Sur les représentations des ordres et des groupes

Alexander Zimmermann

LAMFA, Université de Picardie, 33 rue St Leu, 80039 Amiens Cedex

janvier 1998

Résumé

Cet article est une version développée d'un exposé effectué à l'occasion de la "Journée Mathématique et Informatique, hiver 1997". Il donne une introduction à la théorie des représentations des ordres et des groupes sur un anneau de Dedekind et il évoque les liens avec certaines questions des équivalences relatives aux catégories associées, comme la catégorie dérivée de l'anneau de groupe.

Introduction

La théorie des représentations des ordres classiques réunit différents aspects des mathématiques pures. La motivation pour étudier ces objets vient d'une part, des essais de généralisations de l'algèbre commutative au cas non-commutatif, des questions spécifiques à l'algèbre commutative et à la théorie des nombres, comme la structure des modules galoisiens, dont on parlera plus tard, et d'autre part des questions sur les représentations des groupes finis sur un anneau naturel : celui des entiers relatifs.

Ce texte est une introduction à certaines de ces questions, tout en limitant le niveau des prérequis au minimum. Nous allons d'abord décrire la motivation arithmétique, mentionnant la relation à la théorie galoisienne, ensuite nous décrirons l'approche venant de la théorie des groupes, en détaillant complètement un exemple après cela nous introduirons les fondements d'une découverte extremement puissante de Grothendieck qui donnera peut être dans l'avenir une perspective beaucoup plus étendue de la théorie des ordres classiques. Le texte finira avec la description de certaines découvertes faites récemment par Raphaël Rouquier et l'auteur.

Tout ce qui est dit dans les sections qui ne traitent pas des catégories dérivées est classique, à quelques exceptions près. En général je ne donnerai des références que si je considère qu'un résultat n'est pas classique. Les autres résultats ont été obtenus il y a au moins 50 ans.

Cet article est destiné aux étudiants de maîtrise en algèbre ou aux étudiants en thèse dans un autre domaine que l'algèbre. Je suppose des connaissances élémentaires sur les groupes, les anneaux et les corps telles qu'on devrait trouver dans un cours d'algèbre de maîtrise ou dans le livre [8]. Dans les dernières sections il est utile de connaître quelques définitions de base du langage des catégories, telles que l'on peut trouver dans les introductions de [8] ou de [9] sur ce sujet. Je suppose vrai le lemme de Zorn.

1 Les origines

En théorie des nombres on considère un corps de base K ; très souvent on pose $K = \mathbb{Q}$ le corps des nombres rationnels. On considère un sous-anneau R de K avec la propriété que K est le plus petit sous-corps de K contenant R. Soit L un corps contenant K. Nous supposons que L est de dimension finie en tant que K-espace vectoriel. Associé à R et à l'extension de corps $L : K$ on définit l'anneau des entiers dans L comme suit : un élément $l \in L$ est dit *entier sur* R si l est racine d'un polynôme unitaire sur K à coefficients dans R.

Théorème 1.1 *L'ensemble des éléments* $algint_R(L) := \{l \in L |\ l \text{ est entier sur } R\}$ *est un anneau.*

Définition 1 Un anneau intègre R de corps de fractions K est *intégralement clos* si $algint_R(K) = R$.

Définition 2
- Un anneau est *noethérien* si tout idéal à gauche est de type fini.
- Un anneau commutatif, noethérien, sans diviseurs de zéro, intégralement clos et tel que tout idéal premier est maximal est un *anneau de Dedekind.*

Un anneau principal est un anneau de Dedekind. L'anneau des entiers sur un anneau de Dedekind d'une extension de dimension finie est un anneau de Dedekind. Les anneaux de Dedekind sont les anneaux qui sont le plus proche de l'arithmétique élémentaire.

Ces anneaux ont une structure riche. Par exemple :

Définition 3 Soit R un anneau de Dedekind. Sur l'ensemble $\mathfrak{I}$ des idéaux non nuls de R on définit une relation d'équivalence : Un idéal I est équivalent à un idéal J s'il existe un $l \in L$ tel que $I = l \cdot J$. Le quotient par cette relation d'équivalence s'appelle $Cl(R)$ le *groupe de classes de* R. Le groupe de classes est un groupe pour la multiplication habituelle des idéaux.

Lemme 1.2 *Soit* R *un anneau de Dedekind. Pour deux idéaux* I *et* J *on a* $I \oplus J \simeq R \oplus I \cdot J$. *Si* $R = algint_{\mathbb{Z}}L$ *où* L *est une extension de corps de degré fini sur* $\mathbb{Q}$, *alors le groupe* $Cl(R)$ *est fini.*

Une grande partie de la théorie des nombres s'occupe de questions concernant l'anneau $algint_R(L)$. Voici quelques exemples :

- La structure du groupe des unités $R^* = \{s \in R |\ s \cdot R = R\}$.
- Si L est galoisien sur K, alors il est facile de voir que le groupe de Galois G de L sur K opère sur $algint_R(L)$. On s'intéresse à la structure de cette opération de G sur R, c.-à.-d. la structure du module R en tant que module sur le groupe de Galois, la structure du module galoisien additif. Je recommande le livre de Fröhlich [3] ou de V. Snaith [18].
- La même question pour R^*. Ici je recommande le livre récent de A. Weiss [21]
- L'etude du groupe de classes $Cl(algint_R(L))$.

Je vais discuter des généralisations au cas non-commutatif de ces constructions dans les sections qui viennent.

Néanmoins, je mentionne que la géométrie algébrique utilise des notions analogues. Cela donne une interprétation géométrique de certains des objets qu'on discute ici.

De plus les méthodes géométriques permettent d'obtenir des résultats surprenants. Si on considère des anneaux d'entiers sur un corps de nombres de dimension finie sur $\mathbb{Q}$ plutôt que des anneaux de polynômes on parle de géométrie arithmétique. Cette discipline est en vaste expansion, et pas seulement après la démonstration de la conjecture de Taniyama-Weil, et en conséquence de la conjecture de Fermat, par Taylor et Wiles.

En outre, il faut remarquer que les deuxième et troisième questions ci-dessus mènent naturellement à ces généralisations non-commutatives. En effet, supposons que L est de dimension finie sur $\mathbb{Q}$, le groupe de Galois n'est commutatif que si L est contenu dans le corps engendré par toutes les racines de l'unité dans $\mathbb{C}$.

2 Ordres classiques : définition et propriétés élémentaires

Soit R un anneau de Dedekind et K son corps de fractions. Au lieu de regarder les corps L contenant K et de dimension finie sur K et leurs entiers dans L, on regarde les sous-anneaux Λ d'un produit direct $\prod_{i=1}^{k} Mat_{n_i}(L_i)$ d'anneaux de matrices sur des extensions L_i de K, pour des corps L_i ; $i = 1, \ldots, k$, éventuellement des corps gauches, de dimension finie sur K.

Pour obtenir une structure suffisamment riche on demande certaines propriétés supplémentaires.

Définition 4 Soit R un anneau de Dedekind de corps de fractions K. Soient $n_1, \ldots, n_k$ des entiers positifs et soient L_i des corps contenant K et de dimension finie sur K. Un sous-anneau Λ de $A := \prod_{i=1}^{k} Mat_{n_i}(L_i)$ s'appelle *R-ordre classique* si

- Λ contient une K-base de A et si
- Λ contient une R-base finie.

Une petite remarque devrait être faite ici. En général on demande au lieu de la deuxième condition que Λ soit un R-module projectif de type fini. Cette définition est plus naturelle au vu des applications. J'ai choisi d'éviter de surcharger la définition.

Définition 5 Un R-module P est *projectif* si pour tout surjection $A \stackrel{\phi}{\longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow} B$ de R-modules et tout homomorphisme de R-modules $\psi : P \longrightarrow B$ il existe un homomorphisme $\chi : P \longrightarrow A$ de R-modules tel que $\psi = \phi \circ \chi$.

Il est évident que si on peut choisir une base dans P, un tel homomorphisme χ existe toujours. Donc, on peut voir la projectivité comme généralisation de l'éxistence d'une base. Par exemple dans l'anneau $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ l'idéal (projectif) engendré par $1 + \sqrt{-5}$ et 2 n'est pas principal. En effet, dans cet idéal on a deux décompositions en éléments premiers

$$6 = (1 + \sqrt{-5}) \cdot (1 - \sqrt{-5}) = 2 \cdot 3,$$

mais cela n'est pas possible pour un anneau principal avec factorization unique dans idéaux premiers.

On remarque que les deux conditions sont nécessaires. Le corps K même n'est pas un R-ordre, car la deuxième condition n'est pas remplie. En plus, dans le produit

direct de deux corps, la copie de R dans la première composante n'est pas un ordre non plus car la première condition n'est pas remplie. On peut dire que la première condition assure qu'un ordre est suffisamment grand, et la deuxième condition assure qu'il n'en est pas trop.

C'est facile à voir que pour un anneau de Dedekind R, un R-ordre est noethérien aussi.

Pour la théorie des ordres en général je recommande les livres de Curtis et Reiner [1], ou bien les livres de Roggenkamp et Huber-Dyson [15] ainsi que de Roggenkamp [14].

3 Représentations de groupes

Les questions à la fin de la section 1 nous conduisent à une application des définitions de la section 2 à la théorie des groupes.

Soit G un groupe fini. En sciences, on discute souvent des symétries mais ce que l'on entend par là ce sont plutôt les invariances d'un sous-ensemble d'un espace vectoriel sous l'action d'un sous-groupe parfois fini du groupe linéaire général. Donc, ce qu'on doit discuter coté mathématique ce sont les homomorphismes d'un groupe fini G dans $Gl_n(\mathbb{R})$ pour un certain entier n. En chimie on regarde plutôt les homomorphismes $G \longrightarrow Gl_n(\mathbb{Z})$. Les structures réelles ou complexes s'en déduisent.

On discute donc les homomorphismes de groupes $G \longrightarrow Gl_n(\mathbb{Z})$. Pour être plus systématique, on remplace encore $\mathbb{Z}$ par un anneau de Dedekind quelconque.

Définition 6 Soit G un groupe et R un anneau de Dedekind. Un *RG-réseau (ou représentation de G sur R)* est un homomorphisme de groupes $G \longrightarrow Gl_n(R)$ pour un entier positif n.

Un premier exemple est l'homomorphisme du groupe C_2 à deux éléments dans $Gl_2(\mathbb{Z})$. Soit c l'élément non trivial de C_2. On définit

$$\begin{array}{rcl} \phi : C_2 & \longrightarrow & Gl_2(\mathbb{Z}) \\ 1 & \longrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ c & \longrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} \psi : C_2 & \longrightarrow & Gl_2(\mathbb{Z}) \\ 1 & \longrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ c & \longrightarrow & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

On s'aperçoit qu'il n'y a pas de matrice A dans $Gl_2(\mathbb{Z})$ telle que $A \cdot \phi(c) = \psi(c) \cdot A$. On dit que les deux représentations ne sont pas équivalentes.

Définition 7 Soit G un groupe, R un anneau de Dedekind et n un entier positif. Une représentation $\phi : G \longrightarrow Gl_n(R)$ est équivalente à une représentation $\psi : G \longrightarrow Gl_n(R)$ s'il existe un $A \in Gl_n(R)$ tel que $A\phi(g) = \psi(g)A$ pour tout $g \in G$.

Les algèbres les plus simples sont des algèbres semisimples.

Définition 8 Soit A un anneau. A est semisimple si tout idéal est un facteur direct. C'est-à-dire : pour tout idéal à gauche I il existe un idéal à gauche J tel que $I+J=A$ et $I \cap J = \{0\}$.

Un anneau A est noethérien si et seulement si toute chaîne croissante d'idéaux

$$A > \ldots > I_2 > I_1$$

est finie. La propriété duale est plus forte.

Définition 9 Un anneau A est *artinien* si toute chaîne décroissante d'idéaux

$$A > I_1 > I_2 > \ldots$$

est finie.

Un théorème de Hopkins montre qu'être artinien est plus fort qu'être noethérien.

Théorème 3.1 (Hopkins [4]) *Un anneau qui est artinien est aussi noethérien.*

Un théorème de Wedderburn détermine les algèbres qui sont à la fois semisimples et artiniennes.

Théorème 3.2 (Wedderburn) *Soient K un corps commutatif et A une K-algèbre artinienne semisimple. Alors, A est isomorphe à un produit direct fini d'algèbres de matrices $Mat_{n_i}(D_i)$ sur des corps D_i (pas forcément commutatifs) sur K.*

$$A \simeq \prod_{i=1}^{k} Mat_{n_i}(D_i)$$

On voit apparaître les mêmes anneaux que dans la définition 4. Le lien avec les groupes vient d'un théorème de Maschke.

Théorème 3.3 (Maschke) *Soient G un groupe fini, K un corps tel que l'ordre de G est inversible dans K et $\phi : G \longrightarrow GL_n(K)$ une représentation. Alors, l'anneau $\sum_{g \in G} K \cdot \phi(g)$ en tant que sous-anneau de $Mat_n(K)$ est semisimple artinien.*

Un cas particulièrement intéressant est le cas d'une algèbre de groupe.

On pose ici $n = |G|$ l'ordre du groupe fini G. Donc, $GL_n(R)$ est le groupe d'automorphismes de l'espace vectoriel de base G. La représentation $\rho : G \longrightarrow GL_n(R)$ est définie par la condition qu'elle envoie un élément $g \in G$ sur la matrice qui envoie chaque élément h de la base G sur l'élément gh de la base. Il est évident que

$$ker(\rho) = \{1\}.$$

On appelle une représentation *fidèle* dont le noyau est trivial.

L'anneau

$$\sum_{g \in G} R \cdot \rho(g) =: RG \text{ en tant que sous-anneau de } Mat_{|G|}(R)$$

s'appelle l'anneau de groupe sur R. Dans le cas où R est un corps on parle aussi de l'algèbre de groupe.

Corollaire 3.4 *Soit R un anneau de Dedekind contenant $\mathbb{Z}$ et soit G un groupe fini. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ une représentation $\phi : G \longrightarrow GL_n(R)$ définit un ordre $\Lambda_\phi := \sum_{g\in G} R \cdot \phi(g)$.*

En effet, les théorèmes de Wedderburn et de Maschke montrent que $A := K\Lambda_\phi := \sum_{g\in G} K \cdot \phi(g)$ est une algèbre de matrices comme exigé. Bien sur, $\phi(G)$ est une base de Λ_ϕ et de A.

On peut donc voir l'anneau RG comme objet arithmétique non commutatif.

3.1 Un exemple

Examinons l'exemple du groupe symétrique sur trois lettres S_3. Ce groupe est le groupe de symétrie du triangle équilatéral. S_3 est d'ordre 6. On voit immédiatement que S_3 est engendré par deux éléments a et b où a est la rotation autour du centre du triangle avec angle $2\pi/3$ et b est une réflexion qui laisse un sommet fixe et échange les deux autres. On a des relations

$$a^3 = b^2 = baba = 1$$

Cela donne une présentation du groupe avec générateurs et relations

$$S_3 :=< a, b|\ a^3 = b^2 = baba = 1 >$$

et il est facile de voir que $S_3 = \{1, a, a^2, b, ab, a^2b\}$. Donnons une représentation

$$\begin{array}{ccc} S_3 & \longrightarrow & GL_4(\mathbb{Z}) \\ a & \longrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ b & \longrightarrow & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Il n'est pas très difficile de voir que ces matrices vérifient bien les relations de a et b dans le groupe S_3 et définissent donc un homomorphisme de groupes. La première chose qu'on remarque est que Λ_ϕ est contenu dans l'anneau

$$\begin{pmatrix} \mathbb{Z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & 0 \\ 0 & 3\mathbb{Z} & \mathbb{Z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{Z} \end{pmatrix}$$

qui est isomorphe à

$$\mathbb{Z}_- \times \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 3\mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{pmatrix} \times \mathbb{Z}_+.$$

Ici, pour des raisons de notation, j'ai associé à chacun de ces deux facteurs de dimension (rang) 1 un symbol : $+$ et $-$. On remarque de plus que l'image est contenue

dans le sous-anneau de formé des éléments dont la différence des deux coefficients de dimension 1 est un multiple de 2 et la différence du coefficient de $\mathbb{Z}_+$ et du coefficient $(2,2)$ dans la matrice ainsi que la différence du coefficient de $\mathbb{Z}_-$ et du coefficient $(1,1)$ dans la matrice sont des multiples de 3.

Ces congruences caractérisent $\phi(\mathbb{Z}S_3)$: la démonstration consiste à écrire une base et résoudre un système d'équations linéaires. Elle est élémentaire et je l'omets. En consequence, l'anneau décrit ci dessus est isomorphe à $\mathbb{Z}S_3$.

D'abord je remarque comment on trouve ces matrices. Comme le groupe cyclique d'ordre 3 engendré par a est distingué, toute représentation du quotient, qui est d'ordre 2, est une représentation de S_3. J'ai pris la représentation ψ. La matrice de dimension deux vient du fait que S_3 agit sur $\mathbb{Z}[\zeta_3]$ où $\zeta_3^2+\zeta_3+1=0$ et l'extension est de degré 3. L'élément a agit par multiplication par ζ_3 et b agit par conjugaison complexe, qui est l'automorphisme non trivial de Galois. La matrice par rapport à une base appropriée donne la représentation. On remarque que les éléments $1, \zeta_3, \zeta_3^2$ forment un triangle équilatéral dans le plan complexe. De nouveau on voit la théorie galoisienne aparaître. Ce principe est très efficace pour obtenir des représentations d'un groupe résoluble sur $\mathbb{Q}$.

Si on utilise un autre anneau de base R contenant $\mathbb{Z}$ comme anneau de base, l'image ci-dessus ne diffère pas trop de la situation dans ce cas là. En effet, l'anneau RS_3 peut être déduit de l'anneau $\mathbb{Z}S_3$. Le lecteur habitué à l'utilisation du produit tensoriel déduit RS_3 par la propriété

$$RS_3 \simeq R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}S_3 \ .$$

Sinon, tout cela peut être déduit en résolvant l'équation linéaire ci-dessus sur R au lieu de sur $\mathbb{Z}$. Il faut distinguer 4 cas différents.

- Si 6 est inversible dans R, alors $RS_3 \simeq R \times Mat_2(R) \times R$.
- Si $2R \neq R$ et $3R = R$, alors $RS_3 \simeq Mat_2(R) \times RC_2$ et RC_2 est un sous-anneau de $R \times R$ qui est engendré en tant que R-module par les deux éléments $(1,1)$ et $(0,2)$.
- Si $2R = R$ et $3R \neq R$, alors RS_3 s'exprime de manière très similaire à $\mathbb{Z}S_3$. On remplace $\mathbb{Z}$ par R et seule la congruence entre les coéfficients R_+ et R_- disparait.
- Si ni 2 ni 3 sont inversible dans R, alors RS_3 est obtenu directement de $\mathbb{Z}S_3$ en remplacant $\mathbb{Z}$ par R.

Dans la section 5.2 nous allons utiliser surtout l'anneau

$$R = \mathbb{Z}_3 := \{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \mid pgcd(3,q) = 1 = pgcd(p,q)\}.$$

L'anneau $\mathbb{Z}_3$ est un anneau local, c.-à.-d. il n'y a qu'un seul idéal maximal non-trivial. On voit que $\mathbb{Z}_3$ est un anneau de base pour lequel le troisième cas ci-dessus s'applique. Dans ce cas là, l'anneau RS_3 reste indécomposable, c.-à.-d. il ne se décompose pas en somme directe de deux idéaux bilatères. Par contre il y a une décomposition en deux facteurs directs des idéaux à gauche. Les deux facteurs sont des modules projectifs indécomposables. Le premier facteur comprend la première colonne de l'anneau de matrices avec la composante $\mathbb{Z}_{3_-}$ et le deuxième facteur comprend la deuxième colonne de l'anneau de matrices avec la composante $\mathbb{Z}_{3_+}$.

4 Équivalences des catégories abéliennes et dérivées

Je n'expliquerai pas les notions élémentaires de catégories. Le lecteur qui ne connait pas ces constructions peut trouver le nécessaire dans Mac Lane [9]. Le lecteur germanophone peut profiter du livre de Pareigis [11].

Le but de la théorie des représentations est de comprendre un anneau noethérien à partir de la connaissance des proprietés de certains de ses modules. La question ultime est donc : imaginons que l'on connait toute la catégorie des modules de type fini $A-mod$ d'un anneau noethérien A, que peut-on dire de A ?

4.1 Catégories de modules

La question la plus radicale peut être formulée donc par : "Donner en termes constructifs des conditions nécessaires et suffisantes pour que pour deux anneaux A et B on ait une équivalence de catégories "

$$A-mod \simeq B-mod\ .$$

Cette question a été résolu par Kiiti Morita [10] qui a donné le résultat suivant.

Théorème 4.1 (Morita [10]) *Soient A et B deux anneaux, alors $A-mod \simeq B-mod$ si et seulement s'il existe un progénérateur P de $A-mod$ tel que $B \simeq End_A(P)$. De plus, P est un A-module-B et*

$$P\otimes_B - \simeq Hom_B(P,-) : B-mod \longrightarrow A-mod$$

est une équivalence de catégories.

Ici, un progénérateur est un module projectif de type fini tel que A est un facteur direct d'une somme directe finie de copies de P. Dans la pratique il est souvent facile de controler "l'ensemble" des progénérateurs.

Ce théorème est un des théorèmes les plus célèbres de toute l'algèbre non-commutative. On ne peut pas sur-estimer l'influence de ce théorème sur l'évolution du sujet depuis 1958.

Malheureusement, les progénérateurs dans le cas des anneaux de groupes sont rares et la condition est trop restrictive. On observe que les catégories de modules de deux anneaux de groupes sont très proches, tellement proches que beaucoup des invariants standard des représentations de groupes sont égaux, mais il n'y a pas de progénérateur dont l'anneau d'endomorphismes soit isomorphe à l'anneau de l'autre groupe.

4.2 Catégories dérivées

Récemment les théoriciens des représentations ont commence à s'intéresser à ce concept de Grothendieck et de Verdier datant des années 60. Cette catégorie est plus grande que la catégorie de modules, dans la plupart des cas beaucoup plus grande. Donc, intuitivement il y a plus de place pour arranger une équivalence.

De quoi s'agit-il ?

Définition 10 Soit A un anneau noethérien.

– O Un A-module $\mathbb{Z}$-gradué M est un A-module qui se décompose en somme directe
$$M = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$$
de A-modules. Le module M_n s'appelle *la composante homogène de degré* n.

M Un morphisme $\phi : M \longrightarrow N$ de deux A-modules $\mathbb{Z}$-gradués est *homogène de degré* k si ϕ est un homomorphisme de A-modules et $\phi(M_n) \subseteq N_{n+k}$ pour tout n. Donc, $\phi = \oplus_{n\in\mathbb{Z}}\phi_n$ avec des homomorphismes $\phi_n : M_n \longrightarrow N_{n+k}$.

C La catégorie des A-modules $\mathbb{Z}$-gradués avec morphismes les homomorphismes homogènes de degré 0 est notée *A-grad.*

– O Un *complexe de A-modules* est un A-module $\mathbb{Z}$-gradué muni d'un endomorphisme d_M de degré -1 avec $d_M \circ d_M = 0$. Soient (M, d_M) et (N, d_N) deux complexes de A-modules. Un complexe (M, d_M) est *borné à droite* si le nombre de composantes homogènes non nulles en degrés négatifs du A-module gradué M est fini. Un complexe (M, d_M) est *borné* si le nombre de composantes homogènes non nuls du A-module gradué M est fini. Un complexe est à *homologie bornée* si en tout degré, à un nombre fini d'exceptions près, le noyau de d_n est égal à l'image de d_{n+1}.

M Un *morphisme de complexes* $\phi : M \longrightarrow N$ est un morphisme homogène de A-modules gradués tel que $\phi \circ d_M = d_N \circ \phi$.

C La catégorie des complexes bornés à droite de A-modules avec les morphismes de complexes est notée par $C^-(A)$.
La catégorie des complexes bornés de A-modules avec les morphismes de complexes est notée par $C^b(A)$.
La catégorie des complexes bornés à droite de A-modules et à homologie bornée avec les morphismes de complexes est notée par $C^{-,b}(A)$.

– O Les objets à considérer sont des complexes, bornés, bornés à droite et/ou à homologie bornée, de A-modules projectifs de type fini.

M Soient (M, d_M) et (N, d_N) deux complexes. Un morphisme de complexes $\phi : (M, d_M) \longrightarrow (N, d_N)$ est homotope à zéro s'il y a un morphisme $h : M \longrightarrow N$ de A-modules gradués de degré 1 tel que $\phi = h\circ d_M + d_N \circ h$. Deux morphismes de complexes sont homotopes si leur différence est homotope à 0. L'homotopie est une relation d'équivalence. On considère les classes d'équivalence comme morphismes.

C La *catégorie dérivée bornée* $D^b(A)$ est la catégorie ayant pour objets les complexes de modules projectifs de type fini, bornés à droite et à homologie bornée. Les morphismes sont les classes d'homotopie de morphismes de complexes.
La *catégorie à homotopie bornée* $K^b(A)$ est la catégorie ayant pour objets les complexes de modules projectifs de type fini, bornés. Les morphismes sont les classes d'homotopie des morphismes de complexes.
Dans cette logique on a $D^b(A) = K^{-,b}(A)$.

Après avoir défini la catégorie dérivée on cherche des liens entre A-mod et $D^b(A)$.

Lemme 4.2 *Soit A un anneau noethérien. Alors A-mod est une sous-catégorie pleine de $D^b(A)$.*

En effet un module de type fini peut être représenté par sa résolution projective : Comme M est de type fini, il existe un n_0 tel que $A^{n_0} \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow M$. Le noyau est de nouveau de type fini car A est noethérien. On continue avec le noyau et par récurrence, oubliant M on a obtenu un objet dans $D^b(A)$. La définition des modules projectifs assure que cet objet ne dépend pas des différents choix, à isomorphisme près. De plus, tout homomorphisme entre deux modules peut être relevé à ses résolutions projectives et cela ne dépend que d'un morphisme homotope à 0.

Souvent on appelle ce style d'arguments "diagram chasing", la chasse dans les diagrammes. Le lecteur qui reconstruira les détails comprendra de quoi il s'agit.

Il y a une particularité de ces catégories $D^b(A)$ et $K^b(A)$: il n'y a pas de notion de noyau d'un morphisme. Au lieu de cela ces catégories sont triangulées. Un traitement axiomatique de cette propriété se trouve dans [20, 19]. Pour nous il suffit de mentionner que l'image d'une suite exacte de A-modules est un triangle dans $D^b(A)$. Un triangle se construit à partir d'un morphisme $\phi : (M, d_M) \longrightarrow (N, d_N)$ dans $D^b(A)$. C'est un triple (C, i, p) où C est le complexe

$$(M[1] \oplus N, \begin{pmatrix} -d_M & 0 \\ \phi & d_N \end{pmatrix}),$$

appelé cône, i est le plongement naturel $N \longrightarrow C$ et p est la projetion $C \longrightarrow M[1]$. Ici, pour un module gradué M, on note par $M[k]$ le module où la composante homogène en degré n est M_{n+k}.

Quelles sont les anneaux A et B permettant des équivalences des catégories $D^b(A)$ et $D^b(B)$?

Cette question a été résolu par la thèse de Jeremy Rickard en 1989 avec une simplifcation et généralisation par Bernhard Keller.

Théorème 4.3 (Rickard et Keller) *Soient A et B deux anneaux.*

[12] Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- *$D^b(A) \simeq D^b(B)$ en tant que catégories triangulées.*
- *il y a un objet T dans $K^b(A)$ avec les propriétés*
  1. *$Hom_{K^b(A)}(T, T[i]) = 0$ pour tout $i \neq 0$.*
  2. *$End_{K^b(A)}(T) \simeq B$ en tant qu'anneaux.*
  3. *La plus petite sous-catégorie triangulé et pleine de $K^b(A)$ contenant T et tous ces facteurs directs des sommes directes finies de T contient aussi A.*

T est alors un complexe basculant.

[13, 7] Soient A et B des R-algèbres pour un anneau commutatif R. Si A est projectif en tant que R-module et si $D^b(A) \simeq D^b(B)$, alors il existe un complexe X dans $D^b(A \otimes_R B^{op})$ tel que

$$X \otimes_B - : D^b(B) \longrightarrow D^b(A)$$

est une équivalence de catégories. Ici, $X \otimes_B B$ est un complexe basculant dans $K^b(A)$ avec anneau d'endomorphismes B.

X est alors un complexe basculant bilatère.

Les démonstrations des théorèmes de Morita, de Rickard ou de Keller ne sont pas faciles. Pour les théorèmes de Rickard et de Keller le lecteur peut consulter les notes [6].

Si T n'a qu'une seule composante homogène non nulle, alors T est un progénérateur et le cas se réduit au théorème de Morita. Si T est isomorphe à un module (ou plutôt l'image du plongement d'un module,) alors les facteurs directs de T s'appellent *modules basculants*. Cette incohérence a des raisons historiques.

5 Les groupes de Picard

Pour illustrer la force du concept de catégorie dérivée je vais discuter la question suivante. Supposons qu'il y a une équivalence entre deux catégories dérivées, ou de modules. Est-elle unique ? Et sinon, combien a-t-on ?

5.1 Généralités

Dans le cas classique A. Fröhlich a introduit un objet, le groupe de Picard d'un anneau noethérien. Il a été inspiré d'une idée encore plus ancienne en géométrie algébrique. Je ne vais pas entrer dans ces détails, mais il est néanmoins très intéressant de connaître de l'existence de ces liens.

Définition 11 (Fröhlich [2]) Soit A un anneau noethérien. Les auto-équivalences de $A - mod$ forment un groupe pour la composition, le groupe de Picard de A, noté par $Pic_{\mathbb{Z}}(A)$. Soit A une R-algèbre pour un anneau commutatif R, alors $Pic_R(A)$ est le sous-groupe des auto-équivalences de $Pic_{\mathbb{Z}}(A)$ formé des auto-équivalences qui sont R-linéaires.

Il est clair que ce groupe paramétre les équivalences possibles lorsqu'il y en a, entre A-mod et B-mod.

De la même manière on définit le groupe de Picard d'une catégorie dérivée. Pour avoir des propriétés raisonnables, il faut supposer les hypothèses du théorème de Rickard et Keller. En plus, il n'est pas démontré que toute équivalence des catégories dérivées est de la forme décrite dans le théorème. Cela est vrai pour les équivalences de Morita, c.-à.-d. les équivalences entre deux catégories de modules. Néanmoins, il est conjecturé que c'est le cas aussi pour les équivalences des catégories dérivées.

Définition 12 (Rouquier, Zimmermann [17]) Soit A une R-algèbre pour un anneau commutatif R qui est projective en tant que R-module. L'ensemble des classes d'isomorphismes de complexes bilatères de A-modules-A forment un groupe pour le produit tensoriel dérivé à gauche[1]. Ce groupe est noté par $TrPic_R(A)$.

Les remarques précédentes prouvent que

$$Pic_R(A) \leq TrPic_R(A) \ .$$

Lemme 5.1 *Soit A une R-algèbre.*
Il y a un homomorphisme de groupes $\phi : Aut_R(A) \longrightarrow Pic_R(A)$, le noyau $ker(\phi)$ étant formé des automorphismes intérieurs.

[1] Cette difficulté technique peut être évitée car un complexe basculant bilatère pour un anneau A considéré ici peut toujours être représenté par un complexe dont les composantes homogènes sont des modules qui sont projectifs en tant que A-modules et projectifs en tant que modules-A.

L'image d'un automorphisme est le bimodule ${}_\phi A_1$ où $a \in A$ opère à gauche via multiplication avec $\phi(a)$ et à droite via multiplication. Le reste n'est pas difficile.

Ce lemme est le point crucial de la plupart des applications du groupe de Picard car il rend fonctoriel le groupe d'automorphismes d'un anneau.

En plus, il est clair que ϕ se prolonge à $TrPic_R(A)$ dès que ce dernier est défini.

$$\begin{array}{ccc} Aut_R(A) & \longrightarrow & Pic_R(A) \\ \| & & \downarrow \\ Aut_R(A) & \longrightarrow & TrPic_R(A) \end{array}$$

est un diagramme commutatif.

Pour $Pic_R(A)$ on souhaîte se débarasser de la dépendance de l'anneau R et on veut avoir un objet qui ne dépend que de A.

Définition 13 Le *centre* d'un anneau A est l'ensemble

$$Z(A) := \{a \in A | \ \forall b \in A : \ ba = ab\}$$

On note $Picent(A) := Pic_{Z(A)}(A)$ le groupe Picent, prononcé "Pique sent" de A.

Pour la théorie du groupe de Picard ordinaire on s'intéresse surtout à $Picent$. Dans le cas d'un anneau commutatif, ce groupe se réduit à l'objet défini différemment en géométrie algébrique.

Théorème 5.2 (Fröhlich [2]) *Soit A une R-algèbre, alors il existe un homomorphisme*

$$Pic_R(A) \stackrel{\zeta}{\longrightarrow} Aut_R(Z(A))$$

avec noyau $Picent(A)$.

Comme, en général, une algèbre n'est pas un module projectif sur son centre, la définition de $TrPicent$ n'est pas évident. Nous avons choisi l'analogue de ce théorème pour $TrPic$ comme définition de $TrPicent$ en tant que noyau de l'application définie dans ce théorème.

Théorème 5.3 (Rouquier, Zimmermann [17]) *Soit A une R-algèbre sur un anneau commutatif R et supposons que A est projectif en tant que R-module. Alors, l'application ζ s'étend à $TrPic(A)$. Plus précisément : Il y a une application $Tr\zeta : TrPic_R(A) \longrightarrow Aut_R(Z(A))$ telle que le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} Pic_R(A) & \stackrel{\zeta}{\longrightarrow} & Aut_R(Z(A)) \\ \downarrow & & \| \\ TrPic_R(A) & \stackrel{Tr\zeta}{\longrightarrow} & Aut_R(Z(A)) \end{array}$$

est commutatif.

Définition 14 [17] Soit A une R-algèbre sur un anneau commutatif R et supposons que A est projectif en tant que R-module. On définit $TrPicent(A) := ker(Tr\zeta)$.

Cette définition marche assez bien. On s'occupe à partir de maintenant des ordres.

Pour un anneau de Dedekind R on peut construire une *localisation*. Cette construction est analogue à la construction des nombres rationnels à partir des entiers relatifs.

Je rappelle la définition. Soit R un anneau commutatif et soit $\wp$ un idéal premier. Sur l'ensemble des couples $(r,p) \in R \times (R \setminus \wp)$ on définit la relation d'équivalence

$$(r,p) \sim (s,q) \Longleftrightarrow \exists t \in R \setminus \wp : \ tqr = tps$$

Bien sûr, l'élément t peut être négligé dans le cas d'un anneau de Dedekind, mais dans un contexte plus général, cet élément est nécessaire pour avoir une relation d'équivalence. L'ensemble des classes d'équivalences est un anneau noté $R_\wp$. Soit R un anneau de Dedekind. L'ensemble des classes d'équivalence est de nouveau un anneau de Dedekind, noté $R_\wp$, qui contient R, qui est contenu dans le corps de fractions K (en effet $K = R_{\{0\}}$) et qui n'a qu'un seul idéal premier non nul : $\wp \cdot R_\wp$. On a rendu inversible les éléments en dehors de $\wp$.

Soit Λ un R-ordre sur un anneau de Dedekind R dans une algèbre semisimple A, et soit $\wp$ un idéal premier de R. On peut former l'ensemble

$$\Lambda_\wp := R_\wp \otimes_R \Lambda$$

qui peut être vu comme anneau engendré par $R_\wp$ et Λ en tant qu'anneau. De toute façon, $\Lambda_\wp$ est un $R_\wp$-ordre dans A.

Pour un anneau commutatif R, on note

$$Spec(R) = \{\wp \leq R | \ \wp \text{ est un idéal premier de } R\}$$

le spectre de R.

Une suite exacte courte de groupes est formée de trois groupes N, G, H et deux homomorphismes de groupes $N \longrightarrow G$ et $G \longrightarrow H$ avec les propriétés suivantes.

- $N \longrightarrow G$ est injective.
- $G \longrightarrow H$ est surjective.
- $ker(G \longrightarrow H) = im(N \longrightarrow G)$.

La suite exacte est alors notée

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 1$$

On peut formuler maintenant un théorème extrèmement puissant car il donne une méthode pour passer des données locales à une donnée globale. On appelle ces méthodes "principe de Hasse".

Théorème 5.4 (Fröhlich [2]) *Les applications canoniques*

$$Picent(\Lambda) \longrightarrow Picent(\Lambda_\wp)$$

induisent une suite exacte courte

$$1 \longrightarrow Picent(Z(\Lambda)) \longrightarrow Picent(\Lambda) \longrightarrow \prod_{\wp \in Spec(R)} Picent(\Lambda_\wp) \longrightarrow 1$$

Cette suite exacte courte est souvet citée comme "suite de localisation de Fröhlich".

Pour appliquer ce théorème, on donne pour tout $\wp$ un automorphisme $\alpha_\wp$ de $\Lambda_\wp$ induisant l'identité sur le centre de $\Lambda_\wp$, et on utilise alors la surjectivité pour relever ces automorphismes à $Picent(\Lambda)$. Après, il faut essayer de modifier cette équivalence de catégories par une équivalence du centre pour obtenir de nouveau un automorphisme, de Λ maintenant.

Avec notre définition de $TrPicent(\Lambda)$ nous avons pu démontrer une généralisation de ce théorème au cas des catégories dérivées.

Théorème 5.5 *Soient R un anneau de Dedekind et Λ un R-ordre. Alors, il existe une suite exacte courte*

$$1 \longrightarrow TrPicent(Z(\Lambda)) \longrightarrow TrPicent(\Lambda) \longrightarrow \prod_{\wp \in Spec(R)} TrPicent(\Lambda_\wp)$$

qui rend le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \to & TrPicent(Z(\Lambda)) & \to & TrPicent(\Lambda) & \to & \prod_{\wp\in Spec(R)} TrPicent(\Lambda_\wp) \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 1 & \to & Picent(Z(\Lambda)) & \to & Picent(\Lambda) & \longrightarrow\!\!\!\!\to & \prod_{\wp\in Spec(R)} Picent(\Lambda_\wp) \end{array}$$

commutatif.

On note $< [1] >$ le sous-groupe engendré par le décalage des degrés, comme expliqué juste avant la définition des complexes basculants.

On ne peut pas avoir surjectivité ici, car notamment le décalage des degrés peut être éffectué séparément dans tous les facteurs directs d'une algèbre. La localisation ne préserve pas l'indécomposabilité d'une algèbre. Par exemple, l'anneau de groupe $\mathbb{Z}C_2$ ne permet aucune auto-équivalence dérivée autre que l'identité. Par contre $TrPicent(\mathbb{Z}_3C_2) \simeq C_\infty \times C_\infty$. Ici, C_2 est le groupe d'ordre 2 et C_∞ est le groupe cyclique infini. Ces propriétés peuvent être déduites du lemme suivant.

Lemme 5.6 (Roggenkamp et Zimmermann [24]) *Soit Λ un anneau local, c.-à.-d. admettant qu'un seul idéal à gauche maximal. Alors, tout complexe basculant sur Λ est un module de Morita.*

La démonstration n'est pas difficile.

5.2 Quelques applications du groupe de Picard

Le groupe de Picard ordinaire $Pic_R(A)$ a été très souvent considéré. Surtout pour des ordres il a des propriétés remarquables. A l'aide d'une modification on peut en déduire des propriétés des classes de conjugaisons des unités d'un anneau de groupe. Dans [22] il était par exemple montré, à l'aide de certains propriétés d'une généralisation de $Pic_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G)$ pour le groupe G diédral d'ordre $2 \cdot 2^n$ que tout élément d'ordre 2 fait partie d'une base de groupe de $\mathbb{Z}G$ si et seulement si le groupe de classes de $\mathbb{Z}[\zeta_{2^n} + \zeta_{2^n}^{-1}]$ est trivial. Ici, on note par ζ_m une racine primitive m-ième de l'unité. Le fait que $Cl(\mathbb{Z}[\zeta_{2^n} + \zeta_{2^n}^{-1}])$ devrait être trivial est une conjecture de H. Cohn. Elle est vérifiee pour $n = 8$ sous l'hypothèse de Riemann généralisée. Donc, en cherchant des involutions exotiques dans $\mathbb{Z}D_{256}$ on peut peut-être trouver un contre-exemple pour la conjecture de Riemann généralisée. En détail :

Théorème 5.7 (Zimmermann [22]) *Soit D_{2^n} le groupe diédral d'ordre 2^{n+1}, c.-à.-d. le groupe de symétrie du 2^n-gone régulier. Notons, conformement à la tradition, par $h^+_{2^k}$ l'ordre du groupe $Cl(\mathbb{Z}[\zeta_{2^k} + \zeta^{-1}_{2^k}])$. Il y a*

$$2 \cdot (1 + 2^n \cdot \prod_{k \leq n} h^+_k)$$

classes de conjugaison d'éléments d'ordre 2 dans le groupe des unités de $\mathbb{Z}D_{2^n}$. Parmi ces classes, $2 \cdot (1 + 2^n)$ classes contiennent des éléments qui sont contenus dans un sous-groupe G du groupe des unités de $\mathbb{Z}D_{2^n}$ isomorphe à D_{2^n}.

La relation avec les unités dans l'anneau de groupe du groupe diédral est tout à fait surprenante. D'autres liens entres nombre de classes et propriétés des unités de certains anneaux de groupes sont discutés dans [23]. De nouveau, une généralisation du groupe de Picard et certaines de ces propriétés fonctorielles sont essentielles.

La suite de localisation de Fröhlich s'applique aussi d'une autre manière.

Théorème 5.8 (Roggenkamp et Zimmermann [16]) *Pour toute paire de nombres premiers impairs $p \neq q$ et différents, il existe un groupe fini G d'ordre $2^6 \cdot p^2 \cdot q^2$ et un automorphisme α tel que α n'est pas intérieur, mais il existe un corps de nombres L (de dimension finie sur $\mathbb{Q}$) avec $R = algint_{\mathbb{Z}}L$ tel que α induit un automorphisme intérieur de RG. Cela implique que α induit un automorphisme trivial sur l'anneau de cohomologie $H^*(G, R)$.*

Ce théorème donne un contre-exemple à une conjecture de Z. Marciniak et S. Jackowski.

Supposons la construction donnée. La démonstration procède tout à fait dans l'esprit décrit après l'énoncé de la suite de localisation de Fröhlich. Posons $\Lambda := \mathbb{Z}G$. On vérifie avec des méthodes "standard" que α induit un automorphisme intérieur sur Λ_p pour tout premier p de $\mathbb{Z}$. Après, utilisant le lemme 5.1 on sait que α, interprété dans $\prod_{p \in Spec\mathbb{Z}} \Lambda_p$ est l'identité, donc, α induit un élément dans $Picent(Z(\Lambda))$. Un corps de classes de Hilbert (cf la théorie des corps de classes globaux) annule notre élément.

Je vais procéder avec un exemple, l'anneau de groupe $\mathbb{Z}_3S_3$.

Il est facile de voir que

$$Z(\mathbb{Z}_3S_3) \simeq \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}_3^3 |\ x - y \in 3\mathbb{Z}_3 \text{ et } z - y \in 3\mathbb{Z}_3\}\ .$$

Donc,

$$Aut_{\mathbb{Z}_3}(Z(\mathbb{Z}_3S_3)) \simeq S_3$$

Par contre,

$$Pic_{\mathbb{Z}_3}(\mathbb{Z}_3S_3) \simeq C_2$$

est induit par l'échange de $(\mathbb{Z}_3)_+$ et $(\mathbb{Z}_3)_-$ ainsi que la conjugaison par $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc, ζ ne peut pas être surjective dans ce cas.

Par contre, $Tr\zeta$ l'est.

Théorème 5.9 (Rouquier et Zimmermann [17])

$$TrPic_{\mathbb{Z}_3}(\mathbb{Z}_3S_3)/ < [1] > \simeq \ PSL_2(\mathbb{Z})$$

et

$$TrPicent(\mathbb{Z}_3S_3)/ < [1] > \simeq \ \Gamma(2) := ker(PSL_2(\mathbb{Z}) \longrightarrow PSL_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}))$$

est le sous-groupe de congruence au niveau 2.

La démonstration utilise $PSL_2(\mathbb{Z}) \simeq C_2 * C_3$. Les générateurs sont M, qui est le générateur de $Pic_{\mathbb{Z}_3}(\mathbb{Z}_3S_3)$, et F qui est associé au complexe X défini comme suit : $X_0 := Hom_{\mathbb{Z}_3}(\mathbb{Z}_3S_3, \mathbb{Z}_3)$, $X_1 := P_1 \otimes_{\mathbb{Z}_3} Hom_{\mathbb{Z}_3}(P_1, \mathbb{Z}_3)$, et la différentielle est l'évaluation. Ici, P_1 est un des modules projectifs indécomposables. Il serait souhaîtable d'avoir une démonstration qui évite les manipulations sur les mots et utilise au lieu de cela l'action de $PSL_2(\mathbb{Z})$ sur un arbre.

Le lecteur observera que le groupe des tresses à 3 brins modulo son centre est isomorphe à $PSL_2(\mathbb{Z})$. En plus, si on ne factorise pas $< [1] >$, on obtient une extension centrale de degré 2 de ce groupe de tresses.

Références

[1] C. Curtis et I. Reiner, Methods of Representation Theory : in particularly of groups and orders Vol. 1 & 2, John Wiley Intrescience, New York 1982 & 1989.

[2] A. Fröhlich, *The Picard group of noncommutative rings, in particular of orders*, Trans Amer. Math. Society **180** (1973) 1-45.

[3] A. Fröhlich, Galois module structure of algebraic integers, Springer Ergebnisse, 3. Folge, Band 1, 1983.

[4] C. Hopkins, *Rings with minimum condition for left ideals*, Annals of Mathematics **40** (1939) 712-730.

[5] S. König et A. Zimmermann, *Tilting hereditary orders*, Communications in Algebra **24** (1996) 1897-1913.

[6] S. König et A. Zimmermann, Derived Equivalences for Group Rings, with contributions by B. Keller, M. Linckelmann, J. Rickard and R. Rouquier, soumis pour publication à Springer Lecture Notes in Mathematics.

[7] B. Keller, *A remark on tilting theory and DG algebras*, Manuscripta Mathematica **79** (1993) 247-253.

[8] S. Lang, Algebra, 2ème édition 1984, Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, Californie, Etats Unis

[9] S. Mac Lane, Categories for the Working Mathematician, Springer Berlin 1971.

[10] K. Morita, *Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition*, Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sec. A **6** (1958) 83-142.

[11] B. Pareigis, Kategorien und Funktoren, Teubner Stuttgart, 1969.

[12] J. Rickard, *Morita theory for derived categories*, J. London Math. Society **39** (1989) 436-456.

[13] J. Rickard, *Derived equivalences as derived functors*, J. London Math. Society **43** (1991) 37-48.

[14] K. W. Roggenkamp, Lattices over Orders II, Springer Lecture Notes in Mathematics 142, Berlin–Heidelberg–New York 1970.

[15] K. W. Roggenkamp et V. Huber-Dyson, Lattices over Orders I, Springer Lecture Notes in Mathematics 115, Berlin–Heidelberg–New York 1970.

[16] K. W. Roggenkamp et A. Zimmermann, *Outer group automorphisms may become inner in the integral group ring*, Journal of Pure and Applied Algebra **103** (1995) 91–99.

[17] R. Rouquier et A. Zimmermann, *Picard groups for the derived module category*, preprint 1995.

[18] V. Snaith, Galois module structure, Fields Institute monographs No 2, American Mathematical Society 1994.

[19] J-L Verdier, *Catégories dérivées, état 0*, dans SGA $4\frac{1}{2}$, Springer Lecture Notes in Mathematics **569** (1977).

[20] J-L Verdier, *Des catégories dérivées des catégories abéliennes*, Astérisque **239** (1996).

[21] A. Weiss, Multiplicative Galois module structure, Fields Institute monographs No 5, American Mathematical Society 1996.

[22] A. Zimmermann, *On the torsion units in integral group rings of dihedral 2–groups*, Journal of Algebra 175 (1995), 122-136.

[23] A. Zimmermann, *Torsion units in integral group rings, conjugacy classes locally versus globally*, Archiv der Mathematik **66** (1996) 455-466.

[24] A. Zimmermann, *Derived Equivalences of Orders*, Proceedings of the ICRA VII, Mexico, eds : Bautista, Martinez, de la Pena. Canadian Mathematical Society Conference Proceedings **18** (1996) 721-749.