \in \mathbb{Z}\}$$



$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \sim \\ 3 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{ccc} 2 & & 1 \\ & \backslash & / \\ & 3 & 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n-1] \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \sim \\ 3 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ & \searrow & \swarrow \\ & 3 & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n] \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

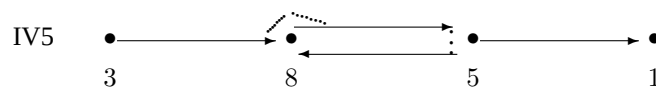
$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \sim \\ 3 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{ccc} 2 & & 1 \\ & \searrow & \swarrow \\ & 3 & 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 3 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n+1] \mid n \in \mathbb{Z}\}$$



$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{ccc} 2 & & 1 \\ & \diagdown & \diagup \\ & 3 & 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n] \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{ccc} 2 & & 1 \\ & \diagdown & \diagup \\ & 3 & \\ & & \diagdown \\ & & 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \sim \\ 2 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n+1] \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

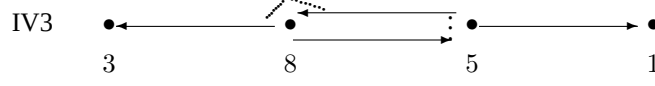
$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{ccc} 2 & & 1 \\ & \diagdown & \diagup \\ & 3 & \\ & & \diagdown \\ & & 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n-1] \mid n \in \mathbb{Z}\}$$



$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{ccc} 2 & & 1 \\ & \diagdown & \diagup \\ & 3 & \\ & & \diagdown \\ & & 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n-1] \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{ccc} 2 & & 1 \\ & \diagdown & \diagup \\ & 3 & 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \sim \\ 2 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n] \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \quad \quad \diagdown \\ \quad \quad 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n+1] \mid n \in \mathbb{Z}\}$$



Démonstration La preuve est similaire à celle du cas **(1+2+7+3)** (Lemme 4.4.1).

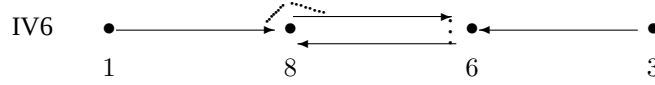
□

Lemme 4.4.6 (3+6+8+1)

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ / \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ / \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

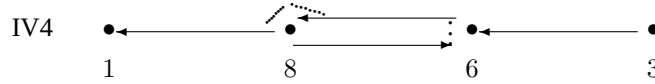
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ / \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ \sim \\ 3 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$$



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ / \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ / \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

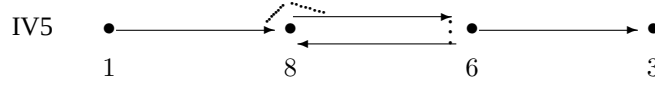
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ / \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ \sim \\ 3 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$$



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ / \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ / \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

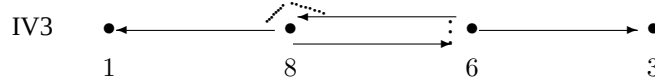
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ / \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$$



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ / \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ / \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ / \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$$



Démonstration La preuve est similaire à celle du cas **(1+2+7+3)** (Lemme 4.4.1).

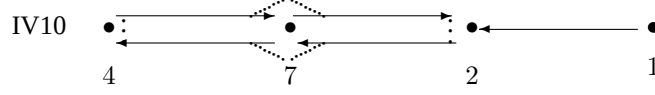
□

Lemme 4.4.7 (1+2+7+4) IV9, IV10

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \\ / \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \\ / \\ 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \\ / \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ / \\ 3 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

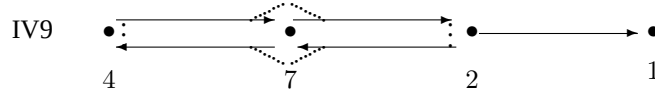
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \\ / \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 2 \\ / \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$



$$\Omega^i \begin{pmatrix} 3 \\ \searrow \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \Omega^i \begin{pmatrix} 1 & & 3 \\ \searrow & \nearrow & \searrow \\ & 2 & 1 \end{pmatrix} \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \begin{pmatrix} 2 & & 3 \\ \searrow & \nearrow & \sim \\ & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \begin{pmatrix} 3 \\ \searrow \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \Omega^i \begin{pmatrix} 1 & & 3 \\ \searrow & \nearrow & \searrow \\ & 2 & 1 \end{pmatrix} \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \begin{pmatrix} 3 & & 1 \\ \sim & \nearrow & \searrow \\ & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \begin{pmatrix} 3 \\ \searrow \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \Omega^i \begin{pmatrix} 1 & & 3 \\ \searrow & \nearrow & \searrow \\ & 2 & 1 \end{pmatrix} \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \begin{pmatrix} 1 & & 2 \\ \searrow & \nearrow & \searrow \\ & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$



Démonstration Le cas **(1+2+7)**(Lemme 4.3.5) implique qu'il existe $i \in \mathbb{Z}$ tel que $M_1 = \Omega^i \begin{pmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{pmatrix}$ ou $M_1 = \Omega^i \begin{pmatrix} 3 \\ \searrow \\ 1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \Omega^i \begin{pmatrix} 1 & & 3 \\ \searrow & \nearrow & \searrow \\ & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\Omega^{-i}M_7 \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag}(S_1)$. Le cas **(4+7)** (Lemme 4.2.18) donne 3 cas

$$\begin{aligned} & \Omega^i \begin{pmatrix} 2 & & 3 \\ \searrow & \nearrow & \sim \\ & 1 & 2 \end{pmatrix} \oplus \Omega^i(M), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag} \begin{pmatrix} & 3 \\ \nearrow & \sim \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ & \Omega^i \begin{pmatrix} 3 & & 1 \\ \sim & \nearrow & \searrow \\ & 2 & 3 \end{pmatrix} \oplus \Omega^i(M), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag} \begin{pmatrix} 1 & & 3 \\ \searrow & \sim & \nearrow \\ & 2 & \end{pmatrix} \\ & \Omega^i \begin{pmatrix} 1 & & 2 \\ \searrow & \nearrow & \searrow \\ & 3 & 1 \end{pmatrix} \oplus \Omega^i(M), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag}(S_1) \end{aligned}$$

Les possibilités sont obtenues en calculant les intersections des diags et sdiags. Les carquois avec relations sont obtenues en collant les deux des cas **(1+2+7)** (Lemme 4.3.5) et **(4+7)**(Lemme 4.2.18) et en utilisant le fait que M_4 est indépendant de $M_1 \oplus M_2$.

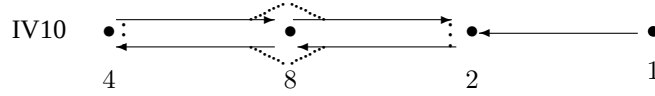
□

Lemme 4.4.8 (1+2+8+4) IV9, IV10

$$\Omega^i \begin{pmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{pmatrix} \oplus \Omega^i \begin{pmatrix} 1 & & 3 \\ \searrow & \nearrow & \searrow \\ & 2 & 1 \end{pmatrix} \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \begin{pmatrix} 2 & & 3 \\ \searrow & \nearrow & \sim \\ & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_2[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_2[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

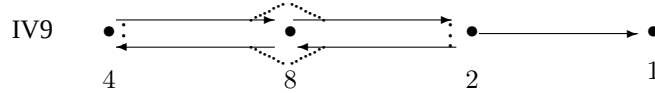
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_2[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_2[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_2[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_2[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$



Démonstration La preuve est similaire à celle du cas **(1+2+7+4)** (Lemme 4.4.7).

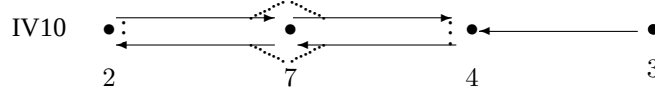
□

Lemme 4.4.9 (3+4+7+2) IV9, IV10

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

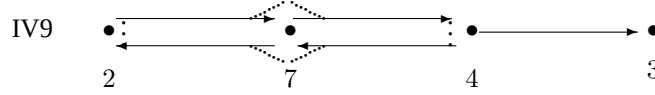
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \\ \nearrow \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \\ \nearrow \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \\ \nearrow \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 2 \\ \nearrow \sim \\ 3 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \\ \nearrow \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \sim \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ \nearrow \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$



Démonstration La preuve est similaire à celle du cas **(1+2+7+4)** (Lemme 4.4.7).

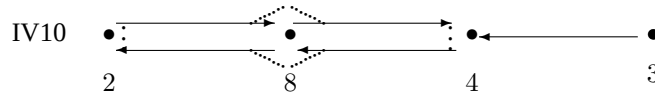
□

Lemme 4.4.10 (3+4+8+2) IV9, IV10

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \\ \nearrow \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \\ \nearrow \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \\ \nearrow \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ \nearrow \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_2[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

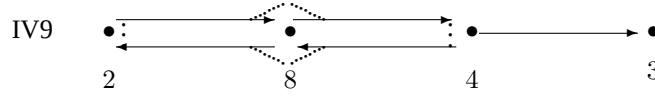
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \\ \nearrow \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \sim \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ \nearrow \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_2[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \\ \nearrow \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \\ \nearrow \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_2[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_2[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \sim \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_2[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$



Démonstration La preuve est similaire à celle du cas **(1+2+7+4)** (Lemme 4.4.7).

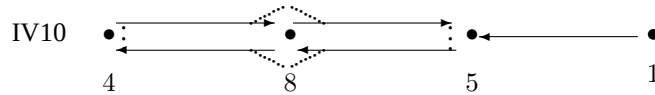
□

Lemme 4.4.11 (1+5+8+4) IV9, IV10

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \sim \\ 3 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \sim \\ 3 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

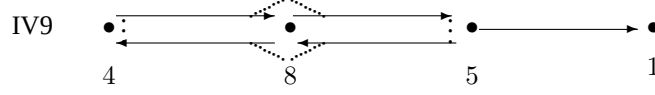
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \sim \\ 3 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_1[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$



Démonstration La preuve est similaire à celle du cas **(1+2+7+4)** (Lemme 4.4.7).

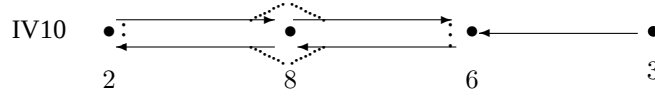
□

Lemme 4.4.12 (3+6+8+2) IV9, IV10

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & & / \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ \backslash & & / \\ 2 & & 1 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & & / \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 & & 2 \\ \backslash & & / \\ 1 & & 3 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

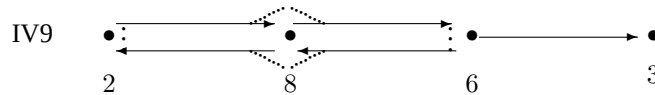
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & & / \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ \backslash & & / \\ 3 & & 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & & / \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ \backslash & & / \\ 2 & & 1 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & & / \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 & & 2 \\ \backslash & & / \\ 1 & & 3 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & & / \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ \backslash & & / \\ 3 & & 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$



Démonstration La preuve est similaire à celle du cas **(1+2+7+4)** (Lemme 4.4.7).

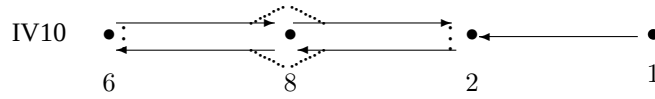
□

Lemme 4.4.13 (1+2+8+6) IV9, IV10

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ \backslash & / & \backslash \\ 2 & & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & / & \backslash \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 & & 2 \\ \backslash & / & \sim \\ 1 & & 3 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & / & \backslash \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

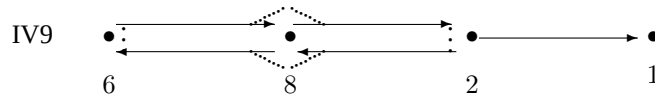
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ \sim \\ 3 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ \backslash & / & \backslash \\ \sim & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & / & \backslash \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$$



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ \backslash & / & \backslash \\ 2 & & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & / & \backslash \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ \sim \\ 3 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 & & 2 \\ \backslash & / & \sim \\ 1 & & 3 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & / & \backslash \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ \backslash & / & \backslash \\ \sim & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & / & \backslash \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$$



Démonstration Combiner la cas **(1+2+8)**(Lemme 4.3.6) et **(2+6+8)** (Lemme 4.3.20) et constater que $M_1 \oplus M_2$ est indépendant de M_6 .

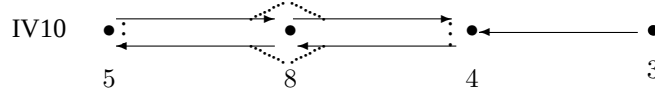
□

Lemme 4.4.14 (3+4+8+5) IV9, IV10

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & / & \sim \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ \backslash & / & \backslash \\ \sim & & 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n] \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 & & 1 \\ \sim & \diagdown & \\ 2 & & 3 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ & \diagdown & \\ 3 & & 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n+1] \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

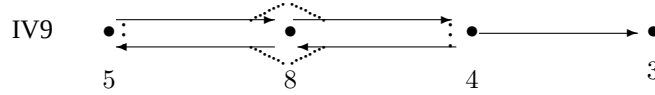
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \diagdown \\ 3 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 2 \\ & \diagdown & \\ 3 & & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ & \diagdown & \\ 3 & & 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n-1] \mid n \in \mathbb{Z}\}$$



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \diagdown & & \sim \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ & \diagdown & \\ 3 & & 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n] \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \diagdown \\ 3 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 & & 1 \\ \sim & \diagdown & \\ 2 & & 3 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ & \diagdown & \\ 3 & & 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n+1] \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \diagdown \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 2 \\ & \diagdown & \\ 3 & & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ & \diagdown & \\ 3 & & 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n-1] \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

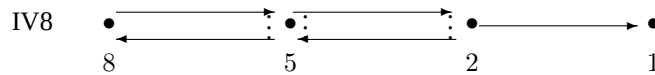


Démonstration La preuve est similaire à celle du cas **(1+2+8+6)** (Lemme 4.4.13).

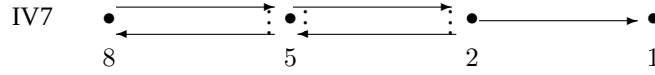
□

Lemme 4.4.15 (1+2+5+8) IV7, IV8

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \sim \\ 3 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ \sim & \diagdown & \\ 3 & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ & \diagdown & \\ 3 & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \text{sdiag}(S_2)$$



$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \searrow \sim \\ 3 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \searrow \nearrow \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \text{sdiag}(S_2)$$



Démonstration Le cas **(2+5+8)**(Lemme 4.3.13) implique qu'il existe $i \in \mathbb{Z}$ tel que

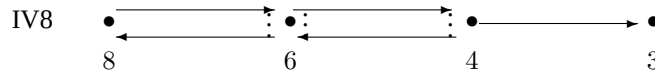
$$M_2 = \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \searrow \sim \\ 3 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array} \right), \quad M_5 = \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \searrow \nearrow \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array} \right) \quad \text{et} \quad \Omega^{-i} M_8 \in \text{sdiag}(S_2).$$

Le cas **(1+2)** (Lemme 4.2.2) montre que si $M_5 = \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \searrow \nearrow \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array} \right)$, alors $M_1 = \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \searrow \sim \\ 3 \end{array} \right)$ ou $M_1 = \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array} \right)$ et le cas **(1+5+8)** (Lemme 4.3.11) montre que M_1, M_5 et M_8 sont compatibles.

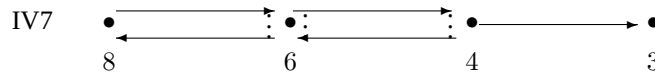
□

Lemme 4.4.16 (3+4+6+8) IV7, IV8

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \searrow \nearrow \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \searrow \sim \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \searrow \nearrow \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \searrow \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \text{diag}(S_2)$$



$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \searrow \sim \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \searrow \nearrow \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \searrow \sim \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \searrow \nearrow \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \searrow \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \text{diag}(S_2)$$

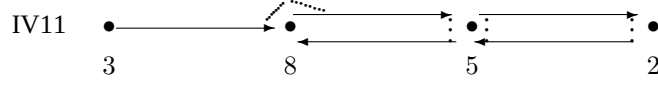


Démonstration La preuve est similaire à celle du cas **(1+2+5+8)** (Lemme 4.4.15).

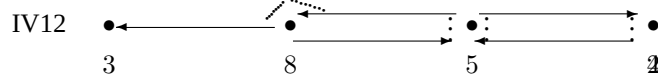
□

Lemme 4.4.17 (2+5+8+3) IV11, IV12

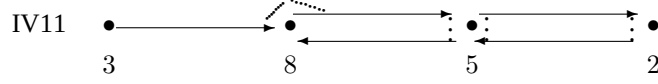
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \sim \begin{smallmatrix} 1 \\ / \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ / \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n] \mid n \in \mathbb{Z}\}$$



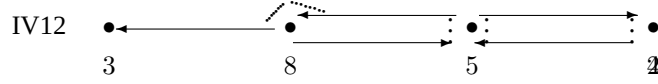
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \sim \begin{smallmatrix} 1 \\ / \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ / \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n-1] \mid n \in \mathbb{Z}\}$$



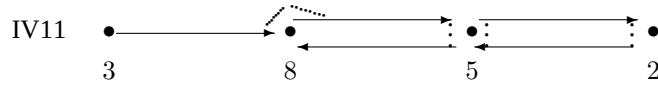
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \sim \begin{smallmatrix} 1 \\ / \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ / \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n+1] \mid n \in \mathbb{Z}\}$$



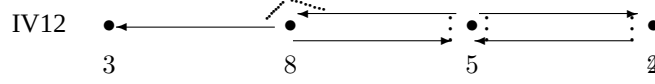
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \sim \begin{smallmatrix} 1 \\ / \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ / \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n] \mid n \in \mathbb{Z}\}$$



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \sim \begin{smallmatrix} 1 \\ / \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ / \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n-1] \mid n \in \mathbb{Z}\}$$



$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n+1] \mid n \in \mathbb{Z}\}$$



Démonstration Le cas **(2+5+8)**(Lemme 4.3.13) montre qu'il existe $i \in \mathbb{Z}$ tel que

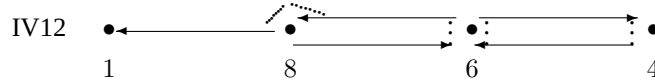
$$M_2 = \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \right), M_5 = \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \right) \text{ et } \Omega^{-i} M_8 \in \text{sdiag}(S_2)$$

et on utilise la description du cas **(3+8)**(Lemme 4.2.15) donnée dans la preuve du cas **(3+8+2)** (Lemme 4.3.27). En calculant les intersections des diag et sdiag, on obtient les possibilités dans l'énoncé. Comme M_3 est indépendant de $M_2 \oplus M_5$, on obtient les carquois avec relations.

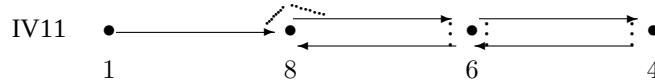
□

Lemme 4.4.18 (4+6+8+1) IV11, IV12

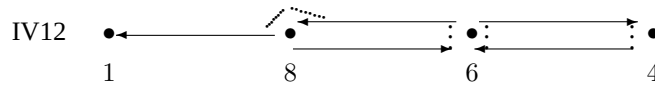
$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$$



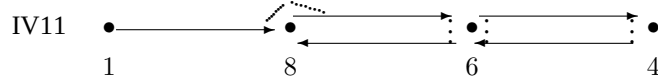
$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$$



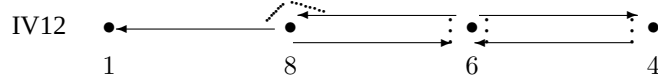
$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$$



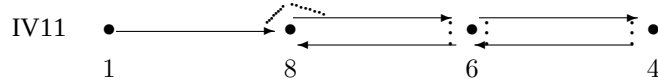
$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ / \\ 2 \end{array} \sim \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ / \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$$



$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ / \\ 2 \end{array} \sim \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ / \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$$



$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ / \\ 2 \end{array} \sim \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ / \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$$



Démonstration La preuve est similaire à celle du cas **(2+5+8+3)** (Lemme 4.4.17).

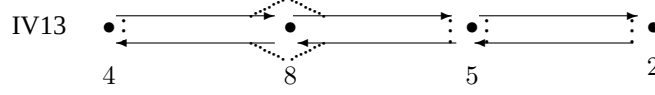
□

Lemme 4.4.19 (2+5+8+4) IV13

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ / \\ 2 \end{array} \sim \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ / \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ / \\ 2 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n] \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ / \\ 2 \end{array} \sim \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ / \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ / \\ 3 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n+1] \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ / \\ 2 \end{array} \sim \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ / \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ / \\ 1 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n-1] \mid n \in \mathbb{Z}\}$$



Démonstration Le cas **(2+5+8)**(Lemme 4.3.13) montre qu'il existe $i \in \mathbb{Z}$ tel que

$$M_2 = \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right), \quad M_5 = \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right) \quad \text{et} \quad \Omega^{-i}(M_8) \in \text{sdiag}(S_2).$$

Le cas **(4+8)**(Lemme 4.2.19) montre que

- (i) $M_4 = \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \right)$ et $\Omega^{-i}M_8 \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag}(S_2)$
- (ii) $M_4 = \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \right)$ et $\Omega^{-i}M_8 \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag} \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \right)$
- (iii) $M_4 = \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \right)$ et $\Omega^{-i}M_8 \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \right)$

En calculant les intersections des diags et sdiags, on obtient les possibilités dans l'énoncé et en remarquant que M_4 est indépendant de $M_2 \oplus M_5$, on obtient les carquois avec relations.

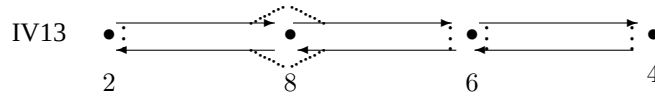
□

Lemme 4.4.20 (4+6+8+2) IV13

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$$



Démonstration La preuve est similaire à celle du cas **(2+5+8+4)** (Lemme 4.4.19).

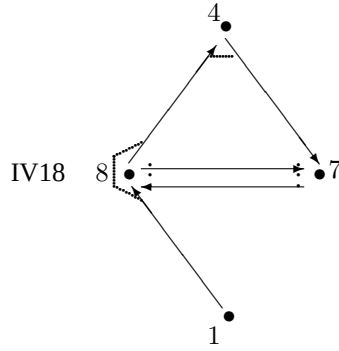
□

Lemme 4.4.21 (1+7+8+4) IV17,18

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \searrow \quad \nearrow \\ 1 \quad 3 \\ \quad \quad \sim \\ \quad \quad 2 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2])$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \sim \quad \nearrow \\ 21 \quad 1 \\ \quad \quad \searrow \\ \quad \quad 3 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2])$$

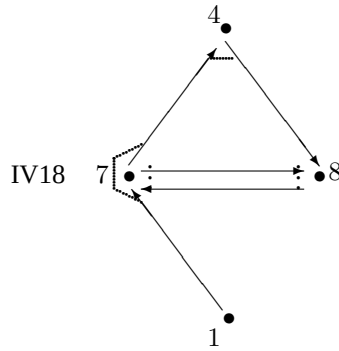
$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \searrow \quad \nearrow \\ 3 \quad 2 \\ \quad \quad \searrow \\ \quad \quad 1 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2])$$



$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \searrow \quad \nearrow \\ 1 \quad 3 \\ \quad \quad \sim \\ \quad \quad 2 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1])$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \searrow \quad \nearrow \\ 1 \quad 2 \\ \quad \quad \sim \\ \quad \quad 3 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1])$$

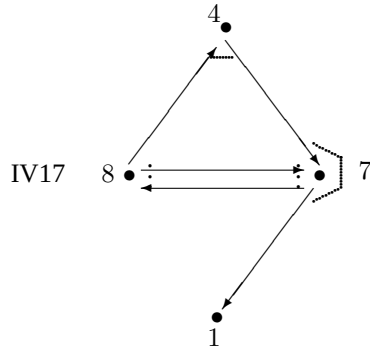
$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \searrow \quad \nearrow \\ 3 \quad 2 \\ \quad \quad \searrow \\ \quad \quad 1 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1])$$



$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \searrow \quad \nearrow \\ 1 \quad 3 \\ \sim \quad \searrow \\ 2 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2])$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \searrow \quad \nearrow \\ 1 \quad 2 \\ \sim \quad \searrow \\ 3 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_1[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2])$$

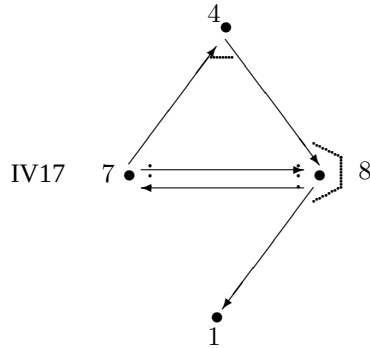
$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \searrow \quad \nearrow \\ 3 \quad 2 \\ \searrow \quad \nearrow \\ 1 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2])$$



$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \searrow \quad \nearrow \\ 1 \quad 3 \\ \sim \quad \searrow \\ 2 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1])$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \searrow \quad \nearrow \\ 1 \quad 2 \\ \sim \quad \searrow \\ 3 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_1[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1])$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \searrow \quad \nearrow \\ 3 \quad 2 \\ \searrow \quad \nearrow \\ 1 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1])$$



Démonstration Le cas **(1+7+8)**(Lemme 4.3.15) montre qu'il existe $i \in \mathbb{Z}$ tel que

- (i) $M_1 = \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \right)$, $M_7 = \Omega^i M$ et $M_8 = \Omega^i N$ avec $M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag}(S_1)$ et $N = \Omega([-1]M[2])$
- (ii) $M_1 = \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \right)$, $M_7 = \Omega^i M$ et $M_8 = \Omega^i N$ avec $M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag}(S_1)$ et $N = \Omega([2]M[-1])$
- (iii) $M_1 = \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \right)$, $M_7 = \Omega^i M$ et $M_8 = \Omega^i N$ avec $M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag} \left(\begin{smallmatrix} 2 & \sim & 1 \\ & 3 & / \end{smallmatrix} \right)$ et $N = \Omega([-1]M[2])$
- (iv) $M_1 = \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \right)$, $M_7 = \Omega^i M$ et $M_8 = \Omega^i N$ avec $M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{sdiag} \left(\begin{smallmatrix} 2 & \sim & 1 \\ & 3 & / \end{smallmatrix} \right)$ et $N = \Omega([2]M[-1])$

Le cas **(4+7+8)**(Lemme 4.3.18) montre qu'il existe $i \in \mathbb{Z}$ tel que

- (i) $M_4 = \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & \searrow & 3 \\ & 1 & / \\ & & \sim \\ & & 2 \end{smallmatrix} \right)$, $M_7 = \Omega^i M$ et $M_8 = \Omega^i N$ avec $M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag} \left(\begin{smallmatrix} 2 & \searrow & 3 \\ & 1 & / \\ & & \sim \\ & & 2 \end{smallmatrix} \right)$ et $N = \Omega([-1]M[2])$
- (ii) $M_4 = \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 & \sim & 1 \\ & 2 & / \\ & & \searrow \\ & & 3 \end{smallmatrix} \right)$, $M_7 = \Omega^i M$ et $M_8 = \Omega^i N$ avec $M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag} \left(\begin{smallmatrix} 1 & \searrow & 3 \\ & 2 & / \\ & & \sim \\ & & 3 \end{smallmatrix} \right)$ et $N = \Omega([-1]M[2])$
- (iii) $M_4 = \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & \searrow & 2 \\ & 3 & / \\ & & \searrow \\ & & 1 \end{smallmatrix} \right)$, $M_7 = \Omega^i M$ et $M_8 = \Omega^i N$ avec $M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag}(S_1)$ et $N = \Omega([-1]M[2])$
- (iv) $M_4 = \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & \searrow & 3 \\ & 1 & / \\ & & \sim \\ & & 2 \end{smallmatrix} \right)$, $M_7 = \Omega^i M$ et $M_8 = \Omega^i N$ avec $M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag} \left(\begin{smallmatrix} 2 & \searrow & 3 \\ & 1 & / \\ & & \sim \\ & & 2 \end{smallmatrix} \right)$ et $N = \Omega([2]M[-1])$
- (v) $M_4 = \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 & \sim & 1 \\ & 2 & / \\ & & \searrow \\ & & 3 \end{smallmatrix} \right)$, $M_7 = \Omega^i M$ et $M_8 = \Omega^i N$ avec $M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag} \left(\begin{smallmatrix} 1 & \searrow & 3 \\ & 2 & / \\ & & \sim \\ & & 3 \end{smallmatrix} \right)$ et $N = \Omega([2]M[-1])$
- (vi) $M_4 = \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & \searrow & 2 \\ & 3 & / \\ & & \searrow \\ & & 1 \end{smallmatrix} \right)$, $M_7 = \Omega^i M$ et $M_8 = \Omega^i N$ avec $M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag}(S_1)$ et $N = \Omega([2]M[-1])$

En calculant les intersections des diag et sdiag, on obtient les 12 possibilités dans l'énoncé. Comme M_1 est indépendant de M_4 , on colle le carquois avec relations de **(4+7+8)**(Lemme 4.3.18) avec celui de **(1+7+8)**(Lemme 4.3.15) en annulant le composé de M_4 à M_1 ou celui de la direction réciproque.

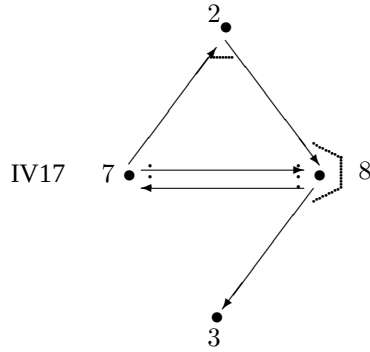
□

Lemme 4.4.22 (3+7+8+2) IV17,18

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ & \backslash & / \\ & 2 & 1 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2])$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 & & 2 \\ & \backslash & / \\ & 1 & 3 \end{smallmatrix} \sim \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2])$$

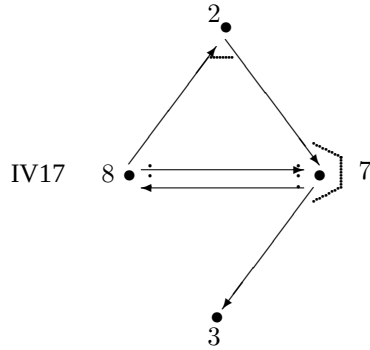
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ & \backslash & / \\ & 3 & 2 \end{smallmatrix} \sim \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2])$$



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ & \backslash & / \\ & 2 & 1 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1])$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 & & 2 \\ & \backslash & / \\ & 1 & 3 \end{smallmatrix} \sim \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1])$$

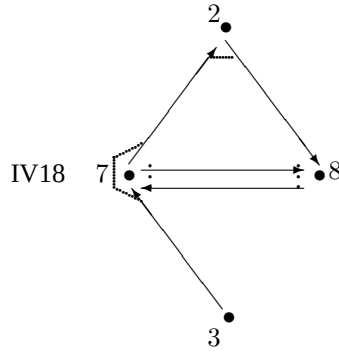
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ & \backslash & / \\ & 3 & 2 \end{smallmatrix} \sim \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1])$$



$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{ccc} 1 & & 3 \\ & \searrow & \swarrow \\ & 2 & 1 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2])$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{ccc} 3 & & 2 \\ & \searrow & \swarrow \\ & 1 & \sim \\ & & 3 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2])$$

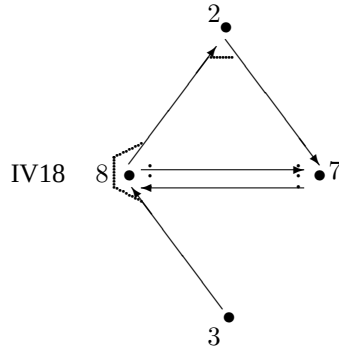
$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{ccc} 2 & & 1 \\ & \sim & \swarrow \\ & 3 & 2 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2])$$



$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{ccc} 1 & & 3 \\ & \searrow & \swarrow \\ & 2 & 1 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1])$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{ccc} 3 & & 2 \\ & \searrow & \swarrow \\ & 1 & \sim \\ & & 3 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1])$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{ccc} 2 & & 1 \\ & \sim & \swarrow \\ & 3 & 2 \end{array} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1])$$



Démonstration La preuve est simiaire à celle du cas **(1+7+8+4)** (Lemme 4.4.21).

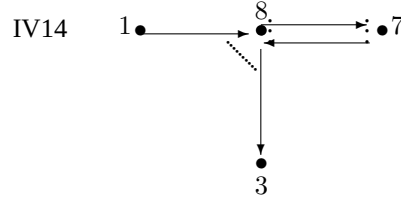
□

Lemme 4.4.23 (1+7+8+3) IV1, IV2, IV14

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2])$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2])$$

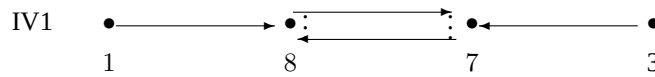
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 3 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2])$$



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2])$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2])$$

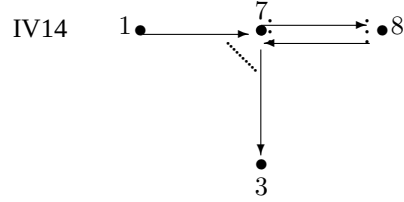
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 3 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2])$$



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1])$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1])$$

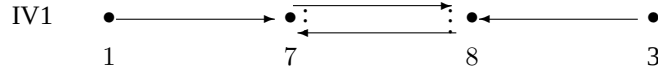
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 3 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1])$$



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1])$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1])$$

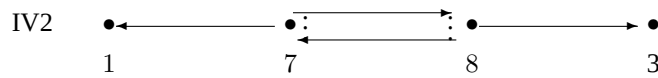
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 3 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1])$$



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2])$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2])$$

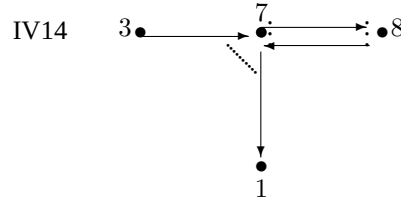
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 3 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_1[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2])$$



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2])$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_1[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2])$$

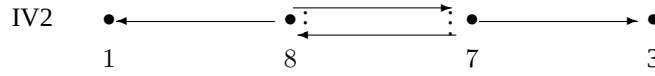
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 3 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2])$$



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1])$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1])$$

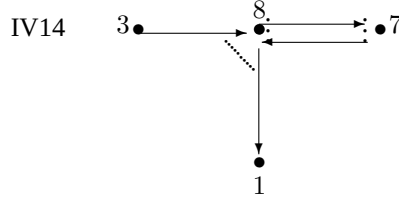
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 3 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_1[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1])$$



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1])$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_1[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1])$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \searrow \\ 3 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1])$$



Démonstration En regardant le cas **(1+7+8)** (Lemme 4.3.15), on fixe M_1 , M_7 et M_8 . Pour chaque cas de **(1+7+8)** parmi les quatres, il existe six cas pour **(3+7+8)** (Lemme 4.3.17). En effet, si $M_8 = \Omega([-1]M_7[2])$, alors le cas **(3+7+8)** donne

(i)

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N), \quad M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag}(S_1), N = \Omega([-1]M[2])$$

(ii)

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N), \quad M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag} \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \swarrow \backslash \sim \\ 1 \quad 2 \end{smallmatrix} \right), N = \Omega([-1]M[2])$$

(iii)

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N), \quad M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \sim \swarrow 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \right), N = \Omega([-1]M[2])$$

(iv)

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N), \quad M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} n \text{diag} \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \swarrow \backslash \sim \\ 1 \quad 2 \end{smallmatrix} \right), N = \Omega([-1]M[2])$$

(v)

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N), \quad M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \sim \swarrow 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \right), N = \Omega([-1]M[2])$$

(vi)

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N), \quad M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag}(S_1), N = \Omega([-1]M[2])$$

si $M_8 = \Omega([2]M_7[-1])$, alors le cas **(3+7+8)** (Lemme 4.3.17) donne

(i)

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N), \quad M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag}(S_1), N = \Omega([2]M[-1])$$

(ii)

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N), \quad M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag} \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \swarrow \backslash \sim \\ 1 \quad 2 \end{smallmatrix} \right), N = \Omega([2]M[-1])$$

(iii)

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N), \quad M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \sim \swarrow 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \right), N = \Omega([2]M[-1])$$

(iv)

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \searrow \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N), \quad M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag} \left(\begin{array}{c} 3 \\ \nearrow \searrow \\ 1 \quad 2 \end{array} \right), \quad N = \Omega([2]M[-1])$$

(v)

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N), \quad M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag} \left(\begin{array}{c} 1 \quad \searrow \quad 3 \\ \quad \nearrow \quad 2 \end{array} \right), \quad N = \Omega([2]M[-1])$$

(vi)

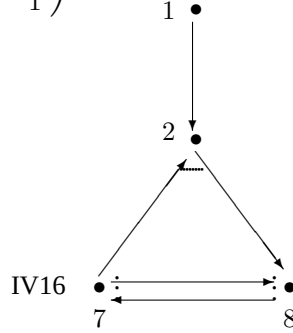
$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N), \quad M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag}(S_1), \quad N = \Omega([2]M[-1])$$

Les carquois avec relations s'obtiennent par coller ceux du cas **(1+7+8)** (Lemme 4.3.15) et du cas **(3+7+8)** (Lemme 4.3.17) en constatant que M_1 est indépendant de M_3 .

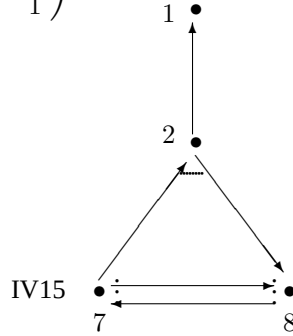
□

Lemme 4.4.24 (1+2+7+8) IV15, IV16

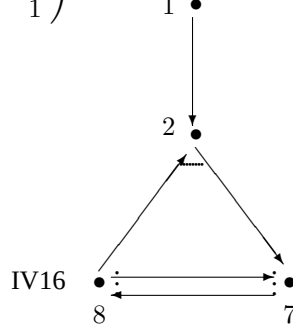
$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 3 \\ \searrow \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag}(S_1), \quad N = \Omega([-1]M[2])$$



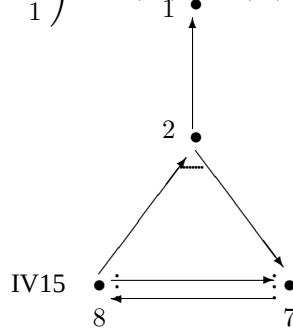
$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \searrow \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \searrow \\ 2 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 3 \\ \searrow \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag}(S_1), \quad N = \Omega([-1]M[2])$$



$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag}(S_1), N = \Omega([2]M[-1])$$



$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag}(S_1), N = \Omega([2]M[-1])$$

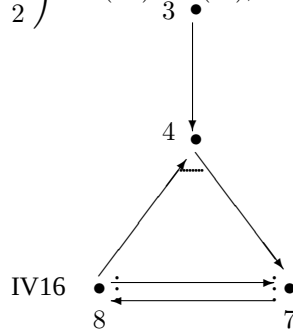


Démonstration Les possibilités sont obtenues en combinant les cas **(2+7+8)** (Lemme 4.3.16) et **(1+2)** (Lemme 4.2.2) et le cas **(1+7+8)** (Lemme 4.3.15) montre que les modules M_1 , M_7 et M_8 ainsi obtenus sont compatibles. Pour le carquois avec relations, on vérifie que le morphisme explicite de M_1 vers M_7 ou M_8 (resp. de M_7 ou M_8 vers M_1) est un composé de deux autres morphismes explicites passant par M_2 .

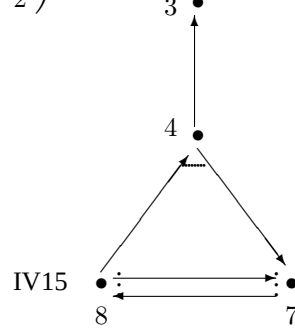
□

Lemme 4.4.25 (3+4+7+8) IV15, IV16

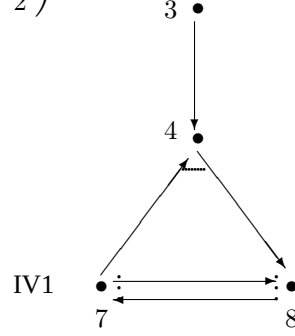
$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag} \left(\begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right), N = \Omega([-1]M[2])$$



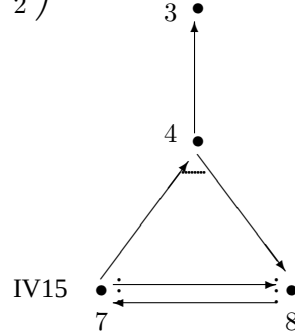
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag} \left(\begin{smallmatrix} \nearrow 3 \\ 1 \quad \backslash 2 \end{smallmatrix} \right), N = \Omega([-1]M[2])$$



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag} \left(\begin{smallmatrix} \nearrow 3 \\ 1 \quad \backslash 2 \end{smallmatrix} \right), N = \Omega([2]M[-1])$$



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^{6n} \text{diag} \left(\begin{smallmatrix} \nearrow 3 \\ 1 \quad \backslash 2 \end{smallmatrix} \right), N = \Omega([2]M[-1])$$

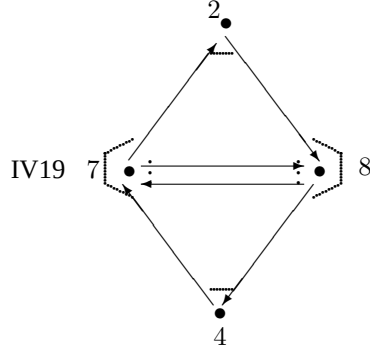


Démonstration La preuve est similaire à celle du cas **(1+2+7+8)** (Lemme 4.4.24).

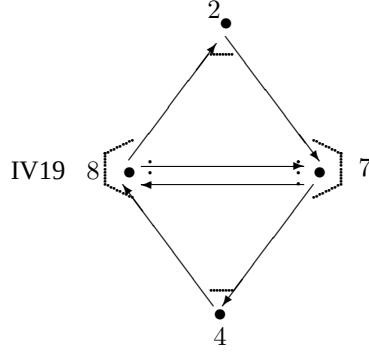
□

Lemme 4.4.26 (2+7+8+4) IV19

$$\begin{aligned}
& \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \backslash \quad / \\ 2 \quad 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \backslash \quad / \quad \sim \\ 1 \quad 2 \end{array} \right), \\
& i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2]) \\
& \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \backslash \quad / \\ 2 \quad 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \quad 1 \\ \backslash \quad / \quad \sim \\ 2 \quad 3 \end{array} \right) \\
& i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2]) \\
& \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \backslash \quad / \\ 2 \quad 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \backslash \quad / \\ 3 \quad 1 \end{array} \right) \\
& i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2])
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \backslash \quad / \\ 2 \quad 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \backslash \quad / \quad \sim \\ 1 \quad 2 \end{array} \right) \\
& i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1]) \\
& \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \backslash \quad / \\ 2 \quad 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \quad 1 \\ \backslash \quad / \quad \sim \\ 2 \quad 3 \end{array} \right) \\
& i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1]) \\
& \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \backslash \quad / \\ 2 \quad 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \backslash \quad / \\ 3 \quad 1 \end{array} \right) \\
& i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1])
\end{aligned}$$



Démonstration Le cas **(2+7+8)** (Lemme 4.3.16) montre qu'il existe $i \in \mathbb{Z}$ tel que $M_2 = \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ & 2 & \\ & & 1 \end{smallmatrix} \right)$, $\Omega^{-i}M_7 \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^n \text{sdiag}(S_1)$ et $M_8 = \Omega([-1]M_7[2])$ ou $M_8 = \Omega([2]M_7[-1])$. Le cas **(4+7+8)** (Lemme 4.3.18) montre que

- (i) $M_4 = \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ & 1 & \\ & & 2 \end{smallmatrix} \right)$, $\Omega^{-i}M_7 \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^n \text{diag} \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix} \right)$ et $M_8 = \Omega([-1]M_7[2])$ ou $M_8 = \Omega([2]M_7[-1])$.
- (ii) $M_2 = \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 & & 1 \\ & 2 & \\ & & 3 \end{smallmatrix} \right)$, $\Omega^{-i}M_7 \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^n \text{diag} \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ & 2 & \\ & & 2 \end{smallmatrix} \right)$ et $M_8 = \Omega([-1]M_7[2])$ ou $M_8 = \Omega([2]M_7[-1])$.
- (i) $M_2 = \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 2 \\ & 3 & \\ & & 1 \end{smallmatrix} \right)$, $\Omega^{-i}M_7 \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^n \text{diag}(S_1)$ et $M_8 = \Omega([-1]M_7[2])$ ou $M_8 = \Omega([2]M_7[-1])$.

En calculant les intersections des diag et sdiag , on obtient les possibilités dans l'énoncé et en constatant que M_2 et M_4 sont indépendents, le composé du morphisme explicite de M_7 à M_2 avec celui de M_4 à M_7 est nul dans la catégorie stable, item pour le composé du morphisme explicite de M_2 à M_8 avec celui de M_8 à M_4 et on colle les deux triangles.

□

4.5 Cinq facteurs

Lemme 4.5.1 (1+2+7+4+3) V_5, V_6, V_7

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \quad 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagup \\ 1 \quad 3 \quad 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \right)$$

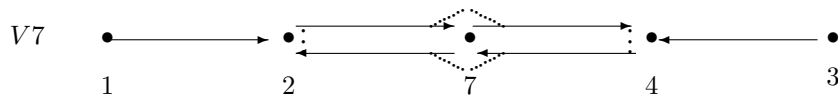
$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \sim \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ 3 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \sim \\ 2 \end{array} \right)$$

$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \right)$$

$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$



$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ 2 \end{array} \sim \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \sim \right)$$

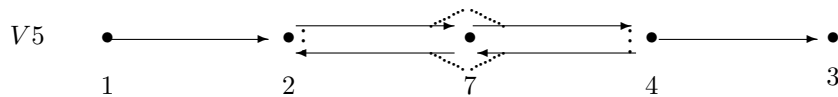
$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \sim \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \right)$$

$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \right)$$

$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

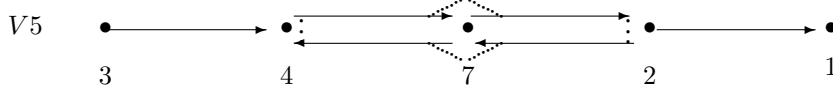


$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{ccc} 1 & & 3 \\ & \diagdown & \diagup \\ & 2 & 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{ccc} 2 & & 3 \\ & \diagdown & \diagup \\ & 1 & \sim 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \right)$$

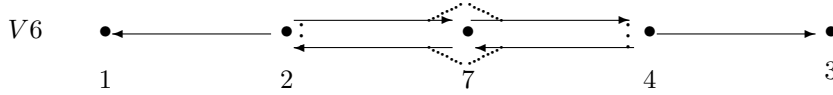
$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ & \diagdown & \diagup \\ & 2 & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 & & 1 \\ & \sim \diagdown & \diagup \\ & 2 & 3 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \diagdown \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right)$$

$$\begin{aligned}
& i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\} \\
& \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \backslash \quad / \\ 2 \quad 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \backslash \quad / \\ 3 \quad 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \right) \\
& i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \backslash \quad / \\ 2 \quad 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \backslash \quad / \\ 1 \quad \sim \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ \sim \\ 2 \end{array} \right) \\
& i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\} \\
& \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \backslash \quad / \\ 2 \quad 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \quad 1 \\ \backslash \quad / \\ \sim \\ 2 \quad 3 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \right) \\
& i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\} \\
& \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \backslash \quad / \\ 2 \quad 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \backslash \quad / \\ 3 \quad 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right) \\
& i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}
\end{aligned}$$

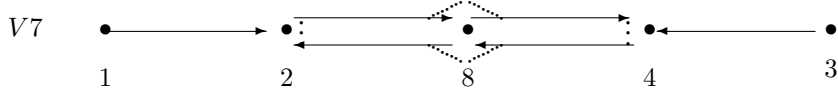


Démonstration Le cas **(1+2+7+4)** (Lemme 4.4.7) donne les possibilités des modules M_1, M_2, M_7 et M_4 , le cas **(3+4+7)** (Lemme 4.3.7) donne le module M_3 selon le module M_4 et M_7 trouvés. Comme $M_1 \oplus M_2$ est indépendant de $M_3 \oplus M_4$, les modules trouvés sont bien compatibles.

□

Lemme 4.5.2 (1+2+8+4+3) V5, V6, V7

$$\begin{aligned}
& \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \backslash \quad / \\ 2 \quad 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \backslash \quad / \\ 1 \quad \sim \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right) \\
& i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_2[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\} \\
& \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \backslash \quad / \\ 2 \quad 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \quad 1 \\ \backslash \quad / \\ \sim \\ 2 \quad 3 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ \sim \\ 2 \end{array} \right) \\
& i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_2[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\} \\
& \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \backslash \quad / \\ 2 \quad 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \backslash \quad / \\ 3 \quad 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \right) \\
& i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_2[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}
\end{aligned}$$



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ \backslash & / & \backslash \\ 2 & & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & / & \sim \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right)$$

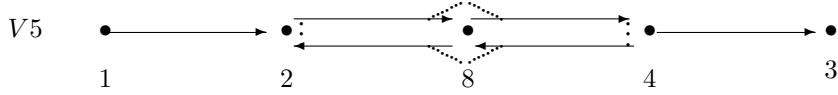
$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_2[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ \backslash & / & \backslash \\ 2 & & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 & & 1 \\ \sim & / & \backslash \\ 2 & & 3 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \right)$$

$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_2[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ \backslash & / & \backslash \\ 2 & & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 2 \\ \backslash & / & \backslash \\ 3 & & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$$

$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_2[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ \backslash & / & \backslash \\ 2 & & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & / & \sim \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$$

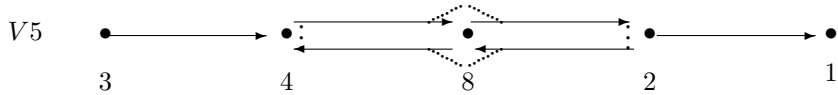
$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_2[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ \backslash & / & \backslash \\ 2 & & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 & & 1 \\ \sim & / & \backslash \\ 2 & & 3 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right)$$

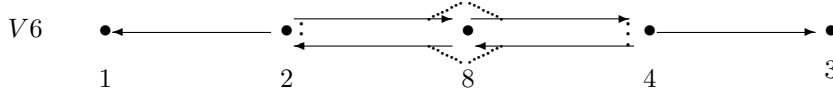
$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_2[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ \backslash & / & \backslash \\ 2 & & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 2 \\ \backslash & / & \backslash \\ 3 & & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \right)$$

$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_2[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$



$$\begin{aligned}
& \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ \backslash & / & \backslash \\ & 2 & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & / & \backslash \\ & 1 & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \\
& \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_2[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\} \\
& \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ \backslash & / & \backslash \\ & 2 & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 & & 1 \\ \backslash & / & \backslash \\ & 2 & 3 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \right) \\
& \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_2[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\} \\
& \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ \backslash & / & \backslash \\ & 2 & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 2 \\ \backslash & / & \backslash \\ & 3 & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \\
& \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_2[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}
\end{aligned}$$



Démonstration La preuve est similaire à celle du cas **(1+2+7+4+3)** (Lemme 4.5.12).

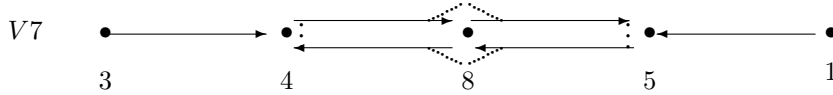
□

Lemme 4.5.3 (3+4+8+5+1) V5, V6, V7

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & / & \backslash \\ & 1 & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ \backslash & / & \backslash \\ & 3 & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n] \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 & & 1 \\ \backslash & / & \backslash \\ & 2 & 3 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ \backslash & / & \backslash \\ & 3 & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n+1] \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 2 \\ \backslash & / & \backslash \\ & 3 & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ \backslash & / & \backslash \\ & 3 & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n-1] \mid n \in \mathbb{Z}\}$$



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & / & \backslash \\ & 1 & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ \backslash & / & \backslash \\ & 3 & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n] \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

Démonstration La preuve combine les cas **(3+4+8+5)** (Lemme 4.4.14) et **(8+5+1)** (Lemme 4.3.11) en constatant que $M_3 \oplus M_4$ est indépendant de $M_5 \oplus M_1$. Cette preuve est similaire à celle du cas **(1+2+7+4+3)** (Lemme 4.5.1).

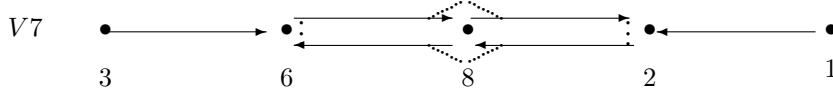
□

Lemme 4.5.4 (3+6+8+2+1) V5, V6, V7

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & & \backslash \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ \backslash & & \backslash \\ 2 & & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & & \backslash \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 & & 2 \\ \backslash & & \sim \\ 1 & & 3 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

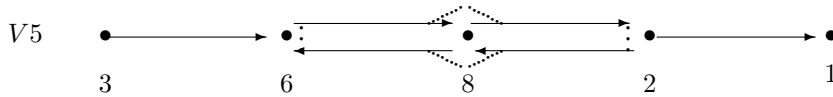
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & & \backslash \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ \sim & & \backslash \\ 3 & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \sim \\ 3 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$$



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & & \backslash \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ \backslash & & \backslash \\ 2 & & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & & \backslash \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 & & 2 \\ \backslash & & \sim \\ 1 & & 3 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \sim \\ 3 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

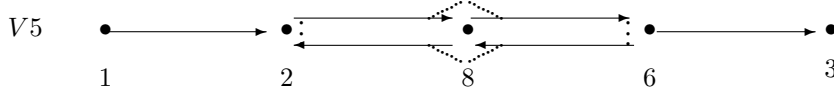
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & & \backslash \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ \sim & & \backslash \\ 3 & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$$



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & & \backslash \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ \backslash & & \backslash \\ 2 & & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & & \backslash \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 & & 2 \\ \backslash & & \sim \\ 1 & & 3 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

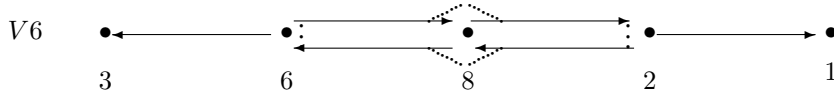
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & / & \backslash \\ & 1 & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ \backslash & / & \backslash \\ & 3 & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \sim \\ 3 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$$



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & / & \backslash \\ & 1 & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ \backslash & / & \backslash \\ & 2 & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & / & \backslash \\ & 1 & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 & & 2 \\ \backslash & / & \backslash \\ & 1 & 3 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \sim \\ 3 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & / & \backslash \\ & 1 & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ \backslash & / & \backslash \\ & 3 & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right), \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$$



Démonstration La preuve combine les cas **(6+8+2+1)** (Lemme 4.4.13) et **(3+6+8)** (Lemme 4.3.12).

□

Lemme 4.5.5 (1+2+5+8+3) V1, V2, V3, V4

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \sim \\ 3 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ \backslash & / & \backslash \\ & 3 & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ \backslash & / & \backslash \\ & 3 & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \sim \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$$

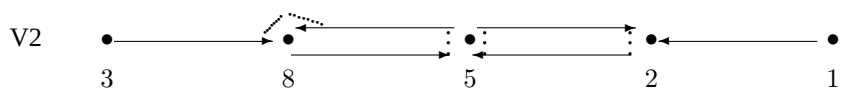
$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n] \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \sim \\ 3 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ \backslash & / & \backslash \\ & 3 & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ \backslash & / & \backslash \\ & 3 & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right)$$

$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n+1] \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \sim \\ 3 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ \backslash & / & \backslash \\ & 3 & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ \backslash & / & \backslash \\ & 3 & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \sim \\ 3 \end{smallmatrix} \right)$$

$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n-1] \mid n \in \mathbb{Z}\}$$



$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \sim \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \diagup \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right)$$

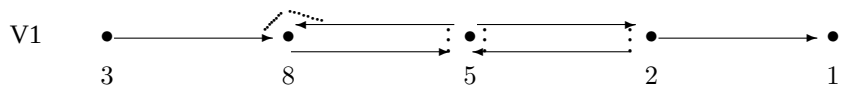
$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n] \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \sim \\ 3 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ \sim & \nearrow & \searrow \\ 3 & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ & \nearrow & \searrow \\ 3 & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right)$$

$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n+1] \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \sim \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \right)$$

$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n-1] \mid n \in \mathbb{Z}\}$$



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \sim \\ 3 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ \sim & \nearrow & \searrow \\ 3 & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ & \nearrow & \searrow \\ & 3 & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$$

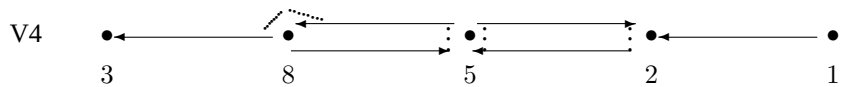
$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n-1] \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \sim \\ 3 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ \sim & \diagdown \\ 3 & 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{cc} 3 & 1 \\ \diagdown & \diagdown \\ 3 & 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \sim \\ 2 \end{array} \right)$$

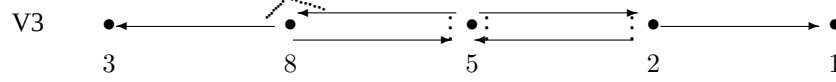
$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n] \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \sim \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \sim \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \right)$$

$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n+1] \mid n \in \mathbb{Z}\}$$



$$\begin{aligned}
& \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \sim / \\ 3 \quad 1 \\ \backslash \quad \backslash \\ 2 \quad 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \quad / \\ 3 \quad 1 \\ \backslash \quad \backslash \\ 2 \quad 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right) \\
& \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n-1] \mid n \in \mathbb{Z}\} \\
& \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \sim / \\ 3 \quad 1 \\ \backslash \quad \backslash \\ 2 \quad 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \backslash \quad / \\ 3 \quad 1 \\ \backslash \quad \backslash \\ 2 \quad 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \backslash \sim \\ 2 \end{array} \right) \\
& \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n] \mid n \in \mathbb{Z}\} \\
& \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \sim / \\ 3 \quad 1 \\ \backslash \quad \backslash \\ 2 \quad 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \quad / \\ 3 \quad 1 \\ \backslash \quad \backslash \\ 2 \quad 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \right) \\
& \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n+1] \mid n \in \mathbb{Z}\}
\end{aligned}$$

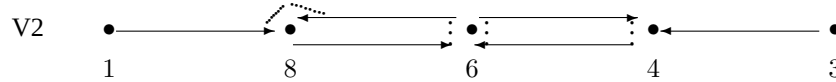


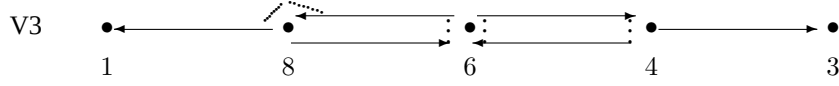
Démonstration Le cas **(2+5+8+3)**(Lemme 4.4.17) donne les possibilités des modules M_2, M_5, M_8 et M_3 , le cas **(1+2+5+8)**(Lemme 4.4.15) fournit les possibilités de M_1 et comme M_3 est indépendant de $M_1 \oplus M_2$, les modules trouvés sont compatibles.

□

Lemme 4.5.6 (3+4+6+8+1) V1, V2, V3, V4

$$\begin{aligned}
& \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \quad / \\ 1 \quad 3 \\ \backslash \quad \sim \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \quad / \\ 1 \quad 3 \\ \backslash \quad \backslash \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \\
& \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\} \\
& \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \quad / \\ 1 \quad 3 \\ \backslash \quad \sim \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \quad / \\ 1 \quad 3 \\ \backslash \quad \backslash \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right) \\
& \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\} \\
& \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \quad / \\ 1 \quad 3 \\ \backslash \quad \sim \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \quad / \\ 1 \quad 3 \\ \backslash \quad \backslash \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \sim \\ 3 \end{array} \right) \\
& \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\}
\end{aligned}$$





Démonstration La preuve est similaire à celle du cas **(1+2+5+8+3)** (Lemme 4.5.5).

□

Lemme 4.5.7 (1+2+5+8+4) V8, V9

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \sim \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \sim \begin{smallmatrix} 1 \\ / \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ / \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \\ / \\ 2 \end{smallmatrix} \sim \right)$$

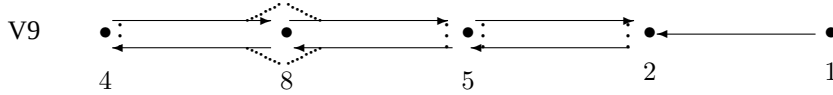
$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n] \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \sim \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \sim \begin{smallmatrix} 1 \\ / \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ / \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ / \\ 3 \end{smallmatrix} \sim \right)$$

$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n+1] \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \sim \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \sim \begin{smallmatrix} 1 \\ / \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ / \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 2 \\ / \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$$

$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n-1] \mid n \in \mathbb{Z}\}$$



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \sim \begin{smallmatrix} 1 \\ / \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ / \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \\ / \\ 2 \end{smallmatrix} \sim \right)$$

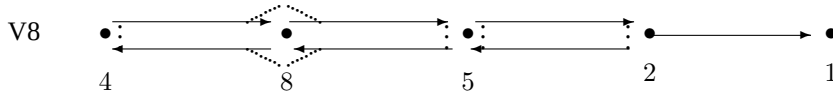
$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n] \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \sim \begin{smallmatrix} 1 \\ / \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ / \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ / \\ 3 \end{smallmatrix} \sim \right)$$

$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n+1] \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \sim \begin{smallmatrix} 1 \\ / \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ / \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 2 \\ / \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$$

$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n-1] \mid n \in \mathbb{Z}\}$$



Démonstration Combiner les cas **(2+5+8+4)** (Lemme 4.4.19), **(1+2+5+8)** (Lemme 4.4.15) et constater que $M_1 \oplus M_2 \oplus M_5$ est indépendant de M_4 .

□

Lemme 4.5.8 (3+4+6+8+2) V8, V9

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \sim \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right)$$

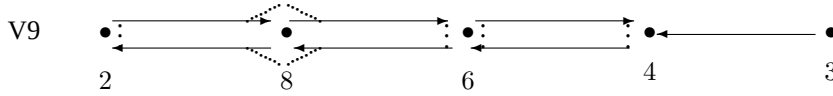
$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \sim \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \sim \right)$$

$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \sim \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right)$$

$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$$



$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \sim \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \sim \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right)$$

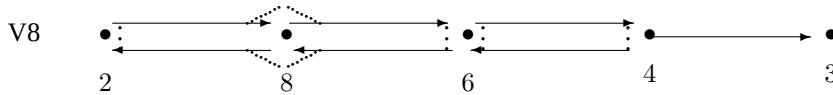
$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \sim \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \sim \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \sim \right)$$

$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \sim \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \sim \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right)$$

$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$$



Démonstration La preuve est similaire à celle du cas **(1+2+5+8+4)** (Lemme 4.5.7).

□

Lemme 4.5.9 (3+4+8+5+2)

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ \sim \\ 3 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right)$$

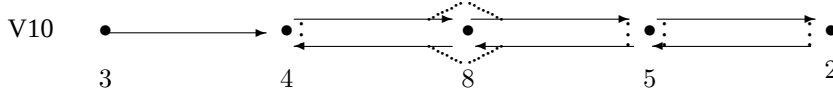
$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n] \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ \sim \\ 3 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ \sim \\ 3 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right)$$

$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n+1] \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ \sim \\ 3 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right)$$

$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n-1] \mid n \in \mathbb{Z}\}$$



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ \sim \\ 3 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right)$$

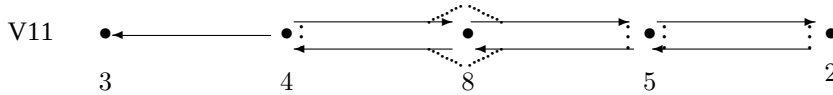
$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n] \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ \sim \\ 3 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ \sim \\ 3 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right)$$

$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n+1] \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ \sim \\ 3 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right)$$

$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n-1] \mid n \in \mathbb{Z}\}$$



Démonstration Combiner les cas (2+5+8+4)(Lemme 4.4.19), (3+4+8+5)(Lemme 4.4.14) et constater que $M_2 \oplus M_5$ est indépendant de $M_4 \oplus M_3$.

□

Lemme 4.5.10 (4+6+8+2+1)

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 3 \\ \sim \\ 2 \end{array} \right)$$

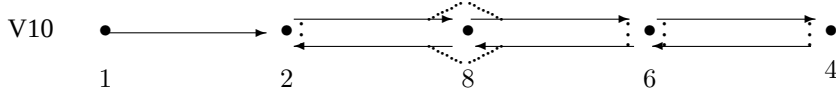
$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 2 \\ \sim \\ 3 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 3 \\ \sim \\ 2 \end{array} \right)$$

$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \sim \\ 3 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \sim \\ 3 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 3 \\ \sim \\ 2 \end{array} \right)$$

$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$$



$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 3 \\ \sim \\ 2 \end{array} \right)$$

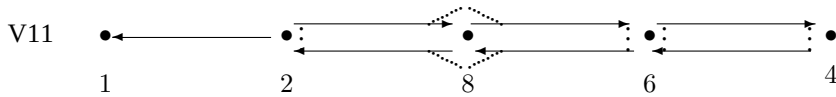
$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \sim \\ 3 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 2 \\ \sim \\ 3 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 3 \\ \sim \\ 2 \end{array} \right)$$

$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \sim \\ 3 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 3 \\ \sim \\ 2 \end{array} \right)$$

$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

**Démonstration** La preuve est similaire à celle du cas **(3+4+8+5+2)** (Lemme 4.5.9).

□

Lemme 4.5.11 (3+4+7+8+1)

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \sim \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right)$$

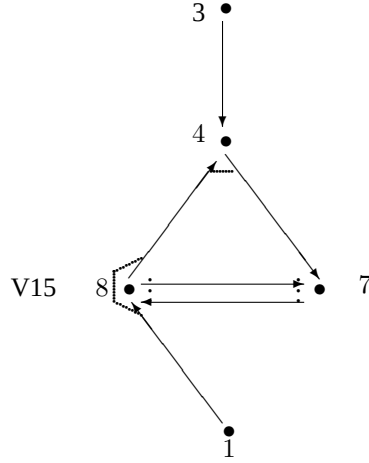
$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2])$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \sim \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right)$$

$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2])$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right)$$

$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2])$$



$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \sim \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \sim \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right)$$

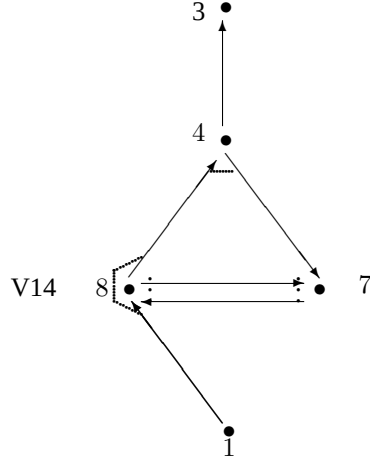
$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2])$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right)$$

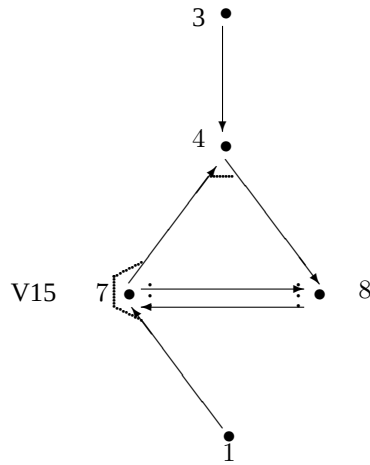
$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2])$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right)$$

$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2])$$

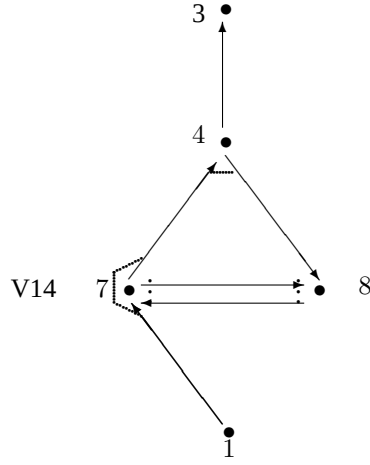


$$\begin{aligned} & \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \\ & \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1]) \\ & \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \\ & \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1]) \\ & \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \\ & \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1]) \end{aligned}$$

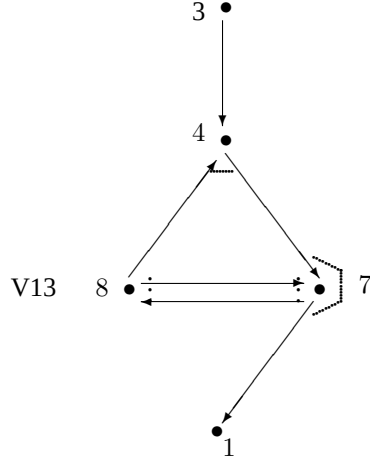


$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
& i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1]) \\
& \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \backslash \quad \sim \quad / \\ 2 \quad \quad 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \\
& i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1]) \\
& \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \quad \quad / \\ 3 \quad \quad 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \\
& i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1])
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \quad \quad / \\ 1 \quad \quad 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \backslash \quad \sim \quad / \\ 2 \quad \quad 3 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \\
& i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2]) \\
& \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \backslash \quad \sim \quad / \\ 2 \quad \quad 3 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \backslash \quad \sim \quad / \\ 2 \quad \quad 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \\
& i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_1[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2]) \\
& \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \quad \quad / \\ 3 \quad \quad 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \\
& i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2])
\end{aligned}$$



$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \backslash \sim \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \quad / \\ 1 \quad 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right)$$

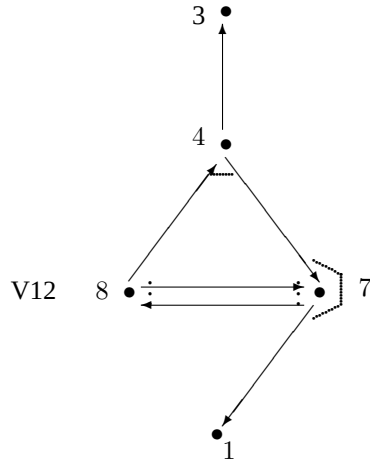
$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2])$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \backslash \sim / \\ 2 \quad 3 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right)$$

$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_1[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2])$$

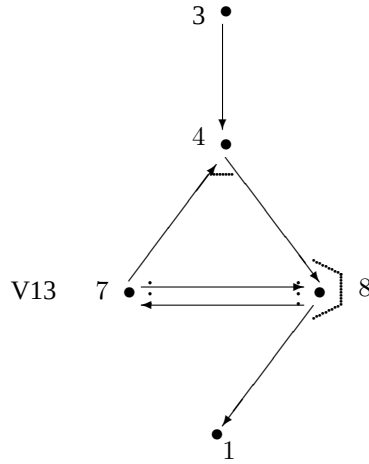
$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \quad / \\ 3 \quad 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right)$$

$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2])$$

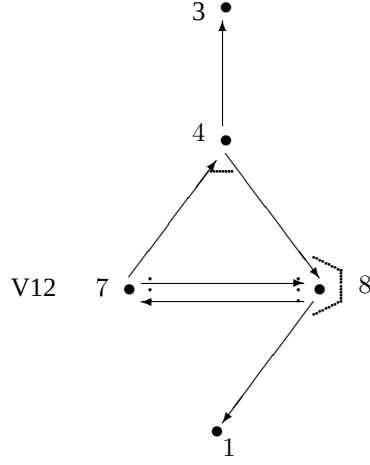


$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \quad / \\ 1 \quad 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
& i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1]) \\
& \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \swarrow \sim \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \swarrow \sim \nearrow \\ 2 \quad 1 \\ \quad \quad \quad \searrow \\ \quad \quad \quad 3 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \\ 2 \end{array} \right) \\
& i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_1[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1]) \\
& \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \\ 3 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \quad \nearrow \\ 3 \quad 2 \\ \quad \quad \quad \searrow \\ \quad \quad \quad 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \\ 2 \end{array} \right) \\
& i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1])
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \swarrow \sim \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \swarrow \quad \nearrow \\ 1 \quad 3 \\ \quad \quad \quad \sim \\ \quad \quad \quad 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \\ 2 \end{array} \right) \\
& i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1]) \\
& \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \\ 3 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \swarrow \sim \nearrow \\ 2 \quad 1 \\ \quad \quad \quad \searrow \\ \quad \quad \quad 3 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \\ 2 \end{array} \right) \\
& i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_1[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1]) \\
& \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \swarrow \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \quad \nearrow \\ 3 \quad 2 \\ \quad \quad \quad \searrow \\ \quad \quad \quad 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \\ 2 \end{array} \right) \\
& i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1])
\end{aligned}$$

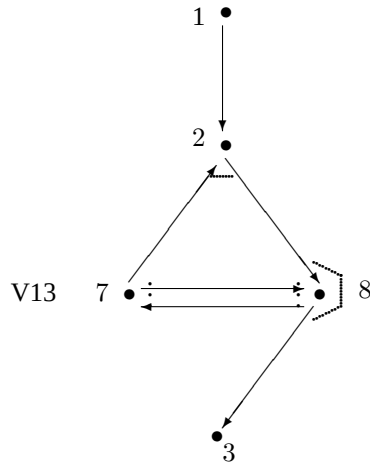


Démonstration Combiner les cas **(3+4+7+8)**(Lemme 4.4.25) et **(4+7+8+1)**(Lemme 4.4.21) et constater que $M_3 \oplus M_4$ est indépendant de M_1 .

□

Lemme 4.5.12 (1+2+7+8+3)

$$\begin{aligned}
 & \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ & \backslash & / \\ & 2 & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \\
 & \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2]) \\
 & \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 & & 2 \\ & \backslash & / \\ & 1 & \sim \\ & & 3 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \\
 & \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2]) \\
 & \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \sim \\ 3 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ & \backslash & / \\ & 3 & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \\
 & \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2])
 \end{aligned}$$



$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \backslash \quad / \\ 2 \quad 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right)$$

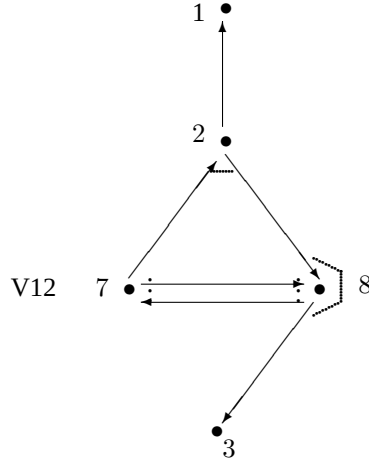
$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2])$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \sim \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \quad 2 \\ \backslash \quad / \sim \\ 1 \quad 3 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right)$$

$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2])$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \backslash \sim / \\ 3 \quad 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right)$$

$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2])$$



$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \backslash \quad / \\ 2 \quad 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right)$$

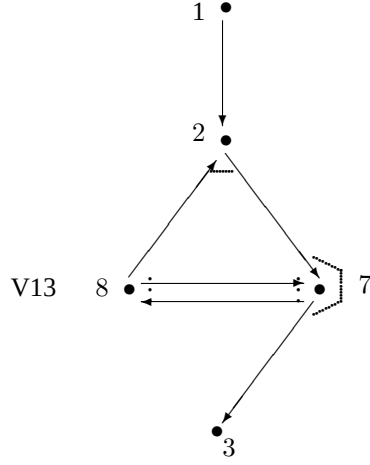
$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1])$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \quad 2 \\ \backslash \quad / \sim \\ 1 \quad 3 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right)$$

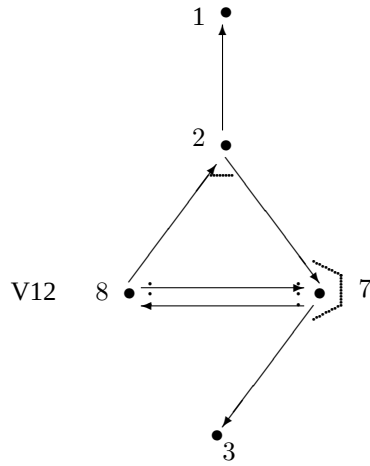
$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1])$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \sim \\ 3 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \backslash \sim / \\ 3 \quad 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right)$$

$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1])$$

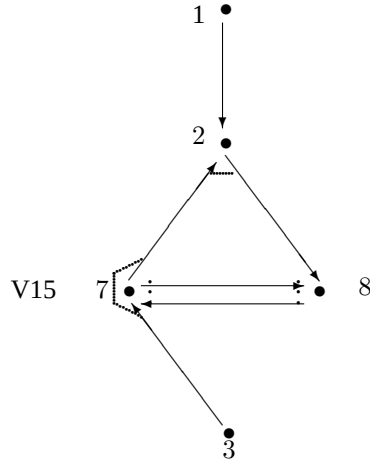


$$\begin{aligned} & \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ & \backslash & / \\ & 2 & \\ & & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \\ & i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1]) \\ & \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & \sim \\ \backslash & \\ 2 & \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 & & 2 \\ & \backslash & / \\ & 1 & \\ & & 3 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \\ & i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1]) \\ & \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & \sim & 1 \\ \backslash & & / \\ & 3 & \\ & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \\ & i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1]) \end{aligned}$$

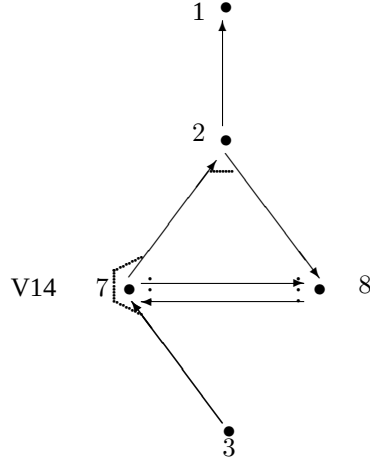


$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ & \backslash & / \\ & 2 & \\ & & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$$

$$\begin{aligned}
& i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2]) \\
& \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ 1 \quad 3 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \right) \\
& i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2]) \\
& \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ 3 \quad 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \right) \\
& i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2])
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ 2 \quad 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \right) \\
& i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2]) \\
& \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ 1 \quad 3 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \right) \\
& i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2]) \\
& \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ 3 \quad 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \right) \\
& i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2])
\end{aligned}$$



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ & \backslash & / \\ & 2 & \\ & & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$$

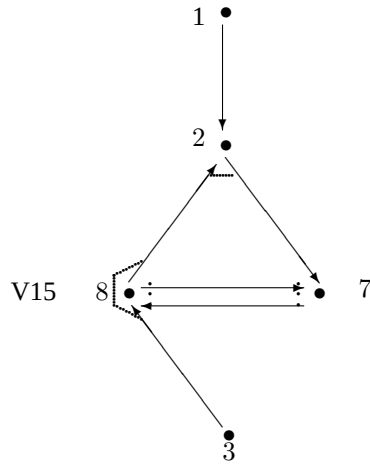
$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1])$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 & & 2 \\ & \backslash & / \\ & 1 & \\ & & \sim \\ & & 3 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$$

$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1])$$

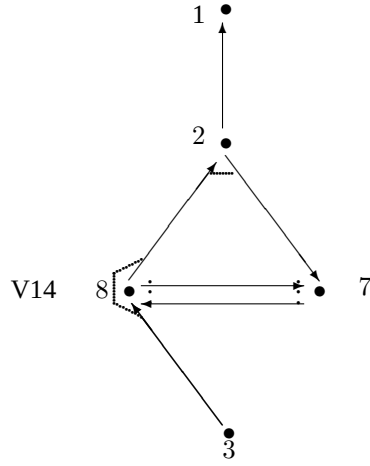
$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ \sim \\ 3 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ & \backslash & / \\ & \sim & \\ & 3 & \\ & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$$

$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1])$$



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ & \backslash & / \\ & 2 & \\ & & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$$

$$\begin{aligned}
& i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1]) \\
& \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \right) \\
& i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1]) \\
& \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \right) \\
& i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1])
\end{aligned}$$

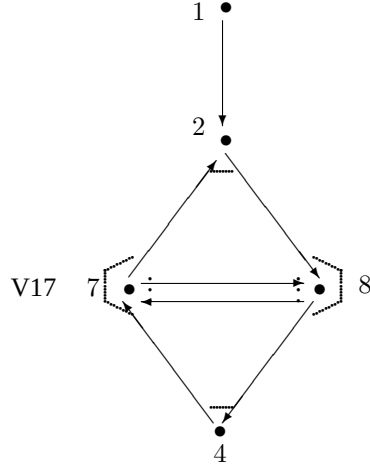


Démonstration La preuve est similaire à celle du cas **(3+4+7+8+1)** (Lemme 4.5.11).

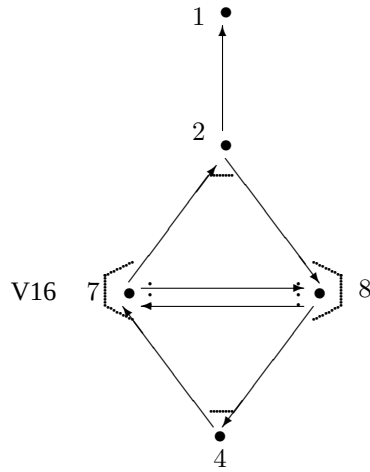
□

Lemme 4.5.13 (1+2+7+8+4) V16, V17

$$\begin{aligned}
& \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \right) \\
& i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2]) \\
& \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \right) \\
& i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2]) \\
& \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \right) \\
& i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2])
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ \backslash & / & \backslash \\ & 2 & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & / & \sim \\ & 1 & 2 \end{smallmatrix} \right) \\
& \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2]) \\
& \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ \backslash & / & \backslash \\ & 2 & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 & & 1 \\ \sim & / & \backslash \\ & 2 & 3 \end{smallmatrix} \right) \\
& \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2]) \\
& \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ \backslash & / & \backslash \\ & 2 & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 2 \\ \backslash & / & \backslash \\ & 3 & 1 \end{smallmatrix} \right) \\
& \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2])
\end{aligned}$$



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ \backslash & / & \backslash \\ & 2 & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & / & \sim \\ & 1 & 2 \end{smallmatrix} \right)$$

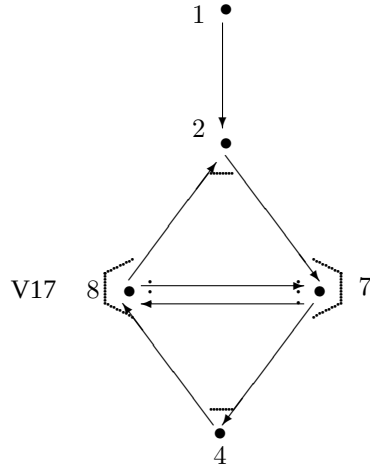
$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1])$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \end{array} \right)$$

$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1])$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \end{array} \right)$$

$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1])$$



$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array} \right)$$

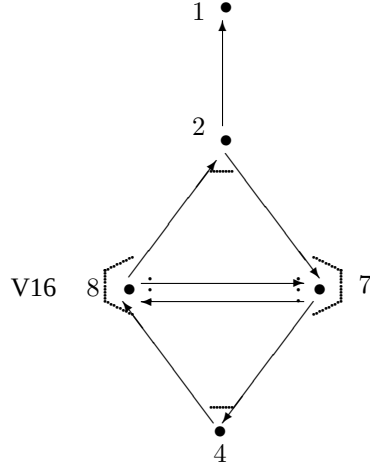
$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1])$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \end{array} \right)$$

$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1])$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \end{array} \right)$$

$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1])$$

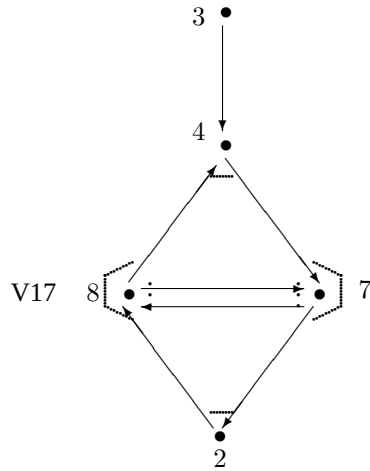


Démonstration Combiner les cas **(7+8+4)**(Lemme 4.3.18) et **(1+2+7+8)**(Lemme 4.4.24) et constater que $M_1 \oplus M_2$ est indépendant de M_4 .

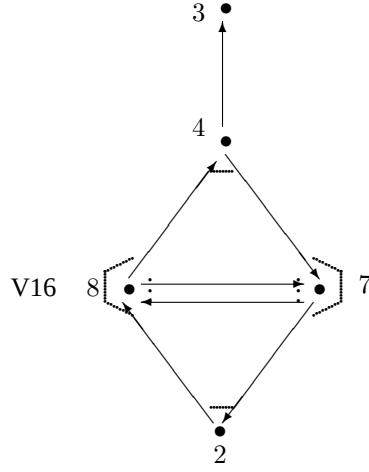
□

Lemme 4.5.14 (2+7+8+4+3) V16, V17

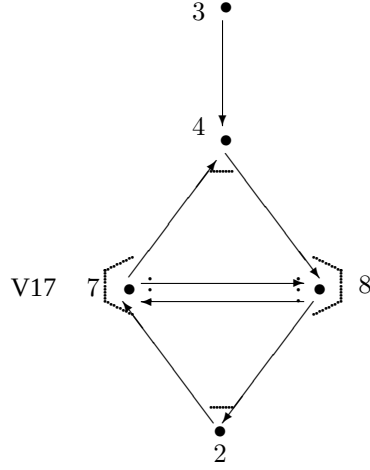
$$\begin{aligned}
 & \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \sim \quad 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \right) \\
 & \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2]) \\
 & \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \right) \\
 & \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2]) \\
 & \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \right) \\
 & \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2])
 \end{aligned}$$



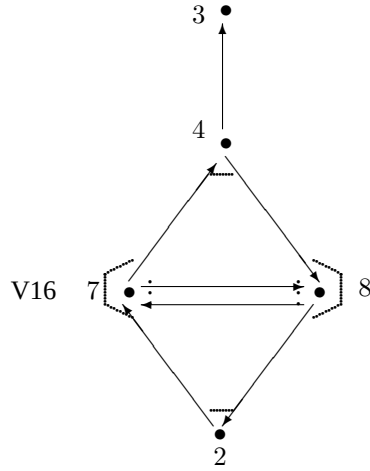
$$\begin{aligned}
& \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \sim \quad 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \sim \quad 2 \end{array} \right) \\
& \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2]) \\
& \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \sim \quad 3 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \sim \quad 3 \end{array} \right) \\
& \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2]) \\
& \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \sim \quad 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \sim \quad 1 \end{array} \right) \\
& \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2])
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \sim \quad 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \sim \quad 1 \end{array} \right) \\
& \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1]) \\
& \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \sim \quad 3 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \sim \quad 2 \end{array} \right) \\
& \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1]) \\
& \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \sim \quad 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \sim \quad 3 \end{array} \right) \\
& \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1])
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \backslash \quad / \\ 2 \quad 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \backslash \quad / \\ 1 \quad 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \sim \\ 2 \end{array} \right) \\
 & \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1]) \\
 & \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \backslash \quad / \\ 2 \quad 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \quad 1 \\ \sim \quad \backslash \\ 2 \quad 3 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \right) \\
 & \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1]) \\
 & \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \backslash \quad / \\ 2 \quad 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \backslash \quad / \\ 3 \quad 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right) \\
 & \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1])
 \end{aligned}$$



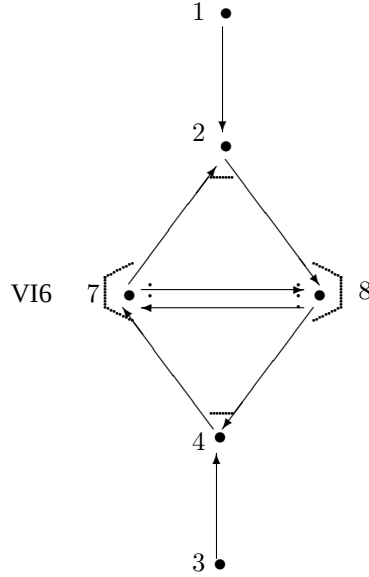
Démonstration La preuve est sinlaire à celle du cas **(1+2+7+8+4)** (Lemme 4.5.13), qui combine les cas **(2+7+8+4)** (Lemme 4.4.26) et **(7+8+4+3)**(Lemme 4.4.25).

□

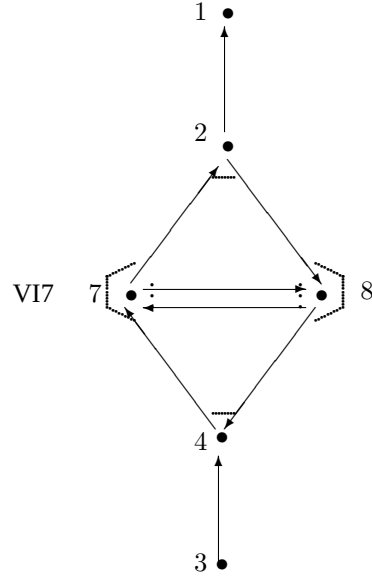
4.6 Six facteurs

Lemme 4.6.1 (1+2+7+8+4+3)

$$\begin{aligned}
 & \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \nearrow 3 \\ \backslash 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \nearrow 3 \\ \sim 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right) \\
 & \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2]) \\
 & \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \nearrow 3 \\ \backslash 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \sim 2 \end{array} \begin{array}{c} \nearrow 1 \\ \backslash 3 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \sim 2 \end{array} \right) \\
 & \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2]) \\
 & \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \nearrow 3 \\ \backslash 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \nearrow 2 \\ \backslash 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \right) \\
 & \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2])
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \nearrow 3 \\ \backslash 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \nearrow 3 \\ \sim 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right) \\
 & \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2]) \\
 & \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \nearrow 3 \\ \backslash 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \sim 2 \end{array} \begin{array}{c} \nearrow 1 \\ \backslash 3 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \sim 2 \end{array} \right) \\
 & \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2]) \\
 & \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \nearrow 3 \\ \backslash 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \nearrow 2 \\ \backslash 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \right) \\
 & \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2])
 \end{aligned}$$



$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ / \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \sim \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \sim \\ 2 \end{array} \right)$$

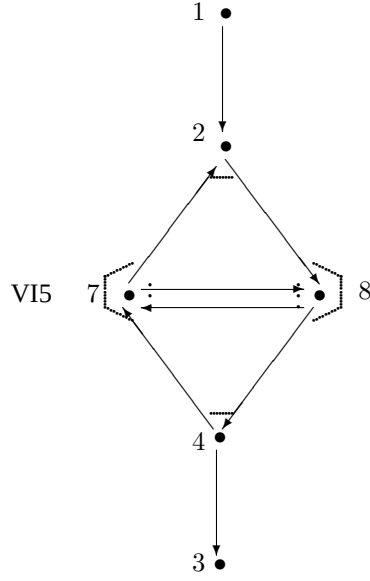
$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2])$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ / \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \sim \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \right)$$

$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2])$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ / \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ / \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right)$$

$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2])$$



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ \backslash & / & \backslash \\ & 2 & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & / & \sim \\ & 1 & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \sim \\ 2 \end{smallmatrix} \right)$$

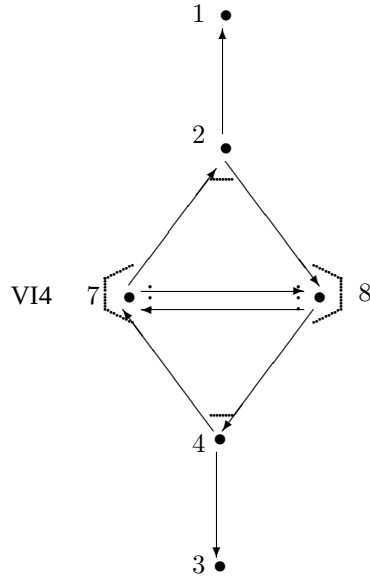
$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2])$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ \backslash & / & \backslash \\ & 2 & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 & & 1 \\ \sim & / & \backslash \\ & 2 & 3 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \right)$$

$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2])$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ \backslash & / & \backslash \\ & 2 & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 2 \\ \backslash & / & \backslash \\ & 3 & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$$

$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([-1]M[2])$$



$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \nearrow 3 \\ \backslash 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash 1 \end{array} \begin{array}{c} \nearrow 3 \\ \sim 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right)$$

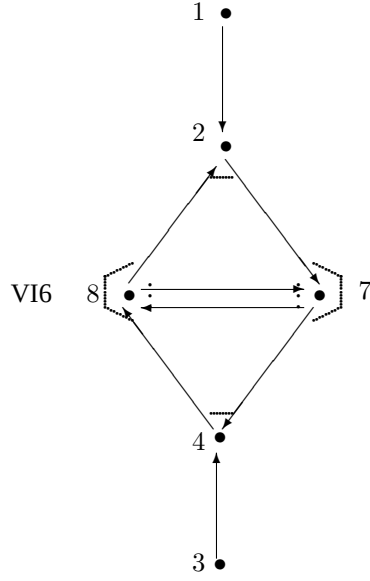
$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1])$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \nearrow 3 \\ \backslash 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \backslash 2 \end{array} \begin{array}{c} \nearrow 1 \\ \backslash 3 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right)$$

$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1])$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \nearrow 3 \\ \backslash 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash 3 \end{array} \begin{array}{c} \nearrow 2 \\ \backslash 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \right)$$

$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1])$$



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ \backslash & / & \backslash \\ & 2 & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & / & \sim \\ & 1 & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$$

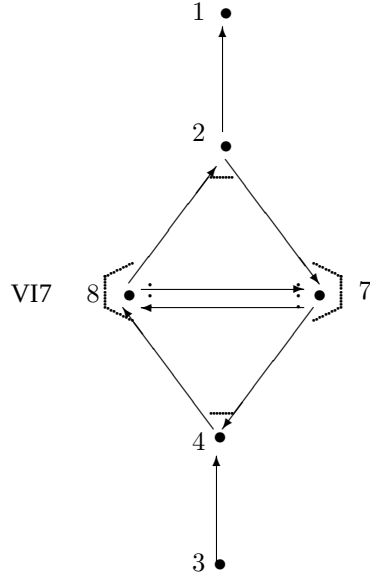
$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1])$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ \backslash & / & \backslash \\ & 2 & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 & & 1 \\ \backslash & \sim & / \\ & 2 & 3 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right)$$

$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1])$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ \backslash & / & \backslash \\ & 2 & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 2 \\ \backslash & / & \backslash \\ & 3 & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \right)$$

$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1])$$



$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right)$$

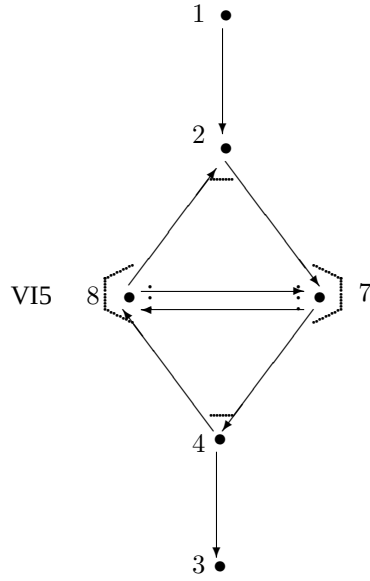
$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1])$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \right)$$

$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1])$$

$$\Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{array} \nearrow \begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{array}{c} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{array} \right)$$

$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1])$$



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ \backslash & & / \\ & 2 & \\ & \backslash & / \\ & & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & & / \\ & 1 & \\ & \backslash & / \\ & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right)$$

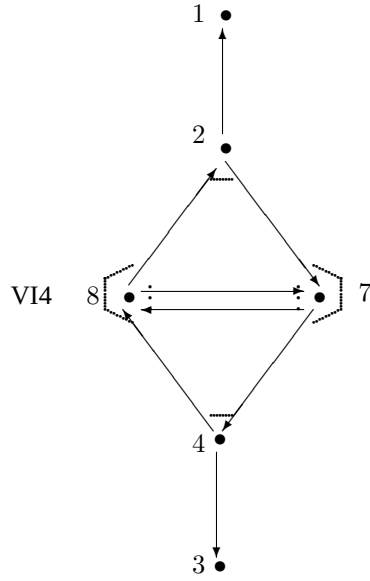
$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n+1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1])$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ \backslash & & / \\ & 2 & \\ & \backslash & / \\ & & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 & & 1 \\ \backslash & & / \\ & 2 & \\ & \backslash & / \\ & & 3 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \right)$$

$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n-1] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1])$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ \backslash & & / \\ & 2 & \\ & \backslash & / \\ & & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i(N) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 2 \\ \backslash & & / \\ & 3 & \\ & \backslash & / \\ & & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$$

$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_1[3n] \mid m, n \in \mathbb{Z}\}, N = \Omega([2]M[-1])$$



Démonstration La preuve combine les cas **(1+2+7+8+4)** (Lemme 4.5.13) , **(3+4)** (Lemme 4.2.3) et **(3+4+7+8)** (Lemme 4.4.25) et utilise le fait que $M_1 \oplus M_2$ est indépendant de $M_3 \oplus M_4$.

□

Lemme 4.6.2 (1+2+5+8+4+3) VI1, VI2, VI3, VI4

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \sim \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$$

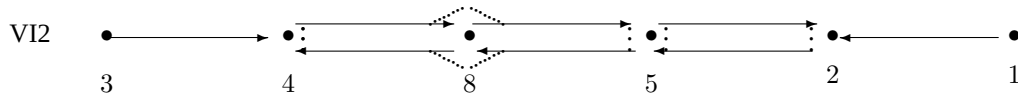
$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n] \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \sim \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right)$$

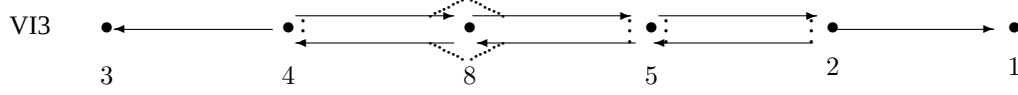
$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n+1] \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \sim \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \right)$$

$$i \in \mathbb{Z}, M \in \{S_2[3n-1] \mid n \in \mathbb{Z}\}$$



$$\Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 3 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \nearrow \begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$$

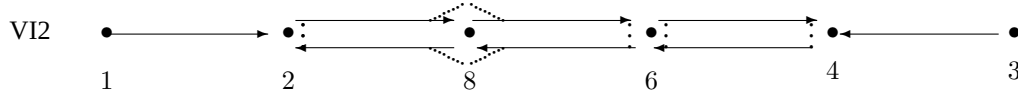


Démonstration La preuve combine les cas suivants **(1+2+5+8+4)** (Lemme 4.5.7), **(3+4)** (Lemme 4.2.3) et **(3+4+8)** (Lemme 4.3.8) et utilise le fait que $M_1 \oplus M_2 \oplus M_5$ est indépendant de $M_3 \oplus M_4$.

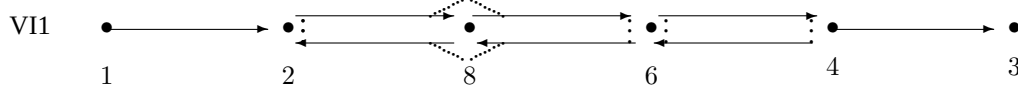
□

Lemme 4.6.3 (1+2+8+6+4+3) VI1, VI2, VI3, VI4

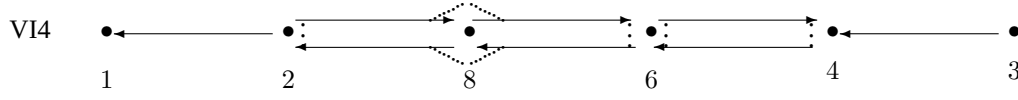
$$\begin{aligned}
 & \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ \backslash & & / \\ 2 & & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & & / \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & & / \\ 1 & & \sim \\ & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \\
 & \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\} \\
 & \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 & & 2 \\ \backslash & & / \\ 1 & & \sim \\ & & 3 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & & / \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & & / \\ 1 & & \sim \\ & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \\
 & \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\} \\
 & \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ \sim \\ & 3 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ \backslash & & / \\ \sim & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & & / \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & & / \\ 1 & & \sim \\ & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \\
 & \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\}
 \end{aligned}$$



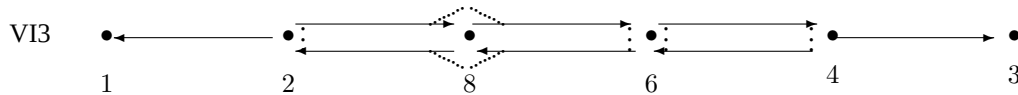
$$\begin{aligned}
 & \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ \backslash & & / \\ 2 & & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & & / \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & & / \\ 1 & & \sim \\ & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ \sim \\ & 2 \end{smallmatrix} \right) \\
 & \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\} \\
 & \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 & & 2 \\ \backslash & & / \\ 1 & & \sim \\ & & 3 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & & / \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & & / \\ 1 & & \sim \\ & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ \sim \\ & 2 \end{smallmatrix} \right) \\
 & \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\} \\
 & \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ \sim \\ & 3 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ \backslash & & / \\ \sim & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & & / \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & & / \\ 1 & & \sim \\ & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ \sim \\ & 2 \end{smallmatrix} \right) \\
 & \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ \backslash & & / \\ 2 & & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & & / \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & & / \\ 1 & & \sim \\ & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \\ & \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\} \\ & \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ \sim \\ & 3 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 & & 2 \\ \backslash & & / \\ 1 & & \sim \\ & & 3 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & & / \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & & / \\ 1 & & \sim \\ & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \\ & \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\} \\ & \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ \backslash & & / \\ 3 & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & & / \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & & / \\ 1 & & \sim \\ & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \\ & \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 3 \\ \backslash & & / \\ 2 & & 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & & / \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & & / \\ 1 & & \sim \\ & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ \sim \\ & 2 \end{smallmatrix} \right) \\ & \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m+1]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\} \\ & \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \backslash \\ \sim \\ & 3 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 & & 2 \\ \backslash & & / \\ 1 & & \sim \\ & & 3 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & & / \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & & / \\ 1 & & \sim \\ & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ \sim \\ & 2 \end{smallmatrix} \right) \\ & \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m-1]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\} \\ & \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \backslash \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 1 \\ \backslash & & / \\ 3 & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i(M) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & & / \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ \backslash & & / \\ 1 & & \sim \\ & & 2 \end{smallmatrix} \right) \oplus \Omega^i \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \backslash \\ \sim \\ & 2 \end{smallmatrix} \right) \\ & \quad i \in \mathbb{Z}, M \in \{[3m]S_2 \mid m \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$



Démonstration La preuve combine les cas suivants: **(3+4+6+8+2)** (Lemme 4.5.8), **(1+2)** (Lemme 4.2.2) et **(1+2+8)** (Lemme 4.3.6) et utilise le fait que $M_1 \oplus M_2$ est indépendant de $M_3 \oplus M_4 \oplus M_6$.

□

Part II

Sommets des modules indécomposables

Chapter 5

Sommets des modules indécomposables sur un 2-groupe diédral

Dans ce chapitre, on essaie de calculer le sommet d'un module indécomposable sur un 2-groupe diédral sur un corps k algébriquement clos de caractéristique 2.

5.1 Préliminaires

Dans cette section, on rappelle la théorie modulaire des représentations des groupes finis.

Fixons k un corps algébriquement clos de caractéristique p . Soit G un groupe fini tel que p divise l'ordre de G . Etant donné un module indécomposable M sur kG et D un sous-groupe de G . Ce sous-groupe D est dit un sommet de M s'il existe un kD -module indécomposable N tel que M soit un facteur direct de $\text{Ind}_D^G N := kG \otimes_{kH} N$ (dans ce cas, on dit que M divise $\text{Ind}_D^G N$, noté $M | \text{Ind}_D^G N$) et tel que D soit le plus petit sous-groupe ayant cette propriété. On peut montrer que D est un sous-groupe d'un p -Sylow-sous-groupe de G et que tout autre sommet de M est conjugué à D dans G . On note souvent $D = vx(M)$ (voir [5, chapitre 3, section 3.10]).

Rappelons la correspondance de Green (Voir par exemple [5, Chapter 3, section 3.12 Theorem 3.12.2]):

Théorème 5.1.1 Fixons k un corps algébriquement clos de caractéristique p et G un groupe fini tel que p divise l'ordre de G . Soient D un sous-groupe de G et H un autre sous-groupe de G contenant le normalisateur $N_G(D)$ de D dans G . Notons

$$\mathcal{X} = \{X \leq G | X \leq gDg^{-1} \cap D, \text{ pour un } g \in G - H\}$$

$$\mathcal{Y} = \{Y \leq G | Y \leq gDg^{-1} \cap H, \text{ pour un } g \in G - H\}$$

- (i) Si V est un kG -module indécomposable de sommet D , alors $\text{Res}_H^G V := kG \otimes_{kH} V$ possède un unique facteur direct indécomposable $f(V)$ de sommet D tel que tous les autres facteurs directs indécomposables ont leur sommets dans $\mathcal{Y}$.
- (ii) Si M est un kH -module indécomposable de sommet D , alors $\text{Ind}_H^G V$ possède un unique facteur direct indécomposable $g(M)$ de sommet D tel que tous les autres facteurs directs indécomposables ont leur sommets dans $\mathcal{X}$.
- (iii) On a $f(g(M)) = M$ et $g(f(V)) = V$.

On aborde ensuite la théorie de Clifford.

Soit G un groupe fini et N un sous-groupe normal. Etant donné un kN -module indécomposable M , on définit le groupe d'inertie

$$T(M) = \{g \in G \mid M \simeq M^g\}$$

où M^g est le même espace vectoriel que M dans lequel l'action sur un élément $m \in M$ par un élément $g' \in G$ est définie par $g' * m = (gg'g^{-1})m$ où le coté droite de l'égalité est l'action dans le module M .

Proposition 5.1.2 ([5, Chapter3, Section 3.13, Proposition 3.13.2]) Supposons que N soit un sous-groupe normal de G et que M soit un kN -module indécomposable de groupe d'inertie T . Si

$$\text{Ind}_N^T M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n$$

avec tous les M_i indécomposables. Alors pour tout i , $\text{Ind}_T^G M_i$ est indécomposable et $\text{Ind}_T^G M_i \simeq \text{Ind}_T^G M_j$ ssi $i = j$.

Théorème 5.1.3 (Théorème d'indécomposabilité de Green) ([5, Chapter3, Section 3.13, Theorem 3.13.3]) Supposons que N soit un sous-groupe normal de G tel que G/N soit un p -groupe. Soit M un kN -module absolument indécomposable (i.e. pour toute extension k' de k , $k' \otimes_k M$ est indécomposable). Alors $\text{Ind}_N^G M$ est absolument indécomposable comme kG -module.

Dans ce chapitre, deux théorèmes dus à Shigeto Kawata sont importants.

Etant donné une composante Θ du carquois d'Auslander-Reiten d'un groupe fini G , il existe un seul sommet minimal, à conjugaison près, dans $V(\Theta) = \{vx(M) : M \in \Theta\}$ (voir [27, Proposition 3.2]). Notons Q ce sommet minimal. Désignons par N le normalisateur de Q dans G et par f la correspondance de Green par rapport à (G, Q, N) . Choisissons M_0 un kN -module indécomposable de sommet Q dans Θ . Soit Δ la composante de $\Gamma_s(kN)$ contenant $f(M_0)$. Alors considérons le sous-carquois Λ de Δ contenant tous les modules L tel qu'il existe un chemin

$$fM_0 = L_0 \text{ --- } L_1 \text{ --- } \cdots \text{ --- } L_t = L$$

avec $Q \leq vx(L_i)$ pour tout $0 \leq i \leq t$ et où pour tout $1 \leq i \leq t$, le trait entre L_{i-1} et L_i signifie qu'il existe un morphisme irréductible de L_{i-1} à L_i ou un morphisme irréductible du sens réciproque.

Théorème 5.1.4 ([27, Theorem 4.6]) Il existe un isomorphisme de carquois $\phi : \Lambda \rightarrow \Theta$

Soient G un groupe fini et N un sous-groupe normal de G . Soit Θ une composante du carquois d'Auslander-Reiten stable de $\Gamma_s(kG)$. Supposons qu'il existe un kG -module L_0 dans Θ qui est N -projectif. Soient S_0 un kN -module indécomposable tel que $L_0 \mid \text{Ind}_N^G S_0$ et Ξ la composante de $\Gamma_s(kN)$ contenant S_0 . Posons

$$T(\Xi) = \{g \in G : \Xi^g = \Xi\} = \{g \in G : S_0^g \in \Xi\}$$

le groupe d'inertie de Ξ dans G . Supposons que

$$\text{Ind}_N^{T(\Xi)} S_0 = U_0 \oplus U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$$

où les U_i sont indécomposables et où $L_0 \simeq \text{Ind}_N^G U_0$. Soit Λ la composante de $\Gamma_s(kT(\Xi))$ contenant U_0 .

Théorème 5.1.5 ([28, Page 265, Theorem]) L'induction de $T(\Xi)$ à G induit un isomorphisme de Λ à Θ .

5.2 Groupes cycliques

Soient $G = C_{2^n}$ le groupe cyclique d'ordre 2^n et x un générateur de G . Alors le carquois avec relations de kG est de la forme

$$0 \bullet \bigcirc \alpha \quad \alpha^{2^n} = 0$$

où $\alpha = 1 + x$.

L'algèbre kG est une algèbre bisérielle spéciale. D'après la classification des modules indécomposables sur une algèbre bisérielle spéciale (voir Section 1.4), les seules cordes sont de la forme α^m pour $0 \leq m \leq 2^n - 1$ et il n'existe pas de corde de type ruban, car pour toute corde $C = \alpha^m$ pour $0 \leq m \leq 2^n - 1$, toute puissance assez grande C^s devient nulle quand $sm \geq 2^n$. Remarquons que $M(\alpha^0) = S_0$ est le seul module simple et que $M(\alpha^{2^n-1}) = kG$ est le seul module projectif indécomposable. Remarquons que les modules $M(\alpha^m)$ sont de dimension différente pour différent m avec $0 \leq m \leq 2^n - 1$.

Proposition 5.2.1 Pour $0 \leq m \leq 2^n - 1$, soit

$$m = \epsilon_0 \times 2^0 + \epsilon_1 \times 2 + \epsilon_2 \times 2^2 + \cdots + \epsilon_{n-1} \times 2^{n-1}$$

avec $\epsilon_i = 0$ ou 1 pour tout $0 \leq i \leq n - 1$ le développement binaire de m . Alors $vx(M(\alpha^m))$ est le sous-groupe $\langle x^{2^s} \rangle \simeq C_{2^{n-s}}$ où s est le premier t tel que $\epsilon_t = 0$.

Démonstration On raisonne par récurrence sur n .

Le cas $n = 1$ est facile. Il existe deux modules indécomposables $M(\alpha^i)$ avec $0 \leq i \leq 1$ sur kC_2 . On vérifie que $vx(M(\alpha^0)) = vx(S_0) = \langle x \rangle = C_2$ et $vx(M(\alpha)) = vx(kC_2) = \{1\}$.

Pour le cas général, notons $H = \langle x^2 \rangle \simeq C_{2^{n-1}}$. Le carquois avec relations de l'algèbre kH est

$$0 \bullet \bigcirc \beta \quad \beta^{2^{n-1}} = 0$$

où $\beta = 1 + x^2$.

Comme le corps de base k est algébriquement clos, les modules $M(\beta^i)$ avec $0 \leq i \leq 2^{n-1} - 1$ sont absolument indécomposables. D'après Théorème 5.1.3, on obtient que $\text{Ind}_H^G M(\beta^i) = M(\alpha^{2^{i+1}})$ puisque la dimension de $\text{Ind}_H^G M(\beta^i)$ vaut $2i + 2$ et $M(\alpha^{2^{i+1}})$ est le seul kG -module indécomposable de dimension $2i + 2$ sur kG .

Si le développement binaire de $2i + 1$ est

$$2i + 1 = 1 + \epsilon_1 \times 2^1 + \cdots + \epsilon_{n-1} \times 2^{n-1}$$

alors si ϵ_s est le premier coefficient non nul dans ce développement, dans le développement binaire de i ,

$$i = \epsilon_1 \times 2^0 + \epsilon_2 \times 2^1 + \cdots + \epsilon_{n-1} \times 2^{n-2}$$

ϵ_s est en la $s - 1$ -ième position. On obtient donc

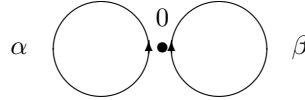
$$vx(M(\alpha^{2^{i+1}})) = vx(M(\beta^i)) = \langle (x^2)^{2^{s-1}} \rangle = \langle x^{2^s} \rangle \simeq C_{2^{n-s}}$$

□

5.3 Groupe de Klein

Soit $G = V_4 = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 = \langle x, y | x^2 = e = y^2, xy = yx \rangle$. Notons $H_1 = \langle x \rangle$, $H_2 = \langle y \rangle$ et $H_3 = \langle z \rangle$ où on note $z = xy$. Ce sont tous les sous-groupes non triviaux de G . Les H_i ne sont pas conjugués l'un à l'autre, car V_4 est abélien.

Le carquois avec relations de kG est



$$\alpha^2 = 0 = \beta^2, \alpha\beta = \beta\alpha$$

où $\alpha = 1 + x$ et $\beta = 1 + y$.

Cette algèbre est une algèbre bisérielle spéciale et il existe une seule corde de type ruban, modulo la relation d'équivalence $\sim_r$, disons $\alpha\beta^{-1}$.

Le carquois d'Auslander-Reiten de kG est composé de (voir [15, II.7.3])

- une infinité de 1-tubes $Q(\alpha\beta^{-1}, \lambda)$ avec $\lambda \in k^*$. La composante $Q(\alpha\beta^{-1}, \lambda)$ avec $\lambda \in k^*$ est formée de tous les modules $M(\alpha\beta^{-1}, n, \lambda)$ pour $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.
- deux 1-tubes: $Q(\alpha)$ et $Q(\beta)$.
- une composante de type $\mathbb{Z}\tilde{A}_{12}$

Proposition 5.3.1 (1) $vx(kG) = \{1\}$

(2) $vx(M(\alpha)) = H_2$, $vx(M(\beta)) = H_1$ et $vx(M(\alpha\beta^{-1}, 1, 1)) = H_3$

(3) Pour tout autre module M , $vx(M) = G$.

Démonstration L'assertion (1) est évidente.

Pour les deux autres assertions, il suffit de calculer les inductions $\text{Ind}_{H_i}^G k$ pour tout $1 \leq i \leq 3$ où k est le module trivial sur kH_i , car les sous-groupes H_i sont isomorphes à C_2 et sur kH_i et il n'existe que deux modules indécomposables k et kC_2 , à isomorphismes près.

Rappelons la méthode générale de calculer l'induction, soient G un groupe fini et H un sous-groupe d'indice n . Alors écrivons $G = \coprod_{i=1}^n g_i H$. Pour un kH -module M , son induction s'écrit de la forme

$$\text{Ind}_H^G M = \coprod_{i=1}^n g_i \otimes M$$

où l'action est donnée par

$$g(g_i \otimes m) = g_j \otimes hm,$$

pour tout $g \in G$, pour tout $1 \leq i \leq n$, et pour tout $m \in M$ où $h \in H$ tel que $gg_i = g_j h$.

Ecrivons $G = V_4 = H_1 \coprod yH_1$. Le module

$$kG \otimes_{kH_1} k = k(e \otimes 1) \oplus k(y \otimes 1)$$

Alors

$$\alpha(e \otimes 1) = (1 + x)e \otimes 1 = e \otimes 1 + x(e \otimes 1) = e \otimes 1 + e \otimes (x \cdot 1) = e \otimes 1 + e \otimes 1 = 0$$

De même, $\alpha(y \otimes 1) = 0$ et

$$\beta(e \otimes 1) = (1 + y)(e \otimes 1) = e \otimes 1 + y \otimes 1$$

De même, $\beta(y \otimes 1) = e \otimes 1 + y \otimes 1$.

Si on note $e'_0 = e \otimes 1$ et $e'_1 = e \otimes 1 + y \otimes 1$, alors $\alpha e'_i = 0$ pour $i \in \{0, 1\}$, $\beta e'_0 = e'_1$ et $\beta e'_1 = 0$. On exprime $kG \otimes_{kH_1} k$ en $e'_0 \xrightarrow{\beta} e'_1$, ce qui montre que $kG \otimes_{kH_1} k \simeq M(\beta)$.

Par symétrie, on obtient également $kG \otimes_{kH_2} k \simeq M(\alpha)$.

Ecrivons $G = eH_3 \amalg xH_3$. L'induction $kG \otimes_{kH_3} k = k(e \otimes 1) \oplus k(x \otimes 1)$.

$$\alpha(e \otimes 1) = (1 + x)e \otimes 1 = e \otimes 1 + x(e \otimes 1) = e \otimes 1 + x \otimes 1$$

$$\alpha(x \otimes 1) = (1 + x)x \otimes 1 = x \otimes 1 + x(x \otimes 1) = x \otimes 1 + e \otimes 1, \text{ puisque } x^2 = e.$$

$$\beta(e \otimes 1) = (1 + y)e \otimes 1 = e \otimes 1 + y(e \otimes 1) = e \otimes 1 + x \otimes z \cdot 1 = e \otimes 1 + x \otimes 1, \text{ puisque } ye = xz.$$

$$\beta(x \otimes 1) = (1 + y)x \otimes 1 = x \otimes 1 + y(x \otimes 1) = x \otimes 1 + e \otimes z \cdot 1 = x \otimes 1 + e \otimes 1, \text{ puisque } yx = ez.$$

Si on note $f_0 = e \otimes 1$ et $f_1 = e \otimes 1 + x \otimes 1$, alors $\alpha f_0 = f_1$, $\beta f_0 = f_1$ et $\alpha f_1 = 0 = \beta f_1$.

$$\text{Ind}_{H_3}^G k = (f_0 \xrightarrow{\alpha} f_1) \xrightarrow{\beta} f_1 \simeq M(\alpha\beta^{-1}, 1, 1)$$

□

5.4 Groupe diédral d'ordre 8

Soit $G = D_8 = \langle x, y | x^4 = e = y^2, yxy = x^{-1} \rangle$. Le carquois avec relations de kG est

$$\alpha \quad \begin{array}{c} \text{0} \\ \bullet \end{array} \quad \beta$$

$$\alpha^2 = 0 = \beta^2, (\alpha\beta)^2 = (\beta\alpha)^2$$

où $\alpha = 1 + y$ et $\beta = 1 + yx$.

Notons $H = \langle x \rangle = \{e, x, x^2, x^3\}$, $T_0 = \langle x^2, y \rangle = \{e, y, x^2, yx^2\}$ et $T_1 = \langle x^2, yx \rangle = \{e, yx, x^2, yx^3\}$. Ce sont tous les sous-groupes d'indice 2 de G et de plus $H \simeq C_4$ et $T_0 \simeq V_4 \simeq T_1$. Les carquois avec relations des algèbres kT_0 , kT_1 et kH sont respectivement

$$\alpha_0 \quad \begin{array}{c} \text{0} \\ \bullet \end{array} \quad \beta_0$$

$$\alpha_0^2 = 0 = \beta_0^2, \alpha_0\beta_0 = \beta_0\alpha_0$$

où $\alpha_0 = 1 + y$ et $\beta_0 = 1 + yx^2$.

$$\alpha_1 \quad \begin{array}{c} \text{0} \\ \bullet \end{array} \quad \beta_1$$

$$\alpha_1^2 = 0 = \beta_1^2, \alpha_1\beta_1 = \beta_1\alpha_1$$

où $\alpha_1 = 1 + yx$ et $\beta_1 = 1 + x^2$.

$$\text{0} \bullet \quad \gamma \quad \gamma^4 = 0$$

où $\gamma = 1 + x$.

Proposition 5.4.1 ([15, Page 64, II.7.6 LAMMA]) Le carquois d'Auslander-Reiten stable de kG est composé de

- une infinité de 1-tubes formés des modules de type ruban
- deux 1-tubes formés de modules de type corde: $Q(\alpha\beta\alpha)$ et $Q(\beta\alpha\beta)$
- une infinité de composantes de type $\mathbb{Z}A_\infty^\infty$.

Pour énoncer le théorème principal de cette section, introduisons des cordes particulières.

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha = \begin{array}{c} \beta \quad \alpha \\ \diagdown \quad \diagup \\ \alpha \end{array} \\
 C_2 &= \beta\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1} = \begin{array}{c} \beta \quad \alpha \quad \beta \quad \alpha \quad \alpha \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagup \\ \alpha \quad \beta \quad \alpha \quad \beta \end{array} \\
 C_3 &= \alpha\beta\alpha^{-1}\beta\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1}\beta^{-1} = \begin{array}{c} \alpha \quad \beta \quad \alpha \quad \beta \quad \alpha \quad \beta \quad \alpha \quad \beta \quad \alpha \quad \beta \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ \alpha \quad \beta \quad \alpha \quad \beta \quad \alpha \quad \beta \quad \alpha \quad \beta \end{array}
 \end{aligned}$$

Si n est un entier impaire ≥ 3 , $C_{n+1} = \beta C_n \alpha \beta^{-1} \alpha^{-1}$; si n est paire ≥ 4 , $C_{n+1} = \alpha \beta \alpha^{-1} C_n \beta$. On voit donc que si n est impaire, C_n est de la forme

$$\begin{array}{c} \alpha \quad \beta \quad \beta \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ \alpha \quad \dots \quad \dots \quad \alpha \quad \beta \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \end{array}$$

alors C_{n+1} est de la forme

$$\begin{array}{c} \beta \quad \alpha \quad \beta \quad \beta \quad \alpha \quad \beta \quad \alpha \quad \beta \quad \alpha \quad \beta \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ \alpha \quad \beta \quad \alpha \quad \beta \quad \alpha \quad \beta \quad \alpha \quad \beta \quad \alpha \quad \beta \end{array}$$

et que si n est paire, C_n est de forme

$$\begin{array}{c} \beta \quad \alpha \quad \beta \quad \dots \quad \beta \quad \alpha \quad \beta \quad \alpha \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \dots \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ \alpha \quad \beta \quad \alpha \quad \dots \quad \beta \quad \alpha \quad \beta \quad \alpha \end{array}$$

alors C_{n+1} est de la forme

$$\begin{array}{c} \alpha \quad \beta \quad \beta \quad \alpha \quad \beta \quad \alpha \quad \beta \quad \alpha \quad \beta \quad \alpha \quad \beta \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagup \\ \alpha \quad \beta \quad \alpha \quad \beta \quad \alpha \quad \beta \quad \alpha \quad \beta \quad \alpha \quad \beta \quad \alpha \end{array}$$

Pour $n \geq 1$, on définit D_n la corde obtenue à partir de C_n en échangeant α et β .

Théorème 5.4.2 Soit M un module indécomposable sur le groupe diédral D_8 d'ordre 8 où

$$D_8 = \langle x, y | x^4 = 1 = y^2, yxy = x^{-1} \rangle$$

(1) $vx(kG) = \{1\}$

(2) Dans la composante $Q(\beta\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1}, 1)$, on obtient

$$vx(M(\beta\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1}, 1, 1)) = \langle x^2 \rangle = \{1, x^2\}$$

et pour $M \not\cong M(\beta\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1}, 1, 1)$, on a $vx(M) = G$

(3) Dans la composante $Q(\beta\alpha^{-1}, 1)$, on obtient $vx(M(\beta\alpha^{-1}, 1, 1)) = \langle x \rangle$ et pour $M \not\cong M(\beta\alpha^{-1}, 1, 1)$, on a $vx(M) = G$

(4) Dans la composante $Q(\beta\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1}, 1)$, $vx(M(\beta\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1}, 1, 1)) = \langle x \rangle = \{1, x, x^2, x^3\}$ et $vx(M) = G$ pour $M \not\cong M(\beta\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1}, 1, 1)$

(5) Tout module dans la composante $Q(\beta\alpha\beta\alpha^{-1}, \mu)$ avec $\mu \in k^*$ est de sommet

$$T_0 = \langle y, x^2 \rangle = \{1, y, x^2, yx^2\}.$$

(5') Tout module dans la composante $Q(\alpha\beta\alpha\beta^{-1}, \mu)$ avec $\mu \in k^*$ est de sommet

$$T_1 = \langle yx, x^2 \rangle = \{1, yx, x^2, yx^3\}.$$

(6) Dans la composante $Q(C_1, 1)$, on obtient

$$vx(M(C_n, 1, 1)) = \langle x^2 \rangle = \{1, x^2\}$$

et pour $M \not\cong M(\beta\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1}, 1, 1)$, on a $vx(M) = G$

(6') Dans la composante $Q(D_1, 1)$, on obtient

$$vx(M(D_n, 1, 1)) = \langle yx^3 \rangle = \{1, yx^3\}$$

et pour $M \not\cong M(D_n, 1, 1)$, on a $vx(M) = G$

(7) Dans la composante $Q(C_n, 1)$ avec $n \geq 2$, on obtient $vx(M(C_n, 1, 1)) = T_0$ et pour $M \not\cong M(C_n, 1, 1)$, on a $vx(M) = G$

(7') Dans la composante $Q(D_n, 1)$ avec $n \geq 2$, on obtient $vx(M(D_n, 1, 1)) = T_1$ et pour $M \not\cong M(D_n, 1, 1)$, on a $vx(M) = G$

(8) Dans la composante $Q(\beta\alpha\beta)$, $vx(M(\beta\alpha\beta)) = \langle y \rangle = \{1, y\}$ et pour $M \not\cong M(\beta\alpha\beta)$, $vx(M) = T_0$

(8') Dans la composante $Q(\alpha\beta\alpha)$, $vx(M(\alpha\beta\alpha)) = \langle yx \rangle = \{1, yx\}$ et pour $M \not\cong M(\alpha\beta\alpha)$, $vx(M) = T_1$

(9) Dans la composante $Q(\beta)$, les modules $\Omega^n(M(\beta))$ avec $n \in \mathbb{Z}$ sont de sommet T_0 et tous les autres sont de sommet G

(9') Dans la composante $Q(\alpha)$, les modules $\Omega^n(M(\alpha))$ avec $n \in \mathbb{Z}$ sont de sommet T_1 et tous les autres sont de sommet G

(10) Tous les autres modules sont de sommet G

La preuve de ce théorème découle des trois sous-sections suivantes.

5.4.1 Induction de H à G

Les kH -modules indécomposables sont de la forme $M(\gamma^i)$ pour $0 \leq i \leq 3$.

Lemme 5.4.3 (1) $\text{Ind}_H^G M(\gamma^0) = \text{Ind}_H^G k = M(\beta\alpha^{-1}, 1, 1)$.

(2) $\text{Ind}_H^G M(\gamma^1) = M(\beta\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1}, 1, 1)$.

(3) $\text{Ind}_H^G M(\gamma^2) = M(\beta\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1}, 1, 1)$.

(4) $\text{Ind}_H^G M(\gamma^3) = \text{Ind}_H^G kH = kG$.

Démonstration On montre (3), le cas le plus compliqué, (1) et (2) se faisant similairement et (4) étant trivial.

Ecrivons $G = eH \sqcup yH$ et supposons $M(\gamma^2) = \left(e_0 \xrightarrow{\gamma} e_1 \xrightarrow{\gamma} e_2 \right)$, i.e. $M(\gamma^2) = \bigoplus_{i=0}^2 ke_i$ avec $ke_i = k$ pour tout $0 \leq i \leq 2$ et l'action est donnée par $\gamma e_0 = e_1, \gamma e_1 = e_2$ et $\gamma e_2 = 0$. Comme $\gamma = 1 + x$, on a $xe_0 = e_0 + e_1, xe_1 = e_1 + e_2$ et $xe_2 = e_2$. Le module induit

$$\text{Ind}_H^G M(\gamma^2) = kG \otimes_{kH} M(\gamma^2) = \left(\bigoplus_{i=0}^2 ke \otimes e_i \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=0}^2 ky \otimes e_i \right)$$

$$\alpha(e \otimes e_i) = (1 + y)e \otimes e_i = e \otimes e_i + y \otimes e_i, \text{ pour tout } 0 \leq i \leq 2.$$

$$\alpha(y \otimes e_i) = (1 + y)y \otimes e_i = y \otimes e_i + e \otimes e_i, \text{ pour tout } 0 \leq i \leq 2.$$

$\beta(e \otimes e_i) = (1 + yx)e \otimes e_i = e \otimes e_i + yx(e \otimes e_i) = e \otimes e_i + y \otimes xe_i = e \otimes e_i + y \otimes e_i + y \otimes e_{i+1}$, pour tout $0 \leq i \leq 2$ où l'on pose $e_3 = 0$.

$\beta(y \otimes e_i) = (1 + yx)y \otimes e_i = y \otimes e_i + yx(y \otimes e_i) = y \otimes e_i + e \otimes x^3 e_i = y \otimes e_i + \sum_{j=i}^2 e \otimes e_j$, pour tout $0 \leq i \leq 2$, car $xyx = x^{-1} = x^3$ et $x^3 e_i = \sum_{j=i}^2 e_j$.

Le diagramme suivant montre le résultat désiré.

$$\begin{array}{ccccccc} e \otimes e_0 & \xrightarrow{\beta} & e \otimes e_0 + y \otimes e_0 + y \otimes e_1 & \xrightarrow{\alpha} & y \otimes e_1 + e \otimes e_1 & \xrightarrow{\beta} & e \otimes e_2 + y \otimes e_2 \\ \parallel & & & & & & \parallel \\ e \otimes e_0 & \xrightarrow{\alpha} & e \otimes e_0 + y \otimes e_0 & \xrightarrow{\beta} & y \otimes e_1 + e \otimes e_1 + e \otimes e_2 & \xrightarrow{\alpha} & e \otimes e_2 + y \otimes e_2 \end{array}$$

□

5.4.2 Induction de T_0 à G

L'élément $x \in G$ agit par conjugaison sur T_0 et donc induit un automorphisme $\sigma = \sigma_x$ de kT_0 . Comme

$$x\beta_0 x^{-1} = 1 + xyx = 1 + y = \alpha_0$$

et

$$x\alpha_0 x^{-1} = 1 + xyx^{-1} = 1 + yx^2 = \beta_0$$

l'action de x échange α_0 et β_0 . Si M est un kT_0 -module, notons M^σ le module obtenu en tensoriant M par kT_0 vu comme kT_0 -module via σ , alors $\alpha_0 * m = x\alpha_0 x^{-1} m = \beta_0 x$ et $\beta_0 * m = x\beta_0 x^{-1} m = \alpha_0 x$, où $m \in M$ et où $*$ signifie l'action de T_0 sur M^σ .

Le lemme suivant se déduit immédiatement de l'argument ci-dessus et de la construction des modules de type corde et de type ruban.

Lemme 5.4.4 (1) Soit C une corde et notons C^σ la corde obtenue en échangeant les positions de α_0 et β_0 . Alors $M(C)^\sigma = M(C^\sigma)$.

- (2) Soit C une corde de type ruban. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\lambda \in k^*$, on a $M(C, n, \lambda)^\sigma = M(C^\sigma, n, \lambda)$.

Regardons maintenant l'action de σ sur le carquois d'Auslander-Reiten de kT_0 . Comme σ est un automorphisme de kT_0 , il transforme une suite d'Auslander-Reiten en une suite d'Auslander-Reiten.

Proposition 5.4.5 (1) Chaque module dans la composante de type $\mathbb{Z}\tilde{A}_{12}$ est stable par σ .

- (2) σ transforme le 1-tube $Q(\alpha_0)$ en $Q(\beta_0)$.

- (3) Etant donné $\lambda \in k^*$, la composante $Q(\alpha_0\beta_0^{-1}, \lambda)$ est stable par σ ssi $\lambda = 1$.

Démonstration (1) Les modules dans la composante de type $\mathbb{Z}\tilde{A}_{12}$ sont $\Omega^n(k) = M((\alpha_0\beta_0^{-1})^n)$ et $\Omega^{-n}(k) = M(\alpha_0^{-1}\beta_0^n)$ pour tout $n \geq 0$. Les cordes C dans cette composante vérifie $C^\sigma = C^{-1}$ et rappelons que $M(C^{-1}) \cong M(C)$, Lemme 5.4.4 (1) implique l'assertion.

(2) Comme les modules dans la composante $Q(\alpha_0)$ (resp. $Q(\beta_0)$) sont de la forme $M(\alpha_0(\beta_0\alpha_0)^n)$ avec $n \in \mathbb{N}$ (resp. $M(\beta_0(\alpha_0\beta_0)^n)$ avec $n \in \mathbb{N}$), alors d'après le lemme précédent, $M(\alpha_0(\beta_0\alpha_0)^n)^\sigma \cong M(\beta_0(\alpha_0\beta_0)^n)$. σ établit donc un isomorphisme entre $Q(\alpha_0)$ et $Q(\beta_0)$.

- (3) $M(\alpha_0\beta_0^{-1}, n, \lambda)^\sigma = M(\beta_0\alpha_0^{-1}, n, \lambda) \cong M(\alpha_0\beta_0^{-1}, n, 1/\lambda)$.

□

On calcule dans la suite concrètement l'induction de chaque module indécomposable.

Lemme 5.4.6 $\text{Ind}_{T_0}^G \Omega^n(k) = \Omega^n M(\beta)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration Comme G/T_0 est d'ordre 2 et comme k est algébriquement clos, tout kT_0 -module est absolument indécomposable, on obtient, d'après le théorème de Green (Théorème 5.1.3), que $\text{Ind}_{T_0}^G \Omega^n(k)$ est indécomposable pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et on en déduit que $\Omega^n(\text{Ind}_{T_0}^G k) \cong \text{Ind}_{T_0}^G (\Omega^n k)$. Il suffit donc de montrer que $\text{Ind}_{T_0}^G k = M(\beta)$.

En effet, si on note $k = ke_0$, alors $\alpha_0 e_0 = 0 = \beta_0 e_0$. Écrivons $G = eT_0 \sqcup xT_0$. $\text{Ind}_{T_0}^G k = k(e \otimes e_0) \oplus k(x \otimes e_0)$. On a $\alpha(e \otimes e_0) = 0 = \alpha(x \otimes e_0)$ et $\beta(e \otimes e_0) = e \otimes e_0 + x \otimes e_0 = \beta(x \otimes e_0)$. On voit le résultat voulu en regardant le diagramme suivant

$$e \otimes e_0 \xrightarrow{\beta} e \otimes e_0 + x \otimes e_0$$

□

Lemme 5.4.7

$$\text{Ind}_{T_0}^G M(\alpha_0) = M(\beta\alpha\beta) = \text{Ind}_{T_0}^G M(\beta_0)$$

Par conséquent, les 1-tubes $Q(\alpha_0)$ et $Q(\beta_0)$ sont transformés par induction en le même 1-tube $Q(\beta\alpha\beta)$.

Démonstration On montre que $\text{Ind}_{T_0}^G M(\alpha_0) = M(\beta\alpha\beta)$, l'autre égalité se faisant similairement.

Écrivons $M(\alpha_0) = (e_0 \xrightarrow{\alpha_0} e_1)$. Comme $\alpha_0 e_0 = e_1, \alpha_0 e_1 = 0$ et $\beta_0 e_0 = 0 = \beta_0 e_1$, on sait que $ye_0 = e_0 + e_1, ye_1 = e_1$ et $yx^2 e_0 = e_0, yx^2 e_1 = e_1$. Comme $G = eT_0 \sqcup xT_0$,

$$\text{Ind}_{T_0}^G M(\alpha_0) = k(e \otimes e_0) \oplus k(e \otimes e_1) \oplus k(x \otimes e_0) \oplus k(x \otimes e_1)$$

On calcule les actions.

$$\alpha(e \otimes e_0) = (1 + y)e \otimes e_0 = e \otimes e_0 + y(e \otimes e_0) = e \otimes e_0 + e \otimes ye_0 = e \otimes e_0 + e \otimes e_0 + e \otimes e_1 = e \otimes e_1$$

$$\alpha(e \otimes e_1) = (1 + y)e \otimes e_1 = e \otimes e_1 + y(e \otimes e_1) = e \otimes e_1 + e \otimes ye_1 = e \otimes e_1 + e \otimes e_1 = 0$$

$\alpha(x \otimes e_0) = (1 + y)x \otimes e_0 = x \otimes e_0 + y(x \otimes e_0) = x \otimes e_0 + x \otimes yx^2e_0 = x \otimes e_0 + x \otimes e_0 = 0$
 puisque $yx = xyx^2$

$$\alpha(x \otimes e_1) = (1 + y)x \otimes e_1 = x \otimes e_1 + y(x \otimes e_1) = x \otimes e_1 + x \otimes yx^2e_1 = x \otimes e_1 + x \otimes e_1 = 0$$

$$\beta(e \otimes e_0) = (1 + yx)e \otimes e_0 = e \otimes e_0 + yx(e \otimes e_0) = e \otimes e_0 + x \otimes yx^2e_0 = e \otimes e_0 + x \otimes e_0$$

$$\beta(e \otimes e_1) = (1 + yx)e \otimes e_1 = e \otimes e_1 + yx(e \otimes e_1) = e \otimes e_1 + x \otimes yx^2e_1 = e \otimes e_1 + x \otimes e_1$$

$$\beta(x \otimes e_0) = (1 + yx)x \otimes e_0 = x \otimes e_0 + yx(x \otimes e_0) = x \otimes e_0 + e \otimes yx^2e_0 = x \otimes e_0 + e \otimes e_0$$

puisque $yx^2 \in T_0$

$$\beta(x \otimes e_1) = (1 + yx)x \otimes e_1 = x \otimes e_1 + yx(x \otimes e_1) = x \otimes e_1 + e \otimes yx^2e_1 = x \otimes e_1 + e \otimes e_1$$

Le diagramme suivant montre l'assertion.

$$x \otimes e_0 \xrightarrow{\beta} x \otimes e_0 + e \otimes e_0 \xrightarrow{\alpha} e \otimes e_1 \xrightarrow{\beta} e \otimes e_2 + x \otimes e_2$$

Comme σ transforme $Q(\alpha_0)$ en $Q(\beta_0)$, le groupe d'inertie de $Q(\alpha_0)$ est T_0 et Théorème 5.1.5 induit un isomorphisme de $Q(\alpha_0)$ (aussi $Q(\beta_0)$) vers $Q(\beta\alpha\beta)$

□

Lemme 5.4.8 Si $\lambda \in k - \{0, 1\}$, $\text{Ind}_{T_0}^G M(\alpha_0\beta_0^{-1}, n, \lambda) = M(\beta\alpha\beta\alpha^{-1}, n, \mu)$ avec $\mu = \frac{\lambda}{\lambda^2+1}$. Par conséquent, la composante $Q(\alpha_0\beta_0^{-1}, \lambda)$ avec $\lambda \in k - \{0, 1\}$ différent de 1 devient après induction la composante $Q(\beta\alpha\beta\alpha^{-1}, \mu)$.

Démonstration Décrivons

$$M(\alpha_0\beta_0^{-1}, 1, \lambda) = \left(e_0 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha_0=1} \\ \xrightarrow{\beta_0=\lambda} \end{array} e_1 \right).$$

Alors $\alpha_0e_0 = e_1, \alpha_0e_1 = 0$ et $\beta_0e_0 = \lambda e_1, \beta_0e_1 = 0$. Comme $\alpha_0 = 1+y$ et $\beta_0 = 1+yx^2$, $ye_0 = e_0+e_1, ye_1 = e_1$ et $yx^2e_0 = e_0 + \lambda e_1, yx^2e_1 = e_1$. On obtient le module induit

$$\text{Ind}_{T_0}^G M(\alpha_0\beta_0^{-1}, 1, \lambda) = k(e \otimes e_0) \oplus k(e \otimes e_1) \oplus k(x \otimes e_0) \oplus k(x \otimes e_1)$$

et on calcule

$$\alpha(e \otimes e_0) = (1 + y)e \otimes e_0 = e \otimes e_0 + e \otimes ye_0 = e \otimes e_1$$

$$\alpha(e \otimes e_1) = (1 + y)e \otimes e_1 = e \otimes e_1 + e \otimes ye_1 = e \otimes e_1 + e \otimes e_1 = 0$$

$$\alpha(x \otimes e_0) = (1 + y)x \otimes e_0 = x \otimes e_0 + x \otimes yx^2e_0 = x \otimes e_0 + x \otimes e_0 + \lambda x \otimes e_1 = \lambda x \otimes e_1$$

$$\alpha(x \otimes e_1) = (1 + y)x \otimes e_1 = x \otimes e_1 + x \otimes yx^2e_1 = x \otimes e_1 + x \otimes e_1 = 0$$

$$\beta(e \otimes e_0) = (1 + yx)e \otimes e_0 = e \otimes e_0 + x \otimes yx^2e_0 = e \otimes e_0 + x \otimes e_0 + \lambda x \otimes e_1$$

$$\beta(e \otimes e_1) = (1 + yx)e \otimes e_1 = e \otimes e_1 + x \otimes yx^2e_1 = e \otimes e_1 + x \otimes e_1$$

$$\beta(x \otimes e_0) = (1 + yx)x \otimes e_0 = x \otimes e_0 + e \otimes yx^2e_0 = e \otimes e_0 + x \otimes e_0 + \lambda e \otimes e_1$$

$$\beta(x \otimes e_1) = (1 + yx)x \otimes e_1 = x \otimes e_1 + e \otimes yx^2e_1 = x \otimes e_1 + e \otimes e_1$$

Si on note

$$e'_0 = e \otimes e_0 + \frac{1}{\lambda}x \otimes e_0,$$

$$e'_1 = \frac{\lambda+1}{\lambda}(e \otimes e_0 + x \otimes e_0) + e \otimes e_1 + \lambda x \otimes e_1,$$

$$e'_2 = \frac{\lambda+1}{\lambda}(e \otimes e_1 + \lambda x \otimes e_1)$$

et

$$e'_3 = \frac{\lambda^2+1}{\lambda}(e \otimes e_1 + x \otimes e_1)$$

alors on vérifie que

$$\beta e'_0 = e'_1, \alpha e'_1 = e'_2, \beta e'_2 = e'_3 \text{ et } \alpha e'_0 = \mu e'_3.$$

On voit l'assertion via le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} e'_0 & \xrightarrow{\beta} & e'_1 \\ \alpha=\mu \downarrow & & \downarrow \alpha \\ e'_3 & \xleftarrow{\beta} & e'_2 \end{array}$$

Comme $\lambda \neq 1$, σ ne stabilise pas la composante $Q(\alpha_0\beta_0^{-1}, \lambda)$ et le groupe d'inertie de $Q(\alpha_0\beta_0^{-1}, \lambda)$ est T_0 . Théorème 5.1.5 implique que l'induction induit un isomorphisme entre $Q(\alpha_0\beta_0^{-1}, \lambda)$ et $Q(\beta\alpha\beta\alpha^{-1}, \mu)$.

□

Proposition 5.4.9

$$\text{Ind}_{T_0}^G M(\alpha_0\beta_0^{-1}, n, 1) = M(C_n, 1, 1)$$

Avant de donner la preuve de cette proposition, on regarde des sous-cordes des cordes C_n .

$$C_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{c} \beta \diagdown \quad \alpha \diagup \\ \alpha \diagdown \quad \beta \diagup \end{array} \quad \begin{array}{c} \beta \diagdown \quad \alpha \diagup \\ \alpha \diagdown \quad \beta \diagup \end{array} \end{array}$$

Désignons la partie de bord $---$ par C'_2 , la partie de bord $\cdots$ par $C_2^{(1)}$ et la partie de bord $---$ par $C_2^{(2)}$. On voit que $(C_2^{(1)})^{-1}$ s'identifie à $C_2^{(2)}$.

$$C_3 = \begin{array}{c} \begin{array}{c} \alpha \diagdown \quad \beta \diagup \\ \beta \diagdown \quad \alpha \diagup \end{array} \quad \begin{array}{c} \alpha \diagdown \quad \beta \diagup \\ \beta \diagdown \quad \alpha \diagup \end{array} \quad \begin{array}{c} \alpha \diagdown \quad \beta \diagup \\ \beta \diagdown \quad \alpha \diagup \end{array} \end{array}$$

Désignons la partie de bord $---$ par C'_3 , la partie de bord $\cdots$ par $C_3^{(1)}$ et la partie de bord $---$ par $C_3^{(2)}$. On voit que $(C_3^{(2)})^{-1}$ s'identifie à $C_3^{(1)}$.

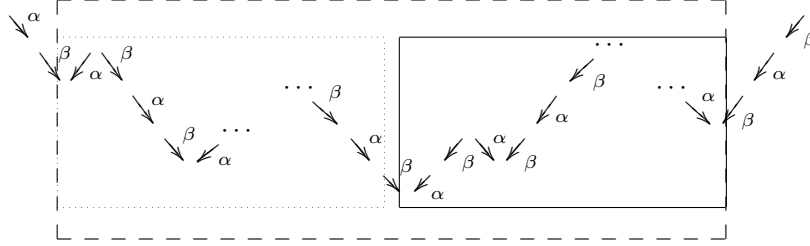
Si n est paire ≥ 4 , C_n est de la forme

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} \beta \diagdown \quad \alpha \diagup \\ \alpha \diagdown \quad \beta \diagup \end{array} \quad \cdots \quad \begin{array}{c} \beta \diagdown \quad \alpha \diagup \\ \alpha \diagdown \quad \beta \diagup \end{array} \quad \cdots \quad \begin{array}{c} \beta \diagdown \quad \alpha \diagup \\ \alpha \diagdown \quad \beta \diagup \end{array} \quad \cdots \quad \begin{array}{c} \beta \diagdown \quad \alpha \diagup \\ \alpha \diagdown \quad \beta \diagup \end{array} \end{array}$$

Désignons la partie de bord $---$ par C'_n , la partie de bord $\cdots$ par $C_n^{(1)}$ et la partie de bord $---$ par $C_n^{(2)}$.

On voit bien par récurrence que $(C_n^{(1)})^{-1}$ s'identifie à $C_n^{(2)}$.

Si n est impaire ≥ 5 , C_n est de la forme



Notons la partie de bord $---$ C'_n , la partie de bord $\cdots$ $C_n^{(1)}$ et la partie de bord $---$ $C_n^{(2)}$. On voit par récurrence que $(C_n^{(2)})^{-1}$ s'identifie à $C_n^{(1)}$.

Preuve de Proposition 5.4.9 Ecrivons

$$M(\alpha_0\beta_0^{-1}, n, 1) = (e_1 \xrightarrow[\beta_0=J_n(1)]{\alpha_0=Id} e_2)$$

où $e_1 = (e_{11}, e_{12}, \dots, e_{1n})^t$ et $e_2 = (e_{21}, \dots, e_{2n})^t$ et où Id est la matrice identique de taille $n \times n$ et

$$J_n(1) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a donc que $\alpha_0 e_{1i} = e_{2i}$ pour tout $1 \leq i \leq n$, $\alpha_0 e_{2i} = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$, $\beta_0 e_{1i} = e_{2i} + e_{2,i-1}$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et $\beta_0 e_{2i} = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$ où l'on pose $e_{2,0} = 0$. Comme $\alpha_0 = 1 + y$ et $\beta_0 = 1 + yx^2$, on obtient $ye_{1i} = e_{1i} + e_{2i}$ pour tout $1 \leq i \leq n$, et $ye_{2i} = e_{2i}$ pour tout $1 \leq i \leq n$, et $yx^2 e_{1i} = e_{1i} + e_{2i} + e_{2,i-1}$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et $yx^2 e_{2i} = e_{2i}$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Le module induit est

$$\text{Ind}_{T_0}^G M(\alpha_0\beta_0^{-1}, n, 1) = \left(\bigoplus_{i=1}^n ke \otimes e_{1i} \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^n kx \otimes e_{1i} \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^n ke \otimes e_{2i} \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^n kx \otimes e_{2i} \right)$$

On calcule les actions:

$$\alpha(e \otimes e_{1i}) = (1 + y)e \otimes e_{1i} = e \otimes e_{1i} + e \otimes ye_{1i} = e \otimes e_{1i} + e \otimes e_{1i} + e \otimes e_{2i} = e \otimes e_{2i}$$

pour tout $1 \leq i \leq n$.

$$\alpha(x \otimes e_{1i}) = (1 + y)x \otimes e_{1i} = x \otimes e_{1i} + x \otimes yx^2 e_{1i} = x \otimes e_{1i} + x \otimes e_{1i} + x \otimes e_{2i} + x \otimes e_{2,i-1} = x \otimes e_{2i} + x \otimes e_{2,i-1}$$

pour tout $1 \leq i \leq n$, puisque $yx = yx^2$.

$$\alpha(e \otimes e_{2i}) = (1 + y)e \otimes e_{2i} = e \otimes e_{2i} + e \otimes ye_{2i} = e \otimes e_{2i} + e \otimes e_{2i} = 0$$

pour tout $1 \leq i \leq n$.

$$\alpha(x \otimes e_{2i}) = (1 + y)x \otimes e_{2i} = x \otimes e_{2i} + x \otimes yx^2 e_{2i} = x \otimes e_{2i} + x \otimes e_{2i} = 0$$

pour tout $1 \leq i \leq n$.

$$\beta(e \otimes e_{1i}) = (1 + yx)e \otimes e_{1i} = e \otimes e_{1i} + x \otimes yx^2e_{1i} = e \otimes e_{1i} + x \otimes e_{1i} + x \otimes e_{2i} + x \otimes e_{2,i-1}$$

pour tout $1 \leq i \leq n$.

$$\beta(x \otimes e_{1i}) = (1 + yx)x \otimes e_{1i} = x \otimes e_{1i} + e \otimes yx^2e_{1i} = x \otimes e_{1i} + e \otimes e_{1i} + e \otimes e_{2i} + e \otimes e_{2,i-1}$$

pour tout $1 \leq i \leq n$.

$$\beta(e \otimes e_{2i}) = (1 + yx)e \otimes e_{2i} = e \otimes e_{2i} + x \otimes yx^2e_{2i} = e \otimes e_{2i} + x \otimes e_{2i}$$

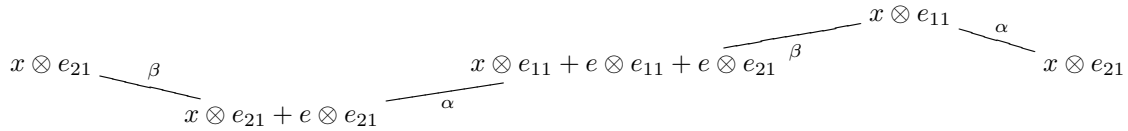
pour tout $1 \leq i \leq n$.

$$\beta(x \otimes e_{2i}) = (1 + yx)x \otimes e_{2i} = x \otimes e_{2i} + e \otimes yx^2e_{2i} = x \otimes e_{2i} + e \otimes e_{2i}$$

pour tout $1 \leq i \leq n$.

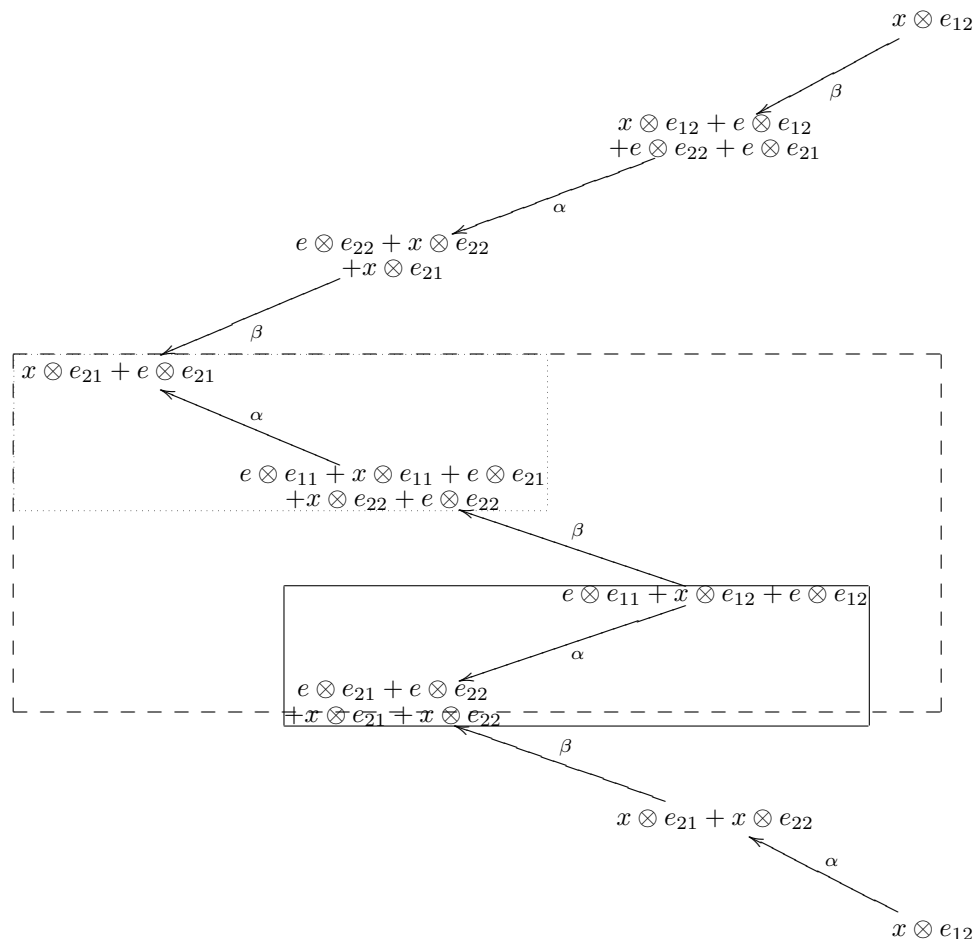
Ensuite on construit explicitement une base de $M(C_n, 1, 1)$ pour $n \leq 3$.

Cas $n = 1$.



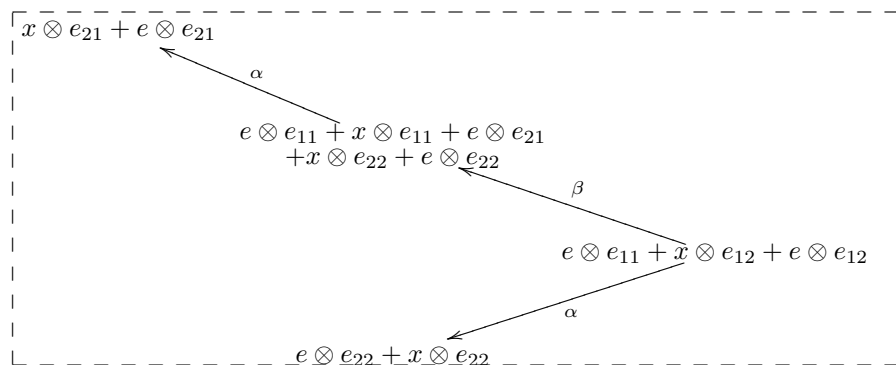
Dans ce diagramme, on a précisé l'élément en toute position et il est facile de voir que ces éléments forment une base de $\text{Ind}_{T_0}^G M(\alpha_0 \beta_0^{-1}, 1, 1)$ (bien sur, on supprime un $x \otimes e_{21}$). Ce diagramme réalise donc l'isomorphisme $\text{Ind}_{T_0}^G M(\alpha_0 \beta_0^{-1}, 1, 1) \cong M(C_1, 1, 1)$.

Cas $n = 2$ (on a tourné le diagramme de 90 degrés)

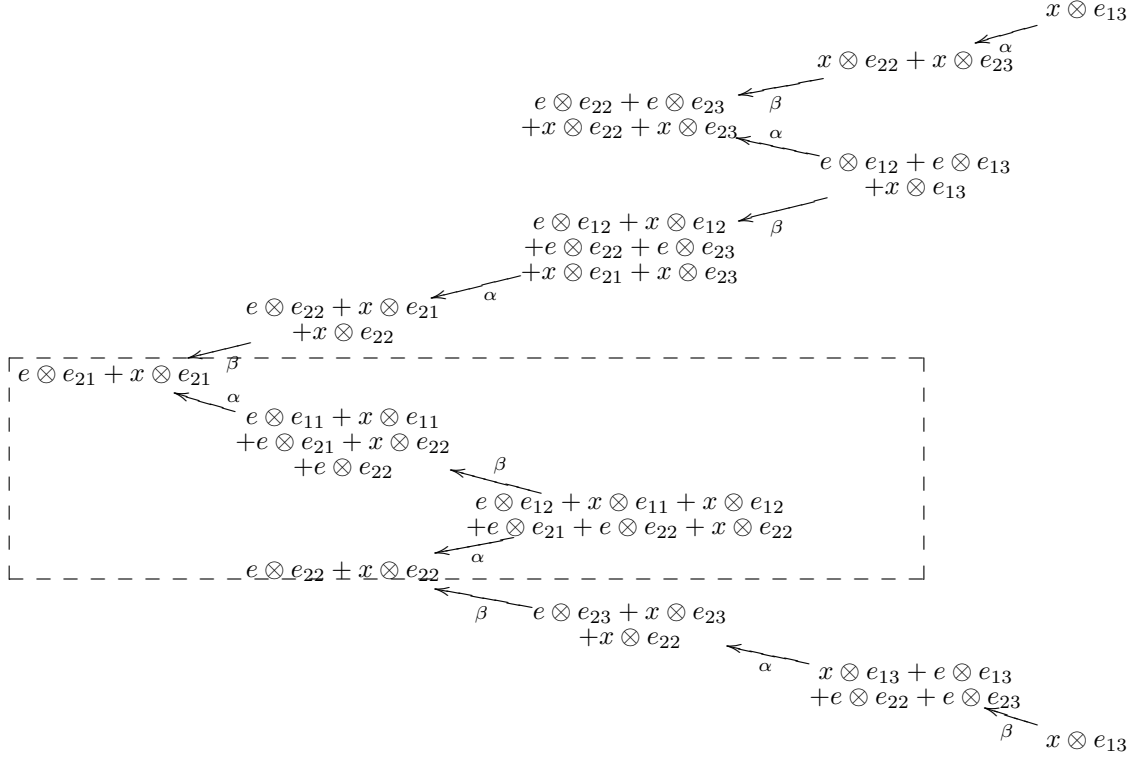


Comme dans le cas $n = 1$, ce diagramme réalise l'isomorphisme $\text{Ind}_{T_0}^G M(\alpha_0 \beta_0^{-1}, 2, 1) \cong M(C_2, 1, 1)$.

Remarquons que la partie de bord $---$ est C'_2 , la partie de bord $\cdots$ est $C_2^{(1)}$ et la partie de bord $---$ est $C_2^{(2)}$. En tant que cordes, $(C_2^{(1)})^{-1}$ s'identifie à $C_2^{(2)}$. Si dans le diagramme C'_2 on ajoute à la position de $C_2^{(2)}$ le diagramme $(C_2^{(1)})^{-1}$ (avec les éléments dans $(C_2^{(1)})^{-1}$), alors le diagramme C'_2 devient un diagramme de la forme suivante, noté $\tilde{C}'_2$,



Cas $n = 3$ (on a tourné le diagramme de 90 degrés)



On voit facilement que ce diagramme réalise l'isomorphisme voulu. Remarquons que la partie en boîte, qui s'identifie à C'_2 en tant que cordes, est justement le diagramme $\tilde{C}'_2$.

L'hypothèse de récurrence est la suivante: On suppose que l'assertion soit vraie pour $n - 1$ et les diagrammes suivants réalisent l'isomorphisme

$$\text{Ind}_{T_0}^G M(\beta_0 \alpha_0^{-1}, n - 1, 1) \cong M(C_{n-1}, 1, 1),$$

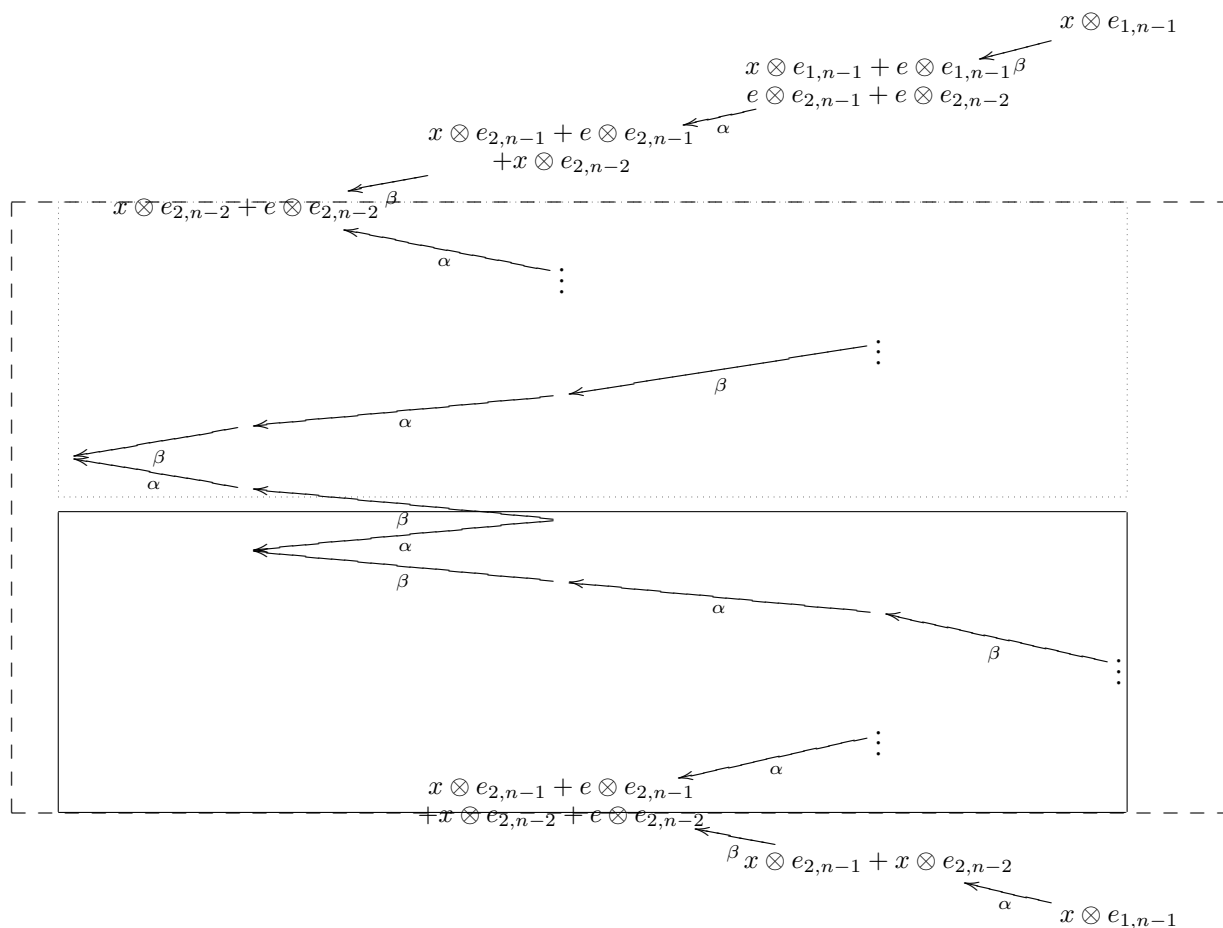
c'est-à-dire que dans chacun des cas suivants, l'hypothèse de récurrence demande les conditions suivantes:

- (1) Il existe une base de $\text{Ind}_{T_0}^G M(\alpha_0 \beta_0^{-1}, n - 1, 1)$ qui réalise l'isomorphisme

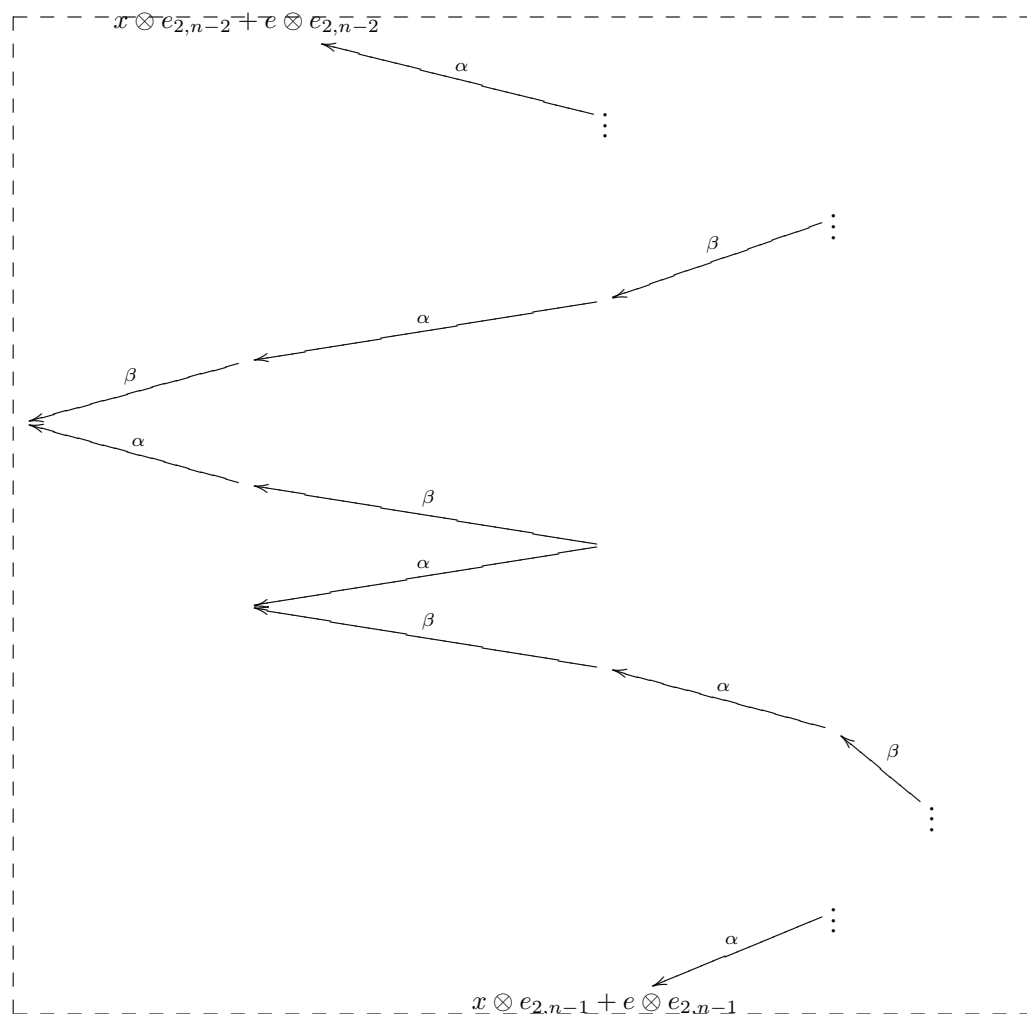
$$\text{Ind}_{T_0}^G M(\alpha_0 \beta_0^{-1}, n - 1, 1) \cong M(C_{n-1}, 1, 1)$$

- (2) Cette base contient les éléments déjà explicités dans chacun des diagrammes suivants.

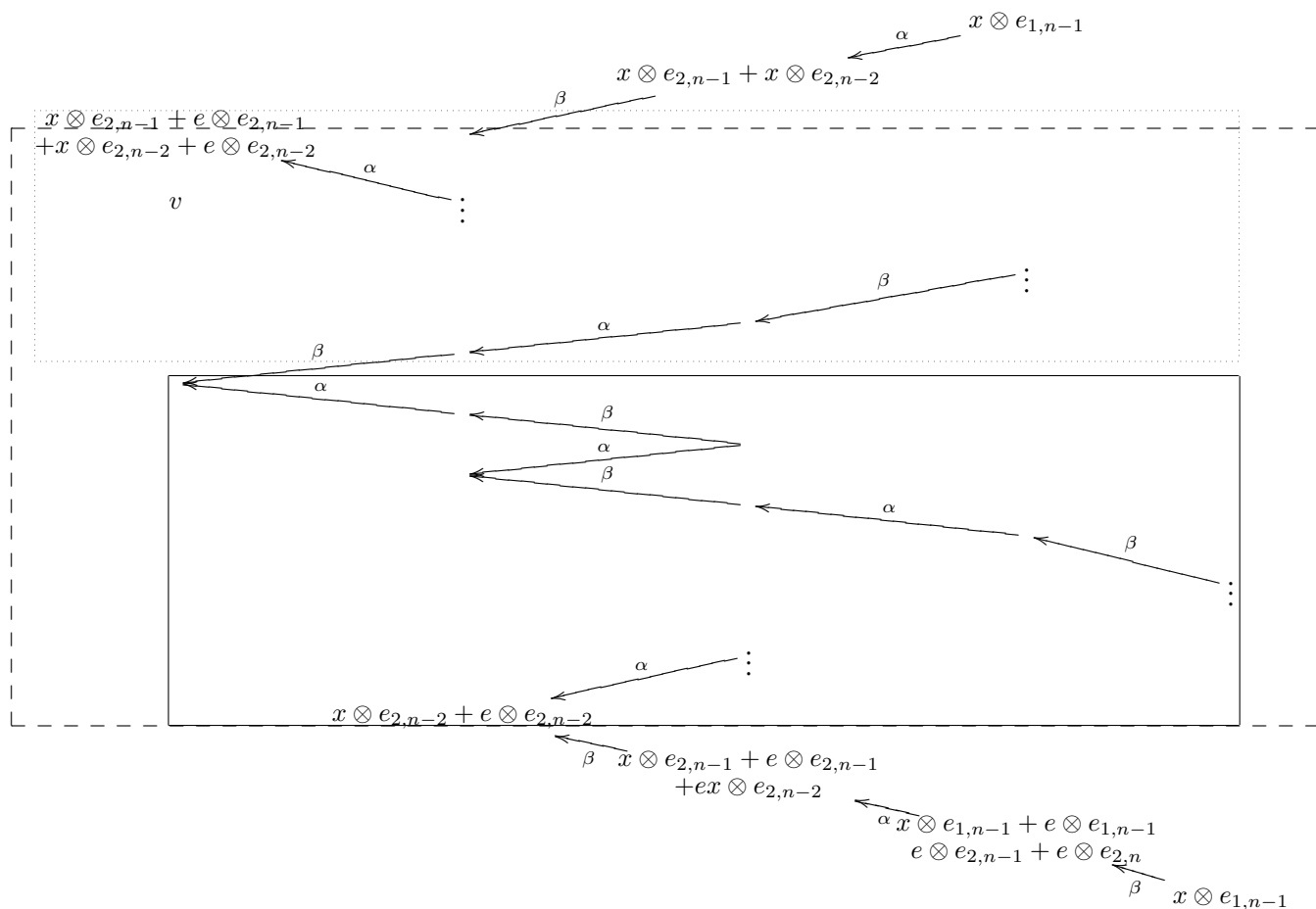
Si n est impaire,



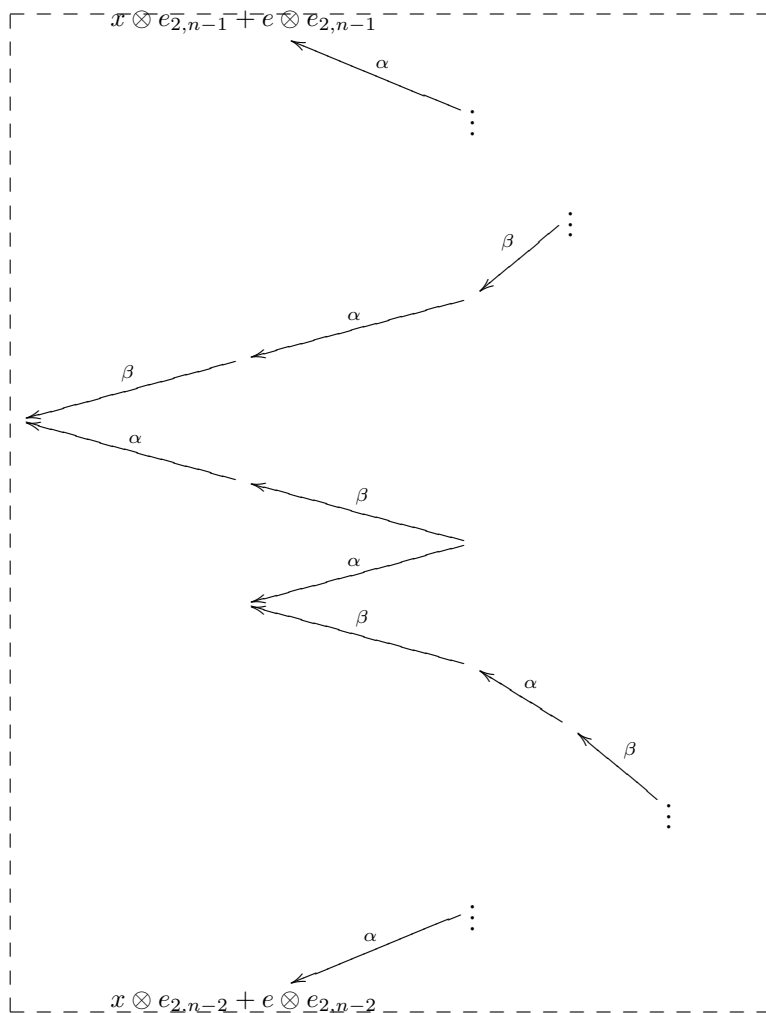
La partie de bord est $C_{n-1}^{(1)}$, la partie de bord — est $C_{n-1}^{(2)}$ et celle de bord - - - est C'_{n-1} . Comme en tant que cordes, $(C_{n-1}^{(1)})^{-1}$ s'identifie à $C_{n-1}^{(2)}$, si on ajoute dans C'_{n-1} à la position de $C_{n-1}^{(2)}$ le diagramme $(C_{n-1}^{(1)})^{-1}$ (avec les éléments), alors le digramme C'_{n-1} devient un diagramme, noté $\tilde{C}'_{n-1}$, dont l'élément le plus haut est $x \otimes e_{2,n-2} + e \otimes e_{2,n-2}$ et dont l'élément le plus bas est $x \otimes e_{2,n-1} + e \otimes e_{2,n-1}$.



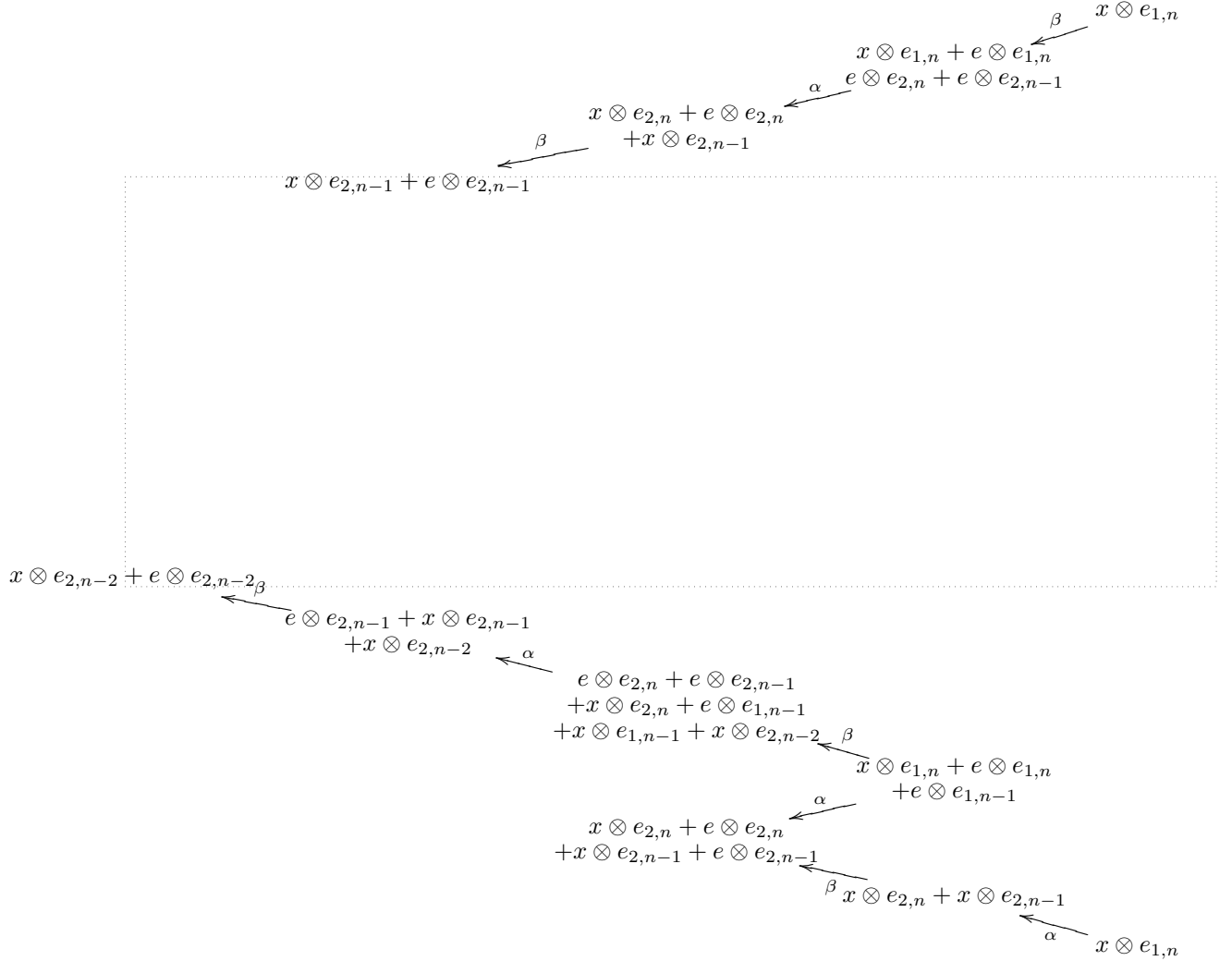
Si n est paire,



La partie de bord est $C_{n-1}^{(1)}$, la partie de bord — est $C_{n-1}^{(2)}$ et celle de bord - - - est C'_{n-1} . Comme en tant que cordes, $(C_{n-1}^{(2)})^{-1}$ s'identifie à $C_{n-1}^{(1)}$, si on ajoute dans C'_{n-1} à la position de $C_{n-1}^{(1)}$ le diagramme $(C_{n-1}^{(2)})^{-1}$ (avec les éléments), alors le digramme C'_{n-1} devient un diagramme, noté $\tilde{C}'_{n-1}$, dont l'élément le plus haut est $x \otimes e_{2,n-1} + e \otimes e_{2,n-1}$ et dont l'élément le plus bas est $x \otimes e_{2,n-2} + e \otimes e_{2,n-2}$.



On va construire un diagramme de forme C_n qui établit l'assertion. Si n est impaire,

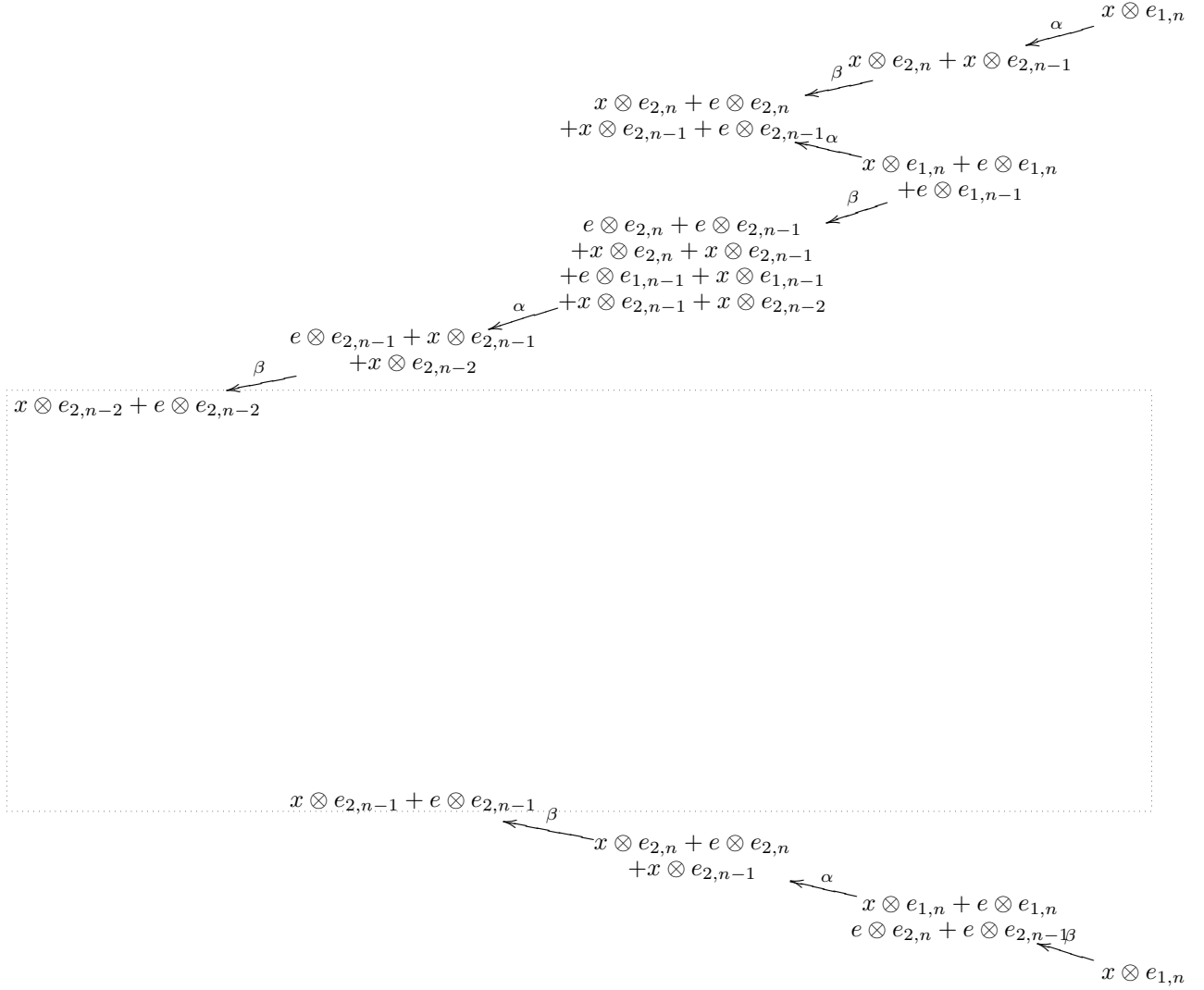


On veut trouver une base de $\text{Ind}_{T_0}^G M(\alpha_0 \beta_0^{-1}, n, 1)$ qui contient les éléments déjà explicités dans le diagramme précédent et qui réalise l'isomorphisme

$$\text{Ind}_{T_0}^G M(\alpha_0 \beta_0^{-1}, n, 1) \cong M(C_n, 1, 1)$$

Comme la partie vide en boîte s'identifie à C'_{n-1} en tant que cordes. On remplit cette partie vide par $\tilde{C}'_{n-1}$ et il est facile de voir que $\tilde{C}'_{n-1}$ se recolle bien avec les éléments déjà explicités.

Si n est paire,



On veut trouver une base de $\text{Ind}_{T_0}^G M(\alpha_0 \beta_0^{-1}, n, 1)$ qui contient les éléments déjà explicités dans le diagramme précédent et qui réalise l'isomorphisme

$$\text{Ind}_{T_0}^G M(\alpha_0 \beta_0^{-1}, n, 1) \cong M(C_n, 1, 1)$$

Comme la partie vide en boîte s'identifie à C'_{n-1} en tant que cordes. On remplit cette partie vide par $\tilde{C}'_{n-1}$ et il est facile de voir que $\tilde{C}'_{n-1}$ se recolle bien avec les éléments déjà explicités.

□

5.4.3 Induction de T_1 à G

Proposition 5.4.10 (1) $\text{Ind}_{T_1}^G \Omega^n(k) = \Omega^n(M(\alpha))$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

(2) $\text{Ind}_{T_1}^G M(\alpha_1 \beta_1^{-1}, n, \lambda) = M(\alpha \beta \alpha \beta^{-1}, n, \mu)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et où $\lambda \in k^*$ n'est pas égale à 1 et $\mu = \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1}$.

(3) $\text{Ind}_{T_1}^G M(\alpha_1 \beta_1^{-1}, n, 1) = M(D_n, 1, 1)$.

(4) $\text{Ind}_{T_1}^G M(\alpha_1) = M(\alpha \beta \alpha) = \text{Ind}_{T_1}^G M(\beta_1)$ et par conséquent $\text{Ind}_{T_1}^G Q(\alpha_1) = Q(\alpha \beta \alpha) = \text{Ind}_{T_1}^G Q(\beta_1)$

La preuve est identique à celle dans la section précédente.

5.5 Groupes diédraux d'ordre ≥ 16

Notons

$$G = D_{2^n} = \langle x, y | x^{2^{n-1}} = e = y^2, yxy = x^{-1} \rangle$$

le groupe diédral d'ordre 2^n . Le carquois avec relations de kG est

$$\begin{array}{c} \alpha \quad \bigcirc \quad \overset{0}{\bullet} \quad \bigcirc \quad \beta \\ \alpha^2 = 0 = \beta^2, (\alpha\beta)^{2^{n-2}} = (\beta\alpha)^{2^{n-2}} \end{array}$$

où $\alpha = 1 + y$ et $\beta = 1 + yx$.

Notons $H = \langle x \rangle \cong C_{2^{n-1}}$, $T_0 = \langle x^2, y \rangle \cong D_{2^{n-1}}$ et $T_1 = \langle x^2, yx \rangle \cong D_{2^{n-1}}$. Ce sont tous les sous-groupes d'indice 2 de G , donc normaux. Les carquois avec relations des algèbres kT_0 , kT_1 et kH sont respectivement

$$\begin{array}{c} \alpha_0 \quad \bigcirc \quad \overset{0}{\bullet} \quad \bigcirc \quad \beta_0 \\ \alpha_0^2 = 0 = \beta_0^2, (\alpha_0 \beta_0)^{2^{n-3}} = (\beta_0 \alpha_0)^{2^{n-3}} \end{array}$$

où $\alpha_0 = 1 + y$ et $\beta_0 = 1 + yx^2$.

$$\begin{array}{c} \alpha_1 \quad \bigcirc \quad \overset{0}{\bullet} \quad \bigcirc \quad \beta_1 \\ \alpha_1^2 = 0 = \beta_1^2, (\alpha_1 \beta_1)^{2^{n-3}} = (\beta_1 \alpha_1)^{2^{n-3}} \end{array}$$

où $\alpha_1 = 1 + yx$ et $\beta_1 = 1 + x^2$.

$$\bullet \quad \bigcirc \quad \gamma \quad \gamma^{2^{n-1}} = 0$$

où $\gamma = 1 + x$.

Proposition 5.5.1 ([15, Page 64, II.7.6 LAMMA]) Le carquois d'Auslander-Reiten stable de kG est composé de

- une infinité de 1-tubes formés des modules de type ruban
- deux 1-tubes formés de modules de type corde: $Q((\alpha\beta)^{2^{n-2}-1}\alpha)$ et $Q((\beta\alpha)^{2^{n-2}-1}\beta)$
- une infinité de composantes de type $\mathbb{Z}A_\infty^\infty$.

5.5.1 Induction de H à G

Les kH -modules indécomposables sont de la forme $M(\gamma^s)$ pour $0 \leq s \leq 2^{n-1} - 1$.

Lemme 5.5.2 $\text{Ind}_H^G M(\gamma^s) = M(\underbrace{(\beta\alpha\cdots)}_{s+1} \underbrace{(\alpha\beta\cdots)}_{s+1}^{-1}, 1, 1)$

Démonstration On suppose $M(\gamma^s) = (e_0 \xrightarrow{\gamma} e_1 \xrightarrow{\gamma} \cdots \xrightarrow{\gamma} e_s)$. Alors comme $\gamma = 1 + x$, on a $xe_i = e_i + e_{i+1}$ pour tout $1 \leq i \leq s$, où on utilise la convention $e_{s+1} = 0$. Le module après induction est

$$\text{Ind}_H^G M(\gamma^s) = \left(\bigoplus_{i=1}^s ke \otimes e_i \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^s ky \otimes e_i \right)$$

On calcule en suite

$$\alpha(e \otimes e_i) = (1 + y)e \otimes e_i = e \otimes e_i + y \otimes e_i,$$

pour tout $0 \leq i \leq s$ et

$$\alpha(y \otimes e_i) = (1 + y)y \otimes e_i = y \otimes e_i + e \otimes e_i$$

pour tout $0 \leq i \leq s$, puisque $y^2 = e$ et

$$\beta(e \otimes e_i) = (1 + yx)e \otimes e_i = e \otimes e_i + yx(e \otimes e_i) = e \otimes e_i + y \otimes xe_i = e \otimes e_i + y \otimes e_i + y \otimes e_{i+1}$$

pour tout $0 \leq i \leq s$ et

$$\beta(y \otimes e_i) = (1 + yx)y \otimes e_i = y \otimes e_i + yx(y \otimes e_i) = y \otimes e_i + e \otimes x^{-1}e_i = y \otimes e_i + \sum_{j=i}^s e \otimes e_j$$

pour tout $0 \leq i \leq s$, puisque $xyx = x^{-1}$ et $x^{-1}e_i = \sum_{j=i}^s e_j$.

Il est facile de voir que $(\cdots \beta \circ \alpha)e \otimes e_i = 0$, si $(\cdots \beta \circ \alpha)$ est composé de plus de $s + 1 - i$ flèches. On a, pour tout $2 \leq i \leq s$, les suites indépendantes suivantes de longueur $s + 1 - i$:

$$e \otimes e_i \xrightarrow{\alpha} e \otimes e_i + y \otimes e_i \xrightarrow{\beta} \cdots \longrightarrow e \otimes e_s + y \otimes e_s$$

et la suite de longueur $s - 1$

$$y \otimes e_2 \xrightarrow{\alpha} e \otimes e_2 + y \otimes e_2 \xrightarrow{\beta} \cdots \longrightarrow e \otimes e_s + y \otimes e_s$$

On fait la récurrence sur s . Pour $s = 0$, voici deux diagrammes qui établissent les isomorphismes désirés.

$$\begin{array}{ccc} e \otimes e_1 & \xrightarrow{\beta} & e \otimes e_1 + y \otimes e_1 \\ \parallel & & \parallel \\ e \otimes e_1 & \xrightarrow{\alpha} & e \otimes e_1 + y \otimes e_1 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} y \otimes e_1 & \xrightarrow{\alpha} & y \otimes e_1 + e \otimes e_1 \\ \parallel & & \parallel \\ y \otimes e_1 & \xrightarrow{\beta} & ye \otimes e_1 + e \otimes e_1 \end{array}$$

Notre hypothèse de récurrence est que l'on a un diagramme suivant qui établit l'isomorphisme

$$\text{Ind}_H^G (e_1 \xrightarrow{\gamma} \cdots \xrightarrow{\gamma} e_n) \cong M(\underbrace{(\alpha\beta\cdots)}_s \underbrace{(\beta\alpha\cdots)}_s^{-1}, 1, 1)$$

$$\begin{array}{c} e \otimes e_1 \xrightarrow{\alpha} e \otimes e_1 + y \otimes e_1 \xrightarrow{\beta} \cdots \succ e \otimes e_s + y \otimes e_s \\ \parallel \\ e \otimes e_1 \succ e \otimes e_1 + y \otimes e_1 + y \otimes e_2 \succ \cdots \succ y \otimes e_s + e \otimes e_s \end{array}$$

Si on supprime la première colonne de ce diagramme et ajoute à la deuxième ligne les suites de longueur $s + 1 - i$:

$$e \otimes e_i \xrightarrow{\alpha} e \otimes e_i + y \otimes e_i \xrightarrow{\beta} \cdots \longrightarrow e \otimes e_s + y \otimes e_s$$

pour tout $2 \leq i \leq s$ et la suite de longueur $s - 1$

$$y \otimes e_2 \xrightarrow{\alpha} e \otimes e_2 + y \otimes e_2 \xrightarrow{\beta} \cdots \longrightarrow e \otimes e_s + y \otimes e_s$$

Alors on obtient un diagramme (*) de la forme

$$\begin{array}{c} y \otimes e_1 + e \otimes e_1 \xrightarrow{\beta} \cdots \succ e \otimes e_s + y \otimes e_s \\ y \otimes e_1 + e \otimes e_1 + e \otimes e_2 + \cdots + e \otimes e_s \xrightarrow{\alpha} \cdots \succ e \otimes e_s + y \otimes e_s \end{array}$$

Regardons maintenant le diagramme incomplet suivant

$$\begin{array}{c} e \otimes e_0 \xrightarrow{\beta} e \otimes e_0 + y \otimes e_0 + y \otimes e_1 \xrightarrow{\alpha} y \otimes e_1 + e \otimes e_1 \xrightarrow{\beta} \cdots \\ \parallel \\ e \otimes e_0 \xrightarrow{\alpha} e \otimes e_0 + y \otimes e_0 \xrightarrow{\beta} y \otimes e_1 + e \otimes e_1 + e \otimes e_2 + \cdots + e \otimes e_s \xrightarrow{\alpha} \cdots \end{array}$$

On complète ce diagramme par le diagramme (*). Le nouveau diagramme ainsi obtenu établit l'assertion. $\square$

5.5.2 Définition d'un ordre sur l'ensemble des segments d'une corde

Afin de formuler une formule des cordes induites de T_0 (resp. de T_1) vers G , on introduit une relation binaire sur l'ensemble des segments d'une corde sur kT_0 (resp. kT_1).

Soit $C = C_1 C_2 \cdots C_n$ une corde sur kT_0 où les C_i pour $1 \leq i \leq n$ sont les segments de C . On va définir un ordre sur l'ensemble $\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$.

Définition 5.5.1 Ord1 Si $|C_i| > |C_j|$, alors $C_i > C_j$.

Ord2 Supposons que $|C_i| = |C_j|$. Supposons qu'il existe $s > 0$ tel que $|C_{i+t}| = |C_{j+t}|$ pour tout $-s + 1 \leq t \leq s - 1$ et que l'on ait les deux inégalités $|C_{i-s}| \leq |C_{j-s}|$ et $|C_{i+s}| \leq |C_{j+s}|$ dont au moins une parmi eux est stricte ou les deux inégalités $|C_{i-s}| \geq |C_{j-s}|$ et $|C_{i+s}| \geq |C_{j+s}|$ dont au moins une parmi eux est stricte. Alors on définit $C_i > C_j$, si on est dans l'une des situations suivantes:

- (i) si s est impaire et $|C_{i-s}| \leq |C_{j-s}|$ et $|C_{i+s}| \leq |C_{j+s}|$
- (ii) s est paire et $|C_{i-s}| \geq |C_{j-s}|$ et $|C_{i+s}| \geq |C_{j+s}|$

et on définit $C_j > C_i$, si on est dans l'une des situations suivantes:

- (i) s est paire et $|C_{i-s}| \leq |C_{j-s}|$ et $|C_{i+s}| \leq |C_{j+s}|$
- (ii) s est impaire et $|C_{i-s}| \geq |C_{j-s}|$ et $|C_{i+s}| \geq |C_{j+s}|$

Ord2' Supposons que $|C_i| = |C_j|$. Supposons qu'il existe $s > 0$ tel que $|C_{i+t}| = |C_{j-t}|$ pour tout $-s + 1 \leq t \leq s - 1$ et que l'on ait les deux inégalités $|C_{i+s}| \leq |C_{j-s}|$ et $|C_{i-s}| \leq |C_{j+s}|$ dont au moins une parmi eux est stricte ou les deux inégalités $|C_{i+s}| \geq |C_{j-s}|$ et $|C_{i-s}| \geq |C_{j+s}|$ dont au moins une parmi eux est stricte. Alors on définit $C_i > C_j$, si on est dans l'une des situations suivantes:

(i) s est impaire et $|C_{i-s}| \leq |C_{j+s}|$ et $|C_{i-s}| \leq |C_{j+s}|$

(ii) s est paire et $|C_{i+s}| \geq |C_{j-s}|$ et $|C_{i-s}| \geq |C_{j+s}|$

et on définit $C_j > C_i$, si on est dans l'une des situations suivantes:

(i) s est paire et $|C_{i+s}| \leq |C_{j-s}|$ et $|C_{i-s}| \leq |C_{j+s}|$

(ii) s est impaire et $|C_{i+s}| \geq |C_{j-s}|$ et $|C_{i-s}| \geq |C_{j+s}|$

Ord3 Si $C = C_1 \cdots C_{2n}$ est une corde symétrique, i.e. $|C_i| = |C_{2n+1-i}|$ pour tout $1 \leq i \leq 2n$, alors on définit $C_n > C_{n+1}$.

Lemme 5.5.3 Avec les axiomes Ord1, Ord2 et Ord2', si on a une corde symétrique $C = C_1 C_2 \cdots C_{2n}$, C_n et C_{n+1} ne sont pas comparable.

Démonstration Si on pouvait comparer C_n et C_{n+1} , disons $C_n > C_{n+1}$, on devrait utiliser Ord2 ou Ord2', puisque $|C_n| = |C_{n+1}|$. En fait, on ne peut pas utiliser Ord2', car pour tout t , $|C_{n+1+t}| = |C_{n-t}|$. Maintenant il existe $s > 0$ tel que $|C_{n+t}| = |C_{n+t+1}|$ pour tout $-s+1 \leq t \leq s-1$ et que l'on ait, si s est impaire, les deux inégalités $|C_{n-s}| \leq |C_{n+1-s}|$ et $|C_{n+s}| \leq |C_{n+1+s}|$ dont au moins une parmi eux est stricte, et si s est paire, les deux inégalités $|C_{n-s}| \geq |C_{n+1-s}|$ et $|C_{n+s}| \geq |C_{n+1+s}|$ dont au moins une parmi eux est stricte. On obtient alors, au premier cas,

$$|C_{n-s}| \leq |C_{n+1-s}| = |C_{n+2-s}| = \cdots = |C_{n+s-1}| = |C_{n+s}| \leq |C_{n+1+s}| = |C_{n-s}|,$$

et au deuxième cas,

$$|C_{n-s}| \geq |C_{n+1-s}| = |C_{n+2-s}| = \cdots = |C_{n+s-1}| = |C_{n+s}| \geq |C_{n+1+s}| = |C_{n-s}|.$$

Cela contredit Ord 2.

□

Lemme 5.5.4 Supposons C une corde non symétrique. Alors on ne peut pas avoir simultanément $C_i > C_j$ et $C_j > C_i$.

Démonstration Supposons que Ord2 donne $C_i < C_j$ et Ord2' donne $C_i > C_j$. Alors il existe s tel que $|C_{i+u}| = |C_{j+u}|$ pour tout $-s+1 \leq u \leq s-1$ et que l'on ait: si s est paire, les deux inégalités $|C_{i-s}| \leq |C_{j-s}|$ et $|C_{i+s}| \leq |C_{j+s}|$ dont au moins une parmi eux est stricte, et si s est impaire, les deux inégalités $|C_{i-s}| \geq |C_{j-s}|$ et $|C_{i+s}| \geq |C_{j+s}|$ dont au moins une parmi eux est stricte. Et il existe $t > 0$ tel que $|C_{i+u}| = |C_{j-u}|$ pour tout $-t+1 \leq u \leq t-1$ et que l'on ait, si t est paire, les deux inégalités $|C_{i+t}| \geq |C_{j-t}|$ et $|C_{i-t}| \geq |C_{j+t}|$ dont au moins une parmi eux est stricte et si t est impaire, les deux inégalités $|C_{i+t}| \leq |C_{j-t}|$ et $|C_{i-t}| \leq |C_{j+t}|$ dont au moins une parmi eux est stricte.

On peut supposer que $s \leq t$. Alors on obtient, si s est paire,

$$|C_{i-s}| \leq |C_{j-s}| \leq |C_{i+s}| \leq |C_{j+s}| \leq |C_{i-s}|$$

et si s est impaire,

$$|C_{i-s}| \geq |C_{j-s}| \geq |C_{i+s}| \geq |C_{j+s}| \geq |C_{i-s}|$$

Comme dans chaque suites d'inégalités, il en existe une qui est stricte. On en déduit que $|C_{i-s}| < |C_{i-s}|$, ce qui est absurde.

□

Lemme 5.5.5 Supposons $C_i < C_j$ et $C_j < C_k$. Alors $C_i < C_k$.

Démonstration Si les trois segments ne sont pas de même longueur, alors l'assertion est évidente. Supposons donc dès présent que $|C_i| = |C_j| = |C_k|$.

Supposons d'abord que C soit symétrique et que l'une des $C_i < C_j$ et $C_j < C_k$, par exemple $C_i < C_j$, soit obtenue par Ord3. Alors si on peut comparer C_j et C_k en utilisant Ord2 (resp. Ord2'), alors on peut comparer C_i et C_k en utilisant Ord2' (resp. Ord2).

Supposons que l'on n'est pas dans la situation précédente.

On distingue plusieurs cas. On traite le cas où on utilise Ord2 pour comparer C_i et C_j et Ord2' pour comparer C_j et C_k . Dans ce cas, on peut comparer C_i et C_k en utilisant Ord2'. On l'illustre comme suit

$$C_i <_{\text{Ord2}} C_j \text{ et } C_j <_{\text{Ord2}'} C_k \Rightarrow C_i <_{\text{Ord2}'} C_k$$

$$C_i <_{\text{Ord2}} C_j \text{ et } C_j <_{\text{Ord2}} C_k \Rightarrow C_i <_{\text{Ord2}} C_k$$

$$C_i <_{\text{Ord2}'} C_j \text{ et } C_j <_{\text{Ord2}'} C_k \Rightarrow C_i <_{\text{Ord2}} C_k$$

$$C_i <_{\text{Ord2}'} C_j \text{ et } C_j <_{\text{Ord2}} C_k \Rightarrow C_i <_{\text{Ord2}'} C_k$$

□

Proposition 5.5.6 (1) Les axiomes Ord1, Ord2, Ord2' et Ord3 définissent un ordre sur l'ensemble des segments d'une corde.

(2) Cet ordre n'est pas nécessairement un ordre total. Il vérifie en revanche une condition plus faible: Pour tout $1 \leq s \leq n-1$, on peut comparer C_s et C_{s+1} .

Démonstration Si $C_i \leq C_j$ et $C_j \leq C_i$, Lemme 5.5.4 implique $i = j$. La transitivité est Lemme 5.5.5.

On montre ensuite que l'on peut comparer deux segments voisins. En effet, Si leur longueurs ne sont pas la même, Ord1 s'applique. Supposons que $|C_s| = |C_{s+1}|$. Comparons $|C_{s-1}|$ et $|C_{s+2}|$, si elles ne sont pas égales, on peut utiliser Ord2' pour comparer C_s et C_{s+1} ; sinon, regardons $|C_{s-2}|$ et $|C_{s+3}|$, s'elles ne sont pas égales, Ord2' aide à comparer C_s et C_{s+1} , sinon, etc. Ce processus ne s'arrête que dans le cas symétrique, mais en ce moment, on utilise Ord3.

□

5.5.3 Une formule pour les cordes induites

Soit $C = C_1 \cdots C_n$ une corde sur kT_0 muni de l'ordre défini ci-dessus. Alors on fabrique une nouvelle corde $\varphi(C) = \tilde{C} = \tilde{C}_1 \tilde{C}_2 \cdots \tilde{C}_n$ sur kG telle que

- (1) Pour tout $1 \leq i \leq n$, $\tilde{C}_i$ est directe (resp. inverse) ssi C_i est directe (resp. inverse).
- (2) Si $C_i < C_{i-1}, C_{i+1}$, alors $|\tilde{C}_i| = 2|C_i| - 1$; si $C_i > C_{i-1}, C_{i+1}$, alors $|\tilde{C}_i| = 2|C_i| + 1$; sinon, $|\tilde{C}_i| = 2|C_i|$.
- (3) Si $C_i > C_{i-1}, C_{i+1}$, alors $\tilde{C}_i$ commence par β (donc termine aussi par β).

Remarque 5.5.7 Ceci détermine de façon unique la corde $\tilde{C}$.

Proposition 5.5.8 Montrer que

$$\text{Ind}_{T_0}^G M(C) = M(\varphi(C))$$

Dans le chapitre qui suit, on développe une méthode constructive pour démontrer des cas particuliers. Je pense que cette méthode en donnera aussi une preuve complète.

Soit $C = C_1 \cdots C_n$ une corde sur kT_1 muni de l'ordre défini dans Définition 5.5.1. Alors on fabrique une nouvelle corde $\psi(C) = \tilde{C}_1 \tilde{C}_2 \cdots \tilde{C}_n$ sur kG telle que

- (1) Pour tout $1 \leq i \leq n$, $\tilde{C}_i$ est directe (resp. inverse) ssi C_i est directe (resp. inverse).
- (2) Si $C_i < C_{i-1}, C_{i+1}$, alors $|\tilde{C}_i| = 2|C_i| - 1$; si $C_i > C_{i-1}, C_{i+1}$, alors $|\tilde{C}_i| = 2|C_i| + 1$; sinon, $|\tilde{C}_i| = 2|C_i|$.
- (3) Si $C_i > C_{i-1}, C_{i+1}$, alors $\tilde{C}_i$ commence par α (donc termine aussi par α).

Proposition 5.5.9 Montrer que

$$\text{Ind}_{T_1}^G M(C) = M(\psi(C))$$

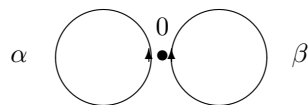
Si l'assertion 5.5.8 est vraie, cette assertion est aussi vraie avec une preuve analogue.

Chapter 6

Démonstration des cas particuliers du problème 5.5.8

6.1 Suites indépendentes

Notons (Q, ρ) un carquois avec relations où Q est



et où ρ contient les relations $\alpha^2 = 0 = \beta^2$. Remarquons que l'algèbre $kQ/\langle \rho \rangle$ est une algèbre bisérielle spéciale, si elle est de dimension finie.

Définition 6.1.1 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $v \in V$ où V est une représentation de (Q, ρ) . Une *suite indépendante*, notée $\mathcal{S}(e, \alpha, n)$, est une suite d'éléments $e_0 = e, e_1, \dots, e_n$ dans V telle que les conditions suivantes soient vérifiées.

- (1) Les e_i avec $0 \leq i \leq n$ sont une famille libre.
- (2)
 - (i) $\alpha e_0 = e_1$
 - (ii) Si i est paire et $0 < i < n$, $\alpha e_i = e_{i+1}$ et $\beta e_i = 0$.
 - (iii) Si i est impaire et $0 < i < n$, $\beta e_i = e_{i+1}$ et $\alpha e_i = 0$.

On dit que $\mathcal{S}(e, \alpha, n)$ est une suite indépendante de 0-ième terme $e = e_0$, de dernier terme e_n , de première flèche α et de longueur n , notée $|\mathcal{S}(e, \alpha, n)| = n$. Cette suite $\mathcal{S}(e, \alpha, n)$ est souvent illustrée par

$$e_0 \xrightarrow{\alpha} e_1 \xrightarrow{\beta} \dots \rightarrow e_n$$

ou

$$\begin{array}{c} e_0 \searrow \alpha \\ e_1 \searrow \beta \\ \vdots \\ e_n \end{array}$$

Si en plus $\alpha e_n = 0 = \beta e_n$, on dit que cette suite indépendante est *maximale* et si tel est le cas, on écrit souvent $\mathcal{S}(e, \alpha)$ à la place de $\mathcal{S}(e, \alpha, n)$; si en plus $\beta e_0 = 0$, on dit que cette suite indépendante est *complète*.

On peut également définir de façon analogue les suites indépendentes de première flèche β .

On peut aussi définir les suites indépendentes de direction inverse:

$$e_0 \longleftarrow e_1 \longleftarrow \cdots \xleftarrow{\alpha} e_n$$

ou

$$\begin{array}{c} \alpha e_n \\ \swarrow \\ e_{n-1} \\ \vdots \\ e_0 \end{array}$$

Dans ce cas, on dit encore que e_0 est le 0-ième terme de cette suite et que e_n est le dernier terme. La flèche α ou plus précisément α^{-1} est dite la dernière flèche de cette suite. Si $\beta e_0 = 0 = \alpha e_0$, cette suite est maximale; si $\beta e_n = 0$, cette suite est complète.

Soit $\mathcal{S}$ une suite indépendante directe (resp. inverse). Désignons par $\mathcal{S}'$ la suite extraite de $\mathcal{S}$ obtenue par supprimer le dernier terme (resp. le 0-ième terme) de $\mathcal{S}$.

Soient

$$\mathcal{S}_1 : e_0 \longrightarrow e_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow e_n$$

et

$$\mathcal{S}_2 : e'_0 \longrightarrow e'_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow e'_m$$

deux suites indépendentes de même première flèche. On peut supposer $n \leq m$ et définir $e_i = 0$ pour tout $n+1 \leq i \leq m$. Si les termes $e_i + e'_i$ pour $0 \leq i \leq m$ sont indépendentes, alors la somme $\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$ est par définition la suite indépendante

$$e_0 + e'_0 \longrightarrow e_1 + e'_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow e_m + e'_m$$

Soient

$$\mathcal{S} : e_0 \xrightarrow{\alpha} e_1 \xrightarrow{\beta} \cdots \longrightarrow e_n$$

une suite indépendante et $u \in \mathbb{Z}$. Alors le translaté $\mathcal{S}[u]$ est la suite dont le i -ième terme est e_{i+u} où l'on définit $e_j = 0$ pour tout $j > n$ ou $j < 0$.

Etant donné $\mathcal{S}$ une suite indépendante de la forme

$$e_0 \longrightarrow e_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow e_n$$

si on note $\mathcal{S}_1$ la suite extraite

$$e_s \longrightarrow e_{s+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow e_n$$

pour certain $1 \leq s \leq n-1$, on écrit souvent

$$\mathcal{S} = (e_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow e_{s-1} \longrightarrow \mathcal{S}_1)$$

Etant donné $\mathcal{S}$ une suite indépendante directe de la forme

$$e_0 \longrightarrow e_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow e_n$$

La suite réciproque $\mathcal{S}^{-1}$ est par définition la suite suivante:

$$e_n \longleftarrow e_{n-1} \longleftarrow \cdots \longleftarrow e_1$$

On peut définir aussi la réciproque d'une suite indépendante inverse.

Soient $\mathcal{S}_1$ une suite indépendante directe (resp. inverse) et $\mathcal{S}_2$ une suite indépendante inverse (resp. directe) telles que $|\mathcal{S}_1| \leq |\mathcal{S}_2|$. Alors on utilise souvent l'expression $\mathcal{S}_1 + \overline{\mathcal{S}_2}^{-1}$ dans laquelle $\overline{\mathcal{S}_2}$ est la suite extraite de $\mathcal{S}_2$ composée des $|\mathcal{S}_1|$ premiers termes (resp. derniers termes).

Remarque 6.1.1 Une suite extraite d'une suite indépendante directe (resp. inverse) est toujours complète si elle ne contient pas le 0-ième terme (resp. le dernier terme) de l'ancienne suite, car le 0-ième terme de cette suite extraite est dans l'image de γ et donc devient nul si on y applique γ où $\gamma \in \{\alpha, \beta\}$ est la flèche différente de la première flèche de cette suite extraite.

Remarque 6.1.2 Soient V et W deux représentations de (Q, ρ) et soient $S_1 \subset V$ et $S_2 \subset W$ deux suites indépendantes dans V et W respectivement qui sont de même première flèche. Alors $S_1 + S_2$ est une suite indépendante dans $V \oplus W$.

Remarque 6.1.3 (Remarque importante) Soit C une corde directe sur $kQ/\langle \rho \rangle$. Alors la construction du module de type corde $M(C)$ donnée dans la section 1.4 consiste à trouver une suite indépendante maximale et complète, notée souvent $\tilde{C}$.

Si $C = C_1 \cdots C_n$ est une corde à n segments, alors la construction du module de type corde $M(C)$ donnée dans la section 1.4 consiste à trouver une suite indépendante $\tilde{C}_i$ pour chaque $1 \leq i \leq n$ telles que les conditions suivantes soient satisfaites:

- (1) Pour tout $1 \leq i \leq n$, la suite $\tilde{C}_i$ est maximale.
- (2) Pour tout $1 \leq i \leq n-1$, le dernier terme de $\tilde{C}_i$ coïncide avec le 0-ième terme de $\tilde{C}_{i+1}$. Si tel est le cas, on dit que $\tilde{C}_i$ et $\tilde{C}_{i+1}$ se recollent.
- (3) Si C_1 est directe, alors $\tilde{C}_1$ est complète; si C_n est inverse, alors $\tilde{C}_n$ est complète.

Dans la suite, pour une corde $C = C_1 C_2 \cdots C_n$ sur T_0 , alors afin de vérifier que Problème 5.5.8 est vrai, il faut trouver les suites indépendantes $\tilde{C}_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$ telles que

- (i) Les éléments dans ces suites $\tilde{C}_i$ avec $1 \leq i \leq n$ forment une base de $\text{Ind}_{T_0}^G M(C)$
- (ii) Les suites $\tilde{C}_i$ avec $1 \leq i \leq n$ satisfont les conditions ci-dessus, i.e. elles sont une présentation de $M(\varphi(C))$.

6.2 Suites indépendantes canoniques

Revenons dans la situation d'induction de T_0 à G . Ecrivons $G = T_0 \sqcup xT_0$. Rappelons que

$$G = D_{2n} = \langle x, y | x^4 = 1 = y^2, yxy = x^{-1} \rangle$$

et

$$T_0 = \langle y, x^2 \rangle$$

et

$$\alpha = 1 + y, \beta = 1 + yx, \alpha_0 = 1 + y, \beta_0 = 1 + yx^2$$

Lemme 6.2.1 Soit $C = M((\beta_0 \alpha_0)^n) = (e_0 \xrightarrow{\beta_0} e_1 \xrightarrow{\alpha_0} e_2 \xrightarrow{\beta_0} \cdots \xrightarrow{\beta_0} e_{2n-1} \xrightarrow{\alpha_0} e_{2n})$ avec $n \in \mathbb{N}$.

- (i) $\mathcal{S}_1(C) = \mathcal{S}(e \otimes e_0, \beta)$ existe et est une suite indépendante maximale, complète, de longueur $|\mathcal{S}_1(C)| = 2|C| + 1$ et de dernier terme $e \otimes e_{2n} + x \otimes e_{2n}$.
- (ii) $\mathcal{S}_2(C) = \mathcal{S}(x \otimes e_0, \alpha)$ existe et est une suite indépendante maximale, non complète, de longueur $|\mathcal{S}_2(C)| = 2|C|$ et de dernier terme $e \otimes e_{2n} + x \otimes e_{2n}$.

Démonstration On fait la convention $e_{2n+1} = 0$. On sait que $\alpha_0 e_0 = 0$; $\alpha_0 e_{2i} = 0$, pour tout $1 \leq i \leq n$; $\alpha_0 e_{2i-1} = e_{2i}$ pour tout $1 \leq i \leq n$; $\beta_0 e_{2i} = e_{2i+1}$, pour tout $0 \leq i \leq n$; $\beta_0 e_{2i-1} = 0$, pour tout $1 \leq i \leq n$. Donc $y e_0 = e_0$; $y e_{2i} = e_{2i}$, pour tout $1 \leq i \leq n$; $y e_{2i-1} = e_{2i-1} + e_{2i}$, pour tout $1 \leq i \leq n$; $y x^2 e_{2i} = e_{2i} + e_{2i+1}$, pour tout $0 \leq i \leq n$; $y x^2 e_{2i-1} = e_{2i-1}$, pour tout $1 \leq i \leq n$.

On calcule $\alpha(e \otimes e_0) = (1+y)e \otimes e_0 = e \otimes e_0 + e \otimes y e_0 = e \otimes e_0 + e \otimes e_0 = 0$; $\alpha(e \otimes e_{2i}) = 0$, pour tout $1 \leq i \leq n$; $\alpha(e \otimes e_{2i-1}) = e \otimes e_{2i}$ pour tout $1 \leq i \leq n$; $\alpha(x \otimes e_{2i}) = (1+y)(x \otimes e_{2i}) = x \otimes e_{2i} + x \otimes y x^2 e_{2i} = x \otimes e_{2i} + x \otimes e_{2i} + x \otimes e_{2i+1} = x \otimes e_{2i+1}$ pour tout $0 \leq i \leq n$; $\alpha(x \otimes e_{2i-1}) = 0$, pour tout $1 \leq i \leq n$; $\beta(e \otimes e_{2i}) = (1+yx)(e \otimes e_{2i}) = e \otimes e_{2i} + x \otimes y x^2 e_{2i} = e \otimes e_{2i} + x \otimes e_{2i} + x \otimes e_{2i+1}$, pour tout $0 \leq i \leq n$; $\beta(e \otimes e_{2i-1}) = e \otimes e_{2i-1} + x \otimes e_{2i-1}$, pour tout $1 \leq i \leq n$; $\beta(x \otimes e_{2i}) = (1+yx)x \otimes e_{2i} = x \otimes e_{2i} + e \otimes y x^2 e_{2i} = x \otimes e_{2i} + e \otimes e_{2i} + e \otimes e_{2i+1}$, pour tout $0 \leq i \leq n$; $\beta(x \otimes e_{2i-1}) = x \otimes e_{2i-1} + e \otimes e_{2i-1}$, pour tout $1 \leq i \leq n$.

On calcule ensuite les suites indépendentes en question.

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & e \otimes e_0 \xrightarrow{\beta} e \otimes e_0 + x \otimes e_0 + x \otimes e_1 \xrightarrow{\alpha} x \otimes e_1 \xrightarrow{\beta} \cdots \xrightarrow{\alpha} x \otimes e_{2i-1} \xrightarrow{\beta} x \otimes e_{2i-1} + e \otimes e_{2i-1} \\ & \xrightarrow{\alpha} e \otimes e_{2i} \xrightarrow{\beta} e \otimes e_{2i} + x \otimes e_{2i} + x \otimes e_{2i+1} \xrightarrow{\alpha} \cdots \xrightarrow{\alpha} x \otimes e_{2n-1} \xrightarrow{\beta} x \otimes e_{2n-1} + e \otimes e_{2n-1} \\ & \xrightarrow{\alpha} e \otimes e_{2n} \xrightarrow{\beta} e \otimes e_{2n} + x \otimes e_{2n} \end{aligned}$$

Cette suite est évidemment indépendante, puisque chaque terme contient un tenseur élémentaire qui n'apparaît dans aucun autre terme avant cet terme en question. Notons que cette suite est maximale et complète, car $\alpha(e \otimes e_{2n} + x \otimes e_{2n}) = 0$ et $\alpha(e \otimes e_0) = 0$.

(ii) La suite $S_2(C)$ est de la forme

$$\begin{aligned} & x \otimes e_0 \xrightarrow{\alpha} x \otimes e_1 \xrightarrow{\beta} \cdots \xrightarrow{\alpha} x \otimes e_{2i-1} \xrightarrow{\beta} x \otimes e_{2i-1} + e \otimes e_{2i-1} \\ & \xrightarrow{\alpha} e \otimes e_{2i} \xrightarrow{\beta} e \otimes e_{2i} + x \otimes e_{2i} + x \otimes e_{2i+1} \xrightarrow{\alpha} \cdots \xrightarrow{\alpha} x \otimes e_{2n-1} \\ & \xrightarrow{\beta} x \otimes e_{2n-1} + e \otimes e_{2n-1} \xrightarrow{\alpha} e \otimes e_{2n} \xrightarrow{\beta} e \otimes e_{2n} + x \otimes e_{2n} \end{aligned}$$

Cette suite privée du 0-ième terme s'identifie à $S_1(C)$ privée des deux premiers termes. Cette suite est donc maximale mais pas complète car $\beta(x \otimes e_0) = x \otimes e_1 \neq 0$.

□

De façon analogue, on obtient

Lemme 6.2.2 Soit $C = M((\beta_0 \alpha_0)^n \beta_0) = (e_0 \xrightarrow{\beta_0} e_1 \xrightarrow{\alpha_0} e_2 \xrightarrow{\beta_0} \cdots \xrightarrow{\beta_0} e_{2n-1} \xrightarrow{\alpha_0} e_{2n} \xrightarrow{\beta_0} e_{2n+1})$.

(i) $S_1(C) = \mathcal{S}(e \otimes e_0, \beta)$ existe et est une suite indépendante maximale, complète, de longueur $|S_1(C)| = 2|C| + 1$ et de dernier terme $e \otimes e_{2n+1} + x \otimes e_{2n+1}$.

(ii) $S_2(C) = \mathcal{S}(x \otimes e_0, \alpha)$ existe et est une suite indépendante maximale, non complète, de longueur $|S_2(C)| = 2|C|$ et de dernier terme $e \otimes e_{2n+1} + x \otimes e_{2n+1}$.

Lemme 6.2.3 Soit $C = M((\alpha_0 \beta_0)^n) = (e_0 \xrightarrow{\alpha_0} e_1 \xrightarrow{\beta_0} e_2 \xrightarrow{\alpha_0} \cdots \xrightarrow{\alpha_0} e_{2n-1} \xrightarrow{\beta_0} e_{2n})$.

(i) $S_1(C) = \mathcal{S}(x \otimes e_0, \beta)$ existe et est une suite indépendante maximale, complète, de longueur $|S_1(C)| = 2|C| + 1$ et de dernier terme $e \otimes e_{2n} + x \otimes e_{2n}$.

(ii) $S_2(C) = \mathcal{S}(e \otimes e_0, \alpha)$ existe et est une suite indépendante maximale, non complète, de longueur $|S_2(C)| = 2|C|$ et de dernier terme $e \otimes e_{2n} + x \otimes e_{2n}$.

Démonstration On utilise la même méthode que dans Lemme 6.2.1. On calcule les suites indépendentes en question.

$$\text{(i)} \quad x \otimes e_0 \xrightarrow{\beta} x \otimes e_0 + e \otimes e_0 \xrightarrow{\alpha} e \otimes e_1 \xrightarrow{\beta} \cdots \xrightarrow{\alpha} e \otimes e_{2i-1} \xrightarrow{\beta} e \otimes e_{2i-1}$$

$$\begin{aligned}
& + x \otimes e_{2i-1} \xrightarrow{\alpha} x \otimes e_{2i} \xrightarrow{\beta} x \otimes e_{2i} + e \otimes e_{2i} + e \otimes e_{2i+1} \xrightarrow{\alpha} \dots \xrightarrow{\alpha} \\
& e \otimes e_{2n-1} \xrightarrow{\beta} e \otimes e_{2n-1} + x \otimes e_{2n-1} \xrightarrow{\alpha} x \otimes e_{2n} \xrightarrow{\beta} x \otimes e_{2n} + e \otimes e_{2n}
\end{aligned}$$

Cette suite est évidemment indépendante, puisque chaque terme contient un tenseur élémentaire qui n'apparaît pas dans aucun terme avant cet terme. Notons que cette suite est maximale et complète, car $\alpha(x \otimes e_{2n} + e \otimes e_{2n}) = 0$ et $\alpha(x \otimes e_0) = 0$.

(ii) La suite $\mathcal{S}_2(C)$ est de la forme

$$\begin{aligned}
& e \otimes e_0 \xrightarrow{\alpha} e \otimes e_1 \xrightarrow{\beta} \dots \xrightarrow{\alpha} e \otimes e_{2i-1} \xrightarrow{\beta} e \otimes e_{2i-1} + x \otimes e_{2i-1} \\
& \xrightarrow{\alpha} x \otimes e_{2i} \xrightarrow{\beta} x \otimes e_{2i} + e \otimes e_{2i} + e \otimes e_{2i+1} \xrightarrow{\alpha} \dots \xrightarrow{\alpha} e \otimes e_{2n-1} \\
& \xrightarrow{\beta} e \otimes e_{2n-1} + x \otimes e_{2n-1} \xrightarrow{\alpha} x \otimes e_{2n} \xrightarrow{\beta} x \otimes e_{2n} + e \otimes e_{2n}
\end{aligned}$$

Cette suite privée du 0-ième terme s'identifie à $\mathcal{S}_1(C)$ privée des deux premiers termes. Cette suite est donc maximale mais pas complète car $\beta(x \otimes e_0) = x \otimes e_1 \neq 0$.

□

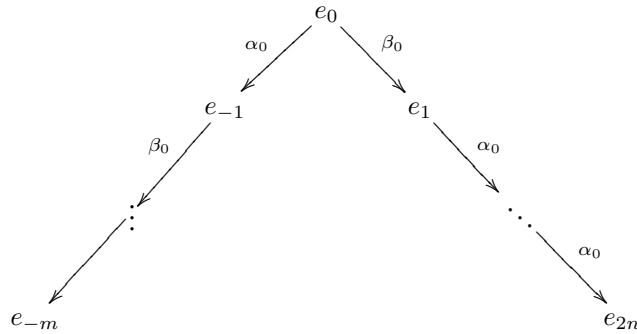
De nouveau, on obtient les énoncés analogues pour les cordes de longueur paire.

Lemme 6.2.4 Soit $C = M((\alpha_0 \beta_0)^n \alpha_0) = (e_0 \xrightarrow{\alpha_0} e_1 \xrightarrow{\beta_0} e_2 \xrightarrow{\alpha_0} \dots \xrightarrow{\alpha_0} e_{2n-1} \xrightarrow{\beta_0} e_{2n} \xrightarrow{\alpha_0} e_{2n+1})$.

- (i) $\mathcal{S}_1(C) = \mathcal{S}(x \otimes e_0, \beta)$ existe et est une suite indépendante maximale, complète, de longueur $|\mathcal{S}_1(C)| = 2|C| + 1$ et de dernier terme $e \otimes e_{2n+1} + x \otimes e_{2n+1}$.
- (ii) $\mathcal{S}_2(C) = \mathcal{S}(e \otimes e_0, \alpha)$ existe et est une suite indépendante maximale, non complète, de longueur $|\mathcal{S}_2(C)| = 2|C|$ et de dernier terme $e \otimes e_{2n+1} + x \otimes e_{2n+1}$.

Amplification 6.2.5 Soit $C = C_1 C_2 \dots C_u$ une corde. Supposons que C_i est directe et

$$C_{i-1} C_i =$$



Alors

- (i) Si $|C_{i-1}| \leq |C_i|$, $\mathcal{S}_1(C_i) = \mathcal{S}(e \otimes e_0, \beta)$ existe et est une suite indépendante maximale, non complète, et de longueur $2|C_i| + 1$. Son dernier terme est $e \otimes e_{2n} + x \otimes e_{2n}$ si $|C_{i-1}| < |C_i|$ et est

$$e \otimes e_{2n} + x \otimes e_{2n} + e \otimes e_{-2n} + x \otimes e_{-2n}$$

si $|C_{i-1}| = |C_i|$. Son avant-dernier terme est $e \otimes e_{2n}$ si $|C_{i-1}| < |C_i|$ et est $e \otimes e_{2n} + x \otimes e_{-2n}$ si $|C_{i-1}| = |C_i|$.

- (ii) $\mathcal{S}_2(C_i) = \mathcal{S}(x \otimes e_0, \alpha)$ existe et est une suite indépendante maximale, non complète, d'avant-dernier terme $e \otimes e_{2n}$, de dernier terme $e \otimes e_{2n} + x \otimes e_{2n}$ et de longueur $|\mathcal{S}_2(C_i)| = 2|C_i|$.

Ces suites sont appelées *suites indépendantes canoniques*.

On peut définir similairement la suite indépendante canonique pour le cas où C_i est inverse .

Démonstration (i) Supposons que $|C_{i-1}| \leq |C_i|$. On fait la convention $e_{2n+1} = 0$. On sait que $\alpha_0 e_0 = e_{-1}$; $\alpha_0 e_{2i} = 0$, pour tout $1 \leq i \leq n$; $\alpha_0 e_{2i-1} = e_{2i}$ pour tout $1 \leq i \leq n$; $\beta_0 e_{2i} = e_{2i+1}$, pour tout $0 \leq i \leq n$; $\beta_0 e_{2i-1} = 0$, pour tout $1 \leq i \leq n$. Donc $ye_0 = e_0 + e_{-1}$; $ye_{2i} = e_{2i}$, pour tout $1 \leq i \leq n$; $ye_{2i-1} = e_{2i-1} + e_{2i}$, pour tout $1 \leq i \leq n$; $yx^2 e_{2i} = e_{2i} + e_{2i+1}$, pour tout $0 \leq i \leq n$; $yx^2 e_{2i-1} = e_{2i-1}$, pour tout $1 \leq i \leq n$.

On calcule $\alpha(e \otimes e_0) = (1+y)(e \otimes e_0) = e \otimes e_0 + e \otimes ye_0 = e \otimes e_0 + e \otimes e_0 + e \otimes e_{-1} = e \otimes e_{-1}$; $\alpha(e \otimes e_{2i}) = 0$, pour tout $1 \leq i \leq n$; $\alpha(e \otimes e_{2i-1}) = e \otimes e_{2i}$ pour tout $1 \leq i \leq n$; $\alpha(x \otimes e_{2i}) = (1+y)(x \otimes e_{2i}) = x \otimes e_{2i} + x \otimes yx^2 e_{2i} = x \otimes e_{2i} + x \otimes e_{2i} + x \otimes e_{2i+1} = x \otimes e_{2i+1}$, pour tout $0 \leq i \leq n$; $\alpha(e \otimes e_{2i-1}) = 0$, pour tout $1 \leq i \leq n$; $\beta(e \otimes e_{2i}) = (1+yx)(e \otimes e_{2i}) = e \otimes e_{2i} + x \otimes yx^2 e_{2i} = e \otimes e_{2i} + x \otimes e_{2i} + x \otimes e_{2i+1}$, pour tout $0 \leq i \leq n$; $\beta(e \otimes e_{2i-1}) = e \otimes e_{2i-1} + x \otimes e_{2i-1}$, pour tout $1 \leq i \leq n$; $\beta(x \otimes e_{2i}) = (1+yx)x \otimes e_{2i} = x \otimes e_{2i} + e \otimes yx^2 e_{2i} = x \otimes e_{2i} + e \otimes e_{2i} + e \otimes e_{2i+1}$, pour tout $0 \leq i \leq n$; $\beta(x \otimes e_{2i-1}) = x \otimes e_{2i-1} + e \otimes e_{2i-1}$, pour tout $1 \leq i \leq n$.

Alors $\mathcal{S}_1(C_i)$ est de la forme

$$e \otimes e_0 \xrightarrow{\beta} e \otimes e_0 + x \otimes e_0 + x \otimes e_1 \xrightarrow{\alpha} \mathcal{S}(x \otimes e_1, \beta) + \mathcal{S}(e \otimes e_{-1}, \beta)$$

où $\mathcal{S}(x \otimes e_1, \beta)$ existe d'après Lemme 6.2.4 et où $\mathcal{S}(e \otimes e_{-1}, \beta)$ existe d'après Lemme 6.2.1 ou 6.2.2 est de longueur $2(|C_{i-1}| - 1) + 1 = 2|C_{i-1}| - 1 \leq 2|C_i| - 1$. Le dernier terme de $\mathcal{S}_1(C_i)$ est $e \otimes e_{2n} + x \otimes e_{2n}$ si $|C_{i-1}| < |C_i|$ et est $e \otimes e_{2n} + x \otimes e_{2n} + e \otimes e_{-2n} + x \otimes e_{-2n}$ si $|C_{i-1}| \geq |C_i|$. Si $|C_{i-1}| < |C_i|$, alors $|\mathcal{S}(e \otimes e_{-1}, \beta)| = 2(|C_{i-1}| - 1) + 1 = 2|C_{i-1}| - 1 \leq 2|C_i| - 1 = |\mathcal{S}(x \otimes e_1, \beta)|$ et donc la suite $\mathcal{S}_1(C_i)$ est maxiamale.

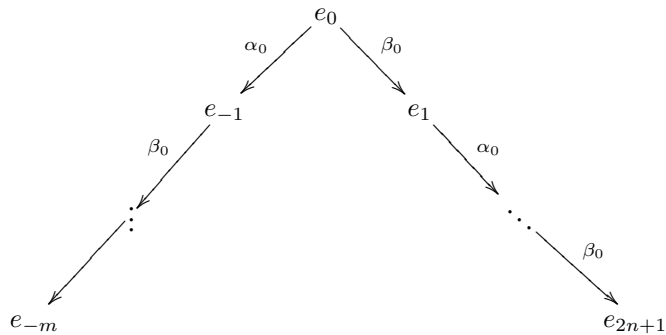
(ii) La suite $\mathcal{S}_2(C_i)$ est la même que celle dans Lemme 6.2.1.

□

Comme pour les lemmes 6.2.1, 6.2.2, 6.2.3 et 6.2.4, on obtient les analogues correspondantes.

Amplification 6.2.6 Soit $C = C_1 C_2 \cdots C_u$ une corde. Supposons que C_i est directe et

$$C_{i-1} C_i =$$



Alors

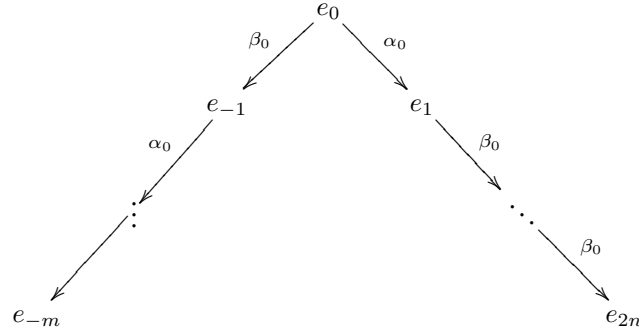
- (i) Si $|C_{i-1}| \leq |C_i|$, $\mathcal{S}_1(C_i) = \mathcal{S}(e \otimes e_0, \beta)$ existe et est une suite indépendante maximale, non complète, et de longueur $2|C_i| + 1$. Son dernier terme est $e \otimes e_{2n+1} + x \otimes e_{2n+1}$ si $|C_{i-1}| < |C_i|$ et est $e \otimes e_{2n+1} + x \otimes e_{2n+1} + e \otimes e_{-2n-1} + x \otimes e_{-2n-1}$ si $|C_{i-1}| = |C_i|$. Son avant-dernier terme est $x \otimes e_{2n+1}$ si $|C_{i-1}| < |C_i|$ et est $x \otimes e_{2n+1} + e \otimes e_{-2n-1}$ si $|C_{i-1}| = |C_i|$.
- (ii) $\mathcal{S}_2(C_i) = \mathcal{S}(x \otimes e_0, \alpha)$ existe et est une suite indépendante maximale, non complète, d'avant-dernier terme $x \otimes e_{2n+1}$, de dernier terme $e \otimes e_{2n+1} + x \otimes e_{2n+1}$ et de longueur $|\mathcal{S}_2(C_i)| = 2|C_i|$.

Ces suites sont appelées *suites indépendantes canoniques*.

On peut définir similairement la suite indépendante canonique pour le cas où C_i est inverse .

Amplification 6.2.7 Soit $C = C_1 C_2 \cdots C_u$ une corde. Supposons que C_i est directe et

$$C_{i-1} C_i =$$



Alors

- (i) Si $|C_{i-1}| \leq |C_i|$, $\mathcal{S}_1(C_i) = \mathcal{S}(x \otimes e_0, \beta)$ existe et est une suite indépendante maximale, non complète, et de longueur $2|C_i| + 1$. Son dernier terme est $e \otimes e_{2n} + x \otimes e_{2n}$ si $|C_{i-1}| < |C_i|$ et est $e \otimes e_{2n} + x \otimes e_{2n} + e \otimes e_{-2n} + x \otimes e_{-2n}$ si $|C_{i-1}| = |C_i|$. Son avant-dernier terme est $x \otimes e_{2n}$ si $|C_{i-1}| < |C_i|$ et est $x \otimes e_{2n} + e \otimes e_{-2n}$ si $|C_{i-1}| = |C_i|$.
- (ii) $\mathcal{S}_2(C_i) = \mathcal{S}(e \otimes e_0, \alpha)$ existe et est une suite indépendante maximale, non complète, d'avant-dernier terme $x \otimes e_{2n}$, de dernier terme $e \otimes e_{2n} + x \otimes e_{2n}$ et de longueur $|\mathcal{S}_2(C_i)| = 2|C_i|$.

Ces suites sont appelées *suites indépendantes canoniques*.

On peut définir similairement la suite indépendante canonique pour le cas où C_i est inverse .

Démonstration (i) Supposons que $|C_{i-1}| \leq |C_i|$. La suite $\mathcal{S}_1(C_i)$ est de la forme

$$x \otimes e_0 \xrightarrow{\beta} x \otimes e_0 + e \otimes e_0 + e \otimes e_{-1} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{S}(x \otimes e_{-1}, \beta) + \mathcal{S}(e \otimes e_1, \beta) + \mathcal{S}(x \otimes e_{-2}, \beta)$$

où $\mathcal{S}(e \otimes e_1, \beta)$ existe d'après Lemme 6.2.2, où $\mathcal{S}(x \otimes e_{-1}, \beta)$ existe d'après Lemme 6.2.3 et 6.2.4 et où $\mathcal{S}(x \otimes e_{-2}, \beta)$ existe d'après Lemme 6.2.1 et 6.2.2. Le dernier terme de $\mathcal{S}_1(C_i)$ est $e \otimes e_{2n} + x \otimes e_{2n}$ si $|C_{i-1}| < |C_i|$ et est $e \otimes e_{2n} + x \otimes e_{2n} + e \otimes e_{-2n} + x \otimes e_{-2n}$ si $|C_{i-1}| = |C_i|$.

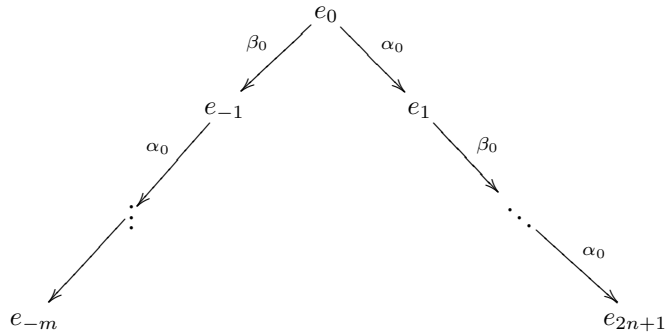
$|\mathcal{S}(x \otimes e_{-2}, \beta)| = 2(|C_{i-1}| - 2) + 1 = 2|C_{i-1}| - 3 < 2|C_i| - 1 = |\mathcal{S}(e \otimes e_1, \beta)|$. Si $|C_{i-1}| \leq |C_i|$, alors $|\mathcal{S}(x \otimes e_{-1}, \beta)| = 2(|C_{i-1}| - 1) + 1 = 2|C_{i-1}| - 1 \leq 2|C_i| - 1 = |\mathcal{S}(e \otimes e_1, \beta)|$. La suite $\mathcal{S}_1(C_i)$ est maximale.

(ii) La suite $\mathcal{S}_2(C_i)$ reste la même dans Lemme 6.2.3 .

□

Amplification 6.2.8 Soit $C = C_1 C_2 \cdots C_u$ une corde. Supposons que C_i est directe et

$$C_{i-1} C_i =$$



Alors

- (i) Si $|C_{i-1}| \leq |C_i|$, $\mathcal{S}_1(C_i) = \mathcal{S}(x \otimes e_0, \beta)$ existe et est une suite indépendante maximale, non complète, et de longueur $2|C_i| + 1$. Son dernier terme est $e \otimes e_{2n+1} + x \otimes e_{2n+1}$ si $|C_{i-1}| < |C_i|$ et est $e \otimes e_{2n+1} + x \otimes e_{2n+1} + e \otimes e_{-2n-1} + x \otimes e_{-2n-1}$ si $|C_{i-1}| = |C_i|$. Son avant-dernier terme est $e \otimes e_{2n+1}$ si $|C_{i-1}| < |C_i|$ et est $e \otimes e_{2n+1} + x \otimes e_{-2n-1}$ si $|C_{i-1}| = |C_i|$.
- (ii) $\mathcal{S}_2(C_i) = \mathcal{S}(e \otimes e_0, \alpha)$ existe et est une suite indépendante maximale, non complète, d'avant-dernier terme $e \otimes e_{2n+1}$, de dernier terme $e \otimes e_{2n+1} + x \otimes e_{2n+1}$ et de longueur $|\mathcal{S}_2(C_i)| = 2|C_i|$.

Ces suites sont appelées *suites indépendantes canoniques*.

On peut définir similairement la suite indépendante canonique pour le cas où C_i est inverse.

6.3 Propriétés élémentaires de l'ordre

Dans cette section, on rassemble des propriétés simples de l'ordre défini dans Définition 5.5.1, qui seront utilisées dans la suite.

Soit $C = C_1 C_2 \cdots C_n$ une corde sur kT_0 .

Lemme 6.3.1 Si $C_s < C_{s+1} < C_{s+2} < C_{s+3}$, alors $|C_s| < |C_{s+3}|$.

Démonstration Comme $C_s < C_{s+1} < C_{s+2} < C_{s+3}$, on a $|C_s| \leq |C_{s+1}| \leq |C_{s+2}| \leq |C_{s+3}|$.

Si $|C_s| = |C_{s+3}|$, alors $|C_s| = |C_{s+1}| = |C_{s+2}| = |C_{s+3}| =: l$. Comme $C_s < C_{s+1}$, on a $|C_{s-1}| \geq |C_{s+2}| = l$; comme $C_{s+1} < C_{s+2}$, on a $|C_{s-1}| \leq |C_{s+4}|$; comme $C_{s+2} < C_{s+3}$, on a $l = |C_{s+1}| \geq |C_{s+4}|$. On obtient donc que $l = |C_{s+2}| \leq |C_{s-1}| \leq |C_{s+4}| \leq |C_{s+1}| = l$ et cela implique que $|C_{s-1}| = |C_{s+4}| = l > 0$.

S'il existe $u > 0$ tel que pour tout $0 \leq i \leq u$, $|C_{s-i}| = |C_{s+3+i}| = l$. On peut supposer que u soit impaire, le cas paire se faisant similairement. Comme $C_s < C_{s+1}$, on a $|C_{s-u-1}| \leq |C_{s+u+2}| = l$; comme $C_{s+1} < C_{s+2}$, on a $|C_{s-u-1}| \geq |C_{s+u+4}|$; comme $C_{s+2} < C_{s+3}$, on a $l = |C_{s-u+1}| \leq |C_{s+u+4}|$. On obtient donc que $l = |C_{s+2+u}| \geq |C_{s-u-1}| \geq |C_{s+u+4}| \geq |C_{s-u+1}| = l$ et cela implique que $|C_{s-u-1}| = |C_{s+u+4}| = l > 0$. On en déduit que pour tout $u \in \mathbb{Z}$, $|C_u| = l > 0$, ce qui est absurde, puisque C est une corde finie.

□

Lemme 6.3.2 Si $C_s < C_{s+1} < C_{s+2} < C_{s+3}$, alors $|C_{s+1}| < |C_{s+2}|$.

Démonstration Supposons le contraire, i.e. $|C_{s+1}| = |C_{s+2}|$. Pour que $C_{s+1} < C_{s+2}$, il faut que $|C_s| \geq |C_{s+3}|$. Or, $C_s < C_{s+1} < C_{s+2} < C_{s+3}$ implique que $|C_s| \leq |C_{s+1}| \leq |C_{s+2}| \leq |C_{s+3}|$. On en déduit que $|C_s| = |C_{s+1}| = |C_{s+2}| = |C_{s+3}|$. Cela contredit le lemme précédent.

□

Corollaire 6.3.3 Si $C_s < C_{s+1} < C_{s+2} < C_{s+3}$, alors $|C_s| \leq |C_{s+1}| < |C_{s+2}| \leq |C_{s+3}|$.

Corollaire 6.3.4 Si $C_i < C_{i+1} < \cdots < C_{j-1} < C_j$, alors $|C_i| \leq |C_{i+1}| < \cdots < |C_{j-1}| \leq |C_j|$.

Démonstration Il suffit d'appliquer le corollaire précédent à $C_s < C_{s+1} < C_{s+2} < C_{s+3}$ pour tout $i \leq s \leq j-3$.

□

Lemme 6.3.5 Si $C_{s-2} < C_{s-1} < C_s > C_{s+1} > C_{s+2}$, alors on ne peut pas avoir l'égalité $|C_{s-1}| = |C_s| = |C_{s+1}|$.

Démonstration $C_{s-2} < C_{s-1} < C_s > C_{s+1} > C_{s+2}$ implique que $|C_{s-2}| \leq |C_{s-1}| \leq |C_s| \geq |C_{s+1}| \geq |C_{s+2}|$.

Supposons le contraire, i.e. $|C_{s-1}| = |C_s| = |C_{s+1}| = l > 0$. On va montrer que pour tout $i > 0$, $|C_{s+i}| = |C_{s-i}| = l > 0$. $C_{s-1} < C_s$ implique que $|C_{s-2}| \geq |C_{s+1}| = l$ et $C_s > C_{s+1}$ implique que $l = |C_{s-1}| \leq |C_{s+2}|$. On en déduit que $|C_{s-2}| = |C_{s-1}| = |C_s| = |C_{s+1}| = |C_{s+2}| = l$.

Supposons que l'on ait montré que $|C_{s-i+1}| = |C_{s-i+2}| = \dots = |C_s| = \dots = |C_{s+i-2}| = |C_{s+i-1}| = l$. Alors on peut supposer que i soit impaire. $C_{s-2} < C_{s-1}$ implique que $|C_{s-i}| \geq |C_{s+i-3}| = l$; $C_{s-1} < C_s$ implique que $|C_{s-i}| \leq |C_{s+i-1}| = l$; $C_s > C_{s+1}$ implique que $l = |C_{s-i+1}| \geq |C_{s+i}|$; $C_{s+1} > C_{s+2}$ implique que $l = |C_{s-i+3}| \leq |C_{s+i}|$. On en déduit que $l = |C_{s+i-3}| \leq |C_{s-i}| \leq |C_{s+i-1}| = l$ et que $l = |C_{s-i+3}| \leq |C_{s+i}| \leq |C_{s-i+1}| = l$.

□

Lemme 6.3.6 Si $C_{s-3} < C_{s-2} < C_{s-1} < C_s > C_{s+1}$, alors on ne peut pas avoir l'égalité $|C_{s+1}| = |C_s| = |C_{s-1}|$.

Démonstration Supposons le contraire, i.e. $|C_{s-1}| = |C_s| = |C_{s+1}| =: l$. Alors $C_{s-1} < C_s$ implique que $|C_{s-2}| = |C_{s+1}| = l$ et $C_{s-2} < C_{s-1}$ implique que $|C_{s-3}| = |C_s| = l$. Maintenant on a $|C_{s-3}| = |C_{s-2}| = |C_{s-1}| = |C_s| = l$ et aussi $C_{s-3} < C_{s-2} < C_{s-1} < C_s$. Cela contredit Lemme 6.3.2.

□

Lemme 6.3.7 Si $C_s < C_{s+1}$ et $|C_s| = |C_{s+1}|$, alors $|\tilde{C}_{s-1}| \geq |\tilde{C}_{s+2}|$.

Démonstration Comme $C_s < C_{s+1}$ et $|C_s| = |C_{s+1}|$, $|C_{s-1}| \geq |C_{s+2}|$. Si $|C_{s-1}| > |C_{s+2}|$, alors $|\tilde{C}_{s-1}| \geq 2|C_{s-1}| - 1 \geq 2|C_{s+2}| + 1 \geq |\tilde{C}_{s+2}|$.

Supposons dès maintenant que $|C_{s-1}| = |C_{s+2}| =: l$. Comme $C_s < C_{s+1}$, on a $|C_{s-2}| \leq |C_{s+3}|$. Pour que $|\tilde{C}_{s-1}| < |\tilde{C}_{s+2}|$, il faut et il suffit que l'on soit dans un des cinq cas suivants:

Cas 1 $C_{s-2} > C_{s-1} < C_s < C_{s+1} < C_{s+2} < C_{s+3}$. Alors Lemme 6.3.1 implique que $|C_{s-1}| < |C_{s+2}|$, ce qui est absurde.

Cas 2 $C_{s-2} > C_{s-1} < C_s < C_{s+1} > C_{s+2} > C_{s+3}$

Comme $C_s < C_{s+1}$ et $|C_s| = |C_{s+1}| \geq |C_{s-1}| = |C_{s+2}|$, $|C_{s-2}| \leq |C_{s+3}|$. Alors $|C_{s-1}| \leq |C_{s-2}| \leq |C_{s+3}| \leq |C_{s+2}| = |C_{s-1}|$. Cela montre que $|C_{s-2}| = |C_{s+3}| = |C_{s-1}| = |C_{s+2}| > 0$. S'il existe $u > 0$ tel que pour tout $0 \leq i < u$, $|C_{s-i}| = |C_{s+1+i}| > 0$, alors on peut supposer que u soit impaire. $C_{s-2} > C_{s-1}$ implique que $|C_{s-u}| \leq |C_{s+u-3}|$; $C_s < C_{s+1}$ implique que $|C_{s-u}| \geq |C_{s+1+u}|$; $C_{s+2} > C_{s+3}$ implique que $|C_{s-u+4}| \leq |C_{s+u+1}|$. On obtient donc que $|C_{s-u+4}| \leq |C_{s+u+1}| \leq |C_{s-u}| \leq |C_{s+u-3}| = |C_{s-u+4}|$ et on obtient que $|C_{s-u}| = |C_{s+u+1}| = |C_{s+u-3}| > 0$. Cela montre que pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $|C_t| > 0$ qui contredit le fait que C est une corde finie.

Cas 3 $C_{s-2} < C_{s-1} < C_s < C_{s+1} < C_{s+2} > C_{s+3}$ Alors Lemme 6.3.1 implique que $|C_{s-1}| < |C_{s+2}|$, ce qui est absurde.

Cas 4 $C_{s-2} > C_{s-1} > C_s < C_{s+1} < C_{s+2} > C_{s+3}$ Comme $C_s < C_{s+1}$ et $|C_s| = |C_{s+1}| \geq |C_{s-1}| = |C_{s+2}|$, $|C_{s-2}| \leq |C_{s+3}|$. Alors $|C_{s-2}| \leq |C_{s+3}| \leq |C_{s+2}| = |C_{s-1}| \leq |C_{s-2}|$. Cela montre que $|C_{s-2}| = |C_{s+3}| = |C_{s-1}| = |C_{s+2}| > 0$. S'il existe $u > 0$ tel que pour tout $0 \leq i < u$, $|C_{s-i}| = |C_{s+1+i}| > 0$. On peut supposer que u soit impaire. $C_{s-2} > C_{s-1}$ implique que $|C_{s-u}| \leq |C_{s+u-3}|$; $C_s < C_{s+1}$ implique que $|C_{s-u}| \geq |C_{s+1+u}|$; $C_{s+2} > C_{s+3}$ implique que $|C_{s-u+4}| \leq |C_{s+u+1}|$. On obtient donc que $|C_{s-u+4}| \leq |C_{s+u+1}| \leq |C_{s-u}| \leq |C_{s+u-3}| = |C_{s-u+4}|$ et on obtient que $|C_{s+u+1}| = |C_{s-u}| = |C_{s+u-3}| > 0$. Cela montre que pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $|C_t| > 0$ qui contredit le fait que C est une corde finie.

Cas5 $C_{s-2} > C_{s-1} < C_s < C_{s+1} < C_{s+2} > C_{s+3}$. Lemme 6.3.1 implique que $|C_{s-1}| < |C_{s+2}|$. C'est une contradiction.

□

Lemme 6.3.8 Si $C_s < C_{s+1}$, $|C_s| = |C_{s+1}|$ et $|\tilde{C}_{s-1}| = |\tilde{C}_{s+2}|$, alors $|C_{s-1}| = |C_{s+2}|$ et le voisinage d'ordre de C_{s-1} et celui de C_{s+2} sont symétriques par rapport à $C_s \cap C_{s+1}$, i.e. on est dans l'un des cas suivants:

- (i) $C_{s-2} < C_{s-1} < C_s \iff C_{s+1} > C_{s+2} > C_{s+3}$
- (ii) $C_{s-2} < C_{s-1} > C_s \iff C_{s+1} < C_{s+2} > C_{s+3}$
- (iii) $C_{s-2} > C_{s-1} < C_s \iff C_{s+1} > C_{s+2} < C_{s+3}$
- (iv) $C_{s-2} > C_{s-1} > C_s \iff C_{s+1} < C_{s+2} < C_{s+3}$

Démonstration On montre d'abord que $|C_{s-1}| = |C_{s+2}|$.

Comme $C_s < C_{s+1}$ et $|C_s| = |C_{s+1}|$, $|C_{s-1}| \geq |C_{s+2}|$. Si $|C_{s-1}| > |C_{s+2}|$, alors pour que $|\tilde{C}_{s-1}| = |\tilde{C}_{s+2}|$, il faut et il suffit que $|C_{s-1}| = |C_{s+2}| + 1$, $C_{s-2} > C_{s-1} < C_s$ et $C_{s+1} < C_{s+2} > C_{s+3}$. Mais dans ce cas, on aurait $|C_{s-1}| \leq |C_s| = |C_{s+1}| \leq |C_{s+2}| < |C_{s-1}|$. C'est absurde. Maintenant on a montré que $|C_{s-1}| = |C_{s+2}|$.

Les équivalences (ii) et (iii) sont évidentes, grâce à la définition de $\tilde{C}_{s-1}$ et $\tilde{C}_{s+2}$.

Pour (i) et (iv), on montre d'abord que $C_{s-2} < C_{s-1} < C_s$ et $C_{s+1} < C_{s+2} < C_{s+3}$ sont contradictoires. En effet, si les deux existent simultanément, alors Lemme 6.3.1 implique que $|C_{s-1}| < |C_{s+2}|$. C'est absurde.

On montre ensuite que $C_{s-2} > C_{s-1} > C_s$ et $C_{s+1} > C_{s+2} > C_{s+3}$ sont contradictoires. $|C_{s-1}| \geq |C_s| = |C_{s+1}| \geq |C_{s+2}| = |C_{s-1}|$ implique que $|C_{s-1}| = |C_s| = |C_{s+1}| = |C_{s+2}| = l > 0$. Comme $C_{s-1} > C_s$, $|C_{s-2}| \leq |C_{s+1}| = l$; comme $C_s < C_{s+1}$, $|C_{s-2}| \leq |C_{s+3}|$; comme $C_{s+1} > C_{s+2}$, $l = |C_s| \leq |C_{s+3}|$. On obtient alors que $l = |C_{s-1}| \leq |C_{s-2}| \leq |C_{s+1}| = l = |C_s| \leq |C_{s+3}| \leq |C_{s+2}| = l$ et cela montre que $|C_{s-2}| = |C_{s+3}| = l > 0$. S'il existe $u > 0$ tel que pour tout $0 \leq i < u$, $|C_{s-i}| = |C_{s+1+i}| = l > 0$. On peut supposer que u soit impaire. $C_{s-2} > C_{s-1}$ implique que $|C_{s-u}| \leq |C_{s+u-3}| = l > 0$; $C_{s-1} > C_s$ implique que $|C_{s-u}| \geq |C_{s+u-1}| = l$; $C_{s+1} > C_{s+2}$ implique que $l = |C_{s-u+2}| \geq |C_{s+1+u}|$; $C_{s+2} > C_{s+3}$ implique que $l = |C_{s-u+4}| \leq |C_{s+u+1}|$. On obtient donc que $|C_{s-u}| = |C_{s+u+1}| = l > 0$. Cela montre que pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $|C_t| = l > 0$. Cela contredit le fait que C est une corde finie.

□

Corollaire 6.3.9 Si $C_s < C_{s+1}$, $|C_s| = |C_{s+1}|$ et s'il existe $u > 0$ tel que pour tout $0 < i \leq u$, $|\tilde{C}_{s-i}| = |\tilde{C}_{s+i+1}|$, alors pour tout $1 \leq i \leq u$, $|C_{s-i}| = |C_{s+i+1}|$ et le voisinage d'ordre de C_{s-i} et celui de C_{s+i+1} sont symétriques par rapport à $C_s \cap C_{s+1}$.

Démonstration On raisonne par récurrence sur u . Le cas $u = 1$ est le lemme précédent.

Supposons maintenant qu'il existe $u > 1$ tel que pour tout $0 < i \leq u$, $|\tilde{C}_{s-i}| = |\tilde{C}_{s+i+1}|$. L'hypothèse de récurrence assure que pour tout $1 \leq i \leq u-1$, le voisinage d'ordre de C_{s-i} et celui de C_{s+i+1} sont symétriques par rapport à $C_s \cap C_{s+1}$.

Une fois que l'égalité $|C_{s-u}| = |C_{s+u+1}|$ est établie, $|\tilde{C}_{s-u}| = |\tilde{C}_{s+u+1}|$ implique que les voisinages d'ordre de C_{s-u} et de C_{s+u+1} sont symétriques par rapport à $C_s \cap C_{s+1}$. En effet, l'hypothèse de récurrence implique que $C_{s-u} < C_{s-u+1} \iff C_{s+u} > C_{s+u+1}$ et $C_{s-u} > C_{s-u+1} \iff C_{s+u} < C_{s+u+1}$. Si par exemple, (les autres cas se font similairement), $|\tilde{C}_{s-u}| = 2|C_{s-u}|$ et $C_{s-u} < C_{s-u+1}$, alors $C_{s-u-1} < C_{s-u} < C_{s-u+1}$ et $|\tilde{C}_{s+u+1}| = |\tilde{C}_{s-u}| = 2|C_{s-u}| = 2|C_{s+u+1}|$. et donc $C_{s+u} > C_{s+u+1} > C_{s+u+2}$. Les deux segments C_{s-u} et C_{s+u+1} ont voisinages d'ordre symétriques par rapport à $C_s \cap C_{s+1}$.

On peut supposer que u soit impaire. L'hypothèse de récurrence implique que pour tout $1 \leq i \leq u-1$, $|C_{s-i}| = |C_{s+i+1}|$. Comme $C_s < C_{s+1}$ et comme pour tout $1 \leq i \leq u-1$, $|C_{s-i}| = |C_{s+i+1}|$, alors $|C_{s-u}| \geq |C_{s+u+1}|$. Si $|C_{s-u}| > |C_{s+u+1}|$, alors pour que $|\tilde{C}_{s-u}| = |\tilde{C}_{s+u+1}|$, il faut et il suffit que $|C_{s-u}| = |C_{s+u+1}| + 1$,

$C_{s-u-1} > C_{s-u} < C_{s-u+1}$ et $C_{s+u} < C_{s+u+1} > C_{s+u+2}$. Or, en ce moment $C_{s-u} < C_{s-u+1}$ et $C_{s+u} < C_{s+u+1}$, ce qui contredit le fait que le voisinage d'ordre de C_{s-u+1} et celui de C_{s+u} sont symétriques par rapport à $C_s \cap C_{s+1}$.

□

Proposition 6.3.10 Supposons que $C_s < C_{s+1}$ et $|C_s| = |C_{s+1}|$. S'il existe un entier $u > 0$ tel que $|\tilde{C}_{s-i}| = |\tilde{C}_{s+i+1}|$ pour $1 \leq i \leq u-1$, alors $|\tilde{C}_{s-u}| \geq |\tilde{C}_{s+u+1}|$ quand u est impaire, et $|\tilde{C}_{s-u}| \leq |\tilde{C}_{s+u+1}|$ quand u est paire.

Démonstration Le corollaire précédent montre que pour tout $1 \leq i \leq u-1$, le voisinage d'ordre de C_{s-i} et celui de C_{s+i+1} sont symétriques par rapport à $C_s \cap C_{s+1}$.

On peut supposer que u soit impaire. Comme $C_s < C_{s+1}$ et pour tout $0 \leq i \leq u-1$, $|C_{s-i}| = |C_{s+i+1}|$ d'après le corollaire précédent, $|C_{s-u}| \geq |C_{s+u+1}|$. Si $|C_{s-u}| > |C_{s+u+1}|$, alors $|\tilde{C}_{s-u}| \geq 2|C_{s-u}| - 1 \geq 2|C_{s+u+1}| + 1 \geq |\tilde{C}_{s+u+1}|$.

Supposons dès maintenant que $|C_{s-u}| = |C_{s+u+1}|$. Pour que $|\tilde{C}_{s-u}| < |\tilde{C}_{s+u+1}|$, il faut et il suffit que

Cas 1 $C_{s-u-1} > C_{s-u} < C_{s-u+1}$ et $C_{s+u} > C_{s+u+1} > C_{s+u+2}$

Cas 2 $C_{s-u-1} > C_{s-u} > C_{s-u+1}$ et $C_{s+u} < C_{s+u+1} > C_{s+u+2}$

Regardons Cas 1, Cas 2 se faisant similairement. Comme $C_s < C_{s+1}$ et pour tout $0 \leq i \leq u$, $|C_{s-i}| = |C_{s+i+1}|$, $|C_{s-u-1}| \leq |C_{s+u+2}|$. Mais $|C_{s-u-1}| \geq |C_{s-u}| = |C_{s+u+1}| \geq |C_{s+u+2}|$. On a donc que $|C_{s-u-1}| = |C_{s-u}| = |C_{s+u+1}| = |C_{s+u+2}| > 0$. S'il existe $v > u+1$ tel que pour tout $0 \leq i < v$, $|C_{s-i}| = |C_{s+i+1}| > 0$. On peut supposer que v soit impaire. $C_s < C_{s+1}$ implique que $|C_{s-v}| \geq |C_{s+v+1}|$; $C_{s-u-1} > C_{s-u}$ implique que $|C_{s-v}| \leq |C_{s+v-2u-1}|$, $C_{s+u+1} > C_{s+u+2}$ implique que $|C_{s-v+2u+2}| \leq |C_{s+v+1}|$. On obtient donc que $|C_{s-v}| = |C_{s+v+1}| = |C_{s+v-2u-1}| > 0$. Cela montre que pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $|C_t| > 0$ qui contredit le fait que C est une corde finie.

□

Lemme 6.3.11 Soit $i \geq 1$. Soit $C_{p-2i} < C_{p-2i+1} < \dots < C_{p-1} < C_p > C_{p+1} > \dots > C_{p+2i-1} > C_{p+2i} < C_{p+2i+1}$. Supposons que pour tout $0 \leq j \leq 2i-2$, $|C_{p-j}| = |C_{p+1+j}|$. Alors $|C_{p-2i+1}| < |C_{p+2i}|$.

Démonstration Supposons le contraire, i.e. $|C_{p-2i+1}| = |C_{p+2i}|$. Alors $|C_{p+2i+1}| \geq |C_{p+2i}| = |C_{p-2i+1}| \geq |C_{p-2i}|$, mais comme $C_p > C_{p+1}$, $|C_{p-2i}| \geq |C_{p+2i+1}|$, et on a donc que $|C_{p+2i+1}| = |C_{p+2i}| = |C_{p-2i+1}| = |C_{p-2i}|$. Si $C_{p-2i-1} < C_{p-2i}$, alors $C_{p-2i-1} < C_{p-2i} < C_{p-2i+1} < C_{p-2i+2}$ implique que $|C_{p-2i+1}| > |C_{p-2i}|$, ce qui est une contradiction. On obtient donc que

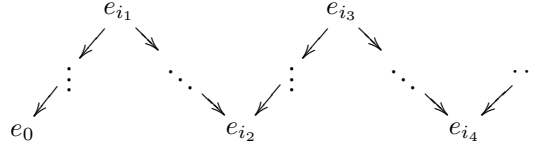
$$C_{p-2i-1} > C_{p-2i} < C_{p-2i+1} < \dots < C_{p-1} < C_p > C_{p+1} > \dots > C_{p+2i-1} > C_{p+2i} < C_{p+2i+1}$$

On va montrer que pour tout $j \geq 0$, $|C_{p-j}| = |C_{p+1+j}| > 0$ et donc que C est une corde infinie, ce qui est absurde. Supposons que l'on ait montré que pour tout $0 \leq j \leq s$, $|C_{p-j}| = |C_{p+1+j}| > 0$. On peut supposer que s soit impaire. Alors $C_p > C_{p+1}$ implique que $|C_{p-s}| \leq |C_{p+s+1}|$; $C_{p-2i} < C_{p-2i+1}$ implique que $|C_{p-s}| \geq |C_{p+s-4i+1}|$; $C_{p+2i} < C_{p+2i+1}$ implique que $|C_{p+1+s}| \leq |C_{p+4i-s}|$. On obtient que $|C_{p+s-4i+1}| \leq |C_{p-s}| \leq |C_{p+1+s}| \leq |C_{p+4i-s}| = |C_{p+s-4i+1}| > 0$.

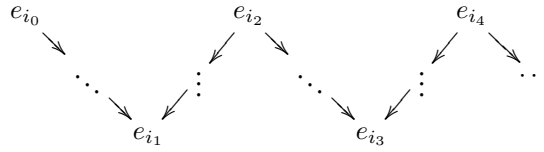
□

6.4 Un cas particulier

Soit $C = C_1 C_2 \cdots C_n$ avec $C_1 > C_2 > \cdots > C_n$. Alors $M(C)$ est de la forme suivante:



ou



Dans ce diagramme, pour tout $1 \leq j \leq n$, les éléments $e_{i_{j-1}}, e_{i_{j-1}+1}, \dots, e_{i_j}$ correspondent au segment C_j .

Cas $n = 1$.

On prend $\varphi(C) = \tilde{C} = S_1(C)$. Comme $S_1(C)$ est une suite indépendante maximale, complète, de longueur $2|C| + 1$ et sa première flèche est β , on voit que les éléments de $\tilde{C}$ forment une base de $\text{Ind}_{T_0}^G M(C)$ (Remarque 6.1.3) et on obtient donc que $\text{Ind}_{T_0}^G M(C) \cong M(\varphi(C))$.

Cas $n = 2$

Cas 1 C_1 est inverse. On définit $\tilde{C}_1 = S_1(C_1)$. Comme $|C_1| \geq |C_2|$, $\tilde{C}_1$ est maximale (voir les amplifications dans Section 6.2).

Cas 1.1 C_1 termine par β_0^{-1} , donc C_2 commence par α_0 . Le dernier terme de $\tilde{C}_1$ est $e \otimes e_{i_1}$. On pose $\tilde{C}_2 = S_2(C_2)$ dont le 0-ième terme est bien $e \otimes e_{i_1}$. La suite $\tilde{C}_2$ est par définition maximale (Amplification 6.2.7 et 6.2.8). Les suites $\tilde{C}_1$ et $\tilde{C}_2$ forment une présentation de l'isomorphisme $\text{Ind}_{T_0}^G M(C) \cong M(\tilde{C})$.

Cas 1.2 C_1 termine par α_0^{-1} , donc C_2 commence par β_0 . Le dernier terme de $\tilde{C}_1$ est $x \otimes e_{i_1}$. On pose $\tilde{C}_2 = S_2(C_2)$ dont le 0-ième terme est bien $x \otimes e_{i_1}$. La suite $\tilde{C}_2$ est par définition maximale. Les suites $\tilde{C}_1$ et $\tilde{C}_2$ forment une présentation de l'isomorphisme $\text{Ind}_{T_0}^G M(C) \cong M(\tilde{C})$.

Cas 2 C_1 est directe. On définit $\tilde{C}_1 = S_1(C_1)$ qui est maximale et complète.

Cas 2.1 C_1 termine par β_0 , donc C_2 termine par α_0^{-1} . Le dernier terme de $\tilde{C}_1$ est $e \otimes e_{i_1} + x \otimes e_{i_1}$ et son avant-dernier terme est $x \otimes e_{i_1}$. On pose $\tilde{C}_2 = S'_1(C_2)$ dont le 0-ième terme est $e \otimes e_{i_1}$. On la modifie en y rajoutant $\overline{S'_1(C_1)}^{-1}$ où $\overline{S'_1(C_1)}$ est la suite extraite de $S'_1(C_1)$ composée des $2|C_2|$ derniers termes, i.e. la suite extraite de longueur $2|C_2|$ de la forme $\cdots \longrightarrow x \otimes e_{i_1}$. Maintenant le 0-ième terme de $\tilde{C}_2$ est bien $e \otimes e_{i_1} + x \otimes e_{i_1}$ et est donc maximale, car $\alpha(e \otimes e_{i_1} + x \otimes e_{i_1}) = 0 = \beta(e \otimes e_{i_1} + x \otimes e_{i_1})$. Si $|C_2| < |C_1|$, $\overline{S'_1(C_1)}^{-1}$ est complète d'après Remarque 6.1.1 et, si $|C_2| = |C_1|$, $\overline{S'_1(C_1)}^{-1}$ est identique à $S'_1(C_1)$ qui est par définition complète. On obtient donc que $\tilde{C}_2$ est complète et maximale et que $\tilde{C}_1$ et $\tilde{C}_2$ se recollent formant une présentation de l'isomorphisme $\text{Ind}_{T_0}^G M(C) \cong M(\tilde{C})$.

Cas 2.2 C_1 termine par α , donc C_2 termine par β^{-1} . Le dernier terme de $\tilde{C}_1$ est $e \otimes e_{i_1} + x \otimes e_{i_1}$ et son avant-dernier terme est $x \otimes e_{i_1}$. On pose $\tilde{C}_2 = S'_1(C_2)$ dont le 0-ième terme est $x \otimes e_{i_1}$. On la modifie en y ajoutant $\overline{S'_1(C_1)}^{-1}$ où $\overline{S'_1(C_1)}$ est la suite extraite de $S'_1(C_1)$ composée des $2|C_2|$ derniers termes, i.e. la suite extraite de longueur $2|C_2|$ de la forme $\cdots \longrightarrow e \otimes e_{i_1}$. Maintenant le 0-ième terme de $\tilde{C}_2$ est bien $e \otimes e_{i_1} + x \otimes e_{i_1}$ et est maximale, car $\alpha(e \otimes e_{i_1} + x \otimes e_{i_1}) = 0 = \beta(e \otimes e_{i_1} + x \otimes e_{i_1})$.

Si $|C_2| < |C_1|$, $\overline{S'_1(C_1)}^{-1}$ est complète d'après Remarque 6.1.1 et, si $|C_2| = |C_1|$, $\overline{S'_1(C_1)}^{-1}$ est identique à $S'_1(C_1)$ qui est par définition complète. On obtient donc que $\tilde{C}_2$ est complète et maximale et que $\tilde{C}_1$ et $\tilde{C}_2$ se recollent formant une présentation de l'isomorphisme $\text{Ind}_{T_0}^G M(C) \cong M(\tilde{C})$.

Cas $n = 3$ Dans ce cas, on a forcément $|C_1| \geq |C_2| > |C_3|$, car sinon, $C_1 > C_2 < C_3$.

Cas 1 C_1 est inverse. On définit $\tilde{C}_1 = S_1(C_1)$. $\tilde{C}_1$ est par définition maximale.

Cas 1.1 C_1 termine par β_0^{-1} , donc C_2 commence par α_0 . Le dernier terme de $\tilde{C}_1$ est $e \otimes e_{i_1}$. On pose $\tilde{C}_2 = S_2(C_2)$ dont le 0-ième terme est bien $e \otimes e_{i_1}$. $\tilde{C}_2$ est par définition maximale.

Cas 1.1.1 C_2 termine par β_0 , donc C_3 commence par α_0^{-1} . Le dernier terme de $\tilde{C}_2$ est $e \otimes e_{i_2} + x \otimes e_{i_2}$ et son avant-dernier terme est $x \otimes e_{i_1}$. On pose $\tilde{C}_3 = S'_1(C_3)$ dont le 0-ième terme est $e \otimes e_{i_2}$. On la modifie en y ajoutant $\overline{S'_1(C_2)}^{-1}$ où $\overline{S'_1(C_2)}$ est la suite extraite de $S'_1(C_2)$ composée des $2|C_3|$ derniers termes de $S'_1(C_2)$. Le dernier terme de $S'_1(C_2)$ est $x \otimes e_{i_2}$ et donc le 0-ième terme de $\tilde{C}_3$ est $e \otimes e_{i_2} + x \otimes e_{i_2}$ et $\tilde{C}_3$ est par conséquent maximale. Comme $|C_2| > |C_3|$, $|\tilde{C}_3| = 2|C_3| < 2|C_2| = |S'_1(C_2)|$. Remarque 6.1.1 implique que $\overline{S'_1(C_2)}$ est complète. Comme $S'_1(C_3)$ est aussi complète, la suite $\tilde{C}_3$ est complète.

Cas 1.1.2 C_2 termine par α_0 , donc C_3 commence par β_0^{-1} . Le dernier terme de $\tilde{C}_2$ est $e \otimes e_{i_2} + x \otimes e_{i_2}$ et son avant-dernier terme est $e \otimes e_{i_1}$. On pose $\tilde{C}_3 = S'_1(C_3)$ dont le 0-ième terme est $x \otimes e_{i_2}$. On la modifie en y ajoutant $\overline{S'_1(C_2)}^{-1}$ où $\overline{S'_1(C_2)}$ est la suite extraite de $S'_1(C_2)$ obtenue en prenant les $2|C_3|$ derniers termes de $S'_1(C_2)$. Le dernier terme de $S'_1(C_2)$ est $e \otimes e_{i_2}$ et donc le 0-ième terme de $\tilde{C}_3$ est $e \otimes e_{i_2} + x \otimes e_{i_2}$ et $\tilde{C}_3$ est par conséquent maximale. Comme $|C_2| > |C_3|$, $|\tilde{C}_3| = 2|C_3| < 2|C_2| = |S'_1(C_2)|$. Remarque 6.1.1 implique que $\overline{S'_1(C_2)}$ est complète. Comme $S'_1(C_3)$ est aussi complète, la suite $\tilde{C}_3$ est complète.

Cas 1.2 C_1 termine par α_0^{-1} , donc C_2 commence par β_0 . Le dernier terme de $\tilde{C}_1$ est $x \otimes e_{i_1}$. On pose $\tilde{C}_2 = S_2(C_2)$ dont le 0-ième terme est bien $x \otimes e_{i_1}$. $\tilde{C}_2$ est maximale.

Cas 1.2.1 C_2 termine par β , donc C_3 commence par α^{-1} . Le dernier terme de $\tilde{C}_2$ est $e \otimes e_{i_2} + x \otimes e_{i_2}$. On pose $\tilde{C}_3 = S'_1(C_3)$ dont le 0-ième terme est $e \otimes e_{i_2}$. On la modifie en y ajoutant $\overline{S'_1(C_2)}^{-1}$ où $\overline{S'_1(C_2)}$ est la suite extraite de $S'_1(C_2)$ composée des $2|C_3|$ derniers termes de $S'_1(C_2)$. Le dernier terme de $S'_1(C_2)$ est $x \otimes e_{i_2}$ et donc le 0-ième terme de $\tilde{C}_3$ est $e \otimes e_{i_2} + x \otimes e_{i_2}$ et $\tilde{C}_3$ est par conséquent maximale. Comme $|C_2| > |C_3|$, $|\tilde{C}_3| = 2|C_3| < 2|C_2| = |S'_1(C_2)|$. Remarque 6.1.1 implique que $\overline{S'_1(C_2)}$ est complète. Comme $S'_1(C_3)$ est aussi complète, la suite $\tilde{C}_3$ est complète.

Cas 1.2.2 C_2 termine par α_0 , donc C_3 commence par β_0^{-1} . Le dernier terme de $\tilde{C}_2$ est $e \otimes e_{i_2} + x \otimes e_{i_2}$. On pose $\tilde{C}_3 = S'_1(C_3)$ dont le 0-ième terme est $x \otimes e_{i_2}$. On la modifie en y ajoutant $\overline{S'_1(C_2)}^{-1}$ où $\overline{S'_1(C_2)}$ est la suite extraite de $S'_1(C_2)$ composée des $2|C_3|$ derniers termes de $S'_1(C_2)$. Le dernier terme de $S'_1(C_2)$ est $e \otimes e_{i_2}$ et donc le 0-ième terme de $\tilde{C}_3$ est $e \otimes e_{i_2} + x \otimes e_{i_2}$ et $\tilde{C}_3$ est par conséquent maximale. Comme $|C_2| > |C_3|$, $|\tilde{C}_3| = 2|C_3| < 2|C_2| = |S'_1(C_2)|$. Remarque 6.1.1 implique que $\overline{S'_1(C_2)}$ est complète. Comme $S'_1(C_3)$ est aussi complète, la suite $\tilde{C}_3$ est complète.

Cas 2 C_1 est directe. On définit $\tilde{C}_1 = S_1(C_1)$. $\tilde{C}_1$ est complète et maximale.

Cas 2.1 C_1 termine par β_0 , donc C_2 termine par α_0^{-1} . Le dernier terme de $\tilde{C}_1$ est $e \otimes e_{i_1} + x \otimes e_{i_1}$. On pose $\tilde{C}_2 = S'_1(C_2)$ dont le 0-ième terme est $e \otimes e_{i_1}$. On la modifie en y ajoutant $\overline{S'_1(C_1)}^{-1}$ dont le 0-ième terme est bien $e \otimes e_{i_1} + x \otimes e_{i_1}$. $\tilde{C}_2$ est maximale.

Cas 2.1.1 C_2 termine par β_0^{-1} , donc C_3 commence par α_0 . Le dernier terme de $\tilde{C}_2$ est $e \otimes e_{i_2}$ plus le 0-ième terme de $\overline{S'_1(C_1)}$. On pose $\tilde{C}_3 = S_2(C_3)$ dont le 0-ième terme est $e \otimes e_{i_2}$. Si $|C_1| > |C_2|$, alors le 0-ième terme de $\overline{S'_1(C_1)}$ est dans l'image de α et donc devient nulle si on y applique α (qui

est aussi la première flèche de $\tilde{C}_3$; si $|C_1| = |C_2|$, le 0-ième terme de $\overline{S'_1(C_1)} = S'_1(C_1)$ devient nulle après α , puisque $S'_1(C_1)$ est complète. On modifie $\tilde{C}_3$ en ajoutant le 0-ième terme de $\overline{S'_1(C_1)}$ à celui de $\tilde{C}_3$. La suite $\tilde{C}_3$ ainsi obtenue est une suite indépendante.

Cas 2.1.2 C_2 termine par α_0^{-1} , donc C_3 commence par β_0 . Le dernier terme de $\tilde{C}_2$ est $x \otimes e_{i_2}$ plus le 0-ième terme de $\overline{S_1(C_1)}$. On pose $\tilde{C}_3 = S_2(C_3)$ dont le 0-ième terme est $x \otimes e_{i_2}$. Si $|C_1| > |C_2|$, alors le 0-ième terme de $\overline{S_1(C_1)}$ est dans l'image de α et donc devient nulle si on y applique α (qui est aussi la première flèche de $\tilde{C}_3$); si $|C_1| = |C_2|$, le 0-ième terme de $\overline{S'_1(C_1)} = S'_1(C_1)$ devient nulle après β , puisque $S'_1(C_1)$ est complète. On modifie $\tilde{C}_3$ en ajoutant le 0-ième terme de $\overline{S'_1(C_1)}$ à celui de $\tilde{C}_3$. La suite $\tilde{C}_3$ ainsi obtenue est une suite indépendante.

Cas 2.2 C_1 termine par α_0 , donc C_2 termine par β_0^{-1} . Le dernier terme de $\tilde{C}_1$ est $e \otimes e_{i_1} + x \otimes e_{i_1}$. On pose $\tilde{C}_2 = S'_1(C_2)$ dont le 0-ième terme est $x \otimes e_{i_1}$. On la modifie en y ajoutant $\overline{S'_1(C_1)}^{-1}$ où $\overline{S'_1(C_1)}$ est la suite extraite de $S'_1(C_1)$ composée des $2|C_2|$ derniers termes. Maintenant le 0-ième terme de $\tilde{C}_2$ est bien $e \otimes e_{i_1} + x \otimes e_{i_1}$ puisque le dernier terme de $\overline{S'_1(C_1)}$ est $e \otimes e_{i_1}$ et $\tilde{C}_2$ est donc maximale.

Cas 2.2.1 C_2 termine par β_0^{-1} , donc C_3 commence par α_0 . Le dernier terme de $\tilde{C}_2$ est $e \otimes e_{i_2}$ plus le 0-ième terme de $\overline{S'_1(C_1)}$. On pose $\tilde{C}_3 = S_2(C_3)$ dont le 0-ième terme est $e \otimes e_{i_2}$. Si $|C_1| > |C_2|$, alors le 0-ième terme de $\overline{S'_1(C_1)}$ est dans l'image de α et donc devient nulle si on y applique α (qui est aussi la première flèche de $\tilde{C}_3$); si $|C_1| = |C_2|$, le 0-ième terme de $\overline{S'_1(C_1)} = S'_1(C_1)$ devient nulle après α , puisque $S'_1(C_1)$ est complète. On modifie $\tilde{C}_3$ en ajoutant le 0-ième terme de $\overline{S'_1(C_1)}$ à celui de $\tilde{C}_3$. La suite $\tilde{C}_3$ ainsi obtenue est une suite indépendante.

Cas 2.2.2 C_2 termine par α^{-1} , donc C_3 commence par β . Le dernier terme de $\tilde{C}_2$ est $x \otimes e_{i_2}$ plus le 0-ième terme de $\overline{S'_1(C_1)}$. On pose $\tilde{C}_3 = S_2(C_3)$ dont le 0-ième terme est $x \otimes e_{i_2}$. Si $|C_1| > |C_2|$, alors le 0-ième terme de $\overline{S'_1(C_1)}$ est dans l'image de α et donc devient nulle si on y applique α (qui est aussi la première flèche de $\tilde{C}_3$); si $|C_1| = |C_2|$, le 0-ième terme de $\overline{S'_1(C_1)} = S'_1(C_1)$ devient nulle après β , puisque $S'_1(C_1)$ est complète. On modifie $\tilde{C}_3$ en ajoutant le 0-ième terme de $\overline{S'_1(C_1)}$ à celui de $\tilde{C}_3$. La suite $\tilde{C}_3$ ainsi obtenue est une suite indépendante.

Cas n arbitraire. Dans ce cas, $|C_1| \geq |C_2| > |C_3| > \dots > |C_n|$, car Corollaire 6.3.4 montre que $|C_1| \geq |C_2| > |C_3| > \dots > |C_{n-1}| \geq |C_n|$ et car si $|C_{n-1}| = |C_n|$, alors $C_{n-1} < C_n$. On utilise la récurrence pour construire toutes les $\tilde{C}_i$. Supposons que l'on ait construit $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \dots, \tilde{C}_s$ pour $1 < s < n$ telles que $\tilde{C}_s$ vérifie les conditions suivantes:

- (i) Les $\tilde{C}_i$ avec $1 \leq i \leq n$ sont compatibles, i.e. pour tout $1 \leq i \leq s-1$, $\tilde{C}_s$ et $\tilde{C}_{s+1}$ se recollent.
- (ii) $\tilde{C} = S_1(C_1)$ (et donc si C_1 est directe, $\tilde{C}_1$ est complète).
- (iii) Toutes les $\tilde{C}_i$ sont maximales.
- (iv) Si C_s est inverse, le dernier terme de $\tilde{C}_s$ est somme du 0-ième terme de $S_2(C_{s+1})$ et d'un terme qui devient nul par la première flèche de $S_2(C_{s+1})$; si C_s est directe, alors le dernier terme de $\tilde{C}_s$ est $e \otimes e_{i_s} + x \otimes e_{i_s}$ et l'avant-dernier terme de $\tilde{C}_s$ est $e \otimes e_{i_s}$ ou $x \otimes e_{i_s}$ suivant que la dernière flèche de C_s est α_0 ou β_0 .

Les cas $n = 1, 2, 3$ justifient ces hypothèses.

On va construire $\tilde{C}_{s+1}$.

Si C_s est inverse, alors C_{s+1} est directe. On définit $\tilde{C}_{s+1} = S_2(C_{s+1})$ en remplaçant le 0-ième terme de $S_2(C_{s+1})$ par le dernier terme de $\tilde{C}_s$. Comme le facteur supplémentaire autre que le 0-ième terme de $S_2(C_{s+1})$ dans le dernier terme de $\tilde{C}_s$ devient nul par la première flèche de $S_2(C_{s+1})$. On obtient que $\tilde{C}_{s+1}$ est une suite indépendante maximale et son dernier terme est $e \otimes e_{i_{s+1}} + x \otimes e_{i_{s+1}}$. Si la dernière flèche de C_{s+1} est α_0 (resp. β_0), alors l'avant-dernier terme de $\tilde{C}_{s+1}$ est $e \otimes e_{i_{s+1}}$ (resp. $x \otimes e_{i_{s+1}}$).

Si C_s est directe, alors C_{s+1} est inverse. On définit $\tilde{C}_{s+1}$ comme la somme de $S'_1(C_{s+1})$ et $\overline{\tilde{C}'_s}^{-1}$ où $\tilde{C}'_s$ est la suite extraite de $\tilde{C}'_s$ composée des $2|C_s|$ derniers termes de $\tilde{C}_s$. Si $e \otimes e_{i_s}$ (resp. $x \otimes e_{i_s}$) est le 0-ième terme de $S'_1(C_{s+1})$, alors l'avant-dernier terme de $\tilde{C}_s$ est $x \otimes e_{i_s}$ (resp. $e \otimes e_{i_s}$). Comme $|C_{s+1}| < |C_s|$, on sait que le 0-ième terme de $\tilde{C}'_s$ devient nul par γ où γ est la flèche parmi α et β tel que γ^{-1} soit différente de la dernière flèche de $S'_1(C_{s+1})$ (qui est aussi la première flèche de $S_2(C_{s+2})$ si $s+1 < n$), car ce terme est dans l'image de γ .

Il est immédiat de voir que la suite $\tilde{C}_{s+1}$ ainsi construite vérifie l'hypothèse de récurrence si $s+1 < n$.

Si $s = n-1$ et si C_n est inverse, alors d'après ci-dessus, $\tilde{C}_n = \tilde{C}_{s+1}$ est la somme de $S'_1(C_n)$ et $\overline{\tilde{C}'_{n-1}}^{-1}$ où $\tilde{C}'_{n-1}$ est la suite extraite de $\tilde{C}'_{n-1}$ composée des $2|C_n|$ derniers termes de $\tilde{C}_{n-1}$. La suite $S'_1(C_n)$ est par définition complète et comme $|C_{n-1}| > |C_n|$, $\overline{\tilde{C}'_{n-1}}^{-1}$ est aussi complète d'après Remarque 6.1.1, cela montre que $\tilde{C}_n$ est complète.

6.5 Un cas plus compliqué

On considère ensuite un cas plus compliqué. Soit $C = C_1 \cdots C_{u_{01}} \cdots C_n$ telle que $C_1 < \cdots < C_{u_{01}} > \cdots > C_n$. Posons $m = u_{01}$. Quitte à remplacer C par C^{-1} , on peut supposer que C_m soit directe. On peut supposer également que $1 < m < n$, sinon on réduit à la situation de la section précédente. On a

$$|C_1| < \cdots < |C_{m-1}| \leq |C_m| \geq |C_{m+1}| > \cdots > |C_n|$$

En effet, Corollaire 6.3.4 montre que $|C_1| \leq |C_2| < \cdots < |C_{m-1}| \leq |C_m| \geq |C_{m+1}| > \cdots > |C_{n-1}| \geq |C_n|$. De plus, $|C_1| < |C_2|$, car sinon $|C_1| = |C_2|$, $C_1 > C_2$, et $|C_{n-1}| > |C_n|$, car sinon $|C_{n-1}| = |C_n|$, $C_{n-1} < C_n$. Remarquons que l'on ne peut pas avoir $|C_{m-1}| = |C_m| = |C_{m+1}|$, car sinon, si $m = 2$, alors $C_{m-1} > C_m$; si $n - m = 1$, alors $C_m < C_{m+1}$; si $m > 2$ et $n - m > 1$, alors $C_{m-2} < C_{m-1} < C_m > C_{m+1} > C_{m+2}$ montre que $C_{m+1} > C_m$, d'après Lemme 6.3.5.

Regardons d'abord la sous-corde $C_1 \cdots C_m$. On pose $\tilde{C}_m = S_1(C_m)$. Constatons qu'en ce moment, d'après les amplifications de la section 6.2, le dernier terme de $\tilde{C}_m$ est $e \otimes e_{i_m} + x \otimes e_{i_m}$ si $|C_{m-1}| < |C_m|$, et est $e \otimes e_{i_m} + x \otimes e_{i_m} + e \otimes e_{i_{m-2}} + x \otimes e_{i_{m-2}}$ si $|C_{m-1}| = |C_m|$. On utilise la méthode de la section précédente pour trouver les inductions $\tilde{C}_{m-1}, \dots, \tilde{C}_1$. En effet, on pose $\tilde{C}_{m-1} = S_2(C_{m-1})$ et $\tilde{C}_{m-2} = S'_1(C_{m-2}) + \overline{\tilde{C}'_{m-1}}^{-1}$ où $\tilde{C}'_{m-1}$ est la suite extraite de $\tilde{C}'_{m-1}$ composée des $|S'_1(C_{m-2})|$ derniers éléments. On pose $\tilde{C}_{m-3} = S_2(C_{m-3})$ et on change son dernier terme en le 0-ième terme de $\tilde{C}_{m-2}$. Pour $i \geq 2$ et $m - 2i + 1 \geq 1$, on définit par récurrence $\tilde{C}_{m-2i+1} = S_2(C_{m-2i+1})$ et on change son dernier terme en le 0-ième terme de $\tilde{C}_{m-2i+2}$. Pour $i \geq 2$ et $m - 2i \geq 1$, on définit par récurrence $\tilde{C}_{m-2i} = S'_1(C_{m-2i}) + \overline{\tilde{C}'_{m-2i+1}}^{-1}$ où $\tilde{C}'_{m-2i+1}$ est la suite extraite de $\tilde{C}'_{m-2i+1}$ composée des $|S'_1(C_{m-2i})|$ derniers éléments. Il est facile de voir que si C_1 est directe, la suite $\tilde{C}_1$ ainsi construite est complète.

Regardons maintenant $C_m C_{m+1} \cdots C_n$. On suit la méthode de la section précédente à des modifications près. On distingue trois cas.

Cas 1 $|C_m| = |C_{m-1}|$.

En ce moment, $m > 2$, car sinon, $C_1 = C_{m-1} > C_m$. Posons $\tilde{C}_m = S_1(C_m)$ et $\tilde{C}_{m+1} = S'_1(C_{m+1}) + \overline{\tilde{C}'_m}^{-1}$. Attention, en ce moment, le dernier terme de $\tilde{C}_m$ ne s'identifie pas au 0-ième terme de $\tilde{C}_{m+1}$. Comme $|C_{m-1}| = |C_m|$, le dernier terme de $\tilde{C}_m$ est $e \otimes e_{i_m} + x \otimes e_{i_m} + e \otimes e_{i_{m-2}} + x \otimes e_{i_{m-2}}$. Supposons, par exemple, que C_m soit de longueur paire et termine par α_0 (les autres cas se font similairement). Alors l'avant-dernier terme de $\tilde{C}_m$ est $e \otimes e_{i_m} + x \otimes e_{i_{m-2}}$ et donc le 0-ième terme de $\tilde{C}_{m+1}$ est $e \otimes e_{i_m} + x \otimes e_{i_m} + x \otimes e_{i_{m-2}}$. Cela signifie qu'il faut encore modifier $\tilde{C}_{m+1}$. On la laisse pour l'instant et on définit d'abord les $\tilde{C}_j$ pour $m+2 \leq j \leq n$. La suite $\tilde{C}_{m+2}$ est définie comme $S_2(C_{m+2})$ et le dernier terme de

$\tilde{C}_{m+1}$ est somme du 0-ième terme de $\tilde{C}_{m+2}$ plus le dernier terme de $\overline{\tilde{C}'_m}^{-1}$ qui devient nul si on y applique la première flèche de $\tilde{C}_{m+2}$, puisque $|C_m| > |C_{m+1}|$. Il suffit encore de changer le 0-ième terme de $\tilde{C}_{m+2}$ en le dernier terme de $\tilde{C}_{m+1}$. On définit ensuite en utilisant la méthode de la section précédente les suites $\tilde{C}_{m+3}, \dots, \tilde{C}_n$.

En effet, on pose $\tilde{C}_{m+3} = S'_1(C_{m+3}) + \overline{\tilde{C}'_{m+2}}^{-1}$ où $\overline{\tilde{C}'_{m+2}}$ est la suite extraite de $\tilde{C}'_{m+2}$ composée des $|S'_1(C_{m+3})|$ derniers éléments. $\tilde{C}_{m+4} = S_2(C_{m+4})$ et on change son 0-ième terme en le dernier terme de $\tilde{C}_{m+3}$. On procède ensuite par récurrence. Pour $i \geq 2$ et $m+2i \leq n$, on définit $\tilde{C}_{m+2i} = S_2(C_{m+2i})$ et on change son 0-ième terme en le dernier terme de $\tilde{C}_{m+2i-1}$ et pour $i \geq 2$ et $m+2i \leq n$, on définit $\tilde{C}_{m+2i+1} = S'_1(C_{m+2i+1}) + \overline{\tilde{C}'_{m+2i}}^{-1}$ où $\overline{\tilde{C}'_{m+2i}}$ est la suite extraite de $\tilde{C}'_{m+2i}$ composée des $|S'_1(C_{m+2i+1})|$ derniers éléments. Il est facile de voir que si C_n est inverse, la suite $\tilde{C}_n$ ainsi construite est complète.

Maintenant on effectue les modifications repartée. Proposition 6.3.10 montre que $|\tilde{C}_{m+1}| \leq |\tilde{C}_{m-2}| = 2|C_{m-2}| = |S'_1(C_{m-2})|$. On remplace $\tilde{C}_{m+1}$ par $\tilde{C}_{m+1} + \overline{S'_1(C_{m-2})}^{-1}$. Cela corrige bien la différence entre le dernier terme de $\tilde{C}_m$ et le 0-ième terme de $\tilde{C}_{m+1}$. Supposons, comme ci-dessus, que C_m soit de longueur paire et termine par α_0 . Alors l'avant-dernier terme de $\tilde{C}_m$ est $e \otimes e_{i_m} + x \otimes e_{i_{m-2}}$ et donc le 0-ième terme de $\tilde{C}_{m+1}$ avant modification est $e \otimes e_{i_m} + x \otimes e_{i_m} + x \otimes e_{i_{m-2}}$. Remarquons l'avant dernier terme de $S_1(C_{m-2})$ est $e \otimes e_{i_{m-2}}$. On obtient donc que le 0-ième terme de la $\tilde{C}_{m+1}$ modifiée est $e \otimes e_{i_m} + x \otimes e_{i_m} + e \otimes e_{i_{m-2}} + x \otimes e_{i_{m-2}}$ qui coïncide avec le dernier terme de $\tilde{C}_m$. Comme $C_m > C_{m-1}$, on sait que $|C_{m-2}| \geq |C_{m+1}|$. Si $m = 3$ et $|C_{m-2}| > |C_{m+1}|$, la suite $\overline{\tilde{C}_{m-2}} = \tilde{C}_{m-2}$ est par définition complète. Si $|C_{m-2}| > |C_{m+1}|$, la suite $\overline{\tilde{C}_{m-2}}$ est complète d'après Remarque 6.1.1. Alors le 0-ième terme de $S'_1(C_{m-2})$ devient nul si on y applique la première flèche $\gamma \in \{\alpha, \beta\}$ de $\tilde{C}_{m+2}$, puisque il est dans l'image de γ . Il suffit donc de modifier $\tilde{C}_{m+2}$ en ajoutant à son 0-ième terme celui de $S'_1(C_{m-2})$ et laisser inchangées toutes les autres $\tilde{C}_j$ pour $m+3 \leq j \leq n$. Si $|C_{m-2}| = |C_{m+1}|$ et $m > 3$, alors $\overline{S'_1(C_{m-2})} = S'_1(C_{m-2})$. On remplace $\tilde{C}_{m+2}$ par $\tilde{C}_{m+2} + S_2(C_{m-3})^{-1}$. D'après la construction de $\tilde{C}_{m-3}$, elle a même 0-ième terme que $S_2(C_{m-3})$ et n'est différente de $S_2(C_{m-3})$ qu'en le dernier terme dont la différence est un terme qui devient nul après y avoir appliqué la dernière flèche de $\tilde{C}_{m-3}$ (qui est aussi la première flèche de $\tilde{C}_{m+2}$). Maintenant comme $C_m > C_{m-1}$, $|C_{m+2}| \geq |C_{m-3}|$. Si $|C_{m+2}| > |C_{m-3}|$, il n'est pas nécessaire de modifier les autres suites. Si en revanche $|C_{m+2}| = |C_{m-3}|$, d'après Proposition 6.3.10, $|\tilde{C}_{m+3}| \leq |\tilde{C}_{m-4}|$ et donc $m > 4$. On peut remplacer $\tilde{C}_{m+3}$ par $\tilde{C}_{m+3} + \overline{\tilde{C}_{m-4}}^{-1}$ où $\overline{\tilde{C}_{m-4}}$ est la suite extraite de $\tilde{C}_{m-4}$ composée des $|\tilde{C}_{m+3}|$ derniers termes. Comme $\tilde{C}_{m-3}$ a même 0-ième terme que $S_2(C_{m-3})$, $\tilde{C}_{m+3}$ et $\tilde{C}_{m+2}$ se recollent. Si $|C_{m+3}| < |C_{m-4}|$, on n'a pas besoin de modifier les autres cordes sauf ajouter au 0-ième terme de $\tilde{C}_{m+4}$ celui de $\overline{(\tilde{C}_{m-4})}^{-1}$. Si $|C_{m+3}| = |C_{m-4}|$, on continue.

On procède ensuite par récurrence. L'hypothèse de récurrence sur $\tilde{C}_{m+2i}$ pour $i \geq 2$ et $m+2i < n$ est la suivante:

La suite $\tilde{C}_{m+2i}$ est modifiée par l'une des façons suivantes.

- (i) $\tilde{C}_{m+2i}$ est obtenue sans modification
- (ii) $\tilde{C}_{m+2i}$ est obtenue en modifiant son 0-ième terme selon $\tilde{C}_{m+2i-1}$, i.e. on a changé le 0-ième terme de $\tilde{C}_{m+2i}$ en le dernier terme de $\tilde{C}_{m+2i-1}$
- (iii) $m-2i-1 \geq 1$ et on remplace $\tilde{C}_{m+2i}$ par $\tilde{C}_{m+2i} + \tilde{C}_{m-2i-1}^{-1}$. En ce moment, $|C_{m+j}| = |C_{m-j-1}|$ pour tout $0 \leq j \leq 2i-1$.

L'hypothèse de récurrence sur $\tilde{C}_{m+2i-1}$ pour $i \geq 2$ et $m+2i-1 < n$ est la suivante:

La suite $\tilde{C}_{m+2i-1}$ est modifiée par l'une des façons suivantes.

- (i) $\tilde{C}_{m+2i-1}$ est obtenue sans modification

- (ii) On remplace $\tilde{C}_{m+2i-1}$ par $\tilde{C}_{m+2i-1} + \overline{\tilde{C}_{m-2i}}^{-1}$. En ce moment, $|C_{m+j}| = |C_{m-j-1}|$ pour tout $0 \leq j \leq 2i - 2$.

Supposons que l'on a modifié $\tilde{C}_{m+1}, \dots, \tilde{C}_{m+2i}$ avec $i \geq 2$ et $m + 2i < n$. On va modifier $\tilde{C}_{m+2i+1}$. Pour les cas (i) et (ii), on ne modifie pas $\tilde{C}_{m+2i+1}$. Si on est dans le cas (iii), comparons $|C_{m-2i-1}|$ et $|C_{m+2i}|$. Si $|C_{m-2i-1}| < |C_{m+2i}|$, on ne modifie pas $\tilde{C}_{m+2i+1}$. Supposons que $|C_{m-2i-1}| = |C_{m+2i}|$. Proposition 6.3.10 montre que $|\tilde{C}_{m+2i+1}| \leq |\tilde{C}_{m-2i-2}|$. On remplace $\tilde{C}_{m+2i+1}$ par $\tilde{C}_{m+2i+1} + \overline{\tilde{C}_{m-2i-2}}^{-1}$. On vérifie que la $\tilde{C}_{m+2i+1}$ ainsi modifiée satisfait l'hypothèse de récurrence si $m + 2i + 1 < n$.

Si C_n est inverse, alors $n - m$ est impaire. D'après la construction ci-dessus, il existe deux possibilités:

- (i) $\tilde{C}_n$ est obtenue sans modification
(ii) On remplace $\tilde{C}_n$ par $\tilde{C}_n + \overline{\tilde{C}_{2m-1-n}}^{-1}$. En ce moment, $|C_{m+j}| = |C_{m-j-1}|$ pour tout $0 \leq j \leq n - m$.

Comme la suite $\tilde{C}_n$ avant modification est complète, la première possibilité n'influence pas la complétude. Pour la deuxième possibilité, comme C_n est le dernier segment, $|C_n| < |C_{2m-1-n}|$. La suite $\overline{\tilde{C}_{2m-1-n}}^{-1}$ est donc complète, d'après Remarque 6.1.1. La suite $\tilde{C}_n$ ainsi modifiée reste encore complète.

Supposons que l'on a modifiée $\tilde{C}_{m+1}, \dots, \tilde{C}_{m+2i-1}$ avec $i \geq 2$ et $m + 2i - 1 < n$. On va modifier $\tilde{C}_{m+2i}$. Pour le cas (i), on ne modifie pas $\tilde{C}_{m+2i}$. Si on est dans le cas (ii), comparons $|C_{m-2i}|$ et $|C_{m+2i-1}|$. Si $|C_{m-2i}| > |C_{m+2i-1}|$ ou $m = 2i + 1$, on modifie le 0-ième terme de $\tilde{C}_{m+2i}$ selon $\tilde{C}_{m+2i-1}$. Supposons que $|C_{m-2i}| = |C_{m+2i-1}|$ et $m > 2i + 1$. On remplace $\tilde{C}_{m+2i}$ par $\tilde{C}_{m+2i} + \tilde{C}_{m-2i-1}^{-1}$. On vérifie que la suite $\tilde{C}_{m+2i}$ ainsi modifiée satisfait l'hypothèse de récurrence si $m + 2i < n$.

Cas 2 $|C_{m+1}| = |C_m|$.

En ce moment, $n - m > 2$, car sinon, $C_n = C_{m+1} > C_m$. On a montré donc que $|C_{m-1}| < |C_m|$. On pose $\tilde{C}_m = S_1(C_m)$. On procède comme suit pour définir les $\tilde{C}_j$ pour $m + 1 \leq j \leq n$. On pose d'abord $\tilde{C}_{m+1} = S'_1(C_{m+1})^{-1} + \tilde{C}'_m$ et $\tilde{C}_{m+2} = S_2(C_{m+2})$. Constatons que le 0-ième terme de $\tilde{C}_{m+2}$ ne s'identifie pas au dernier terme de $\tilde{C}_{m+1}$. On le laisse pour l'instant. On utilise ensuite la méthode de la section précédente pour construire les suites $\tilde{C}_{m+3}, \dots, \tilde{C}_n$, que l'on ne répète pas ici.

Maintenant on effectue les modifications reportées. Comme le dernier terme de $\tilde{C}_{m+1}$ ne s'identifie pas au 0-ième terme de $\tilde{C}_{m+2}$ et on remplace $\tilde{C}_{m+2}$ par $\tilde{C}_{m+2} + \tilde{C}_{m-1}^{-1}$. Cela corrige bien la discordance entre le dernier terme de $\tilde{C}_{m+1}$ et le 0-ième terme de $\tilde{C}_{m+2}$. Si $|\tilde{C}_{m-1}| < |\tilde{C}_{m+2}|$, alors on n'a plus besoin de modifier les $\tilde{C}_j$ pour $m + 3 \leq j \leq n$. Si $|\tilde{C}_{m-1}| = |\tilde{C}_{m+2}|$, alors Proposition 6.3.10 permet de remplacer $\tilde{C}_{m+3}$ par $\tilde{C}_{m+3} + \overline{\tilde{C}_{m-2}}^{-1}$. Si $|\tilde{C}_{m+3}| < |\tilde{C}_{m-2}|$, alors comme le dernier terme de $\overline{\tilde{C}_{m-2}}^{-1}$ devient nul par la première flèche de $\tilde{C}_{m+4}$, il suffit de changer le 0-ième terme de $\tilde{C}_{m+4}$ en le dernier terme de $\tilde{C}_{m+3}$ et laisser invariant les suites $\tilde{C}_j$ pour $m + 5 \leq j \leq n$, etc. Si $|\tilde{C}_{m+3}| = |\tilde{C}_{m-2}|$, on remplace $\tilde{C}_{m+4}$ par $\tilde{C}_{m+4} + \tilde{C}_{m-3}^{-1}$.

On procède ensuite par récurrence.

L'hypothèse de récurrence sur $\tilde{C}_{m+2i}$ pour $i \geq 2$ et $m + 2i < n$ est la suivante:

La suite $\tilde{C}_{m+2i}$ est modifiée par l'une des façons suivantes.

- (i) $\tilde{C}_{m+2i}$ est obtenue sans modification
(ii) $\tilde{C}_{m+2i}$ est obtenue en modifiant son 0-ième terme selon $\tilde{C}_{m+2i-1}$
(iii) $m - 2i + 1 \geq 1$ et on remplace $\tilde{C}_{m+2i}$ par $\tilde{C}_{m+2i} + \tilde{C}_{m-2i+1}^{-1}$ et en ce moment, on a $|C_{m-j}| = |C_{m+j+1}|$ pour tout $0 \leq j \leq 2i - 1$.

L'hypothèse de récurrence sur $\tilde{C}_{m+2i-1}$ pour $i \geq 2$ et $m + 2i - 1 < m$ est la suivante:

La suite $\tilde{C}_{m+2i-1}$ est modifiée par l'une des façons suivantes.

- (i) $\tilde{C}_{m+2i-1}$ est obtenue sans modification
- (ii) On remplace $\tilde{C}_{m+2i-1}$ par $\tilde{C}_{m+2i-1} + \overline{\tilde{C}_{m-2i+2}}^{-1}$, où $\overline{\tilde{C}_{m-2i+2}}$ est la suite extraite de $\tilde{C}_{m-2i+2}$ composée des $|\tilde{C}_{m+2i-1}|$ derniers termes. En ce moment, on a $|C_{m-j}| = |C_{m+j+1}|$ pour tout $0 \leq j \leq 2i - 2$.

Supposons que l'on ait modifié $\tilde{C}_{m+1}, \dots, \tilde{C}_{m+2i}$ avec $i \geq 2$ et $m + 2i < n$. On va modifier $\tilde{C}_{m+2i+1}$. Pour les cas (i) et (ii), on ne modifie pas $\tilde{C}_{m+2i+1}$. Si on est dans le cas (iii), comparons $|C_{m-2i+1}|$ et $|C_{m+2i}|$. Si $|C_{m-2i+1}| < |C_{m+2i}|$, on ne modifie pas $\tilde{C}_{m+2i+1}$. Supposons que $|C_{m-2i+1}| = |C_{m+2i}|$. On remplace $\tilde{C}_{m+2i+1}$ par $\tilde{C}_{m+2i+1} + \overline{\tilde{C}_{m-2i}}^{-1}$ où $\overline{\tilde{C}_{m-2i}}$ est la suite extraite de $\tilde{C}_{m-2i}$ composée des $|\tilde{C}_{m+2i+1}|$ derniers termes.. On vérifie que la suite $\tilde{C}_{m+2i+1}$ ainsi modifiée satisfait l'hypothèse de récurrence si $m + 2i + 1 < n$.

Si C_n est inverse, alors $n - m$ est impaire. D'après la construction ci-dessus, il existe deux possibilités:

- (i) $\tilde{C}_n$ est obtenue sans modification
- (ii) On remplace $\tilde{C}_n$ par $\tilde{C}_n + \overline{\tilde{C}_{2m+1-n}}^{-1}$. En ce moment, $|C_{m+j+1}| = |C_{m-j}|$ pour tout $0 \leq j \leq n - m - 1$.

Comme la suite $\tilde{C}_n$ avant modification est complète, la première possibilité n'influence pas la complétude. Pour la deuxième possibilité, comme C_n est le dernier segment, $|C_n| < |C_{2m+1-n}|$. La suite $\overline{\tilde{C}_{2m+1-n}}^{-1}$ est donc complète, d'après Remarque 6.1.1. La suite $\tilde{C}_n$ ainsi modifiée reste encore complète.

Supposons que l'on ait modifié $\tilde{C}_{m+1}, \dots, \tilde{C}_{m+2i-1}$ avec $i \geq 2$ et $m + 2i - 1 < n$. On va modifier $\tilde{C}_{m+2i}$. Pour les cas (i), on ne modifie pas $\tilde{C}_{m+2i}$. Si on est dans le cas (ii), comparons $|C_{m-2i+2}|$ et $|C_{m+2i-1}|$. Si $|C_{m-2i+2}| > |C_{m+2i-1}|$, on modifie le 0-ième terme de $\tilde{C}_{m+2i}$ selon $\tilde{C}_{m+2i-1}$. Supposons $|C_{m-2i+2}| = |C_{m+2i-1}|$. On remplace $\tilde{C}_{m+2i}$ par $\tilde{C}_{m+2i} + \tilde{C}_{m-2i+1}^{-1}$. On vérifie que la suite $\tilde{C}_{m+2i}$ ainsi modifiée satisfait l'hypothèse de récurrence si $m + 2i < n$.

Cas 3 $|C_{m-1}| < |C_m| > |C_{m+1}|$.

Comme $|C_m| > |C_{m+1}| > \dots > |C_n|$, on peut utiliser la méthode de la section précédente pour définir les suites $\tilde{C}_j$ pour $m + 1 \leq j \leq n$. Il n'existe pas de discordance et on n'a pas besoin de faire des modifications.

6.6 Nombre de vallées $v(C)$ et le cas $v(C) = 1$

Définition 6.6.1 Soit $C = C_1 C_2 \dots C_n$ une corde. Soit $1 \leq i \leq n$. On dit que C_i est une vallée si $1 < i < n$ et $C_{i-1} > C_i < C_{i+1}$. On dit que C_i est une colline si $C_{i-1} < C_i > C_{i+1}$ où on utilise la convention que $C_0 < C_1 > C_{n+1}$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Désignons par $v(C)$ le nombre des vallées dans $\{C_1, \dots, C_n\}$.

Considérons maintenant une corde $C = C_1 \dots C_n$ telle que $v(C) = 1$. On peut supposer

$$C_1 < \dots < C_{u_{01}} > \dots > C_{u_1} < \dots < C_{u_{12}} > \dots > C_n$$

On pose $p = u_{01}$, $m = u_1$ et $q = u_{12}$. Si C_m est directe, notons $C^{(1)} = C_1 \dots C_m$ et $C^{(2)} = C_{m+1} \dots C_n$; si C_v est inverse, notons $C^{(1)} = C_1 \dots C_{m-1}$ et $C^{(2)} = C_m \dots C_n$.

Quitte à remplacer C par C^{-1} , on peut supposer que C_m soit directe. Alors $C^{(0)} = C_1 \dots C_m$ et $C^{(1)} = C_{m+1} \dots C_n$.

6.6.1 Construire $\tilde{C}^{(0)}$

Construisons d'abord $\tilde{C}^{(0)}$. La méthode est similaire à celle utilisée dans la section précédente, mais on doit prendre en compte le fait que C_m n'est plus le dernier segment et on donne en détail cette construction.

Cas 1 C_p directe. Alors $m \geq p + 2$.

Cas 1.1 $|C_{p-1}| < |C_p| > |C_{p+1}|$. Il suffit de copier la méthode de Cas 3 de la section précédente.

On remplace $\tilde{C}_m$ par $\tilde{C}'_m$.

Cas 1.2 $|C_{p-1}| = |C_p| > |C_{p+1}|$. On utilise la méthode de la section 6.4 pour construire les suites $\tilde{C}_p, \dots, \tilde{C}_1$.

Posons $\tilde{C}_p = \mathcal{S}_1(C_p)$ et $\tilde{C}_{p+1} = \mathcal{S}'_1(C_{p+1}) + \overline{\tilde{C}'_p}^{-1}$. Attention, en ce moment, le dernier terme de $\tilde{C}_p$ ne s'identifie pas au 0-ième terme de $\tilde{C}_{p+1}$. Comme $|C_{p-1}| = |C_p|$, le dernier terme de $\tilde{C}_p$ est $e \otimes e_{i_p} + x \otimes e_{i_p} + e \otimes e_{i_{p-2}} + x \otimes e_{i_{p-2}}$. Supposons, par exemple, que C_p soit de longueur paire et termine par α_0 (les autres cas se font similairement). Alors l'avant-dernier terme de $\tilde{C}_p$ est $e \otimes e_{i_p} + x \otimes e_{i_{p-2}}$ et donc le 0-ième terme de $\tilde{C}_{p+1}$ est $e \otimes e_{i_p} + x \otimes e_{i_p} + x \otimes e_{i_{p-2}}$. Cela signifie qu'il faut encore modifier $\tilde{C}_{p+1}$. On la laisse pour l'instant et on définit les $\tilde{C}_j$ pour $p + 2 \leq j \leq m$. La suite $\tilde{C}_{p+2}$ est définie comme $\mathcal{S}_2(C_{p+2})$ et le dernier terme de $\tilde{C}_{p+1}$ est somme du 0-ième terme de $\tilde{C}_{p+2}$ plus le dernier terme de $\overline{\tilde{C}'_p}^{-1}$ qui devient nul si on y applique la première flèche de $\tilde{C}_{p+2}$, puisque $|C_p| > |C_{p+1}|$. Il suffit encore de changer le 0-ième terme de $\tilde{C}_{p+2}$ en le dernier terme de $\tilde{C}_{p+1}$. Si $p + 2 = m$, on s'arrête et sinon on continue. Définissons $\tilde{C}_{p+3} = \mathcal{S}'_1(C_{p+3}) + \overline{\tilde{C}'_{p+2}}^{-1}$ et $\tilde{C}_{p+4} = \mathcal{S}_2(C_{p+4})$. Comme $|C_{p+2}| > |C_{p+3}|$, le dernier terme de $\overline{\tilde{C}'_{p+2}}^{-1}$ devient nul si on y applique la première flèche de $\tilde{C}_{p+4}$. Il suffit encore de changer le 0-ième terme de $\tilde{C}_{p+4}$ en le dernier terme de $\tilde{C}_{p+3}$. Si $p + 4 = m$, on s'arrête ici et sinon on continue. En général, pour $i \geq 2$, on définit, si $p + 2i \leq m$, $\tilde{C}_{p+2i} = \mathcal{S}_2(C_{p+2i})$ et on change son 0-ième terme en le dernier terme de $\tilde{C}_{p+2i-1}$ et, si $p + 2i + 1 \leq m$, $\tilde{C}_{p+2i+1} = \mathcal{S}'_1(C_{p+2i+1}) + \overline{\tilde{C}'_{p+2i}}^{-1}$. On voit que les suites $\tilde{C}_i$ pour $p + 2 \leq i \leq m$ se recollent. Constatons que l'on construit $\tilde{C}_m$ avec $|\tilde{C}_m| = 2|C_m|$ pour l'instant.

Maintenant on effectue les modifications reportées. Proposition 6.3.10 implique que $|\tilde{C}_{p-2}| \geq |\tilde{C}_{p+1}|$.

On remplace $\tilde{C}_{p+1}$ par $\tilde{C}_{p+1} + \overline{\mathcal{S}'_1(C_{p-2})}^{-1}$. Cela corrige bien la différence entre le dernier terme de $\tilde{C}_p$ et le 0-ième terme de $\tilde{C}_{p+1}$. Supposons, comme ci-dessus, que C_p soit de longueur paire et termine par α_0 . Alors l'avant-dernier terme de $\tilde{C}_p$ est $e \otimes e_{i_p} + x \otimes e_{i_{p-2}}$ et donc le 0-ième terme de $\tilde{C}_{p+1}$ avant modification est $e \otimes e_{i_p} + x \otimes e_{i_p} + x \otimes e_{i_{p-2}}$. Remarquons l'avant dernier terme de $\mathcal{S}_1(C_{p-2})$ est $e \otimes e_{i_{p-2}}$. On obtient donc que le 0-ième terme de la $\tilde{C}_{p+1}$ modifiée est $e \otimes e_{i_p} + x \otimes e_{i_p} + e \otimes e_{i_{p-2}} + x \otimes e_{i_{p-2}}$ qui coïncide avec le dernier terme de $\tilde{C}_p$. Comme $C_p > C_{p-1}$, on sait que $|C_{p-2}| \geq |C_{p+1}|$. Si $|C_{p-2}| > |C_{p+1}|$ ou $p = 3$, alors le 0-ième terme de $\overline{\mathcal{S}'_1(C_{p-2})}^{-1}$ devient nul si on y applique la première flèche γ de $\tilde{C}_{p+2}$, puisque il est dans l'image de γ . Il suffit donc de modifier $\tilde{C}_{p+2}$ en ajoutant à son 0-ième terme celui de $\overline{\mathcal{S}'_1(C_{p-2})}$ et de laisser inchangées toutes les autres $\tilde{C}_j$ pour $p + 3 \leq j \leq m$. Si $|C_{p-2}| = |C_{p+1}|$ et $p > 3$, alors $\overline{\mathcal{S}'_1(C_{p-2})} = \mathcal{S}'_1(C_{p-2})$. Comme $p > 3$, on remplace $\tilde{C}_{p+2}$ par $\tilde{C}_{p+2} + \mathcal{S}_2(C_{p-3})^{-1}$. En effet, d'après la construction de $\tilde{C}_{p-3}$, elle a même 0-ième terme que $\mathcal{S}_2(C_{p-3})$ et n'est différente de $\mathcal{S}_2(C_{p-3})$ qu'en la dernière position dont la différence est un terme qui devient nul après y avoir appliqué la dernière flèche de $\tilde{C}_{p-3}$ qui est aussi la première flèche de $\tilde{C}_{p+2}$. Si $p + 2 = m$, on s'arrête ici et sinon on continue. Maintenant comme $C_p > C_{p-1}$, $|C_{p+2}| \geq |C_{p-3}|$. Si $|C_{p+2}| > |C_{p-3}|$, il n'est pas nécessaire de modifier les autres cordes. Si en revanche $|C_{p+2}| = |C_{p-3}|$, d'après Proposition 6.3.10, $|\tilde{C}_{p+3}| \leq |\tilde{C}_{p-4}|$. On peut remplacer $\tilde{C}_{p+3}$ par $\tilde{C}_{p+3} + \overline{\tilde{C}_{p-4}}^{-1}$ où $\tilde{C}_{p-4}$ est la suite extraite de $\tilde{C}_{p-4}$ composée des $|\tilde{C}_{p+3}|$

derniers termes. Comme $\tilde{C}_{p-3}$ a même 0-ième terme que $\mathcal{S}_2(C_{p-3})^{-1}$, $\tilde{C}_{p+3}$ et $\tilde{C}_{m+2}$ se recollent. Si $|C_{p+3}| < |C_{p-4}|$, on n'a pas besoin de modifier les autres cordes. Si $|C_{p+3}| = |C_{p-4}|$, on remplace $\tilde{C}_{p+4}$ par $\tilde{C}_{p+4} + \tilde{C}_{p-5}^{-1}$. Ces modifications sont possibles grâce à Proposition 6.3.10.

On procède ensuite par récurrence.

L'hypothèse de récurrence sur $\tilde{C}_{p+2i-1}$ pour $i \geq 2$ et $p + 2i - 1 < m$ est la suivante:

La suite $\tilde{C}_{p+2i-1}$ est modifiée par l'une des façons suivantes.

- (i) $\tilde{C}_{p+2i-1}$ est obtenue sans modification
- (ii) On remplace $\tilde{C}_{p+2i-1}$ par $\tilde{C}_{p+2i-1} + \overline{\tilde{C}_{p-2i}}^{-1}$. En ce moment, $|C_{p+j}| = |C_{p-j-1}|$ pour tout $0 \leq j \leq 2i - 2$.

L'hypothèse de récurrence sur $\tilde{C}_{p+2i}$ pour $i \geq 2$ et $p + 2i < m$ est la suivante:

La suite $\tilde{C}_{p+2i}$ est modifiée par l'une des façons suivantes.

- (i) $\tilde{C}_{p+2i}$ est obtenue sans modification
- (ii) $\tilde{C}_{p+2i}$ est obtenue en modifiant son 0-ième terme selon $\tilde{C}_{p+2i-1}$
- (iii) $p - 2i - 1 > 0$ et on remplace $\tilde{C}_{p+2i}$ par $\tilde{C}_{p+2i} + \tilde{C}_{p-2i-1}^{-1}$. En ce moment, $|C_{p+j}| = |C_{p-j-1}|$ pour tout $0 \leq j \leq 2i - 1$.

Supposons que l'on ait modifié $\tilde{C}_{p+1}, \dots, \tilde{C}_{p+2i-1}$ avec $i \geq 2$ et $p + 2i - 1 < m$. On va modifier $\tilde{C}_{p+2i}$. Si $\tilde{C}_{p+2i-1}$ est obtenu dans le cas (i), on ne modifie pas $\tilde{C}_{p+2i+1}$. Si on est dans le cas (ii), comparons $|C_{p-2i}|$ et $|C_{p+2i-1}|$. Si $|C_{p-2i}| > |C_{p+2i-1}|$ ou $p - 2i = 1$, on modifie le 0-ième terme de $\tilde{C}_{p+2i}$ selon $\tilde{C}_{p+2i-1}$. Supposons que $|C_{p-2i}| = |C_{p+2i-1}|$ et $p - 2i > 1$. On remplace $\tilde{C}_{p+2i}$ par $\tilde{C}_{p+2i} + \tilde{C}_{p-2i-1}^{-1}$. On vérifie que la suite $\tilde{C}_{p+2i}$ ainsi modifiée satisfait l'hypothèse de récurrence si $p + 2i < m$.

Supposons que l'on ait modifié $\tilde{C}_{p+1}, \dots, \tilde{C}_{p+2i}$ avec $i \geq 2$ et $p + 2i < m$. On va modifier $\tilde{C}_{p+2i+1}$. Pour les cas (i) et (ii), on ne modifie pas $\tilde{C}_{p+2i+1}$. Si on est dans le cas (iii), comparons $|C_{p-2i-1}|$ et $|C_{p+2i}|$. Si $|C_{p-2i-1}| < |C_{p+2i}|$, on ne modifie pas $\tilde{C}_{p+2i+1}$. Supposons que $|C_{p-2i-1}| = |C_{p+2i}|$. Alors comme $C_p > C_{p-1}$, $0 < |C_{p+2i+1}| \leq |C_{p-2i-2}|$ et donc $p - 2i - 2 > 0$. On remplace $\tilde{C}_{p+2i+1}$ par $\tilde{C}_{p+2i+1} + \overline{\tilde{C}_{p-2i-2}}^{-1}$. On vérifie que la suite $\tilde{C}_{p+2i+1}$ ainsi construite satisfait l'hypothèse de récurrence si $p + 2i + 1 < m$.

On remplace $\tilde{C}_m$ par $\tilde{C}'_m$.

Cas1.3 $|C_{p-1}| < |C_p| = |C_{p+1}|$. On utilise la méthode de la section 6.4 pour construire $\tilde{C}_p, \dots, \tilde{C}_1$.

On procède comme suit pour définir les $\tilde{C}_j$ pour $p+1 \leq j \leq n$. On pose d'abord $\tilde{C}_{p+1} = \mathcal{S}'_1(C_{p+1}) + \overline{\tilde{C}'_p}^{-1}$. On définit $\tilde{C}_{p+2} = \mathcal{S}_2(C_{p+2})$. Constatons que le 0-ième terme de $\tilde{C}_{p+2}$ ne s'identifie pas au dernier terme de $\tilde{C}_{p+1}$. On la laisse pour l'instant. Si $p + 2 = m$, on s'arrête et sinon on continue. Définissons $\tilde{C}_{p+3} = \mathcal{S}'_1(C_{p+3}) + \overline{\tilde{C}'_{p+2}}^{-1}$ et $\tilde{C}_{p+4} = \mathcal{S}_2(C_{p+4})$. Comme $|C_{p+2}| > |C_{p+3}|$, le dernier terme de $\overline{\tilde{C}'_{p+2}}^{-1}$ devient nul si on y applique la première flèche de $\tilde{C}_{p+4}$. Il suffit encore de changer le 0-ième terme de $\tilde{C}_{p+4}$ en le dernier terme de $\tilde{C}_{p+3}$. Si $p + 4 = m$, on s'arrête et sinon on continue. En général, pour $i \geq 2$, on définit, si $p + 2i \leq m$, $\tilde{C}_{p+2i} = \mathcal{S}_2(C_{p+2i})$ et on change son 0-ième terme en le dernier terme de $\tilde{C}_{p+2i-1}$ et, si $p + 2i + 1 \leq m$, $\tilde{C}_{p+2i+1} = \mathcal{S}'_1(C_{p+2i+1}) + \overline{\tilde{C}'_{p+2i}}^{-1}$. On voit que les suites $\tilde{C}_i$ pour $p + 2 \leq i \leq m$ se recollent. Constatons que l'on construit $\tilde{C}_m$ avec $|\tilde{C}_m| = 2|C_m|$ pour l'instant.

Maintenant on effectue les modifications reportées. Si $p = 1$, comme $\tilde{C}_1$ est complète, il suffit de modifier le 0-ième terme de $\tilde{C}_{p+2}$ en y ajoutant celui de $\tilde{C}'_p$. Si $p > 1$, on remplace $\tilde{C}_{p+2}$ par $\tilde{C}_{p+2} + \tilde{C}_{p-1}^{-1}$. Ces modifications sont possibles grâce à Proposition 6.3.10. Cela corrige bien la différence

entre le dernier terme de $\tilde{C}_{p+1}$ et le 0-ième terme de $\tilde{C}_{p+2}$. Si $p + 2 = m$, on s'arrête ici et sinon on continue. Si $|\tilde{C}_{p-1}| < |\tilde{C}_{p+2}|$, alors on n'a plus besoin de modifier les $\tilde{C}_j$ pour $p + 3 \leq j \leq m$. Si $|\tilde{C}_{p-1}| = |\tilde{C}_{p+2}|$, alors Proposition 6.3.10 permet de remplacer $\tilde{C}_{p+3}$ par $\tilde{C}_{p+3} + \overline{\tilde{C}_{p-2}}^{-1}$. Si $p = 3$, comme $\tilde{C}_{p-2}$ est complète, alors il suffit de changer le 0-ième terme de $\tilde{C}_{p+4}$ en le dernier terme de $\tilde{C}_{p+3}$ et laisser invariant les suites $\tilde{C}_j$ pour $p + 5 \leq j \leq m$. Supposons que $p > 3$. Si $|\tilde{C}_{p+3}| < |\tilde{C}_{p-2}|$, alors comme le dernier terme de $\overline{\tilde{C}_{p-2}}^{-1}$ devient nul par la première flèche de $\tilde{C}_{p+4}$, il suffit de changer le 0-ième terme de $\tilde{C}_{p+4}$ en le dernier terme de $\tilde{C}_{p+3}$ et laisser invariant les suites $\tilde{C}_j$ pour $p + 5 \leq j \leq m$. Si $|\tilde{C}_{p+3}| = |\tilde{C}_{p-2}|$, on remplace $\tilde{C}_{p+4}$ par $\tilde{C}_{p+4} + \tilde{C}_{p-3}^{-1}$. On procède ensuite par récurrence.

L'hypothèse de récurrence sur $\tilde{C}_{p+2i}$ pour $i \geq 2$ et $p + 2i < m$ est la suivante:

La suite $\tilde{C}_{p+2i}$ est modifiée par l'une des façons suivantes.

- (i) $\tilde{C}_{p+2i}$ est obtenue sans modification
- (ii) $\tilde{C}_{p+2i}$ est obtenue en modifiant son 0-ième terme selon $\tilde{C}_{p+2i-1}$
- (iii) $p - 2i + 1 \geq 1$ et on remplace $\tilde{C}_{p+2i}$ par $\tilde{C}_{p+2i} + \tilde{C}_{p-2i+1}^{-1}$ et en ce moment, on a $|C_{p+j}| = |C_{p-j-1}|$ pour tout $0 \leq j \leq 2i - 1$.

L'hypothèse de récurrence sur $\tilde{C}_{p+2i-1}$ pour $i \geq 2$ et $p + 2i - 1 < m$ est la suivante:

La suite $\tilde{C}_{p+2i-1}$ est modifiée par l'une des façons suivantes.

- (i) $\tilde{C}_{p+2i-1}$ est obtenue sans modification
- (ii) On remplace $\tilde{C}_{p+2i-1}$ par $\tilde{C}_{p+2i-1} + \overline{\tilde{C}_{p-2i+2}}^{-1}$ et en ce moment, on a $|C_{p+j}| = |C_{p-j+1}|$ pour tout $0 \leq j \leq 2i - 2$.

Supposons que l'on ait modifié $\tilde{C}_{p+1}, \dots, \tilde{C}_{p+2i}$ avec $i \geq 2$ et $p + 2i < m$. On va modifier $\tilde{C}_{p+2i+1}$. Pour les cas (i) et (ii), on ne modifie pas $\tilde{C}_{p+2i+1}$. Si on est dans le cas (iii), comparons $|C_{p-2i+1}|$ et $|C_{p+2i}|$. Si $|C_{p-2i+1}| < |C_{p+2i}|$, on ne modifie pas $\tilde{C}_{p+2i+1}$. Supposons que $|C_{p-2i+1}| = |C_{p+2i}|$. On remplace $\tilde{C}_{p+2i+1}$ par $\tilde{C}_{p+2i+1} + \overline{\tilde{C}_{p-2i}}^{-1}$. On vérifie que la suite $\tilde{C}_{p+2i+1}$ ainsi modifiée satisfait l'hypothèse de récurrence si $p + 2i + 1 < m$.

Supposons que l'on ait modifié $\tilde{C}_{p+1}, \dots, \tilde{C}_{p+2i-1}$ avec $i \geq 2$ et $p + 2i - 1 < m$. On va modifier $\tilde{C}_{p+2i}$. Pour les cas (i), on ne modifie pas $\tilde{C}_{p+2i+1}$. Si on est dans le cas (ii), comparons $|C_{p-2i+2}|$ et $|C_{p+2i-1}|$. Si $|C_{p-2i+2}| > |C_{p+2i-1}|$, on modifie le 0-ième terme de $\tilde{C}_{p+2i}$ selon $\tilde{C}_{p+2i-1}$. Supposons que $|C_{p-2i+2}| = |C_{p+2i-1}|$. On remplace $\tilde{C}_{p+2i}$ par $\tilde{C}_{p+2i} + \tilde{C}_{p-2i+1}^{-1}$. On vérifie que la suite $\tilde{C}_{p+2i}$ ainsi modifiée satisfait l'hypothèse de récurrence si $p + 2i < m$.

On remplace $\tilde{C}_m$ par $\tilde{C}'_m$.

Cas 1.1.4 $|C_{p-1}| = |C_p| = |C_{p+1}| = l$

Ce cas est impossible, car on a en ce moment que $C_{p-2} < C_{p-1} < C_p > C_{p+1} > C_{p+2}$ d'où l'impossibilité de ce cas, d'après Lemme 6.3.5.

On remplace $\tilde{C}_m$ par $\tilde{C}'_m$.

Cas 2 C_p inverse.

Cas 2.1 $|C_{p-1}| < |C_p| > |C_{p+1}|$. Il suffit de copier la méthode de Cas 3 de la section précédente.

On pose $\tilde{C}_m = \tilde{C}'_m$.

Cas 2.2 $|C_{p-1}| < |C_p| = |C_{p+1}|$. On construit les suites $\tilde{C}_p, \dots, \tilde{C}_m$ en utilisant la méthode de la section 6.4. Constatons que l'on construit $\tilde{C}_m$ avec $|\tilde{C}_m| = 2|C_m|$ pour l'instant.

Posons $\tilde{C}_p = \mathcal{S}_1(C_p)$ et $\tilde{C}_{p-1} = \mathcal{S}'_1(C_{p-1}) + \overline{\tilde{C}'_p}^{-1}$. Attention, cette fois-ci, le 0-ième terme de $\tilde{C}_p$ ne s'identifie pas au dernier terme de $\tilde{C}_{p-1}$. Comme $|C_{p+1}| = |C_p|$, le 0-ième terme de $\tilde{C}_p$ est $e \otimes e_{i_{p-1}} + x \otimes e_{i_{p-1}} + e \otimes e_{i_{p+1}} + x \otimes e_{i_{p+1}}$. Supposons, par exemple, que C_p soit de longueur paire et termine par α_0^{-1} (les autres cas se font similairement). Alors le premier terme de $\tilde{C}_p$ est $e \otimes e_{i_{p-1}} + x \otimes i_{p+1}$ et donc le dernier terme de $\tilde{C}_{p-1}$ est $e \otimes e_{i_p} + x \otimes e_{i_p} + x \otimes e_{i_{p-2}}$. Cela signifie qu'il faut encore modifier $\tilde{C}_{p-1}$. On la laisse pour l'instant et on définit les $\tilde{C}_j$ pour $1 \leq j \leq p-2$. La suite $\tilde{C}_{p-2}$ est définie comme $\mathcal{S}_2(C_{p-2})$ et le 0-ième terme de $\tilde{C}_{p-1}$ est somme du 0-ième terme de $\tilde{C}_{p-1}$ plus le dernier terme de $\overline{\tilde{C}'_p}^{-1}$ qui devient nul si on y applique la dernière flèche de $\tilde{C}_{p-2}$, puisque $|C_p| > |C_{p-1}|$. Il suffit encore de changer le dernier terme de $\tilde{C}_{p-2}$ en le 0-ième terme de $\tilde{C}_{p-1}$. Définissons $\tilde{C}_{p-3} = \mathcal{S}'_1(C_{p-3}) + \overline{\tilde{C}'_{p-2}}^{-1}$ et $\tilde{C}_{p-4} = \mathcal{S}_2(C_{p-4})$. Comme $|C_{p-2}| > |C_{p-3}|$, le 0-ième terme de $\tilde{C}_{p-2}$ devient nul si on y applique la dernière flèche de $\tilde{C}_{p-4}$. Il suffit encore de changer le dernier terme de $\tilde{C}_{p-4}$ en le 0-ième terme de $\tilde{C}_{p-3}$. En général, on définit, pour $i \geq 2$, si $p-2i \geq 1$, $\tilde{C}_{p-2i} = \mathcal{S}_2(C_{p-2i})$ avec modification du dernier terme selon $\tilde{C}_{p-2i+1}$ et si $p-2i+1 \geq 1$, $\tilde{C}_{p+2i+1} = \mathcal{S}_2(C_{p+2i+1}) + \overline{\tilde{C}'_{p+2i-1}}^{-1}$.

Maintenant on effectue les modifications reportées. Si $p+1 = m = u_1$, alors on remplace $\tilde{C}_{p-1}$ par $\tilde{C}_{p-1} + \overline{\mathcal{S}'_1(C_{u_1+1})}^{-1}$. Comme $|C_{p-1}| < |C_{p+1}| = |C_{u_1}| \leq |C_{u_1+1}|$, alors il suffit de modifier le dernier terme de $\tilde{C}_{p-2}$ selon $\tilde{C}_{p-1}$. Supposons que $p+1 > m$. Proposition 6.3.10 implique que $|\tilde{C}_{p-1}| \leq |\tilde{C}_{p+2}|$. On remplace $\tilde{C}_{p-1}$ par $\tilde{C}_{p-1} + \overline{\mathcal{S}'_1(C_{p+2})}^{-1}$. Cela corrige bien la différence entre le 0-ième terme de $\tilde{C}_p$ et le dernier terme de $\tilde{C}_{p+1}$. Supposons, comme ci-dessus, que C_p soit de longueur paire et termine par α_0^{-1} . Alors le premier terme de $\tilde{C}_p$ est $e \otimes e_{i_{p-1}} + x \otimes i_{p+2}$ et donc le dernier terme de $\tilde{C}_{p-1}$ avant modification est $e \otimes e_{i_{p-1}} + x \otimes e_{i_{p-1}} + x \otimes i_{p+1}$. Remarquons l'avant-dernier terme de $\mathcal{S}_1(C_{p+2})^{-1}$ est $e \otimes e_{i_{p+1}}$. On obtient donc que le dernier terme de la suite $\tilde{C}_{p-1}$ modifiée est $e \otimes e_{i_{p-1}} + x \otimes e_{i_{p-1}} + e \otimes e_{i_{p+1}} + x \otimes e_{i_{p+1}}$ qui coïncide avec le 0-ième terme de $\tilde{C}_p$. Si $p = 2$, alors si $|C_{p-1}| = |C_{p+2}|$, alors $C_p < C_{p+1}$, ce qui est absurde. On obtient que $|C_{p-1}| < |C_{p+2}|$. Alors le 0-ième terme de $\overline{\mathcal{S}'_1(C_{p+2})}^{-1}$ devient nul si on y applique la flèche $\gamma \in \{\alpha, \beta\}$ qui est différente de la première flèche de $\tilde{C}_{p-1}$, puisque il est dans l'image de γ . La corde $\tilde{C}_1$ est donc complète. Supposons que $p > 2$. Comme $C_p > C_{p+1}$, on sait que $|C_{p+2}| \geq |C_{p-1}|$. Si $|C_{p+2}| > |C_{p-1}|$, alors le 0-ième terme de $\overline{\mathcal{S}'_1(C_{p+2})}^{-1}$ devient nul si on y applique la dernière flèche de $\tilde{C}_{p-2}$. Il suffit donc de modifier $\tilde{C}_{p-2}$ en ajoutant à son dernier terme celui de $\overline{\mathcal{S}'_1(C_{p+2})}$ et laisser inchangées toutes les autres $\tilde{C}_j$ pour $1 \leq j \leq p-3$. Si $|C_{p+2}| = |C_{p-1}|$, alors $\overline{\mathcal{S}'_1(C_{p+2})} = \mathcal{S}'_1(C_{p+2})$. On remplace $\tilde{C}_{p-2}$ par $\tilde{C}_{p-2} + \mathcal{S}_2(C_{p+3})^{-1}$. En effet, d'après la construction de $\tilde{C}_{p+3}$, elle a même dernier terme que $\mathcal{S}_2(C_{p+3})$ et n'est différente de $\mathcal{S}_2(C_{p+3})$ qu'en la 0-ième position dont la différence est un terme qui devient nul après y avoir appliqué la première flèche de $\tilde{C}_{p+3}$ qui est aussi la dernière flèche de $\tilde{C}_{p-2}$. Maintenant comme $C_p > C_{p+1}$, $|C_{p-2}| \geq |C_{p+3}|$. Si $|C_{p-2}| > |C_{p+3}|$, il n'est pas nécessaire de modifier les autres cordes. Supposons que $|C_{p-2}| = |C_{p+3}|$. Si $p+3 = m$, alors on remplace $\tilde{C}_{p-3}$ par $\tilde{C}_{p-3} + \overline{\mathcal{S}'_1(C_{u_1+1})}^{-1} + \overline{\mathcal{S}'_1(C_{u_1})}$. En effet, la différence entre le dernier terme de $\tilde{C}_{p-3}$ et le 0-ième terme de $\tilde{C}_{p-2}$ est $e \otimes e_{i_m} + x \otimes e_{i_m}$ et notre modification corrige donc cette différence. Comme $|C_{p-3}| < |C_{p-2}| = |C_{p+3}| = |C_{u_1}| \leq |C_{u_1+1}|$, alors il suffit de modifier le dernier terme de $\tilde{C}_{p-4}$ selon $\tilde{C}_{p-3}$. Supposons que $p+3 > m$. D'après Proposition 6.3.10, $|\tilde{C}_{p-3}| \leq |\tilde{C}_{p+4}|$. On peut remplacer $\tilde{C}_{p-3}$ par $\tilde{C}_{p-3} + (\tilde{C}_{p+4})^{-1}$. Comme le 0-ième terme de $\tilde{C}_{p+4}$ coïncide avec le dernier terme de $\mathcal{S}_2(C_{p-3})$, $\tilde{C}_{p-3}$ et $\tilde{C}_{p-2}$ se recollent.

On procède ensuite par récurrence.

L'hypothèse de récurrence sur $\tilde{C}_{p-2i+1}$ pour $i \geq 2$ et $p-2i+1 > 1$ est la suivante:

La suite $\tilde{C}_{p-2i+1}$ est obtenue par l'une des façons suivantes.

- (i) $\tilde{C}_{p-2i+1}$ est obtenue sans modification
- (ii) $p + 2i < m$ et on remplace $\tilde{C}_{p-2i+1}$ par $\tilde{C}_{p-2i+1} + \overline{\tilde{C}_{p+2i}}^{-1}$ et en ce moment, on a $|C_{p-j}| = |C_{p+j+1}|$ pour tout $0 \leq j \leq 2i - 2$.
- (iii) $p + 2i - 1 = m$ et on remplace $\tilde{C}_{p-2i+1}$ par $\tilde{C}_{p-2i+1} + \overline{\mathcal{S}'_1(C_{u_1+1})}^{-1} + \overline{\mathcal{S}'_1(C_{u_1})}$. En ce moment, on a $|C_{p-j}| = |C_{p+j+1}|$ pour tout $0 \leq j \leq 2i - 2$

L'hypothèse de récurrence sur $\tilde{C}_{p-2i}$ pour $i \geq 2$ et $p - 2i > 1$ est le suivant:

La suite $\tilde{C}_{p-2i}$ est obtenue par l'une des façons suivantes.

- (i) $\tilde{C}_{p-2i}$ est obtenue sans modification
- (ii) $\tilde{C}_{p-2i}$ est obtenue en modifiant son dernier terme selon $\tilde{C}_{p-2i+1}$
- (iii) $p + 2i + 1 \leq m$ et on remplace $\tilde{C}_{p-2i}$ par $\tilde{C}_{p-2i} + \tilde{C}_{p+2i+1}^{-1}$. En ce moment, on a $|C_{p-j}| = |C_{p+j+1}|$ pour tout $0 \leq j \leq 2i - 1$.

Supposons que l'on ait modifié $\tilde{C}_{p-1}, \dots, \tilde{C}_{p-2i+1}$ avec $i \geq 2$ et $p - 2i + 1 > 1$. On va modifier $\tilde{C}_{p-2i}$. En cas (i), on ne modifie pas $\tilde{C}_{p-2i}$. Si on est dans le cas (ii), comparons $|C_{p+2i}|$ et $|C_{p-2i+1}|$. Si $|C_{p+2i}| > |C_{p-2i+1}|$, on modifie le dernier terme de $\tilde{C}_{p-2i}$ selon $\tilde{C}_{p-2i+1}$. Supposons que $|C_{p+2i}| = |C_{p-2i+1}|$. On remplace $\tilde{C}_{p-2i}$ par $\tilde{C}_{p-2i} + \tilde{C}_{p+2i+1}^{-1}$. Si on est dans le cas (iii), on montre que $|C_{p-2i+1}| < |C_{p-2i+2}| = |C_{u_1}| \leq |C_{u_1+1}|$, il suffit de modifier le dernier terme de $\tilde{C}_{p-2i}$ selon $\tilde{C}_{p-2i+1}$. On vérifie que la suite $\tilde{C}_{p-2i}$ ainsi modifiée satisfait l'hypothèse de récurrence si $p - 2i > 1$.

Supposons que l'on ait modifié $\tilde{C}_{p-1}, \dots, \tilde{C}_{p-2i}$ avec $i \geq 2$ et $p - 2i > 1$. On va modifier $\tilde{C}_{p-2i-1}$. Pour les cas (i) et (ii), on ne modifie pas $\tilde{C}_{p-2i-1}$. Si on est dans le cas (iii), comparons $|C_{p+2i+1}|$ et $|C_{p-2i}|$. Si $|C_{p+2i+1}| < |C_{p-2i}|$, on ne modifie pas $\tilde{C}_{p-2i-1}$. Supposons $|C_{p+2i+1}| = |C_{p-2i}|$. Si $p + 2i + 1 = m$, on remplace $\tilde{C}_{p-2i-1}$ par $\tilde{C}_{p-2i-1} + \overline{\mathcal{S}'_1(C_{u_1+1})}^{-1} + \overline{\mathcal{S}'_1(C_{u_1})}$. En revanche si $p + 2i + 1 < m$, alors on remplace $\tilde{C}_{p-2i-1}$ par $\tilde{C}_{p-2i-1} + \overline{\tilde{C}_{p+2i+2}}^{-1}$. On vérifie que la suite $\tilde{C}_{p-2i-1}$ ainsi modifiée satisfait l'hypothèse de récurrence si $p - 2i - 1 > 1$.

Si C_1 est directe, alors $p - 1$ est impaire. D'après la construction ci-dessus, il existe deux possibilités:

- (i) $\tilde{C}_1$ est obtenue sans modification
- (ii) On remplace $\tilde{C}_1$ par $\tilde{C}_1 + \overline{\tilde{C}_{2p}}^{-1}$. En ce moment, $|C_{p+j+1}| = |C_{p-j}|$ pour tout $0 \leq j \leq p - 1$.

Comme la suite $\tilde{C}_1$ avant modification est complète, la première possibilité n'influence pas la complétude.

Pour la deuxième possibilité, alors comme C_1 est le premier segment, $|C_1| < |C_{2p}|$. La suite $\overline{\tilde{C}_{2p}}^{-1}$ est donc complète, d'après Remarque 6.1.1. La suite $\tilde{C}_1$ ainsi modifiée reste encore complète.

On remplace $\tilde{C}_m$ par $\tilde{C}'_m$.

Cas2.3 $|C_p| = |C_{p-1}| > |C_{p+1}|$. On construit les suites $\tilde{C}_p, \dots, \tilde{C}_m$ en utilisant la méthode de la section 6.4. Constatons que l'on construit $\tilde{C}_m$ avec $|\tilde{C}_m| = 2|C_m|$ pour l'instant.

On pose $\tilde{C}_{p-1} = \mathcal{S}'_1(C_{p-1}) + \tilde{C}'_{p-1}$ et $\tilde{C}_{p-2} = \mathcal{S}_2(C_{p-2})$. Attention le dernier terme de $\tilde{C}_{p-2}$ ne coïncide pas avec le 0-ième terme de $\tilde{C}_{p-1}$. On construit d'abord les suites $\tilde{C}_{p-3}, \dots, \tilde{C}_1$ en utilisant la méthode de la section 6.4.

On remplace ensuite $\tilde{C}_{p-2}$ par poser $\tilde{C}_{p-2} + \tilde{C}'_{p+1}$. Si $|C_{p-2}| > |C_{p+1}|$, alors on n'a plus besoin de modifier les autres suites. Supposons que $|C_{p-2}| = |C_{p+1}|$. Si $p + 1 = m$, alors $|C_{p-3}| < |C_{p-2}| = |C_{p+1}| = |C_m| \leq |C_{u_1+1}|$. On remplace $\tilde{C}_{p-3}$ par $\tilde{C}_{p-3} + \overline{\mathcal{S}'_1(C_{u_1+1})}^{-1} + \overline{\mathcal{S}'_1(C_{u_1})}$. Comme $|C_{u_1+1}| \geq |C_{u_1}| = |C_{p-2}| > |C_{p-3}|$, le 0-ième terme de $\overline{\mathcal{S}'_1(C_{u_1+1})}^{-1} + \overline{\mathcal{S}'_1(C_{u_1})}$ devient nul si on y applique la dernière flèche de $\tilde{C}_{p-4}$ et il suffit de changer le dernier terme de $\tilde{C}_{p-4}$ en

le 0-ième terme de $\tilde{C}_{p-3}$. Supposons que $p + 1 < m$. On remplace $\tilde{C}_{p-3}$ par $\tilde{C}_{p-3} + \overline{\tilde{C}_{p+2}}^{-1}$. Si $|C_{p-3}| < |C_{p+2}|$, alors il suffit de changer le dernier terme de $\tilde{C}_{p-4}$ en le 0-ième terme de $\tilde{C}_{p-3}$. Supposons que $|C_{p-3}| = |C_{p+2}|$. Alors on remplace $\tilde{C}_{p-4}$ par $\tilde{C}_{p-4} + \tilde{C}_{p+3}^{-1}$.

On procède ensuite par récurrence.

L'hypothèse de récurrence sur $\tilde{C}_{p-2i}$ pour $i \geq 2$ et $p - 2i > 1$ est le suivant:

La suite $\tilde{C}_{p-2i}$ est obtenue par l'une des façons suivantes.

- (i) $\tilde{C}_{p-2i}$ est obtenue sans modification
- (ii) $\tilde{C}_{p-2i}$ est obtenue en modifiant son dernier terme selon $\tilde{C}_{p-2i+1}$
- (iii) $p + 2i - 1 \leq m$ et on remplace $\tilde{C}_{p-2i}$ par $\tilde{C}_{p-2i} + \tilde{C}_{p+2i-1}^{-1}$ et en ce moment, on a $|C_{p-j}| = |C_{p+j+1}|$ pour tout $0 \leq j \leq 2i - 1$.

L'hypothèse de récurrence sur $\tilde{C}_{p-2i+1}$ pour $i \geq 2$ et $p - 2i_1 > 1$ est la suivante:

La suite $\tilde{C}_{p-2i+1}$ est obtenue par l'une des façons suivantes.

- (i) $\tilde{C}_{p-2i+1}$ est obtenue sans modification
- (ii) $p + 2i - 2 \leq m$, on remplace $\tilde{C}_{p-2i+1}$ par $\tilde{C}_{p-2i+1} + \overline{\tilde{C}_{p+2i-2}}^{-1}$. En ce moment, on a $|C_{p-j}| = |C_{p+j-1}|$ pour tout $0 \leq j \leq 2i - 2$.
- (iii) $p + 2i - 3 = m$ et on remplace $\tilde{C}_{p-2i+1}$ par $\tilde{C}_{p-2i+1} + \overline{S'_1(C_{u_i})}^{-1} + \overline{S'_1(C_{u_i})}$. En ce moment, on a $|C_{p-j}| = |C_{p+j+1}|$ pour tout $0 \leq j \leq 2i - 2$

Supposons que l'on ait modifié $\tilde{C}_{p-1}, \dots, \tilde{C}_{p-2i}$ avec $i \geq 2$ et $p - 2i > 1$. On va modifier $\tilde{C}_{p-2i-1}$. Pour les cas (i) et (ii), on ne modifie pas $\tilde{C}_{p-2i-1}$. Si on est dans le cas (iii), comparons $|C_{p+2i-1}|$ et $|C_{p-2i}|$. Si $|C_{p+2i-1}| < |C_{p-2i}|$, on ne modifie pas $\tilde{C}_{p-2i-1}$. Supposons que $|C_{p+2i-1}| = |C_{p-2i}|$. Si $p + 2i - 1 = m$, on remplace $\tilde{C}_{p-2i-1}$ par $\tilde{C}_{p-2i-1} + \overline{S'_1(C_{u_1})}^{-1} + \overline{S'_1(C_{u_1})}$. En revanche si $p + 2i - 1 < m$, alors on remplace $\tilde{C}_{p-2i-1}$ par $\tilde{C}_{p-2i-1} + \overline{\tilde{C}_{p+2i}}^{-1}$. On vérifie que la suite $\tilde{C}_{p-2i-1}$ ainsi modifiée satisfait l'hypothèse de récurrence si $p - 2i - 1 > 1$.

Supposons que l'on ait modifié $\tilde{C}_{p-1}, \dots, \tilde{C}_{p-2i+1}$ avec $i \geq 2$ et $p - 2i + 1 > 1$. On va modifier $\tilde{C}_{p-2i}$. Pour les cas (i), on ne modifie pas $\tilde{C}_{p-2i}$. Si on est dans le cas (ii), si $|C_{p-2i+1}| < |C_{p+2i-2}|$, on modifie le dernier terme de $\tilde{C}_{p-2i}$ selon $\tilde{C}_{p-2i+1}$. Supposons que $|C_{p+2i-2}| = |C_{p-2i+1}|$. On remplace $\tilde{C}_{p-2i}$ par $\tilde{C}_{p-2i} + \tilde{C}_{p+2i-1}^{-1}$. Si on est dans le cas (iii), on a en ce moment $|C_{p-2i+1}| < |C_{p-2i+2}| = |C_{p+2i-3}| = |C_{u_1}| \leq |C_{u_1+1}|$ et il suffit de modifier le dernier terme de $\tilde{C}_{p-2i}$ selon $\tilde{C}_{p-2i+1}$. On vérifie que la suite $\tilde{C}_{p-2i}$ ainsi modifiée satisfait l'hypothèse de récurrence si $p - 2i > 1$. Si C_1 est directe, alors $p - 1$ est impaire. D'après la construction ci-dessus, il existe deux possibilités:

- (i) $\tilde{C}_1$ est obtenue sans modification
- (ii) On remplace $\tilde{C}_1$ par $\tilde{C}_1 + \overline{\tilde{C}_{2p-2}}^{-1}$. En ce moment, $|C_{p+j}| = |C_{p-j-1}|$ pour tout $0 \leq j \leq p - 2$.

Comme la suite $\tilde{C}_1$ avant modification est complète, la première possibilité n'influence pas la complétude. Pour la deuxième possibilité, alors comme C_1 est le premier segment, $|C_1| < |C_{2p-2}|$. La suite $\overline{\tilde{C}_{2p-2}}^{-1}$ est donc complète, d'après Remarque 6.1.1. La suite $\tilde{C}_1$ ainsi modifiée reste encore complète.

On remplace $\tilde{C}_m$ par $\tilde{C}'_m$.

Cas 2.4 $|C_{p-1}| = |C_p| = |C_{p+1}|$. Ce cas est impossible, car $C_{p-1} < C_p$ implique que $|C_{p-2}| \geq |C_{p+1}| = |C_{p-1}|$, ce qui est absurde.

6.6.2 Construire $\tilde{C}^{(1)}$

Construit maintenant $\tilde{C}^{(1)}$.

Cas 1 C_q est inverse. On construit $\tilde{C}_q, \tilde{C}_{q+1}, \dots, \tilde{C}_n$ en utilisant la méthode de la section 6.4. Si $q - 1 = m$, on s'arrête ici. Supposons donc que $m < q - 1$.

Cas 1.1 $|C_{q-1}| < |C_q| > |C_{q+1}|$. Il suffit de construire $\tilde{C}_q, \dots, \tilde{C}_{m+1}$ en utilisant la méthode de la section 6.4.

Cas 1.2 $|C_{q-1}| < |C_q| = |C_{q+1}|$.

On pose $\tilde{C}_{q-1} = \mathcal{S}'_1(C_{q-1}) + \overline{\tilde{C}'_q}^{-1}$. Comme $|C_{q-1}| < |C_q|$, le 0-ième terme de $\overline{\tilde{C}'_q}^{-1}$ devient nul si on y applique la dernière flèche de $\tilde{C}_{q-2}$. On change le dernier terme de $\tilde{C}_{q-2}$ en le 0-ième terme de $\tilde{C}_{q-1}$. Constatons que le dernier terme de $\tilde{C}_{q-1}$ ne coïncide pas avec le 0-ième terme de $\tilde{C}_q$. On construit d'abord les suites $\tilde{C}_{q-3}, \dots, \tilde{C}_{m+1}$ en utilisant la méthode de la section 6.4. On remplace ensuite $\tilde{C}_{q-1}$ par $\tilde{C}_{q-1} + \overline{\mathcal{S}'_1(C_{q+2})}^{-1}$. Si $|C_{q-1}| < |C_{q+2}|$, alors le 0-ième terme de $\overline{\mathcal{S}'_1(C_{q+2})}^{-1}$ devient nul si on y applique la dernière flèche de $\tilde{C}_{q-2}$ et on change le dernier terme de $\tilde{C}_{q-2}$ en le 0-ième terme de $\tilde{C}_{q-1}$. Supposons que $|C_{q-1}| = |C_{q+2}|$. Alors on remplace $\tilde{C}_{q-2}$ par $\tilde{C}_{q-2} + \mathcal{S}_2(C_{q+3})^{-1}$. Si $q - 3 = m$, on s'arrête ici. Supposons que $q - 3 > m$. Si $|C_{q-2}| > |C_{q+3}|$, on n'a plus besoin de modifier les autres suites. Supposons que $|C_{q-2}| = |C_{q+3}|$. Alors on remplace $\tilde{C}_{q-3}$ par $\tilde{C}_{q-3} + \overline{\tilde{C}_{q+4}}^{-1}$.

On procède ensuite par récurrence.

L'hypothèse de récurrence sur $\tilde{C}_{q-2i+1}$ pour $i \geq 2$ et $q - 2i + 1 > m + 1$ est la suivante:

La suite $\tilde{C}_{q-2i+1}$ est obtenue par l'une des façons suivantes.

- (i) $\tilde{C}_{q-2i+1}$ est obtenue sans modification
- (ii) On remplace $\tilde{C}_{q-2i+1}$ par $\tilde{C}_{q-2i+1} + \overline{\tilde{C}_{q+2i}}^{-1}$ et en ce moment, on a $|C_{q-j}| = |C_{q+j+1}|$ pour tout $0 \leq j \leq 2i - 2$.

L'hypothèse de récurrence sur $\tilde{C}_{q-2i}$ pour $i \geq 2$ et $q - 2i > m + 1$ est la suivante:

La suite $\tilde{C}_{q-2i}$ est obtenue par l'une des façons suivantes.

- (i) $\tilde{C}_{q-2i}$ est obtenue sans modification
- (ii) $\tilde{C}_{q-2i}$ est obtenue en modifiant son dernier terme selon $\tilde{C}_{q-2i+1}$
- (iii) $q = 2i + 1 \leq n$ et on remplace $\tilde{C}_{q-2i}$ par $\tilde{C}_{q-2i} + \tilde{C}_{q+2i+1}^{-1}$. En ce moment, on a $|C_{q-j}| = |C_{q+j+1}|$ pour tout $0 \leq j \leq 2i - 1$.

Supposons que l'on ait modifié $\tilde{C}_{q-1}, \dots, \tilde{C}_{q-2i+1}$ avec $i \geq 2$ et $q - 2i + 1 > m + 1$. On va modifier $\tilde{C}_{q-2i}$. En cas (i), on ne modifie pas $\tilde{C}_{q-2i}$. Si on est dans le cas (ii), comparons $|C_{q+2i}|$ et $|C_{q-2i+1}|$. Si $|C_{q+2i}| > |C_{q-2i+1}|$, on modifie le dernier terme de $\tilde{C}_{q-2i}$ selon $\tilde{C}_{q-2i+1}$. Supposons que $|C_{q+2i}| = |C_{q-2i+1}|$. On remplace $\tilde{C}_{q-2i}$ par $\tilde{C}_{q-2i} + \tilde{C}_{q+2i+1}^{-1}$. On vérifie que la suite $\tilde{C}_{q-2i}$ ainsi modifiée satisfait l'hypothèse de récurrence si $q - 2i > m + 1$.

Supposons que l'on ait modifié $\tilde{C}_{q-1}, \dots, \tilde{C}_{q-2i}$ avec $i \geq 2$ et $q - 2i > m + 1$. On va modifier $\tilde{C}_{q-2i-1}$. Pour les cas (i) et (ii), on ne modifie pas $\tilde{C}_{q-2i-1}$. Si on est dans le cas (iii), comparons $|C_{q+2i+1}|$ et $|C_{q-2i}|$. Si $|C_{q+2i+1}| < |C_{q-2i}|$, on ne modifie pas $\tilde{C}_{q-2i-1}$. Supposons que $|C_{q+2i+1}| = |C_{q-2i}|$. Alors on remplace $\tilde{C}_{q-2i-1}$ par $\tilde{C}_{q-2i-1} + \overline{\tilde{C}_{q+2i+2}}^{-1}$. On vérifie que la suite $\tilde{C}_{q-2i-1}$ ainsi modifiée satisfait l'hypothèse de récurrence si $q - 2i - 1 > m + 1$.

Cas 1.3 $|C_{q-1}| = |C_q| > |C_{q+1}|$. On pose $\tilde{C}_{q-1} = \mathcal{S}'_1(C_{q-1}) + \tilde{C}'_q$ et $\tilde{C}_{q-2} = \mathcal{S}_2(C_{q-2})$. Constatons que le dernier terme de $\tilde{C}_{q-2}$ ne coïncide pas avec le 0-ième terme de $\tilde{C}_{q-1}$. On construit d'abord les suites $\tilde{C}_{q-3}, \dots, \tilde{C}_{m+1}$ en utilisant la méthode de la section 6.4. On remplace ensuite $\tilde{C}_{q-2}$ par

$\tilde{C}_{q-2} + \tilde{C}_{q+1}^{-1}$ à l'aide de Proposition 6.3.10. Si $q - 2 = m + 1$, on s'arrête ici. Supposons que $q - 2 > m + 1$. Si $|C_{q-2}| > |C_{q+1}|$, alors on n'a pas besoin de modifier les autres suites. Supposons que $|C_{q-2}| = |C_{q+1}|$. Alors on remplace $\tilde{C}_{q-3}$ par $\tilde{C}_{q-3} + \overline{\tilde{C}_{q+2}}^{-1}$ à l'aide de Proposition 6.3.10. Si $|C_{q-3}| < |C_{q+2}|$, le dernier terme de $\overline{\tilde{C}_{q+2}}^{-1}$ devient nul si on y applique la dernière flèche de $\tilde{C}_{q-4}$ et il suffit de modifier le dernier terme de $\tilde{C}_{p-4}$ selon $\tilde{C}_{p-3}$. Supposons que $|C_{q-3}| = |C_{q+2}|$. On remplace $\tilde{C}_{q-4}$ par $\tilde{C}_{q-4} + \tilde{C}_{q+3}^{-1}$ à l'aide de Proposition 6.3.10, etc.

On procède ensuite par récurrence.

L'hypothèse de récurrence sur $\tilde{C}_{q-2i+1}$ pour $i \geq 2$ et $q - 2i + 1 > m + 1$ est la suivante:

La suite $\tilde{C}_{q-2i+1}$ est obtenue par l'une des façons suivantes.

- (i) La suite $\tilde{C}_{q-2i+1}$ est obtenue sans modification
- (ii) On remplace $\tilde{C}_{q-2i+1}$ par $\tilde{C}_{q-2i+1} + \overline{\tilde{C}_{q+2i-2}}^{-1}$ et en ce moment, on a $|C_{q+j}| = |C_{q-j-1}|$ pour tout $0 \leq j \leq 2i - 2$.

L'hypothèse de récurrence sur $\tilde{C}_{q-2i}$ pour $i \geq 2$ et $q - 2i > m + 1$ est la suivante:

La suite $\tilde{C}_{q-2i}$ est obtenue par l'une des façons suivantes.

- (i) La suite $\tilde{C}_{q-2i}$ est obtenue sans modification
- (ii) La suite $\tilde{C}_{q-2i}$ est obtenue en modifiant son dernier terme selon $\tilde{C}_{q-2i+1}$
- (iii) $q + 2i - 1 \leq n$ et on remplace $\tilde{C}_{q-2i}$ par $\tilde{C}_{q-2i} + \tilde{C}_{q+2i-1}^{-1}$. En ce moment, on a $|C_{q+j}| = |C_{q-j-1}|$ pour tout $0 \leq j \leq 2i - 1$.

Supposons que l'on ait modifié $\tilde{C}_{q-1}, \dots, \tilde{C}_{q-2i+1}$ avec $i \geq 2$ et $q - 2i + 1 > m + 1$. On va modifier $\tilde{C}_{q-2i}$. En cas (i), on ne modifie pas $\tilde{C}_{q-2i}$. Si on est dans le cas (ii), comparons $|C_{q+2i-2}|$ et $|C_{q-2i+1}|$. Si $|C_{q+2i-2}| > |C_{q-2i+1}|$, on modifie le dernier terme de $\tilde{C}_{q-2i}$ selon $\tilde{C}_{q-2i+1}$. Supposons que $|C_{q+2i-2}| = |C_{q-2i+1}|$. On remplace $\tilde{C}_{q-2i}$ par $\tilde{C}_{q-2i} + \tilde{C}_{q+2i-1}^{-1}$. On vérifie que la suite $\tilde{C}_{q-2i}$ ainsi modifiée satisfait l'hypothèse de récurrence si $q - 2i > m + 1$.

Supposons que l'on ait modifié $\tilde{C}_{q-1}, \dots, \tilde{C}_{q-2i}$ avec $i \geq 2$ et $q - 2i > m + 1$. On va modifier $\tilde{C}_{q-2i-1}$. Pour les cas (i) et (ii), on ne modifie pas $\tilde{C}_{q-2i-1}$. Si on est dans le cas (iii), comparons $|C_{q+2i-1}|$ et $|C_{q-2i}|$. Si $|C_{q+2i-1}| < |C_{q-2i}|$, on ne modifie pas $\tilde{C}_{q-2i-1}$. Supposons que $|C_{q+2i-1}| = |C_{q-2i}|$. Alors on remplace $\tilde{C}_{q-2i-1}$ par $\tilde{C}_{q-2i-1} + \overline{\tilde{C}_{q+2i}}^{-1}$. On vérifie que la suite $\tilde{C}_{q-2i-1}$ ainsi modifiée satisfait l'hypothèse de récurrence si $q - 2i - 1 > m + 1$.

Cas 1.4 $|C_{q-1}| = |C_q| = |C_{q+1}|$. Lemme 6.3.5 montre que ce cas est impossible.

Cas 2 C_q est directe. On construit les suites $\tilde{C}_q, \tilde{C}_{q-1}, \dots, \tilde{C}_{m+1}$ en utilisant la méthode de la section 6.4.

Cas 2.1 $|C_{q-1}| < |C_q| > |C_{q+1}|$. On construit $\tilde{C}_q, \tilde{C}_{q+1}, \dots, \tilde{C}_n$ en utilisant la méthode de la section 6.4.

Cas 2.2 $|C_{q-1}| = |C_q| > |C_{q+1}|$.

On pose $\tilde{C}_{q+1} = \mathcal{S}'_1(C_{q+1}) + \overline{\tilde{C}'_q}^{-1}$ et $\tilde{C}_{q+2} = \mathcal{S}_2(C_{q+2})$. Comme $|C_{q+1}| < |C_q|$, le dernier terme de $\overline{\tilde{C}'_q}^{-1}$ devient nul si on y applique la première flèche de $\tilde{C}_{q+2}$ et on change le 0-ième terme de $\tilde{C}_{q+2}$ en le dernier terme de $\tilde{C}_{q+1}$. Constatons que le dernier terme de $\tilde{C}_q$ ne coïncide pas avec le 0-ième terme de $\tilde{C}_{p+1}$. On construit d'abord les suites $\tilde{C}_{q-3}, \dots, \tilde{C}_{m+1}$ en utilisant la méthode de la section 6.4. Si $q - 1 = m + 1$, alors on remplace $\tilde{C}_{q+1}$ par $\tilde{C}_{q+1} + \overline{\mathcal{S}'_1(C_{u_1})}^{-1}$. Si $|C_{q+1}| = |C_{u_1}|$, alors $|C_{u_1-1}| \geq |C_{u_1}| = |C_{q+1}| > |C_{q+2}|$ et donc $C_{q-1} > C_q$, ce qui est absurde. On obtient que $|C_{q+1}| < |C_{u_1}|$ et il suffit de modifier le 0-ième terme de $\tilde{C}_{q+2}$ selon $\tilde{C}_{q+1}$. Supposons que $q - 1 > m + 1$. On remplace ensuite $\tilde{C}_{q+1}$ par $\tilde{C}_{q+1} + \overline{\mathcal{S}'_1(C_{q-2})}^{-1}$. Si $|C_{q+1}| < |C_{q-2}|$, alors

le dernier terme de $\overline{\mathcal{S}'_1(C_{q-2})}^{-1}$ devient nul si on y applique la première flèche de $\tilde{C}_{q+2}$ et il suffit de changer le 0-ième terme de $\tilde{C}_{q+2}$ en le dernier terme de $\tilde{C}_{q+1}$. Supposons que $|C_{q+1}| = |C_{q-2}|$. On remplace $\tilde{C}_{q+2}$ par $\tilde{C}_{q+2} + \mathcal{S}(C_{q-3})^{-1}$. Si $|C_{q+2}| > |C_{q-3}|$, on n'a plus besoin de modifier les autres suites. Supposons que $|C_{q+2}| = |C_{q-3}|$. Si $q - 4 = m$, alors on remplace $\tilde{C}_{q+3}$ par $\tilde{C}_{q+3} + \overline{\mathcal{S}'_1(C_{u_1})}^{-1} + \overline{\mathcal{S}'_1(C_{u_1+1})}$. Supposons que $q - 4 > m + 1$. On remplace $\tilde{C}_{q+3}$ par $\tilde{C}_{q+3} + \overline{\tilde{C}_{q-4}}^{-1}$. On procède ensuite par récurrence.

L'hypothèse de récurrence sur $\tilde{C}_{q+2i-1}$ pour $i \geq 2$ et $q + 2i - 1 < n$ est la suivante:

La suite $\tilde{C}_{q+2i-1}$ est obtenue par l'une des façons suivantes.

- (i) La suite $\tilde{C}_{q+2i-1}$ est obtenue sans modification
- (ii) $q - 2i > m + 1$ et on remplace $\tilde{C}_{q+2i-1}$ par $\tilde{C}_{q+2i-1} + \overline{\tilde{C}_{q-2i}}^{-1}$ et en ce moment, on a $|C_{q+j}| = |C_{q-j-1}|$ pour tout $0 \leq j \leq 2i - 2$.
- (iii) $q - 2i + 1 = m + 1$ et on remplace $\tilde{C}_{q+2i-1}$ par $\tilde{C}_{q+2i-1} + \overline{\mathcal{S}'_1(C_{u_1})}^{-1} + \overline{\mathcal{S}'_1(C_{u_1+1})}$. En ce moment, on a $|C_{q+j}| = |C_{q-j-1}|$ pour tout $0 \leq j \leq 2i - 2$

L'hypothèse de récurrence sur $\tilde{C}_{q+2i}$ pour $i \geq 2$ et $q + 2i < n$ est la suivante:

La suite $\tilde{C}_{q+2i}$ est obtenue par l'une des façons suivantes.

- (i) La suite $\tilde{C}_{q+2i}$ est obtenue sans modification
- (ii) La suite $\tilde{C}_{q+2i}$ est obtenue en modifiant son dernier terme selon $\tilde{C}_{q+2i-1}$
- (iii) $q - 2i - 1 \geq 1$ et on remplace $\tilde{C}_{q+2i}$ par $\tilde{C}_{q+2i} + \overline{\tilde{C}_{q-2i-1}}^{-1}$. En ce moment, on a $|C_{q+j}| = |C_{q-j-1}|$ pour tout $0 \leq j \leq 2i - 1$.

Supposons que l'on ait modifié $\tilde{C}_{q+1}, \dots, \tilde{C}_{q+2i-1}$ avec $i \geq 2$ et $q + 2i - 1 < n$. On va modifier $\tilde{C}_{q+2i}$. En cas (i), on ne modifie pas $\tilde{C}_{q+2i}$. Si on est dans le cas (ii), comparons $|C_{q+2i-1}|$ et $|C_{q-2i}|$. Si $|C_{q-2i}| > |C_{q+2i-1}|$, on modifie le 0-ième terme de $\tilde{C}_{q+2i}$ selon $\tilde{C}_{q+2i-1}$. Supposons que $|C_{q-2i}| = |C_{q+2i-1}|$. On remplace $\tilde{C}_{q+2i}$ par $\tilde{C}_{q+2i} + \overline{\tilde{C}_{q-2i-1}}^{-1}$. Si on est dans le cas (iii), si $|C_{q+2i-1}| = |C_{u_1}|$, alors $|C_{u_1-1}| \geq |C_{u_1}| = |C_{q+2i-1}| > |C_{q+2i}|$ et donc $C_q < C_{q-1}$, ce qui est absurde. On obtient que $|C_{q+2i-1}| < |C_{u_1}|$ et il suffit de modifier le 0-ième terme de $\tilde{C}_{q+2i}$ selon $\tilde{C}_{q+2i-1}$. On vérifie que la suite $\tilde{C}_{q+2i}$ ainsi modifiée satisfait l'hypothèse de récurrence si $q + 2i < n$.

Supposons que l'on ait modifié $\tilde{C}_{q+1}, \dots, \tilde{C}_{q+2i}$ avec $i \geq 2$ et $q + 2i < n$. On va modifier $\tilde{C}_{q+2i+1}$. Pour les cas (i) et (ii), on ne modifie pas $\tilde{C}_{q+2i+1}$. Si on est dans le cas (iii), comparons $|C_{q-2i-1}|$ et $|C_{q+2i}|$. Si $|C_{q-2i-1}| < |C_{q+2i}|$, on ne modifie pas $\tilde{C}_{q+2i+1}$. Supposons que $|C_{q-2i-1}| = |C_{q+2i}|$. Si $q - 2i - 1 = m + 1$, on remplace $\tilde{C}_{q+2i+1}$ par $\tilde{C}_{q+2i+1} + \overline{\mathcal{S}'_1(C_{u_1})}^{-1} + \overline{\mathcal{S}'_1(C_{u_1+1})}$. En revanche si $q + 2i + 1 > m + 1$, alors on remplace $\tilde{C}_{q+2i+1}$ par $\tilde{C}_{q+2i+1} + \overline{\tilde{C}_{q-2i-2}}^{-1}$. On vérifie que la suite $\tilde{C}_{q+2i+1}$ ainsi modifiée satisfait l'hypothèse de récurrence si $q + 2i + 1 < n$.

Si C_n est inverse, alors on vérifie que la suite $\tilde{C}_n$ ainsi modifiée reste complète.

Cas 2.3 $|C_{q-1}| < |C_q| = |C_{q+1}|$. Alors $q + 1 < n$.

On pose $\tilde{C}_{q+1} = \mathcal{S}'_1(C_{q+1}) + \overline{\tilde{C}_q}^{-1}$ et $\tilde{C}_{q+2} = \mathcal{S}_2(C_{q+2})$. Constatons que le 0-ième terme de $\tilde{C}_{q+2}$ ne s'identifie pas au dernier terme de $\tilde{C}_{q+1}$. On construit d'abord les suites $\tilde{C}_{q+3}, \dots, \tilde{C}_n$ en utilisant la méthode de la section 6.4. On remplace ensuite $\tilde{C}_{q+2}$ par $\tilde{C}_{q+2} + \overline{\tilde{C}_{q-1}}^{-1}$. Si $|C_{q+2}| > |C_{q-1}|$, on n'a pas besoin de modifier les autres suites. Supposons que $|C_{q+2}| = |C_{q-1}|$. Si $q - 2 = m$, on remplace $\tilde{C}_{q+3}$ par $\tilde{C}_{q+3} + \overline{\mathcal{S}'_1(C_{u_1})}^{-1} + \overline{\mathcal{S}'_1(C_{u_1+1})}$. Si $|C_{u_1}| = |C_{q+3}|$, alors $|C_{u_1+1}| \geq |C_{u_1}| = |C_{q+3}| > |C_{q+4}|$ et donc $C_q < C_{q+1}$, ce qui est absurde. On obtient que $|C_{u_1}| > |C_{q+3}|$ et on change le 0-ième terme de $\tilde{C}_{q+4}$ en le dernier terme de $\tilde{C}_{q+3}$. Supposons que $q - 2 > m$. On remplace $\tilde{C}_{q+3}$ par $\tilde{C}_{q+3} + \overline{\tilde{C}_{q-2}}^{-1}$.

On procède ensuite par récurrence.

L'hypothèse de récurrence sur $\tilde{C}_{q+2i-1}$ pour $i \geq 2$ et $q + 2i - 1 < n$ est la suivante:

La suite $\tilde{C}_{q+2i-1}$ est obtenue par l'une des façons suivantes.

- (i) La suite $\tilde{C}_{q+2i-1}$ est obtenue sans modification
- (ii) $q - 2i + 2 > m$ et on remplace $\tilde{C}_{q+2i-1}$ par $\tilde{C}_{q+2i-1} + \overline{\tilde{C}_{q-2i+2}}^{-1}$ et en ce moment, on a $|C_{q-j}| = |C_{q+j+1}|$ pour tout $0 \leq j \leq 2i - 3$.
- (iii) $q - 2i + 1 = m + 1$ et on remplace $\tilde{C}_{q+2i-1}$ par $\tilde{C}_{q+2i-1} + \overline{\mathcal{S}'_1(C_{u_1})}^{-1} + \overline{\mathcal{S}'_1(C_{u_1+1})}$. En ce moment, on a $|C_{q-j}| = |C_{q+j+1}|$ pour tout $0 \leq j \leq 2i - 3$

L'hypothèse de récurrence sur $\tilde{C}_{q+2i}$ pour $i \geq 2$ et $q + 2i < n$ est la suivante:

La suite $\tilde{C}_{q+2i}$ est obtenue par l'une des façons suivantes.

- (i) La suite $\tilde{C}_{q+2i}$ est obtenue sans modification
- (ii) La suite $\tilde{C}_{q+2i}$ est obtenue en modifiant son dernier terme selon $\tilde{C}_{q+2i-1}$
- (iii) $q - 2i + 1 > m = 1$ et on remplace $\tilde{C}_{q+2i}$ par $\tilde{C}_{q+2i} + \tilde{C}_{q-2i+1}^{-1}$. En ce moment, on a $|C_{q-j}| = |C_{q+j+1}|$ pour tout $0 \leq j \leq 2i - 2$.

Supposons que l'on ait modifié $\tilde{C}_{q+1}, \dots, \tilde{C}_{q+2i-1}$ avec $i \geq 2$ et $q + 2i - 1 < n$. On va modifier $\tilde{C}_{q+2i}$. En cas (i), on ne modifie pas $\tilde{C}_{q+2i}$. Si on est dans le cas (ii), comparons $|C_{q+2i-1}|$ et $|C_{q-2i+2}|$. Si $|C_{q-2i+2}| > |C_{q+2i-1}|$, on modifie le 0-ième terme de $\tilde{C}_{q+2i}$ selon $\tilde{C}_{q+2i-1}$. Supposons que $|C_{q-2i+2}| = |C_{q+2i-1}|$. On remplace $\tilde{C}_{q+2i}$ par $\tilde{C}_{q+2i} + \tilde{C}_{q-2i+1}^{-1}$. Si on est dans le cas (iii), si $|C_{q+2i-1}| = |C_{u_1}|$, alors $|C_{u_1-1}| \geq |C_{u_1}| = |C_{q+2i-1}| > |C_{q+2i}|$ et donc $C_q < C_{q+1}$, ce qui est absurde. On obtient que $|C_{q+2i-1}| < |C_{u_1}|$ et il suffit de modifier le 0-ième terme de $\tilde{C}_{q+2i}$ selon $\tilde{C}_{q+2i-1}$. On vérifie que la suite $\tilde{C}_{q+2i}$ ainsi modifiée satisfait l'hypothèse de récurrence si $q + 2i < n$.

Supposons que l'on ait modifié $\tilde{C}_{q+1}, \dots, \tilde{C}_{q+2i}$ avec $i \geq 2$ et $q + 2i < n$. On va modifier $\tilde{C}_{q+2i+1}$. Pour les cas (i) et (ii), on ne modifie pas $\tilde{C}_{q+2i+1}$. Si on est dans le cas (iii), comparons $|C_{q-2i+1}|$ et $|C_{q+2i}|$. Si $|C_{q-2i+1}| < |C_{q+2i}|$, on ne modifie pas $\tilde{C}_{q+2i+1}$. Supposons que $|C_{q-2i+1}| = |C_{q+2i}|$. Si $q - 2i - 1 = m + 1$, on remplace $\tilde{C}_{q+2i+1}$ par $\tilde{C}_{q+2i+1} + \overline{\mathcal{S}'_1(C_{u_1})}^{-1} + \overline{\mathcal{S}'_1(C_{u_1+1})}$. En revanche si $q + 2i + 1 > m + 1$, alors on remplace $\tilde{C}_{q+2i+1}$ par $\tilde{C}_{q+2i+1} + \overline{\tilde{C}_{q-2i}}^{-1}$. On vérifie que la suite $\tilde{C}_{q+2i+1}$ ainsi modifiée satisfait l'hypothèse de récurrence si $q + 2i + 1 < n$.

Si C_n est inverse, alors on vérifie que la suite $\tilde{C}_n$ ainsi modifiée reste complète.

Cas 2.4 $|C_{q-1}| = |C_q| = |C_{q+1}|$. Lemme 6.3.6 implique que ce cas est impossible.

6.6.3 Coller $\tilde{C}^{(0)}$ et $\tilde{C}^{(1)}$

On suppose comme ci-dessus que C_m soit directe. On suppose de plus que C_m termine par α_0 , le cas β_0 étant similaire. D'après les constructions de $\tilde{C}^{(0)}$ et $\tilde{C}^{(1)}$, on peut préciser le dernier terme de $\tilde{C}_m$ et le 0-ième terme de $\tilde{C}_{m+1}$.

Pour $\tilde{C}_m$, on distingue les cas suivants:

Cas 1.1 le dernier terme de $\tilde{C}_m$ est $e \otimes e_{i_m}$.

Cas 1.2 si pour tout $0 \leq i \leq m - p$, $|C_{p-1-i}| = |C_{p+i}|$, le dernier terme de $\tilde{C}_m$ est $e \otimes e_{i_m} + x \otimes e_{i_{2p-m-2}}$ et sinon le dernier terme de $\tilde{C}_m$ est $e \otimes e_{i_m}$

Cas 1.3 si pour tout $0 \leq i \leq m - p - 1$, $|C_{p-i}| = |C_{p+i+1}|$, le dernier terme de $\tilde{C}_m$ est $e \otimes e_{i_m} + x \otimes e_{i_{2p-m}}$ et sinon le dernier terme de $\tilde{C}_m$ est $e \otimes e_{i_m}$

Cas 2 le dernier terme de $\tilde{C}_m$ est $e \otimes e_{i_m}$.

Pour $\tilde{C}_{m+1}$, on distingue les cas suivants:

Cas 1.1 le 0-ième terme de $\tilde{C}_{m+1}$ est $e \otimes e_{i_m} + x \otimes e_{i_m}$ et l'avant-dernier terme de $\tilde{C}_{m+1}$ est $x \otimes e_{i_m}$.

Cas 1.2 si pour tout $0 \leq i \leq q - m - 1$, $|C_{q+1+i}| = |C_{q-i}|$, le 0-ième terme de $\tilde{C}_{m+1}$ est $e \otimes e_{i_m} + x \otimes e_{i_m} + e \otimes e_{i_{2q-m}} + x \otimes e_{i_{2q-m}}$ et l'avant-dernier terme de $\tilde{C}_{m+1}$ est $x \otimes e_{i_m} + e \otimes e_{i_{2q-m}}$; sinon le 0-ième terme de $\tilde{C}_{m+1}$ est $e \otimes e_{i_m} + x \otimes e_{i_m}$ et l'avant-dernier terme de $\tilde{C}_{m+1}$ est $x \otimes e_{i_m}$.

Cas 1.3 si pour tout $0 \leq i \leq q - m - 2$, $|C_{q-i-1}| = |C_{q+i}|$, le 0-ième terme de $\tilde{C}_{m+1}$ est $e \otimes e_{i_m} + x \otimes e_{i_m} + e \otimes e_{i_{2q-m-2}} + x \otimes e_{i_{2q-m-2}}$ et l'avant-dernier terme de $\tilde{C}_{m+1}$ est $x \otimes e_{i_m} + e \otimes e_{i_{2q-m-2}}$; sinon le 0-ième terme de $\tilde{C}_{m+1}$ est $e \otimes e_{i_m} + x \otimes e_{i_m}$ et l'avant-dernier terme de $\tilde{C}_{m+1}$ est $x \otimes e_{i_m}$.

Cas 2 le 0-ième terme de $\tilde{C}_{m+1}$ est $e \otimes e_{i_m} + x \otimes e_{i_m}$ et l'avant-dernier terme de $\tilde{C}_{m+1}$ est $x \otimes e_{i_m}$.

En utilisant les descriptions ci-dessus, on peut coller $\tilde{C}^{(0)}$ et $\tilde{C}^{(1)}$. On distingue cinq cas :

Cas 1 Le dernier terme de $\tilde{C}_m$ est $e \otimes e_{i_m}$ et le 0-ième terme de $\tilde{C}_{m+1}$ est $e \otimes e_{i_m} + x \otimes e_{i_m}$. Alors on remplace $\tilde{C}_m$ par $\tilde{C}_m + \overline{\tilde{C}'_{m+1}}^{-1}$. C'est possible car $C_m < C_{m+1}$ et $|\tilde{C}_m| = 2|C_m| - 1 \leq 2|C_{m+1}| \leq |\tilde{C}_{m+1}|$. Si $|\tilde{C}_m| < |\tilde{C}'_{m+1}|$, alors le 0-ième terme de $\overline{\tilde{C}'_{m+1}}^{-1}$ devient nul si on y applique la dernière flèche de $\tilde{C}_{m-1}$ et il suffit de changer le dernier terme de $\tilde{C}_{m-1}$ en le 0-ième terme de $\tilde{C}_m$. Supposons que $|\tilde{C}_m| = |\tilde{C}'_{m+1}|$. Alors $|C_m| = |C_{m+1}|$ et $C_m < C_{m+1} < C_{m+2}$. On remplace $\tilde{C}_{m-1}$ par $\tilde{C}_{m-1} + \tilde{C}_{m+2}^{-1}$, ceci est bien définie, car Proposition 6.3.10 implique que $|\tilde{C}_{m-1}| \geq |\tilde{C}_{m+2}|$. Si $|\tilde{C}_{m-1}| > |\tilde{C}_{m+2}|$, on n'a pas besoin de modifier les autres suites. Supposons que $|\tilde{C}_{m-1}| = |\tilde{C}_{m+2}|$. Alors on remplace $\tilde{C}_{m-2}$ par $\tilde{C}_{m-2} + \overline{\tilde{C}_{m+3}}^{-1}$ et on compare $|\tilde{C}_{m-2}|$ et $|\tilde{C}_{m+3}|$.

On procède ensuite par récurrence.

Supposons qu'il existe $i \geq 1$ tel que $|\tilde{C}_m| = |\tilde{C}_{m+1}| - 1$ et que pour tout $1 \leq j \leq 2i$, $|\tilde{C}_{m-j}| = |\tilde{C}_{m+j+1}|$. C'est-à-dire que l'on a remplacé $\tilde{C}_m$ par $\tilde{C}_m + \tilde{C}'_{m+1}^{-1}$ et que l'on a remplacé, pour tout $1 \leq j \leq 2i$, $\tilde{C}_{m-j}$ par $\tilde{C}_{m-j} + \tilde{C}_{m+j+1}^{-1}$.

Si $m - 2i = 1$, alors si $m + 2i + 1 < n$, $|C_{m+2i+2}| > 0 = |C_0|$ implique que $C_q < C_{q+1}$, ce qui est absurde. On a montré que $m + 2i + 1 = n$. Mais en ce moment, d'après Corollaire 6.3.9, pour tout $0 \leq j \leq 2i$, $|C_{m-j}| = |C_{m+1+j}|$ et Ord3 donne $C_m > C_{m+1}$. C'est une contradiction.

Si $m + 2i + 1 = n$, alors $\tilde{C}_{m+2i+1}$ est par construction complète et il suffit de changer le dernier terme de $\tilde{C}_{m-2i-1}$ en le 0-ième terme de $\tilde{C}_{m-2i}$.

Si $m + 2i + 1 < n$ et $m - 2i > 1$, alors on remplace $\tilde{C}_{m-2i-1}$ par $\tilde{C}_{m-2i-1} + \tilde{C}_{m+2i+2}^{-1}$. On compare $|\tilde{C}_{m-2i-1}|$ et $|\tilde{C}_{m+2i+2}|$. Si $|\tilde{C}_{m-2i-1}| > |\tilde{C}_{m+2i+2}|$, alors on n'a pas besoin de modifier les autres suites. Supposons que $|\tilde{C}_{m-2i-1}| = |\tilde{C}_{m+2i+2}|$. Alors on recommence la récurrence.

Supposons qu'il existe $i \geq 1$ tel que $|\tilde{C}_m| = |\tilde{C}_{m+1}| - 1$ et que pour tout $1 \leq j \leq 2i - 1$, $|\tilde{C}_{m-j}| = |\tilde{C}_{m+j+1}|$. C'est-à-dire que l'on a remplacé $\tilde{C}_m$ par $\tilde{C}_m + \tilde{C}'_{m+1}^{-1}$ et que l'on a remplacé, pour tout $1 \leq j \leq 2i$, $\tilde{C}_{m-j}$ par $\tilde{C}_{m-j} + \tilde{C}_{m+j+1}^{-1}$.

Si $m - 2i + 1 = 1$, alors on n'a pas besoin de modifier les autres suites.

Si $m + 2i = n$, alors si $m - 2i + 1 > 1$, $|C_{m-2i}| > 0 = |C_{n+1}|$ implique que $C_m > C_{m+1}$, ce qui est absurde. On a montré que $m - 2i + 1 = 1$. Mais en ce moment, d'après Corollaire 6.3.9, pour tout $0 \leq j \leq 2i - 1$, $|C_{m-j}| = |C_{m+j+1}|$. Ord3 donne alors $C_m > C_{m+1}$. C'est une contradiction.

Si $m + 2i < n$ et $m - 2i + 1 > 1$, alors on remplace $\tilde{C}_{m-2i}$ par $\tilde{C}_{m-2i} + \overline{\tilde{C}_{m+2i+1}}^{-1}$. On compare $|\tilde{C}_{m-2i}|$ et $|\tilde{C}_{m+2i+1}|$. Si $|\tilde{C}_{m-2i}| < |\tilde{C}_{m+2i+1}|$, alors si $m - 2i > 1$, il suffit de changer le dernier terme de $\tilde{C}_{m-2i-1}$ en le 0-ième terme de $\tilde{C}_{m-2i}$ et si $m - 2i = 1$, comme $\overline{\tilde{C}_{m+2i+1}}^{-1}$ est complète, $\tilde{C}_{m-2i} = \tilde{C}_1$ est encore complète. Supposons que $|\tilde{C}_{m-2i}| = |\tilde{C}_{m+2i+1}|$. Alors on recommence la récurrence.

Cas 2 Le dernier terme de $\tilde{C}_m$ est $e \otimes e_{i_m}$ et le 0-ième terme de $\tilde{C}_{m+1}$ est $e \otimes e_{i_m} + x \otimes e_{i_m} + e \otimes e_{i_{2q-m}} + x \otimes e_{i_{2q-m}}$ où $|C_{q-i}| = |C_{q+1+i}|$ pour tout $0 \leq i \leq q - m - 1$. On remplace $\tilde{C}_m$ par $\tilde{C}_m + \overline{\tilde{C}'_{m+1}}^{-1} + \overline{\mathcal{S}'_1(C_{2q-m+1})}^{-1}$. Si $|\tilde{C}_m| = |\tilde{C}_{m+1}| - 1$, alors $|C_m| = |C_{m+1}| = |C_{2q-m}| > |C_{2q-m+1}|$ implique que $C_q < C_{q+1}$, ce qui est absurde. Alors on a montré que $|C_m| < |C_{m+1}|$. Si $|\tilde{C}_m| < |\mathcal{S}'_1(C_{2q-m+1})|$, alors il suffit d'ajouter le 0-ième terme de $\overline{\mathcal{S}'_1(C_{2q-m+1})}^{-1}$ au dernier terme de $\tilde{C}_{m-1}$. Suppose que $|\tilde{C}_m| = |\mathcal{S}_1(C'_{2q-m+1})|$, alors $|C_m| = |C_{2q-m+1}|$. Si $2q - m + 1 = n$, alors $\tilde{C}_{2q-m+1}$ est par construction complète et il suffit d'ajouter le 0-ième terme de $\overline{\mathcal{S}'_1(C_{2q-m+1})}^{-1}$ au dernier terme de $\tilde{C}_{m-1}$. Supposons que $2q - m + 1 < n$. Alors on remplace $\tilde{C}_{m-1}$ par $\tilde{C}_{m-1} + \mathcal{S}_2(C_{2q-m+2})^{-1}$. Comme $|C_{m-1}| \geq |C_m| = |C_{2q-m+1}| > |C_{2q-m+2}|$, $|\tilde{C}_{m-1}| > |\mathcal{S}_2(C_{2q-m+2})|$, alors on n'a plus besoin de modifier les autres suits.

Cas 3 Le dernier terme de $\tilde{C}_m$ est $e \otimes e_{i_m}$ et le 0-ième terme de $\tilde{C}_{m+1}$ est $e \otimes e_{i_m} + x \otimes e_{i_m} + e \otimes e_{i_{2q-m-2}} + x \otimes e_{i_{2q-m-2}}$, où $|C_{q-1-i}| = |C_{q+1+i}|$ pour tout $0 \leq i \leq q - m - 2$. On remplace $\tilde{C}_m$ par $\tilde{C}_m + \overline{\tilde{C}'_{m+1}}^{-1} + \overline{\mathcal{S}'_1(C_{2q-m-1})}^{-1}$. Si $|\tilde{C}_m| = |\tilde{C}_{m+1}| - 1$, alors $|C_m| = |C_{m+1}| = |C_{2q-m-2}| > |C_{2q-m-1}|$ implique que $C_q < C_{q-1}$, ce qui est absurde. Alors on a montré que $|C_m| < |C_{m+1}|$. Si $|\tilde{C}_m| < |\mathcal{S}'_1(C_{2q-m-1})|$, alors il suffit d'ajouter le 0-ième terme de $\overline{\mathcal{S}'_1(C_{2q-m-1})}^{-1}$ au dernier terme de $\tilde{C}_{m-1}$. Suppose que $|\tilde{C}_m| = |\mathcal{S}_1(C'_{2q-m-1})|$, alors $|C_m| = |C_{2q-m-1}|$. Si $2q - m - 1 = n$, alors $\tilde{C}_{2q-m-1}$ est par construction complète et il suffit d'ajouter le 0-ième terme de $\overline{\mathcal{S}'_1(C_{2q-m-1})}^{-1}$ au dernier terme de $\tilde{C}_{m-1}$. Supposons que $2q - m - 1 < n$. Alors on remplace $\tilde{C}_{m-1}$ par $\tilde{C}_{m-1} + \mathcal{S}_2(C_{2q-m})^{-1}$. Comme $|C_{m-1}| \geq |C_m| = |C_{2q-m-1}| > |C_{2q-m}|$, $|\tilde{C}_{m-1}| > |\mathcal{S}_2(C_{2q-m})|$, alors on n'a plus besoin de modifier les autres suits.

Cas 4 Le dernier terme de $\tilde{C}_m$ est $e \otimes e_{i_m} + x \otimes e_{i_{2p-m-2}}$ où pour tout $0 \leq i \leq m - p$, $|C_{p+i}| = |C_{p-i-1}|$. Ce cas est impossible, car $|C_{2p-m-2}| < |C_{2p-m-1}| = |C_m| \leq |C_{m+1}|$ implique que $C_{p-1} > C_p$.

Cas 5 Le dernier terme de $\tilde{C}_m$ est $e \otimes e_{i_m} + x \otimes e_{i_{2p-m}}$ où pour tout $0 \leq i \leq m - p - 1$, $|C_{p-i}| = |C_{p+i+1}|$. Ce cas est impossible, car $|C_{2p-m}| < |C_{2p-m+1}| = |C_m| \leq |C_{m+1}|$ implique que $C_p < C_{p+1}$.

Bibliography

- [1] J. L. Alperin, *Local Representation Theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics Vol. 11, Cambridge University Press 1986
- [2] I. Assem et D. Happel *Generalized tilted algebras of type $\mathbb{A}_n$* , Comm. Algebra, **9**, (1981), no.20, 2101-2125
- [3] I. Assem et A. Skowroński, *Iterated tilted algebras of type $\tilde{\mathbb{A}}_n$* , Math. Z. **195**, 1987, no.2, 269-290
- [4] M. Auslander, I. Reiten and S. Smalø, *Representation Theory of Artin Algebras*, Corrected reprint of the 1995 original, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Vol. 36, Cambridge University Press 1997
- [5] D.J. Benson, *Representations and Cohomology I: Basic Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 1991
- [6] R. Brauer, *On 2-blocs with dihedral defect groups*, In *Symposia Math.* vol. 13 pages 367-393 Academic Press, London, 1974
- [7] V.M. Bondarenko et Yu.A. Drozd, *Representation type of finite groups*, Zap. Naučn. Sem. Leningrad (LOMI) **57** (1977), 24-41
- [8] C. Bessenrodt et T. Holm, *q-Cartan matrices and combinatorial invariants of derived categories for skewed-gentle algebras*, Pacific J. Math. **229** (2007), No.1, 25-48
- [9] C. Bessenrodt et T. Holm, *Weighted locally gentle quivers and Cartan matrices*, arXiv:math.RT/0511610, à apparaître dans J. Pure Appl. Alg.
- [10] M. Broué, *Isométries parfaites, types de blocs, catégories dérivées*, Astérisque, **(181-182)**:61-92, 1990
- [11] M. C. R. Bulter et C. M. Ringel, *Auslander-Reiten sequences with few middle terms and applications to string algebras*, Comm. Alg. **15**, (1987) no.1-2, 145-167
- [12] W. Crawley-Boevey, *Maps between representations of zero-relation algebras*, J. Algebra, **126**, (1989) no.2, 259-263
- [13] Ju. A. Drozd, *Tame and wild matrix problems*, Proc. ICRAII (Ottawa 1979) Lecture Notes in Math, vol 832, Springer-Verlag 1980, 242-258
- [14] K. Erdmann, *Algebra and dihedral defect groups*, Proc. London Math. Soc. (3) **54**, (1987), 88-114
- [15] K. Erdmann, *Blocks of Tame Representations Type and Related Algebras*, Lectures Notes in Mathematics 1428, Springer-verlag Berlin 1990
- [16] K. Erdmann, *On the vertices of modules in the Auslander-Reiten quiver of p-groups*, Math. Z. **203**, (1990), no.2, 321-334

- [17] K. Erdmann, T. Holm, O. Iyama et J. Schröer, *Radical embeddings and representation dimension*, Advances in Mathematics **185** (2004), 159-177
- [18] K. Erdmann et A. Skowroński, *On Auslander-Reiten components of blocks and self-injective biserial algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **330** (1992) no.1, 165-189
- [19] W. Feit, *The Representation Theory of Finite Groups*, North-Holland 1982
- [20] C. Geiss, *On components of type $\mathbb{Z}A_\infty$ for string algebras* Comm. Algebra **26** (1998), no.3, 749-758
- [21] I. M. Gelfand et V. A. Ponomarev, *Indecomposable representations of the Lorentz group* Usp. Math. Nak. **23** (1968), 3-60
- [22] D. Happel, *Triangulated categories in the representation theory of finite dimensional algebras*, LMS Lecture Note Series 119, Cambridge University Press 1988
- [23] T. Holm, *Derived equivalent tame blocs*, J. Algebra, **194**, (1997) no.1, 178-200
- [24] T. Holm, *Derived equivalence classification of algebras of dihedral, semidihedral and quaternion type*, J. Algebra **211** (1999) no.1, 159-205
- [25] T. Holm et A. Zimmermann, *Generalized Reynolds ideals and derived equivalences for algebras of dihedral and semidihedral type*, preprint disponible à <http://www.mathinfo.u-picardie.fr/alex/alexpapers.html>
- [26] O. Iyama, *Higher dimensional Auslander-Reiten theory on maximal orthogonal subcategories*, Adv. Math. **210** (2007), no. 1, 22-50
- [27] S. Kawata, *Module correspondance in Auslander-Reiten quiver for finite groups*, Osaka J. Math. **26** (1989) no.3 671-678
- [28] S. Kawata, *The modules induced from a normal subgroup and the Auslander-Reiten quiver* Osaka J. Math. **27** (1990) no.2 265-269
- [29] S. Koshitani and N. Kunugi, *Broué conjecture holds for principal 3-blocks with elementary abelian defect group of order 9*, disponible <http://www.maths.abdn.ac.uk/bensondj/html/archive/koshitani-kunugi.html>
- [30] S. Koshitani, N. Kunugi et K. Waki, *Broué's abelian defect group conjecture for the Held group and the sporadic Suzuki group*, J. Algebra **279** (2004) 638-666
- [31] M. Kauer, *Derived equivalence of graph algebras*, Trends in the representation theory of finite-dimensional algebras (Seattle 1997) 201-213, Compt. Math. **229**, Amer. Math. Soc
- [32] M. Kauer et K. W. Roggenkamp, *Higher dimensional orders, graph-orders and derived equivalences* J. Pure Appl. Algebra **155** (2001) no. 2-3, 181-202
- [33] B. Keller et D. Vossieck, *Sous les catégories dérivées* C. R. Acad. Sci. Paris **305** (1987), 225-228
- [34] S. König et A. Zimmermann, *Derived Equivalence for Group Rings*, Lecture Notes in Mathematics 1685, Springer-Verlag, Berlin 1998
- [35] M. Linckelmann, *A derived equivalence for blocs with dihedral defect groups*, J. Algebra **164**, (1994) no.1, 244-255
- [36] T. Okuyama, *Some examples of derived equivalent blocks of finite groups*, Preprint Hokkaido, 1998
- [37] J. Rickard, *Derived categories and stable equivalence*, J. Pure Appl. Alg. **61** (1989), no.3, 303-317

- [38] C.Riedtmann, *Algebren, Darstellungen, Überlangerungen und zurück*, Comm. Math. Helv. **55** (1980), 199-224
- [39] C.M.Ringel, *The indecomposable representations of the dihedral 2-groups*, Math. Ann. **21** (1975), 19-34
- [40] C.M.Ringel, *The repetitive algebra of a gentle algebra*, Bol. Soc. Mat. Mexicana (3). Vol **3** (1997), 235-253
- [41] R.Rouquier et A.Zimmermann, *Picard groups for derived module categories*, Proc. London Math. Soc. (3) **87** (2003), 197-225
- [42] J. Schröer, *Modules without self-extensions over gentle algebras*, J.Algebra **216**, (1999), no.1, 426-432
- [43] J. Schröer, *On the quiver with relations of a repetitive algebra* , Archiv der Mathematik (Basel) **72** (1999), 426-432
- [44] J. Schöer et A. Zimmermann, *Stable endomorphism algebras of modules over special biserial algebras*, Math. Z. **244** (2003) no.3, 315-330
- [45] A. Zimmermann, *Comments on gentleness of endomorphism algebras*, AMA Algebra Montp. Annonc. 2003 Paper 11, 6pp (électronique)
- [46] A. Zimmermann, *Invariance of generalized Reynolds ideals under derived equivalences* , Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy **107A** (1), 1-9 (2007)