

Effet d'une équivalence dérivée sur une algèbre *Ext*

Alexander Zimmermann

Faculté de Mathématiques et CNRS (FRE 2270)

Université de Picardie; 33 rue St Leu; 80039 Amiens Cedex; France

electronic mail: `Alexander.Zimmermann@u-picardie.fr`

`http://delambre.mathinfo.u-picardie.fr/alex/azim.html`

Ces notes présentent une version élaborée d'un exposé fait à Amiens à l'occasion du Séminaire Itinéraire sur des Catégories en décembre 2000. Je tiens à remercier les organisateurs, tout particulièrement Mme Ehresmann et Mme Vaugelade, pour l'invitation à présenter une partie de mes travaux récents au public SIC.

Ce résumé a pour but d'expliquer les travaux [19, 20, 21] et les mettre en perspective surtout par rapport aux travaux [15, 7, 8]. Dans l'espoir que le plus grand nombre de lecteurs pourra profiter de ce qui suit j'essaie de prendre dans ces notes un point de vue différent de celui que j'ai pris dans les autres articles. De plus le contenu de cet article était largement inspiré d'un exposé que j'ai fait à Oberwolfach en juillet 2000 dans le colloque "Cohomology of groups: Applications and Interactions".

Finalement, il est à noter que l'idée de l'article [19] m'est venue quand j'ai réfléchi sur un exposé que j'ai été invité à donner à Kyungju en Corée du Sud en août 1999. Je remercie Jae Keol Park pour l'invitation.

1 Dériver des catégories abéliennes

Suite à une suggestion de Grothendieck Verdier a défini la catégorie triangulée abstraite dont la catégorie dérivée $D^b(\mathcal{A})$ d'une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ est l'exemple le plus courant.

Je rappelle ci-dessous brièvement ce que j'entends par une catégorie dérivée.

Un complexe dans $\mathcal{A}$ est un objet $\mathbb{Z}$ -gradué dans $\mathcal{A}$ muni d'un endomorphisme d homogène de degré -1 tel que $d \circ d = 0$. Un complexe est borné à gauche si ses composantes homogènes en degrés supérieurs à un nombre N sont toutes 0, il est borné à droite si ses composantes homogènes en degrés inférieurs à un nombre n sont toutes 0 et il est borné si il est à la fois borné à gauche et à droite. Un morphisme entre complexes $(C, d) \rightarrow (C', d')$ est un morphisme $\varphi : C \rightarrow C'$ dans $\mathcal{A}$ qui est homogène de degré 0 tel que $\varphi \circ d = d' \circ \varphi$. La classe de complexes (borné à gauche ou borné à droite ou borné) avec des morphismes de complexes est une catégorie abélienne notée $C(\mathcal{A})$ dans le cas général (ou $C^+(\mathcal{A})$ ou $C^-(\mathcal{A})$ ou $C^b(\mathcal{A})$ dans les cas bornés).

Soient (C, d) et (C', d') deux complexes. Un morphisme $\varphi : (C, d) \rightarrow (C', d')$ est homotope à zéro si il existe un morphisme $h : C \rightarrow C'$ dans $\mathcal{A}$ homogène de degré 1 tel que $\varphi = h \circ d + d' \circ h$. Il est évident que si φ est un morphisme homotope à 0, alors pour tous les morphismes de complexes $\psi : (C', d') \rightarrow (C'', d'')$ et $\chi : (C'', d'') \rightarrow (C, d)$ les morphismes $\psi \circ \varphi$ et $\varphi \circ \chi$ sont homotopes à 0. Deux morphismes avec la même source et le même but sont homotopes si leur différence est homotope à 0. La catégorie homotopique $K(\mathcal{A})$ est la catégorie ayant comme objets des complexes et l'ensemble de morphismes entre deux complexes est l'ensemble de classes d'homotopie de morphismes de complexes. De façon analogue on définit aisément les catégories $K^b(\mathcal{A})$, $K^-(\mathcal{A})$ et $K^+(\mathcal{A})$. Ce sont des

catégories triangulées, et sauf cas triviaux non abéliennes. Il est donc impossible de parler d'un noyau, d'un conoyau, etc.

On obtient tout de même un foncteur $\mathcal{A} \longrightarrow C^b(\mathcal{A})$ et des foncteurs $C^b(\mathcal{A}) \longrightarrow C^+(\mathcal{A})$, $C^b(\mathcal{A}) \longrightarrow C^-(\mathcal{A})$ ainsi que $C^*(\mathcal{A}) \longrightarrow C(\mathcal{A})$. Finalement on obtient des foncteurs évidents $C^*(\mathcal{A}) \longrightarrow K^*(\mathcal{A})$ pour $* \in \{\emptyset, +, -, b\}$.

Il nous faut une troisième étape.

L'homologie $H(C)$ d'un complexe (C, d) est l'objet $\mathbb{Z}$ -gradué $\ker(d)/\operatorname{im}(d)$. Un morphisme de complexes $\varphi : (C, d) \longrightarrow (C', d')$ induit un morphisme $H(\varphi) : H(C) \longrightarrow H(C')$. Deux morphismes homotopes induisent le même morphisme sur l'homologie. On obtient ainsi un foncteur $H : K(\mathcal{A}) \longrightarrow \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{A}$. Un morphisme $\varphi : (C, d) \longrightarrow (C', d')$ est un quasi-isomorphisme si $H(\varphi)$ est un isomorphisme. Les objets de la catégorie dérivée $D(\mathcal{A})$ sont les mêmes que ceux de la catégorie $C(\mathcal{A})$. Les morphismes entre objets (C, d) et (C', d') dans la catégorie dérivée sont des classes d'équivalences des triplets $(s, (Z, \partial), f)$ où (Z, ∂) est un objet de la catégorie dérivée, $s : (Z, \partial) \longrightarrow (C, d)$ est un quasiisomorphisme et $f : (Z, \partial) \longrightarrow (C', d')$ est un morphisme de complexes. Un triplet $(s, (Z, \partial), f)$ est équivalent à un autre triplet $(s', (Z', \partial'), f')$ si le but de s' et le but de s coïncident, si le but de f et le but de f' coïncident et si il existe un triplet $(s'', (Z'', \partial''), f'')$ avec but de s'' et but de s égal et but de f et but de f'' égal ainsi qu'un morphisme de complexes $g : (Z'', \partial'') \longrightarrow (Z, \partial)$ et un morphisme de complexes $g' : (Z'', \partial'') \longrightarrow (Z', \partial')$ tels que $f'' = f \circ g = f' \circ g'$ et $s'' = g \circ s = g' \circ s'$:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Z & & \\
 & \swarrow s & \uparrow & \searrow f & \\
 C & \xleftarrow{s''} & Z'' & \xrightarrow{f''} & C' \\
 & \swarrow s' & \downarrow & \nearrow f' & \\
 & & Z' & &
 \end{array}$$

est comutatif. Le lecteur expérimenté vérifiera immédiatement que ceci est une construction de limites. De façon analogue on définit les variantes $D^*(\mathcal{A})$ où $* \in \{+, -, b\}$.

De nouveau on obtient des foncteurs $K^*(\mathcal{A}) \longrightarrow D^*(\mathcal{A})$ qui sont l'identité sur les objets et un morphisme $\varphi : (C, d) \longrightarrow (C', d')$ sera envoyé sur la classe de $(id, (C, d), \varphi)$. On vérifie aisément que ceci est bien défini non seulement au niveau de la catégorie des complexes mais aussi au niveau de la catégorie homotopique.

Un foncteur d'une importance particulière d'une catégorie dérivée $D^*(\mathcal{A}) \longrightarrow D^b(\mathcal{A})$ est le foncteur de décalage en degrés. Ce foncteur $[n] : D^*(\mathcal{A}) \longrightarrow D^b(\mathcal{A})$ est défini par $(\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} C_k, d)[n] = (\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} C_{k+n}, (-1)^n d)$ au niveau des objets et par l'identité au niveau des morphismes.

2 Symétries de la catégorie dérivée

Une fois définie, la catégorie dérivée donne lieu à plusieurs structures annexes dont une qui nous intéresse ici tout particulièrement.

Si $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne, le groupe d'auto-équivalences attire l'attention depuis longtemps. Effectivement, dans le cas où $\mathcal{A}$ est la catégorie des modules d'un anneau, la théorie de Morita nous décrit toutes les auto-équivalences de $\mathcal{A}$ qui préservent la structure inhérente. Ce sont les auto-équivalences exactes.

Une théorie analogue pour les catégories dérivées est celle de Jeremy Rickard [13, 14] avec les améliorations et simplifications considérables de Bernhard Keller [9, 10] si on considère que la catégorie dérivée d'une catégorie de modules est pour la théorie des catégories triangulées en quelque sorte ce qui est une catégorie de modules pour la théorie des catégories abéliennes. Ce point de vue est soutenu par des découvertes récentes de Idun Reiten et

Michel van den Bergh sur une classification des catégories héréditaires avec un groupe de Grothendieck de type fini [12].

Theorem 1 (Rickard, Keller)[13, 14, 9, 10] Si B est une k -algèbre plate en tant que module sur l'anneau de base commutatif k , et si A est une k -algèbre, telle que $D^b(A\text{-mod}) \simeq D^b(B\text{-mod})$ en tant que catégories triangulées, alors il existe un objet X de $D^b(B \otimes_k A^{op} \text{-mod})$ tel que $X \otimes_A^{\mathbb{L}} -$ est une équivalence.

A remarquer que le produit tensoriel dérivé à gauche est défini comme étant le produit tensoriel $X \otimes_A P$ avec une résolution projective P d'un complexe C avec X . Pour de plus amples détails de cette construction le lecteur pourra consulter [11, section 6]. Si pourtant A et B sont tous les deux projectifs en tant que k -modules, alors X peut être choisi comme étant un complexe avec des composantes homogènes projectives en tant que B -modules et projectives en tant que A^{op} -modules.

C'est un problème ouvert de savoir si toute équivalence entre catégories dérivées $D^b(A\text{-mod})$ et $D^b(B\text{-mod})$ en tant que catégories triangulées est induit par produit tensoriel dérivé à gauche avec un complexe de bi-modules, même dans le cas où k est un corps.

Une équivalence $X \otimes_A^{\mathbb{L}} -$ est dit de type standard. On prendra le point de vue que seules les équivalences de type standard nous intéressent.

Definition 2.1 [16, 18] Soit A une k -algèbre qui est projectif en tant que k -module pour un anneau commutatif k .

$$TrPic_k(A) := \frac{\{F : D^b(A\text{-mod}) \rightarrow D^b(A\text{-mod}) \mid F \text{ est équivalence de type standard}\}}{\text{isomorphisme}}$$

est un groupe avec loi interne $- \otimes_A^{\mathbb{L}} -$.

Il est à noter qu'il est nécessaire de supposer que A soit projectif en tant que k -module bien que pour le théorème de Rickard et Keller on n'a besoin que de A est plat en tant que k -module. A défaut de la projectivité le produit tensoriel dérivé à gauche n'est pas toujours associatif.

Une autre remarque semble utile. Comme $A \otimes_k A^{op} \text{-mod}$ est une sous-catégorie pleine de $D^b(A \otimes_k A^{op} \text{-mod})$ une comparaison des théorèmes de Morita et de Rickard-Keller montre qu'on déduit du foncteur évident

$$A \otimes_k A^{op} \text{-mod} \longrightarrow D^b(A \otimes_k A^{op} \text{-mod})$$

un monomorphisme

$$Pic_k(A) \hookrightarrow TrPic_k(A)$$

où $Pic_k(A)$ est le groupe d'auto-équivalences exactes de $A\text{-mod}$ modulo isomorphisme. Ce groupe est bien étudié et il est bien connu (cf e.g. [1]) que le groupe d'automorphismes extérieures k -linéaires de A est un sous-groupe de $Pic_k(A)$:

$$Aut_k(A)/Inn(A) \hookrightarrow Pic_k(A)$$

3 Symétries dérivées sur la catégorie abélienne

Le groupe $TrPic_k(A)$ agit naturellement sur toute sorte de structures annexes à la catégorie dérivée. Les automorphismes d'une algèbre de Hopf A qui préservent l'augmentation méritent une considération particulière. Ils sont notés $Aut_{k,1}(A)$. De façon analogue on regardera les auto-équivalences de type standard de $D^b(A\text{-mod})$ pour une algèbre de Hopf

A qui préservent le module trivial k à isomorphisme près avec une attention particulière. En fait ceci n'est qu'un cas particulier de la situation suivante. Soit A une k -algèbre projectif en tant que k -module. On fixe une fois pour toute un A -module M et on définit

$$HD_A(M) := \{[F] \in TrPic(A) \mid F(M) \simeq M\}$$

et il est clair que ceci est un sous-groupe de $TrPic_k(A)$. Comme maintenant

$$Hom_{D^b(A)}(M, M[n]) = Ext_A^n(M, M)$$

moralement le groupe $HD_A(M)$ devrait agir sur $Ext_A^n(M, M)$. Evidemment il se pose la question de savoir si l'opération naturellement définie est bien définie et effectivement on verra dans quelques instants que ceci nécessite une hypothèse supplémentaire. Donc, plus prudemment on définit sur la classe des couples

$$\{(\alpha_X, X) \mid \alpha_X : X \otimes_A^{\mathbb{L}} M \xrightarrow{\sim} M; [X] \in HD_A(M)\}$$

une relation d'équivalence

$$(\alpha_X, X) \approx (\alpha_Y, Y) \Leftrightarrow \exists \eta : X \xrightarrow{\sim} Y \text{ tel que } \alpha_X \circ (\eta \otimes id_M) = \alpha_Y$$

et sur les classes d'équivalence $\widetilde{HD}_A(M)$ une loi interne inspirée par la construction d'un produit semidirect en théorie de groupes. $\widetilde{HD}_A(M)$ est alors un groupe et $Ext_A^n(M, M)$ un $k \widetilde{HD}_A(M)$ -module. Alors, la projection sur la deuxième composante est un isomorphisme si et seulement si tout automorphisme de M en tant que A -module est induit par un η_M où η est un automorphisme du foncteur identité de $D^b(A)$, c.-à-d. multiplication par un élément central inversible de A .

Theorem 2 [19] *Si tout automorphisme du A -module M est induit par multiplication avec un élément central inversible de A , alors $Ext_A^n(M, M)$ est un $k HD_A(M)$ -module.*

La question des propriétés fonctorielles de cette structure se pose. Sans grand problème on déduit d'un homomorphisme d'anneaux $\kappa : K \longrightarrow k$ un homomorphisme de groupes

$$K \otimes_k - : HD_A(M) \longrightarrow HD_{K \otimes_k A}(K \otimes_k M)$$

ainsi que le morphisme naturel

$$K \otimes_k - : Ext_A^n(M, M) \longrightarrow Ext_{K \otimes_k A}^n(K \otimes_k M, K \otimes_k M)$$

et on trouve le resultat suivant.

Proposition 3.1 *Le morphisme $K \otimes_k - : Ext_A^n(M, M) \longrightarrow Ext_{K \otimes_k A}^n(K \otimes_k M, K \otimes_k M)$ est $HD_A(M)$ -linéaire.*

4 Application à la théorie homotopique

Un cas nous intéresse tout particulièrement. Il s'agit d'une algèbre de groupe kG pour un groupe G qui est de façon standard une algèbre de Hopf. Le choix naturel pour le module M devrait être le cas d'un module trivial. Dans ce cas, évidemment l'hypothèse du Théorème 2 a lieu. De plus, il est bien connu que

$$H^n(G, k) = Ext_{kG}^n(k, k)$$

est un objet avec interprétation topologique éminente : En effet

$$H^n(G, k) = H^n(BG, k)$$

où BG est l'espace classifiant, un espace topologique, un espace d'Eilenberg MacLane $K(G, 1)$, avec premier groupe d'homotopie isomorphe à G et les autres groupes d'homotopie disparaissant. Il vérifie une quantité de propriétés universelles, par exemple tout G -fibré principal $E \twoheadrightarrow B$ est produit fibré d'un G -fibré principal $EG \twoheadrightarrow BG$ universel par un morphisme $B \rightarrow BG$ unique à homotopie près. La cohomologie simpliciale de cet espace de base universel BG à coefficients dans k est alors isomorphe à $Ext_{kG}^n(k, k)$.

Comme on a vu

$$Aut_k(kG)/Inn(kG) \hookrightarrow TrPic_k(kG)$$

on n'a qu'à observer que

$$Aut_{k,1}(kG) \longrightarrow HD_{kG}(k)$$

et de plus $Aut(G) \hookrightarrow Aut_{k,1}(kG)$. Immédiatement on voit que $Inn(G) \subseteq Inn(kG)$ mais il existe des exemples de groupes finis G tel que

$$Inn(kG) \cap Aut(G) \neq Inn(G)$$

et ceci même dans le cas $k = \mathbb{Z}$. On peut consulter ici [15] ou un exemple récent de Martin Hertweck [5, 6]. Pour un p -groupe G par contre on obtient égalité suite à un vieux resultat de Coleman [3] et des améliorations par Leonard Scott.

De toute façon, $Out(G) := Aut(G)/Inn(G)$ agit sur $H^*(G, k)$. Cette action est bien connue des topologues car le groupe d'applications $BG \rightarrow BG$ continues et inversibles à homotopie près est exactement $Out(G)$ (cf [2]).

L'action de ce groupe, bien que tout naturel et bien connue, semble pourtant mal étudiée. Un travail récent avec Eric Jespers essaie de répondre à une question de Stefan Jackowski qui a demandé¹ si pour un p groupe G une telle action est fidèle, si une telle question est liée à la structure des classes de conjugaison de G , et tout cela pour un anneau de coefficients $\mathbb{F}_p$ ou bien $\mathbb{Z}$. On a pu établir sans trop de problème (Oberwolfach Vortragsbuch août 1997) que le groupe cyclique d'ordre p^2 pour un nombre premier p et l'automorphisme qui élève un générateur à sa $1 + p$ -ième puissance procure un exemple où cette action n'est pas fidèle dans le cas d'un corps de coefficients de caractéristique p . Dans la perspective de la question de Jackowski il semble naturel de considérer uniquement les automorphismes qui préservent les classes de conjugaison de G . Un tel automorphisme est appelé presque intérieur.

Theorem 3 [7] *Soit $G = C \rtimes A$ un p -groupe où C est cyclique et A abélien. Alors, si α est un automorphisme presque intérieur de G qui induit l'identité sur $H^3(G, \mathbb{F}_p)$, alors α est intérieur.*

Utilisant le logiciel GAP [4] on a pu vérifier que pour tout 2-groupe d'ordre au plus 32 le groupe d'automorphismes presque intérieurs modulo les automorphismes intérieurs agit fidèlement sur $H^*(G, \mathbb{F}_2)$. La même chose est vraie pour les groupes d'ordre 64 à l'exception d'une bonne vingtaine de groupes. On a utilisé pour ce resultat expérimental la liste, établie par Jon Carlson, de mod 2 cohomologies des 2-groupes d'ordre au plus 64. On note qu'il y a 267 groupes d'ordre 64 et 51 groupes d'ordre 32. Deux groupes d'ordre 64 sont trop compliqués pour notre logiciel, trois groupes manquent dans la liste de Jon Carlson et n'ont pas pu être traités à cause de ce fait, et 19 groupes échappent de nos études pour l'instant.

On peut aussi bien s'intéresser à la structure de $H^*(G, k)$ en tant que module sur le groupe $Out(G)$. Déjà l'exemple le plus simple possible donne un phénomène tout à fait surprenant.

¹Problem 18 of the problem session in the "American Mathematical Society summer research institute" Seattle 1996, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **63** (1998)

Theorem 4 [8] *Soient n et m des nombres naturels, alors la suite exacte de coefficients universels*

$$0 \longrightarrow H^{2m}(C_n^2, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} k \longrightarrow H^{2m}(C_n^2, k) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H^{2m+1}(C_n^2, \mathbb{Z}), k) \longrightarrow 0$$

est scindée en tant que suite de $SL_2(\mathbb{Z})$ -modules si et seulement si $\binom{n}{2} \cdot \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, k) \subseteq n \cdot k$.

Comme cette action bien connue rentre maintenant dans un cadre plus général des actions des catégories dérivées il nous semble pouvoir élucider ces résultats par cette vue plus abstraite. Les recherches dans cette direction continuent. On remarque finalement que sous certaines conditions on a réussi à montrer dans [20] que l'action de $HD_{kG}(k)$ sur $H^*(G, k)$ commute à restriction et transfert des sous-groupes $C_G(P)$ où P est un p -sous-groupe de G et k est un corps de caractéristique p . Dans [21] on a tiré des conséquences remarquables si G possède un p -Sylow sous-groupe abélien.

References

- [1] Hyman Bass, *Algebraic K-theory*.
- [2] David Benson, *Representations and cohomology II*, Cambridge University Press 1991.
- [3] Donald Coleman, *On the modular group ring of a p -group*, Proceedings American Mathematical Society **15** (1964) 511–514.
- [4] The GAP Group *GAP-Groups, Algorithms and Programming, Version 4*, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen, Germany and School of Mathematical and Computational Sciences, U.St.Andrews, Scotland
- [5] M. Hertweck, *A counterexample to the isomorphism problem for integral group rings of finite groups*, accepté pour Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de France.
- [6] M. Hertweck, *Eine Lösung des Isomorphieproblems für ganzzahlige Gruppenringe von endlichen Gruppen* (1999) Shaker Verlag, ISBN 3-8265-6055-8
- [7] Eric Jespers and Alexander Zimmermann, *Group Automorphism Action on Group Cohomology* (2000), preprint.
- [8] Eric Jespers and Alexander Zimmermann. *SL_2 -action on the cohomology of a rank two abelian group with arbitrary coefficient domain*, à paraître dans Proceedings of the American Mathematical Society
- [9] Bernhard Keller, *A remark on tilting theory and DG-algebras*, Manuscripta Mathematica **79** (1993) 247–253.
- [10] Bernhard Keller, *Bimodule complexes via strong homotopy actions*, Algebras and Representation theory **3** (2000).
- [11] Steffen König and Alexander Zimmermann, *Derived equivalences for group rings* (with contributions by Bernhard Keller, Markus Linckelmann, Jeremy Rickard and Raphaël Rouquier), Lecture Notes in Mathematics 1685, Springer Verlag, Berlin 1998.
- [12] Idun Reiten et Michel van den Bergh, *Grothendieck groups and tilting objects*, Algebras and Representation theory **4** (2001).
- [13] Jeremy Rickard, *Morita theory for derived categories*, Journal of the London Mathematical Society **39** (1989) 436–456.
- [14] Jeremy Rickard, *Derived equivalences as derived functors*, Journal of the London Mathematical Society **43** (1991), 37–48.
- [15] Klaus W. Roggenkamp and Alexander Zimmermann, *Outer group automorphisms may become inner in the integral group ring*, Journal of Pure and Applied Algebra 103 (1995) 91–99.

- [16] Raphaël Rouquier and Alexander Zimmermann, *A Picard group for derived module categories*, accepté pour publication dans Proceedings of the London Mathematical Society.
- [17] Jean-Louis Verdier, *Des catégories dérivées des catégories abéliennes*, Astérisque **239** (1996).
- [18] Alexander Zimmermann, *Derived Equivalences of Orders*, dans Proceedings of the ICRA VII, Mexico, eds: Bautista, Martinez, de la Pena. Canadian Mathematical Society Conference Proceedings **18**, (1996) 721–749.
- [19] Alexander Zimmermann, *Auto-equivalences of derived categories acting on cohomology*, à paraître dans Archiv der Mathematik.
- [20] Alexander Zimmermann, *Cohomology of groups and splendid equivalences of derived categories*, à paraître dans Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.
- [21] Alexander Zimmermann, *Cohomology of groups, abelian Sylow subgroups and splendid equivalences*, Algebra Montpellier Announcements (electronic) 01-2000.
- [22] Alexander Zimmermann, *Braid groups as self-equivalences of derived categories*, preprint.

Amiens, Janvier 2001.