SUR LES FONCTEURS POLYNOMIAUX

ALEXANDER ZIMMERMANN

Ce résumé explique certains des résultats que j'ai obtenu dans la collaboration récente avec Steffen König entre janvier 2002 et juin 2003, ainsi que la théorie liée et sous-adjacente à ces découvertes.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie additive et $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. Alors dans la catégorie $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}$ de foncteurs $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{A}$ avec morphismes étant les transformations naturelles on note pour tout objet $F \in ob(\mathcal{A}^{\mathcal{C}})$ l'interférence $F^{(2)}$ le foncteur en deux variables défini par

$$F^{(2)}(X,Y) := ker(F(X \oplus Y) \longrightarrow F(X) \oplus F(Y))$$

sur les objets et par naturalité de la construction sur les morphismes. Puis, on note par récurrence la n-ième interférence $F^{(n)}$ par

$$\begin{aligned} F^{(n)}(X_1, X_2, X_3 \ldots, X_n) &:= ker(F^{(n-1)}(X_1 \oplus X_2, X_3, \ldots, X_n) \longrightarrow \\ &\quad F^{(n-1)}(X_1, X_3, \ldots, X_n) \oplus F^{(n-1)}(X_2, X_3, \ldots, X_n)) \end{aligned}$$

sur des objets et par naturalité sur les morphismes.

Eilenberg-MacLane montrent dans leur article [6] que la construction duale par le conoyau ainsi que le choix de la position qu'on interfère pour l'itération ne change le foncteur ainsi obtenu qu'à isomorphisme près.

Definition 1. Un foncteur F est dit polynomial de degré au plus n si $F^{(n+1)} = 0$. On dit qu'un foncteur est polynomial si il est polynomial de degré n pour un entier n, et on dit que F est analytique si il est limite de ses sous-foncteurs polynomiaux.

Notons $R - mod$ la catégorie des R-modules de type fini, et $R - Mod$ la catégorie des R-modules. Puis, $R - free$ est la catégorie des R-modules libres de type fini. Soit

- $\mathcal{F}^n(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ la catégorie des foncteurs polynomiaux dans $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}$ de degré n au plus
- $\mathcal{F}^\omega(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ la catégorie des foncteurs analytiques.

Si pour un anneau commutatif R on a $\mathcal{A} = R - mod$ et $\mathcal{C} = R - Mod$, notons

- $\mathcal{F}^n(\mathcal{A}, \mathcal{C}) = \mathcal{F}^n(R)$
- $\mathcal{F}^\omega(\mathcal{A}, \mathcal{C}) = \mathcal{F}^\omega(R)$.

De plus, si $\mathcal{C} = \mathbb{Z} - free$ et $\mathcal{A} = R - mod$, notons

- $\mathcal{F}^n(\mathcal{A}, \mathcal{C}) = \mathcal{A}^n(R)$
- $\mathcal{F}^\omega(\mathcal{A}, \mathcal{C}) = \mathcal{A}^\omega(R)$.

Le but d'introduire cet objet était originalement le lien très étroit avec la cohomologie de groupe, ou plus généralement la cohomologie singulière des CW-complexes.

En fait, le théorème de Kan-Thurston assure qu'il existe pour tout espace connexe par chemins X avec point de base un groupe G tel que $H^*(X, R) \simeq H^*(G, R)$ où la cohomologie à droite est la cohomologie de groupe à coéfficients dans l'anneau commutatif R, et où la cohomologie à gauche est la cohomologie singulière à coefficients dans R. Le groupe G ne dépend pas de R. Donc, étudier la cohomologie singulière des espaces est équivalente à étudier la cohomologie de groupes. La cohomologie de groupes $H^*(G, \mathbb{F}_p)$ est un module sur l'algèbre de Steenrod $\mathfrak{A}_p$ modulo p. Ici, on note par $\mathbb{F}_p$ le corps premier de caractéristique p. Cette algèbre $\mathbb{N}$-graduée par des générateurs Sq^i en cas $p = 2$ et D^i en cas p impair, de degré i, avec des relations un peu compliquées, qu'on ne reproduira pas ici, mais que le lecteur

Date: Version du 14 janvier 2004.

intéressé pourra trouver dans [15] par exemple, est l'algèbre de transformations naturelles des cohomologies simpliciales. Les générateurs ont été découverts par Cartan-Serre [3] dans les années 50, et puis finalisés et axiomatisés par Steenrod-Epstein dans leur texte [15] par la construction de l'algèbre elle même. La cohomologie de groupe $H^*(G,\mathbb{F}_p)$ est $\mathbb{N}$-gradué aussi, et cette graduation est parfaitement compatible avec la graduation de $\mathfrak{A}_p$. En effet, il satisfait que $Sq^i \cdot x = 0$ dès que x est un élément homogène avec $deg(x) > i$ pour $p = 2$ et de façon analogue pour p impair. Un $\mathfrak{A}_p$-module $\mathbb{N}$-gradué est dit instable si il possède cette propriété, et la catégorie des modules instables sur $\mathfrak{A}_p$ est notée $\mathfrak{U}_p$. La catégorie $\mathfrak{U}_p$ est abélienne avec suffisamment d'objets injectifs et projectifs (voir la monographie [14] de Lionel Schwartz). Un module est dit nilpotent si les générateurs $\{Sq^i | i \in \mathbb{N}\}$ pour $p = 2$ (ou D^i respectivement pour p impair) agissent de façon localement nilpotente dans un sens à préciser (cf [14]). La catégorie des modules nilpotents est notée $\mathcal{N}il_p$. Le résultat crucial et le lien avec les foncteurs polynomiaux en topologie est le suivant.

Theorem 1. *(Henn, Lannes, Schwartz* [9]*)* $\mathcal{F}^\omega(\mathbb{F}_p) \simeq \mathfrak{U}_p/\mathcal{N}il_p$

Un autre lien très important est introduit par Friedlander et Suslin dans [7] par les foncteurs polynomiaux stricts. Le but de [7] a été de montrer que pour un schéma en groupes G et un module rationnel M de G, le schéma $H^*(G,k)$ est une algèbre de type fini, et $H^*(G,M)$ est un module de type fini sur $H^*(G,k)$. L'outil essentiel était la notion des foncteurs polynomiaux stricts. Ceci consiste en associer pour tout k-espace vectoriel V un espace vectoriel $T(V)$ et pour tout couple d'espaces vectoriels V et W un morphisme de schémas de $Hom_k(V,W)$ à $Hom_k(TV,TW)$ tel que les propriétés usuels pour que T soit un foncteur soient satisfait. Ici, bien évidemment, on identifie un espace vectoriel W par le schéma affine $Spec(S^*(W^\sharp))$, où l'on note par $W^\sharp$ le k-dual de W et par S^* l'algèbre symétrique. Le lecteur remarquera qu'un foncteur polynomial strict se réduit par l'évaluation du polynôme en un foncteur polynômial ordinaire, et qu'on obtient ainsi un foncteur 'oublie' $\Omega : \mathcal{P}^n(k) \longrightarrow \mathcal{F}^n(k)$, où l'on note par $\mathcal{P}^n(k)$ la catégorie des foncteurs polynômiaux stricts homogènes de degré n. Le degré d'un foncteur polynomial strict est le degré des polynômes utilisés pour la définition du morphisme des schémas, et de la même façon on définit la propriété qu'un tel foncteur soit homogène. Il n'est pas difficile à voir, par un argument de valeurs propres, que la catégorie des foncteurs polynomiaux stricts est le produit direct sur les entiers n des foncteurs polynomiaux stricts homogènes de degré n. Ceci n'est pas vrai pour les foncteurs polynomiaux ordinaires, et donc le foncteur 'oublie' complique les choses considérablement[1]. De plus, Friedlander-Suslin montrent que

$$\mathcal{P}^n(k) \simeq S_k(n,m) - mod$$

où $S_k(n,m) = End_{k\mathfrak{S}_m}(\underbrace{k^n \otimes k^n \otimes \cdots \otimes k^n}_{m \text{ facteurs}})$ est l'algèbre de Schur. Pour cette théorie le lecteur devra consulter le livre de Green [8].

Maintenant, après cette introduction longue on va pouvoir commencer de raconter le travail que j'ai fait les deux dernières années avec Steffen König.

Le début est un résultat de Baues-Dreckmann-Franjou-Pirashvili.

Theorem 2. [1] $\mathcal{A}^n(R) \simeq \Gamma^n(R) - mod$ *pour une* R*-algèbre* $\Gamma^n(R)$ *de type fini.*

Le topologue se croit au bout de ses vœux, mais comme algébriste on aimerait bien sûr comprendre la nature de $\Gamma^n(R)$. Dans [1] l'anneau est décrit par ses générateurs et rélations. Malheureusement les rélations sont assez compliquées. Pour $n = 2$ pourtant on arrive facilement à les écrire:

$$\Gamma^2(R) =< h,p |\ hph = 2p \text{ et } php = 2h >_{R-\text{algèbre}}$$

Aussi le cas $\Gamma^3(R)$ est possible d'écrire sur une page, mais au délà l'utilisation d'un ordinateur est vivement conseillé, à tel point qu'il devient très difficile de trouver la moindre information par cette présentation.

[1]Ceci est évidement d'autant plus vrai dans la vie courante. Que voulais-je dire encore ?

Toutefois, Yuriy Drozd ne s'est pas découragé et il a décrit justement ces deux anneaux $\Gamma^2(\hat{\mathbb{Z}}_2)$ et $\Gamma^3(\hat{\mathbb{Z}}_3)$ à coefficients dans les entiers p-adiques $\hat{\mathbb{Z}}_p$. Sa méthode est assez simple. Il découvre des idempotents $\{e_i\}$ en termes des combinaisons linéaires des mots frmés par les générateurs, donnant ainsi des modules projectifs $\Gamma^n(R)e_i$, puis une présentation en forme de matrices par le calcul des $e_i\Gamma^n(R)e_j$. Finalement, il montre l'injectivité et détermine l'image. Pour trouver les idempotents e_i il utilise justement la description de l'anneau $\Gamma^p(\hat{\mathbb{Z}}_p)$ par générateurs et rélations. Ceci devient très difficile pour $p > 3$ à cause de la complexité de la description.

Il obtient néanmoins

Theorem 3. *(Drozd* [4, 5]*)*

$$\Gamma^2(\hat{\mathbb{Z}}_2) \cong \{(d_0, \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, a_2) \in \hat{\mathbb{Z}}_2 \times Mat_2(\hat{\mathbb{Z}}_2) \times \hat{\mathbb{Z}}_2 |\ 2|c_1 \text{ et } 2|(a_1 - d_0) \text{ et } 2|(a_2 - d_1)\}$$

$$\Gamma^3(\hat{\mathbb{Z}}_3) \cong \hat{\mathbb{Z}}_3 \times \hat{\mathbb{Z}}_3 \times \{(d_0, \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}, a_3) \in \hat{\mathbb{Z}}_3 \times Mat_2(\hat{\mathbb{Z}}_3) \times Mat_2(\hat{\mathbb{Z}}_3) \times \hat{\mathbb{Z}}_3 |$$
$$| \ 3|c_i \text{ et } 3|(a_i - d_{i-1}) \forall i \in \{1,2,3\}\}$$

Ces anneaux ont une particuliarité: Il n'y a qu'un nombre fini de réseaux indécomposable à isomorphisme près, et leur réduction modulo $rad(R)$ est de type de représentation fini, c.-à-d. il n'y qu'un nombre fini de modules indécomposables à isomorphisme près qui sont annulés par $rad(R)$. Drozd conjecture qu'une description analogue à celle ci-dessus est vraie pour $\Gamma^p(\hat{\mathbb{Z}}_p)$ sans toutefois préciser comment les facteurs 'triviaux' apparaissent en degré 3 et de combien on pouvait s'attendre pour p quelconque.

Notons dans la suite $\hat{\mathbb{Z}}_p - \hat{\mathbb{Z}}_p := \{(a,b) \in \hat{\mathbb{Z}}_p \times \hat{\mathbb{Z}}_p |\ p|(b-a)\}$. Nous obtenons le théorème suivant.

Theorem 4. *(Steffen König et Alexander Zimmermann* [12]*) Soit $\mathcal{A}^p(\hat{\mathbb{Z}}_p)$ la catégorie des foncteurs polynomiaux des groupes abéliens libres de rang fini vers la catégorie des $\hat{\mathbb{Z}}_p$-modules de degré au plus p. Alors, $\mathcal{A}^p(\hat{\mathbb{Z}}_p)$ est équivalent à la catégorie des modules sur*

$$\left(\prod_{\lambda \vdash n; 1<n<p} \hat{\mathbb{Z}}_p \times \prod_{\lambda \vdash p \text{ et } \lambda \text{ n'est pas une équerre}} \hat{\mathbb{Z}}_p \right) \times \Lambda^p_{\hat{\mathbb{Z}}_p,0},$$

où

$$\Lambda^p_{\hat{\mathbb{Z}}_p,0} \simeq \hat{\mathbb{Z}}_p \oplus \begin{pmatrix} \hat{\mathbb{Z}}_p & \hat{\mathbb{Z}}_p \\ (p) & \hat{\mathbb{Z}}_p \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \hat{\mathbb{Z}}_p & \hat{\mathbb{Z}}_p \\ (p) & \hat{\mathbb{Z}}_p \end{pmatrix} \oplus \cdots \oplus \begin{pmatrix} \hat{\mathbb{Z}}_p & \hat{\mathbb{Z}}_p \\ (p) & \hat{\mathbb{Z}}_p \end{pmatrix} \oplus \hat{\mathbb{Z}}_p$$

La notation se refère à ce qui est écrit juste avant le Théorème 4, c.-à-d. $\Lambda^p_{\hat{\mathbb{Z}}_p,0}$ est un sous-anneau du produit direct des anneaux de matrices à coefficients dans $\hat{\mathbb{Z}}_p$ tel que la différence de certains coefficients est divisible par p. Ici, on note par $\lambda \vdash n$ les partitions de n. Une partition est une suite décroissante d'entiers positifs $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_\ell$ telle que $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_\ell$. Une équerre dans ce cas est une partition qui satisfait une des deux propriétés: ($n_1 = n$ et $\ell = 1$) ou ($n_2 = 1$).

On voit que ceci confirme la conjecture de Drozd. De nouveau on obtient les énoncés sur le type de représentation de ces anneaux, comme dans le cas $p = 2$ et $p = 3$. Puis, les résolutions projectifs des réseaux indécomposables de $\Gamma^p(\hat{\mathbb{Z}}_p)$ sont où bien de longueur 1, de longueur 2 ou périodiques avec une période $2p$. Ceci est une particuliarité très marquante et ces résolutions caractérisent presque l'anneau $\Gamma^p(\hat{\mathbb{Z}}_p)$. Une autre observation est de rigueur. Steffen König a déterminé l'algèbre de Schur $S_{\hat{\mathbb{Z}}_p}(p,p)$ à équivalence de Morita près. Elle est Morita équivalente à

$$\left(\prod_{\substack{\lambda\vdash p \text{ et}\\ \lambda \text{ n'est pas}\\ \text{une équerre}}} \hat{\mathbb{Z}}_p\right) \times \{\begin{pmatrix} \hat{\mathbb{Z}}_p & \hat{\mathbb{Z}}_p \\ (p) & \hat{\mathbb{Z}}_p \end{pmatrix} \cancel{\oplus} \begin{pmatrix} \hat{\mathbb{Z}}_p & \hat{\mathbb{Z}}_p \\ (p) & \hat{\mathbb{Z}}_p \end{pmatrix} \cancel{\oplus} \cdots \cancel{\oplus} \begin{pmatrix} \hat{\mathbb{Z}}_p & \hat{\mathbb{Z}}_p \\ (p) & \hat{\mathbb{Z}}_p \end{pmatrix} \cancel{\oplus} \hat{\mathbb{Z}}_p\}$$

et le foncteur 'oublie' Ω est induit par le plongement naturel

$$\Gamma^p(\hat{\mathbb{Z}}_p) \hookrightarrow \left(\left(\prod_{\lambda\vdash n; 1\leq n<p} \hat{\mathbb{Z}}_p\right) \times S_{\hat{\mathbb{Z}}_p}(p,p)\right)$$

d'ordres où l'ordre plus petit est d'indice p dans le plus grand, et l'extension de scalaires, qui donne ainsi un foncteur de la catégorie de modules dans l'autre sens.

Comment obtient-on cette description. En fait, ceci résulte d'un diagramme de recollement de $\mathcal{A}^n(\mathbb{F}_p)$ par $\mathcal{A}^{n-1}(\mathbb{F}_p)$ et $\mathbb{F}_p\mathfrak{S}_n - mod$ dans le sens de Beilinson-Bernstein-Deligne [2]. Puis, on dévine un foncteur projectif dans $\mathcal{A}^n(\mathbb{F}_p)$ qui possède le foncteur identité dans son quotient modulo son radical et on examine les séries de compositions possibles entre les foncteurs simples étape par étape jusqu'à degré $n \leq p$. On trouve que uniquement le foncteur identité et le module trivial du groupe $\mathfrak{S}_p$ peuvent avoir une extension non-triviale jusqu'à degré p. Puis, on montre que $\Gamma^p(\hat{\mathbb{Z}}_p)$ est un ordre classique en examinant le cas sur le corps de fractions et sa semismplicité à l'aide des foncteurs polynômiaux stricts. La dernière étape applique un résultat de Klaus Roggenkamp (voir [11, 13]) pour conclure.

Il est évident qu'on pourra interpréter maintenant ce résultat comme décomposition 'canonique' de la cohomologie de groupes modulo des parties nilpotents et nous entendons poursuivre cette étude dans ce sens. Par ailleurs, il nous paraît intéressant d'étudier les blocs (c.-à-d. les facteurs indécomposables) de ces anneaux, en particulier pour $\Gamma^\omega(\hat{\mathbb{Z}}_p)$. Il devrait exister une forme de Théorème de Brauer-Robinson pour cette situation, comme il s'agit d'un "anneau de groupes symétrique universel".

References

[1] Hans-Joachim Baues, Winfried Dreckmann, Vincent Franjou and Teimuraz Pirashvili, *Foncteurs polynomiaux et foncteurs de Mackey non linéaires*, Bulletin de la SMF **129** (2001) 237-257.

[2] A.A.Beilinson, J.Bernstein, P.Deligne, *Analyse et topologie sur les espaces singuliers*, Astérisque 100 (1982).

[3] Henri Cartan et Jean-Pierre Serre, Séminaire Cartan 1954/55.

[4] Yuri Drozd, *Finitely generated quadratic modules*, manuscripta math. **104** (2001) 239-256.

[5] Yuri Drozd, *On cubic functors*, Comm. in Alg. **31** (3) (2003) 1147-1173.

[6] Samuel Eilenberg and Saunders Maclane, *On the groups $H(\Pi, n)$, II*; Ann. of Math. **70** (1954) 49-139.

[7] Eric M. Friedlander and Andrei Suslin, *Cohomology of finite group schemes over a field*, Inventiones math. **127** (1997) 209-270.

[8] J. A. Green, Polynomial representations of GL_n, Springer Lecture Notes in Mathematics 830 (1980).

[9] Hans-Werner Henn, Jean Lannes and Lionel Schwartz, *The category of unstable modules and unstable algebras over the Steenrod algebra modulo nilpotent objects*, Am. Journal Math. **115** (1993) 1053-1106.

[10] Steffen König, *Cyclotomic Schur algebras and blocks of cyclic defect*, Can. Math. Bull. **43** (2000) 79-86.

[11] Steffen König and Alexander Zimmermann, Derived equivalences for group rings, Springer Lecture Notes in Mathematics 1685 (1998).

[12] Steffen König and Alexander Zimmermann, *Polynomial functors of prime degree*, preprint 2003.

[13] Klaus W. Roggenkamp, *Blocks of cyclic defect and Green–orders,* Comm. in Alg. **20** (1992) 1715–1734.

[14] Lionel Schwartz, Unstable modules over the Steenrod algebra and Sullivan's fixed point conjecture, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press 1994.

[15] Norman Steenrod and D. B. A. Epstein, Cohomology operations, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press 1962

Université de Picardie, Faculté de Mathématiques et UMR 6140 du CNRS, 33 rue St Leu, F-80039 Amiens Cedex 1, France

E-mail address: alexander.zimmermann@u-picardie.fr