Une Introduction à l'Intégrale de Riemann

Arthur Garnier

5 novembre 2014

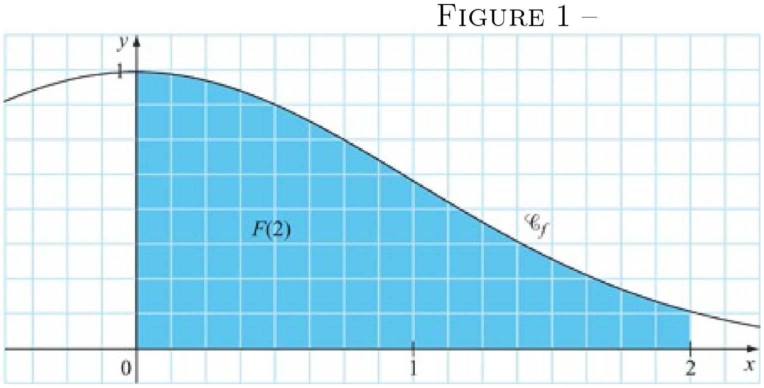
Table des matières

Introduction

C'est au milieu du XVII^{e} siècle, avec les travaux simultanés de Newton et Leibniz, en mécanique notamment, qu'apparaît pour la première fois la notion d'intégrale d'une fonction. Par exemple, lorsqu'on recherche la position d'un point dans l'espace connaissant ses coordonnées initiales et sa vitesse, lorsqu'on calcule le champ électrique créé par une charge ponctuelle (en utilisant les équations de Maxwell), ou encore lorsqu'on calcule une aire ou un volume, on recherche en fait la valeur de l'intégrale d'une certaine fonction. Nous allons voir que la version formalisée par Riemann en 1854 de la notion d'intégrale d'une fonction réelle de la variable réelle fournit un cadre élégant et assez naturel à tous ces calculs par le biais d'un puissant théorème décrit par Riemann lui-même comme étant "le plus beau que l'on sache démontrer".

Nous allons commencer par donner l'idée générale de la construction de Riemann : Pour fixer les idées, considérons une fonction continue sur un intervalle $[a, b], a < b, a, b \in \mathbb{R}$ comme sur la figure 1. L'aire de la surface en

Figure 1 –

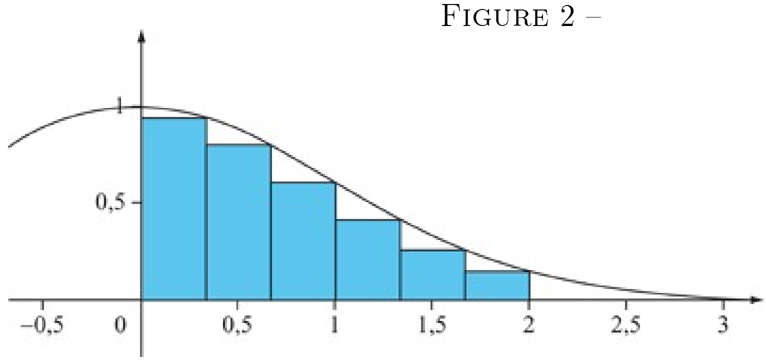


bleu représente ce qu'on veut être l'intégrale de f sur $[a, b]$. Commençons par subdiviser l'intervalle en n sous-intervalles

$$[x_i, x_{i+1}], \quad 0 \leq i \leq n-1, \quad x_0 = a, x_n = b$$

On va approcher l'aire de la figure 1 par la somme des aires de n rectangles de longueur $f(x_i)$ et de largeur $x_{i+1} - x_i$ comme sur la figure 2.

FIGURE 2 –



Notre valeur approximative de l'aire est alors donnée par

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i) \tag{1}$$

Intuitivement, on se rend compte que si on augmente le nombre de points dans notre subdivision, (ce qui est équvalent à dire que l'on réduit la longueur de nos sous-intervalles) l'erreur entre la valeur exacte et notre approximation va diminuer. On a donc envie de "définir" l'intégrale comme la "limite" de (1) lorsque le nombre de points tend vers l'infini. Nous allons donc formaliser tout cela...

Première partie
Les fonctions en escalier

Définition 1. Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle subdivision de $[a, b]$ toute suite finie δ de la forme $\delta = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$. On définit alors le pas de la subdivision par $|\delta| := \max\{|x_i - x_{i-1}|, 1 \leq i \leq n\}$.

Notation 1. On notera $\Delta_{a,b}$ l'ensemble des subdivisions de l'intervalle $[a, b]$.

On peut aussi définir "l'inclusion" d'une subdivision dans une autre ainsi que "l'union" de deux subdivisions :

Définition 2.
1. Si δ_1 et δ_2 sont deux subdivisions de $[a, b]$, on dira que δ_2 est plus fine que δ_1 si on a rajouté un nombre positif ou nul de points à δ_1 pour construire δ_2. Dans ce cas, on notera $\delta_1 \preceq \delta_2$.
2. On définit la subdivision $\delta_1 \vee \delta_2$ comme étant la subdivision constituée des points de δ_1 et de δ_2 que l'on a réordonnés et réindexés pour obtenir une forme similaire à celle de la définition 1. On l'appelle union de δ_1 et δ_2.

Remarque 1. On note que la relation binaire $\preceq$ est une relation d'ordre sur $\Delta_{a,b}$. De plus, on a toujours $\delta_1, \delta_2 \preceq \delta_1 \vee \delta_2$ ainsi que $\delta_1 \vee \delta_2 = \delta_2 \vee \delta_1$.

Exemple 1. Sur $[0, 1]$ la subdivision $0 < 1/4 < 1/2 < 3/4 < 1$ est plus fine que $0 < 1/2 < 1$ et l'union de cette dernière avec $0 < 1/3 < 2/3 < 1$ est $0 < 1/3 < 1/2 < 2/3 < 1$.

Nous pouvons à présent définir la notion de fonction en escalier qui est assez intuitive finalement :

Définition 3. On dit qu'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est en escalier s'il existe une subdivision $\delta \in \Delta_{a,b}$ telle que

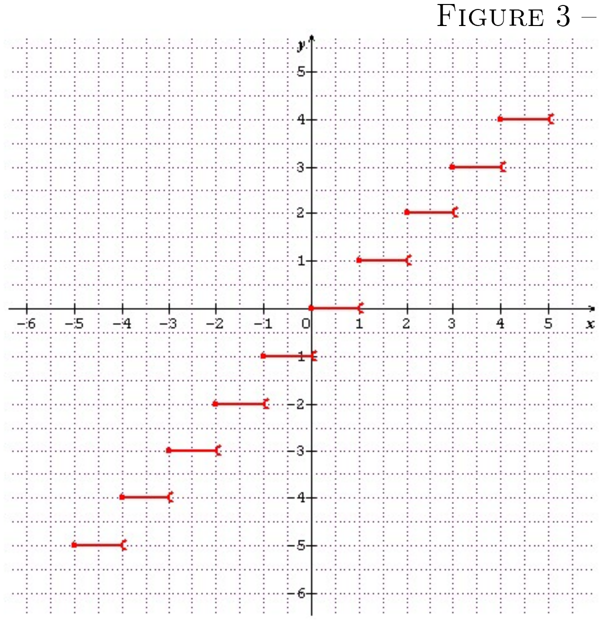
$$\forall 1 \leq i \leq n,\ \exists \lambda_i \in \mathbb{R};\ \forall x \in]x_{i-1}, x_i[,\ f(x) = \lambda_i$$

C'est à dire que f est constante sur chaque sous-intervalle $]x_{i-1}, x_i[$ de $[a, b]$ et y vaut λ_i. Dans ce cas la subdivision δ, non nécessairement unique, est dite bien adaptée à f.

Il est clair avec cette définition qu'à moins d'être constante partout, une fonction en escalier ne peut être continue, donc encore moins dérivable.

Notation 2. On note l'ensemble $\mathcal{E}_{a,b}$ des fonctions en escalier sur $[a, b]$. (C'est un groupe pour l'addition de fonctions et même un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$...)

FIGURE 3 –



Exemple 2. La courbe rouge sur la Figure 3 représente le graphe de la fonction partie entière ($x \mapsto E(x)$) sur $[-5, 5]$ qui est bien une fonction en escalier puisqu'elle est constante sur chaque intervalle de la forme $[n, n+1[$ et vaut n. On constate alors que la subdivision $\delta : -5 < -4 < \ldots < 4 < 5$ est bien adaptée à E.

Nous allons maintenant donner une proposition qui va nous permettre de définir l'intégrale d'une fonction en escalier :

Proposition 1. *Soient $f \in \mathcal{E}_{a,b}$ et $\delta_1, \delta_2 \in \Delta_{a,b}$ deux subdivisions bien adaptées à f. Si $\delta_1 = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$ et $\delta_2 = (a = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = b)$, soient alors $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ et $\mu_1, \ldots, \mu_m \in \mathbb{R}$ tels que :*

$$\begin{cases} \forall 1 \leq i \leq n,\ \forall x \in]x_{i-1},\ x_i[, f(x) = \lambda_i \\ \forall 1 \leq j \leq m,\ \forall x \in]y_{j-1},\ y_j[, f(x) = \mu_j \end{cases}$$

Alors, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - x_{i-1}) = \sum_{j=1}^{m} \mu_j (y_j - y_{j-1}) \tag{2}$$

Démonstration. Tout d'abord, si l'on rajoute un point z à δ_1 par exemple, la valeur de $\sum_i \lambda_i (x_i - x_{i-1})$ ne change pas car

$$z \in]x_{i-1}, x_i[\Rightarrow \lambda_i (x_i - z) + \lambda_i (z - x_{i-1}) = \lambda_i (x_i - x_{i-1})$$

Cela entraîne donc que si l'on rajoute un nombre fini de points à δ_1 ou δ_2, les valeurs des sommes resteront inchangées, donc la valeur calculée avec δ_1 est la même que celle calculée avec $\delta_1 \vee \delta_2$ qui est identique à celle donnée par δ_2, d'où le résultat. $\square$

Définition 4. Soit $f \in \mathcal{E}_{a,b}$ et $\delta = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b) \in \Delta_{a,b}$ une subdivision bien adaptée à f. On appelle intégrale de f sur $[a, b]$ et on note

$$\int_a^b f(t) \mathrm{d}t$$

le réel

$$\int_a^b f(t) \mathrm{d}t := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - x_{i-1})$$

Remarque 2. La Proposition 1 montre que ce réel ne dépend pas de la subdivision choisie pour décrire f et qu'ainsi la Définition 4 fait sens ; c'est-à-dire que l'intégrale ne dépend que de f et de $[a, b]$.

Proposition 2. *Soient $f, g \in \mathcal{E}_{a,b}$. Alors*

1. *L'application* $\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_{a,b} & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \end{array}$ *est linéaire*

   $$(i.e.\ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \int_a^b f(t) + \alpha g(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \alpha \int_a^b g(t)\mathrm{d}t)$$

2. *Si $f \leq g$ alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$

Démonstration. 1) Si $\delta = (a = x_0 < \ldots < x_n = b)$ est une subdivision adaptée à f et g et si

$$\forall x \in]x_{i-1}, x_i[, \ \begin{cases} f(x) = \lambda_i \\ g(x) = \mu_i \end{cases}$$

Alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b f(t) + \alpha g(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \alpha \mu_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - x_{i-1}) + \alpha \sum_{i=1}^{n} \mu_i (x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \alpha \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$$

2) Si $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b]$ alors $\lambda_i \leq \mu_i, \forall 1 \leq i \leq n$ et donc

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu_i (x_i - x_{i-1}) = \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$$

□

Deuxième partie
Définition de l'intégrale de Riemann

Dans cette partie, nous allons définir proprement l'intégrale de (certaines) fonctions bornées sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Pour cela, nous définissons tout d'abord les sommes de Darboux, après avoir introduit une notation :

Notation 3. On écrira dans la suite

$$\mathcal{B}_{a,b} := \{f : [a, b] \to \mathbb{R};\ \exists M > 0;\ \forall x \in [a, b],\ |f(x)| \leq M\}$$

Définition 5. Soient $f \in \mathcal{B}_{a,b}, \delta \in \Delta_{a,b}$. On note

$$\forall 1 \leq i \leq n,\ \begin{cases} m_i := \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \\ M_i := \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \end{cases}$$

On appelle grande somme de Darboux de f relativement à δ (*resp.* petite somme) le réel

$$s_\delta(f) := \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})\ (\textit{resp.}\ S_\delta(f) := \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

Remarque 3. On voit immédiatement que si f est en escalier et si δ est bien adaptée à f, les deux sommes coïncident et sont égales à l'intégrale de f sur $[a, b]$...

Proposition 3. *Soient $\delta_1, \delta_2 \in \Delta_{a,b}, f \in \mathcal{B}_{a,b}$*

1) Si $\delta_1 \preceq \delta_2$ alors $s_{\delta_1}(f) \leq s_{\delta_2}(f) \leq S_{\delta_2}(f) \leq S_{\delta_1}(f)$

2) $\forall \delta_1, \delta_2 \in \Delta_{a,b}, s_{\delta_1}(f) \leq S_{\delta_2}(f)$

Démonstration. 1) Il suffit de montrer le résultat dans le cas où on obtient δ_2 en ajoutant un point y à $\delta_1 = (a = x_0 < \ldots < x_n = b)$ et on suppose que $y \in [x_{i-1}, x_i]$ pour un certain $1 \leq i \leq n$ les deux contributions du segment $[x_{i-1}, x_i]$ dans les petites sommes de Darboux sont :

$$(x_i - x_{i-1}) \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad \text{pour} \quad s_{\delta_1}(f)$$

$$(x_i - y) \inf_{x \in [y, x_i]} f(x) + (y - x_{i-1}) \inf_{x \in [x_{i-1}, y]} f(x) \quad \text{pour} \quad s_{\delta_2}(f)$$

Or on a :

$$\inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \leq \inf_{x \in [y, x_i]} f(x)$$

$$\inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \leq \inf_{x \in [x_{i-1}, y]} f(x)$$

et donc $s_{\delta_1}(f) \leq s_{\delta_2}(f)$. De même, on a $S_{\delta_2}(f) \leq S_{\delta_1}(f)$ et l'inégalité $s_{\delta_2}(f) \leq S_{\delta_2}(f)$ est évidente.
2) en vertu de la remarque 1 on a $s_{\delta_1}(f) \leq s_{\delta_1 \vee \delta_2}(f) \leq S_{\delta_1 \vee \delta_2}(f) \leq S_{\delta_2}(f)$ □

Proposition 4. *Soit $f \in \mathcal{B}_{a,b}$. Alors :*

1) Les ensembles $\{s_\delta(f),\ \delta \in \Delta_{a,b}\}$ et $\{\int_a^b h(t)\mathrm{d}t,\ h \in \mathcal{E}_{a,b},\ h \leq f\}$ sont majorés et

$$\sup_{\delta \in \Delta_{a,b}} s_\delta(f) = \sup_{h \in \mathcal{E}_{a,b},\ h \leq f} \int_a^b h(t)\mathrm{d}t$$

2) Les ensembles $\{S_\delta(f),\ \delta \in \Delta_{a,b}\}$ et $\{\int_a^b h(t)\mathrm{d}t,\ h \in \mathcal{E}_{a,b},\ h \geq f\}$ sont minorés et

$$\inf_{\delta \in \Delta_{a,b}} S_\delta(f) = \inf_{h \in \mathcal{E}_{a,b},\ h \geq f} \int_a^b h(t)\mathrm{d}t$$

3) De plus, on dispose de l'inégalité

$$\sup_{\delta \in \Delta_{a,b}} s_\delta(f) \leq \inf_{\delta \in \Delta_{a,b}} S_\delta(f)$$

Démonstration. 1) Le fait que les ensembles soient majorés est évident. Montrons alors la première égalité.
Soit $\delta \in \Delta_{a,b},\ \delta = (a = x_0 < \ldots < x_n = b)$. On considère la fonction en escalier $g \in \mathcal{E}_{a,b}$ définie par :

$$\begin{cases} \forall 1 \le i \le n,\ \forall t \in]x_{i-1}, x_i[,\ g(t) = \inf\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \\ \forall 0 \le i \le n,\ g(x_i) = f(x_i) \end{cases}$$

Alors

$$s_\delta(f) = \int_a^b g(t)\mathrm{d}t \le \sup_{h \in \mathcal{E}_{a,b},\ h \le f} \int_a^b h(t)\mathrm{d}t,\ \forall \delta \in \Delta_{a,b}$$

$$\Rightarrow \sup_{\delta \in \Delta_{a,b}} s_\delta(f) \le \sup_{h \in \mathcal{E}_{a,b},\ h \le f} \int_a^b h(t)\mathrm{d}t$$

Soient ensuite $\varepsilon > 0,\ h \in \mathcal{E}_{a,b},\ h \le f$ et $\delta \in \Delta_{a,b}$ une subdivision bien adaptée à h.
On écrit $\delta = (a < x_0 < \ldots < x_n = b)$ et $h(x) := \lambda_i,\ \forall x \in]x_{i-1}, x_i[$.
Soit $\eta > 0$ tel que $\gamma := (a = x_0 < x_0 + \eta < x_1 - \eta < x_1 < x_1 + \eta < \ldots < x_n - \eta < x_n = b)$ soit une subdivision de $[a, b]$ et tel que $\eta < \frac{\varepsilon}{4nK}$ où $K > 0$; $\forall x \in [a, b],\ |f(x)| \le K,\ |h(x)| \le K$. On a

$$\forall 1 \le i \le n,\ \forall x \in [x_{i-1} + \eta, x_i - \eta],\ h(x) \le \inf_{x \in [x_{i-1}+\eta, x_i - \eta]} f(x)$$

En calculant l'intégrale de h avec la subdivision γ et en posant $m_i := \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ on obtient :

$$\int_a^b h(t)\mathrm{d}t - s_\gamma(f) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i - x_{i-1})$$

$$-(\sum_{i=0}^{n-1} \eta \inf_{x \in [x_i, x_i + \eta]} f(x) + \sum_{i=1}^n \eta \inf_{x \in [x_i - \eta, x_i]} f(x) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1} - 2\eta) \inf_{x \in [x_{i-1}+\eta, x_i - \eta]} f(x))$$

$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i - x_{i-1} - 2\eta) + \sum_{i=1}^n \eta \lambda_i + \sum_{i=0}^{n-1} \eta \lambda_{i+1}$$

$$-\sum_{i=0}^{n-1} \eta \inf_{x \in [x_i, x_i + \eta]} f(x) - \sum_{i=1}^n \eta \inf_{x \in [x_i - \eta, x_i]} f(x) - \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1} - 2\eta) \inf_{x \in [x_{i-1}+\eta, x_i - \eta]} f(x)$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} \eta(\lambda_{i+1} - \inf_{x\in[x_i,x_i+\eta]} f(x)) + \sum_{i=1}^{n} \eta(\lambda_i - \inf_{x\in[x_i-\eta,x_i]} f(x))$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \eta(\lambda_i - m_i) + \sum_{i=0}^{n-1} \eta(\lambda_{i+1} - m_{i+1})$$

La première somme correspond aux intervalles $[x_i, x_i+\eta]$ et la deuxième aux intervalles $[x_i-\eta, x_i]$. On obtient donc

$$\int_a^b h(t)\mathrm{d}t - s_\delta(f) \leq 4nK\eta < \varepsilon$$

D'où

$$\int_a^b h(t)\mathrm{d}t \leq \sup_{\delta\in\Delta_{a,b}} s_\delta(f) + \varepsilon.$$

Ceci est valable pour toutes les fonctions en escalier inférieure ou égale à f, donc

$$\sup_{h\in\mathcal{E}_{a,b},\ h\leq f} \int_a^b h(t)\mathrm{d}t \leq \sup_{\delta\in\Delta_{a,b}} s_\delta(f) + \varepsilon$$

Et en faisant tendre ε vers 0, il vient

$$\sup_{h\in\mathcal{E}_{a,b},\ h\leq f} \int_a^b h(t)\mathrm{d}t \leq \sup_{\delta\in\Delta_{a,b}} s_\delta(f)$$

Finalement avec on a bien

$$\sup_{h\in\mathcal{E}_{a,b},\ h\leq f} \int_a^b h(t)\mathrm{d}t = \sup_{\delta\in\Delta_{a,b}} s_\delta(f)$$

2) On montre ce point de façon analogue au cas précédent : Les ensembles sont ici aussi clairement minorés. Soient alors $\delta \in \Delta_{a,b}, \delta = (a = x_0 < \ldots < x_n = b)$, $g \in \mathcal{E}_{a,b}$ telles que :

$$\begin{cases} \forall 1 \leq i \leq n,\ \forall t \in]x_{i-1}, x_i[,\ g(t) = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \\ \forall 0 \leq i \leq n,\ g(x_i) = f(x_i) \end{cases}$$

Alors,

$$S_\delta(f) = \int_a^b g(t)\mathrm{d}t \geq \inf_{h\in\mathcal{E}_{a,b},\ h\geq f} \int_a^b h(t)\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow \inf_{\delta\in\Delta_{a,b}} S_\delta(f) \geq \inf_{h\in\mathcal{E},\ h\geq f} \int_a^b h(t)\mathrm{d}t$$

Et on a la première inégalité.

Soient ensuite $\varepsilon > 0,\ h \in \mathcal{E}_{a,b},\ h \geq f,\ \delta \in \Delta_{a,b}$ un subdivision adaptée à h.

On écrit $\delta = (a = x_0 < \ldots < x_n = b)$ et $h(x) = \mu_i,\ \forall x_{i-1} < x < x_i$. Soient encore $K > 0$; $|f(x)|, |h(x)| \leq K,\ \forall x \in [a,b]$ et $\eta > 0$; $\gamma := (a = x_0 < x_0 + \eta < x_1 - \eta < x_1 < x_1 + \eta < \ldots < x_n - \eta < x_n = b) \in \Delta_{a,b}, \eta < \frac{\varepsilon}{4Kn}$.

Comme précédemment, on a

$$\forall 1 \leq i \leq n,\ \forall x_{i-1} + \eta \leq x \leq x_i - \eta,\ h(x) \geq \sup_{x\in[x_{i-1}+\eta, x_i-\eta]} f(x)$$

Et si l'on calcule l'intégrale avec la subdivision γ en posant $M_i := \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$, on obtient

$$S_\gamma(f) - \int_a^b h(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1} - 2\eta) \sup_{x\in[x_{i-1}+\eta, x_i-\eta]} f(x)$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-1} \eta \sup_{x\in[x_i, x_i+\eta]} f(x) + \sum_{i=1}^n \eta \sup_{x\in[x_i-\eta, x_i]} f(x) - \sum_{i=1}^n \mu_i(x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1} - 2\eta) \sup_{x\in[x_{i-1}+\eta, x_i-\eta]} f(x) - \sum_{i)1}^n \mu_i(x_i - x_{i-1} - 2\eta) - \sum_{i=1}^n \mu_i\eta - \sum_{i=0}^{n-1} \mu_{i+1}\eta$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-1} \eta \sup_{x\in[x_i, x_i+\eta]} f(x) + \sum_{i=1}^n \eta \sup_{x\in[x_i-\eta, x_i]} f(x)$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} \eta(\sup_{x\in[x_i, x_i+\eta]} f(x) - \mu_{i+1}) + \sum_{i=1}^n \eta(\sup_{x\in[x_i-\eta, x_i]} f(x) - \mu_i)$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} \eta(M_{i+1} - \mu_{i+1}) + \sum_{i=1}^n \eta(M_i - \mu_i)$$

Il vient alors

$$S_\gamma(f) - \int_a^b h(t)\mathrm{d}t \leq 4Kn\eta < \varepsilon \Rightarrow S_\gamma(f) \leq \int_a^b h(t)\mathrm{d}t + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \inf_{\delta\in\Delta_{a,b}} S_\delta(f) \leq \int_a^b h(t)\mathrm{d}t + \varepsilon \ \Rightarrow \ \inf_{\delta\in\Delta_{a,b}} S_\delta(f) \leq \inf_{h\in\mathcal{E}_{a,b},\ h\geq f} \int_a^b h(t)\mathrm{d}t + \varepsilon$$

On peut encore faire tendre ε vers 0 pour obtenir

$$\inf_{\delta\in\Delta_{a,b}} S_\delta(f) \leq \inf_{h\in\mathcal{E}_{a,b},\ h\geq f} \int_a^b h(t)\mathrm{d}t$$

Et donc

$$\inf_{\delta\in\Delta_{a,b}} S_\delta(f) = \inf_{h\in\mathcal{E}_{a,b},\ h\geq f} \int_a^b h(t)\mathrm{d}t$$

3) Enfin, il suffit de passer au sup et à l'inf dans l'inégalité (2) de la Proposition 3 pour obtenir l'inégalité désirée. $\square$

<u>Définition</u> 6. Soit $f \in \mathcal{B}_{a,b}$

1) On note

$$\int_{[a,b]}^{I} f(t)\mathrm{d}t := \sup_{\delta\in\Delta_{a,b}} s_\delta(f) = \sup_{h\in\mathcal{E}_{a,b},\ h\leq f} \int_a^b h(t)\mathrm{d}t$$

On appelle ce nombre l'intégrale inférieure de f sur $[a,b]$. De même, on appelle intégrale supérieure de f sur $[a,b]$ le nombre

$$\int_{[a,b]}^{S} f(t)\mathrm{d}t := \inf_{\delta\in\Delta_{a,b}} S_\delta(f) = \inf_{h\in\mathcal{E}_{a,b},\ h\geq f} \int_a^b h(t)\mathrm{d}t$$

2) On dit que f est intégrable au sens de Riemann (ou Riemann-intégrable) sur $[a,b]$ si l'on a

$$\int_{[a,b]}^{S} f(t)\mathrm{d}t = \int_{[a,b]}^{I} f(t)\mathrm{d}t$$

Cette valeur commune sera alors appelée intégrale de f sur $[a,b]$ et sera notée

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

De plus, on notera $\mathcal{I}_{a,b}$ l'ensemble des fonctions intégrables sur $[a,b]$.

Remarque 4. Il existe des fonctions dans $\mathcal{B}_{a,b}$ sui ne sont pas intégrables.

Contre-exemple Soient $[a,b]=[0,1]$ et $f:=\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$.
Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, pour tout $\delta\in\Delta_{0,1},\ s_\delta(f)=0,\ S_\delta(f)=1$.
D'où $\int_{[a,b]}^{S} f(t)\mathrm{d}t=0\neq 1=\int_{[a,b]}^{I} f(t)\mathrm{d}t$, donc f n'est pas intégrable sur $[0,1]$.

Troisième partie
Quelques critères d'intégrabilité

Une question se pose naturellement : Quelles sont les fonctions intégrables au sens de Riemann ?

Nous nous proposons donc d'exhiber quelques hypothèses rendant une fonction Riemann-intégrable sur $[a,b]$. Pour ce faire, nous allons commencer par donner un critère qui nous servira beaucoup dans la suite.

Proposition 5. *Soit $f \in \mathcal{B}_{a,b}$. Alors f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta \in \Delta_{a,b}\ ;\ S_\delta(f) - s_\delta(f) < \varepsilon$$

Démonstration. ($\Rightarrow$) Supposons que f soit intégrable. On note $I := \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$

Soit $\varepsilon > 0$. On a :

$$\begin{cases} I = \sup\limits_{\delta \in \Delta_{a,b}} s_\delta(f) \ \Rightarrow\ \exists \delta_1 \in \Delta_{a,b}\ ;\ I - \dfrac{\varepsilon}{2} < s_{\delta_1}(f) \\ I = \inf\limits_{\delta \in \Delta_{a,b}} S_\delta(f) \ \Rightarrow\ \exists \delta_2 \in \Delta_{a,b}\ ;\ I + \dfrac{\varepsilon}{2} > S_{\delta_2}(f) \end{cases}$$

Alors

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < s_{\delta_1}(f) \le s_{\delta_1 \vee \delta_2}(f) \le S_{\delta_1 \vee \delta_2}(f) \le S_{\delta_2}(f) < I + \frac{\varepsilon}{2} \ \Rightarrow\ S_{\delta_1 \vee \delta_2}(f) - s_{\delta_1 \vee \delta_2}(f) < \varepsilon$$

($\Leftarrow$) Soient $\varepsilon > 0$ et $\delta_0 \in \Delta_{a,b}\ ;\ S_{\delta_0}(f) - s_{\delta_0}(f) < \varepsilon$ On a alors

$$s_{\delta_0}(f) \le \sup_{\delta \in \Delta_{a,b}} s_\delta(f) = \int_{[a,b]}^{I} f(t)\mathrm{d}t \le \int_{[a,b]}^{S} f(t)\mathrm{d}t = \inf_{\delta \in \Delta_{a,b}} S_\delta(f) \le S_{\delta_0}(f)$$

Ce qui donne

$$0 \le \int_{[a,b]}^{S} f(t)\mathrm{d}t - \int_{[a,b]}^{I} f(t)\mathrm{d}t < \varepsilon$$

Et ceci étant valable quel que soit $\varepsilon > 0$ on obtient :

$$\int_{[a,b]}^{S} f(t)\mathrm{d}t = \int_{[a,b]}^{I} f(t)\mathrm{d}t$$

Donc f est intégrable, ce qui termine la preuve. $\square$

Remarque 5. On voit immédiatement que pour toutes $f \in \mathcal{I}_{a,b}$ et $\delta \in \Delta_{a,b}$,

$$s_\delta(f) \leq \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leq S_\delta(f)$$

Donc

$$S_\delta(f) - s_\delta(f) < \varepsilon \;\Rightarrow\; S_\delta(f) - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t < \varepsilon,\; \int_a^b f(t)\mathrm{d}t - s_\delta(f) < \varepsilon$$

Nous pouvons à présent donner trois théorèmes d'existence de l'inégrale dans certains cas.

Théorème 1. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction monotone, alors f est intégrable.*

Démonstration. On peut supposer, pour fixer les idées, que f est croissante.
f est bornée car $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$.
Soit $\delta := (a = x_0 < \ldots < x_n = b) \in \Delta_{a,b}$. On a

$$\forall 1 \leq i \leq n,\; \begin{cases} \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = f(x_{i-1}) \\ \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = f(x_i) \end{cases}$$

D'où

$$\begin{aligned} S_\delta(f) - s_\delta(f) &= \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})(f(x_i) - f(x_{i-1})) \\ &\leq |\delta| \sum_{i=1}^{n} f(x_i) - f(x_{i-1}) = |\delta|(f(b) - f(a)) \end{aligned}$$

1) Si $f(a) = f(b)$, alors f est constante et donc $s_\delta(f) = S_\delta(f)$
2) Si $f(a) \neq f(b)$, soit $\varepsilon > 0$. Si $|\delta| < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} > 0$, on a alors
$S_\delta(f) - s_\delta(f) < \varepsilon$, donc f est intégrable, d'parès la Poposition 5. $\square$

On rappelle ici deux théorèmes fondamentaux de topologie dont les démonstrations se trouvent en annexe.

<u>Théorème</u> 2. *Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique, K un compact non vide de E et $f : K \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée et elle atteint ses bornes sur K.*

Et le théorème de Heine :

<u>Théorème</u> 3. *Soient (E, d) et (F, d') deux espaces métriques, K un compact de E et $f : K \to F$ une fonction continue sur K. Alors, f est uniformément continue sur K.*

Nous pouvons à présent démontrer le

<u>Théorème</u> 4. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors f est intégrable.*

Démonstration. D'après les théorèmes rapellés ci-dessus, f est bornée, atteint ses bornes et est uniformément continue sur tout intervalle fermé borné.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [a, b],\ |x - y| < \eta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

Soit $\delta := (a = x_0 < \ldots < x_n = b) \in \Delta_{a,b},\ |\delta| < \eta$.

$\forall 1 \leq i \leq n,\ \exists \alpha_i, \beta_i \in [x_{i-1}, x_i]\ ;\ f(\alpha_i) = \inf\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x),\ f(\beta_i) = \sup\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$

Comme $|\alpha_i - \beta_i| < \eta$, on a $f(\beta_i) - f(\alpha_i) < \frac{\varepsilon}{b-a}$ Il vient alors :

$$S_\delta(f) - s_\delta(f) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})(f(\beta_i) - f(\alpha_i)) < \varepsilon$$

$\square$

Théorème 5. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et continue sur $[a,b]$ sauf peut-être en un nombre fini de points (ie f est continue par morceaux). Alors f est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$.*

Démonstration. Quitte à faire une récurrence, on peut supposer que f ne possède qu'un seul point de discontinuité $c \in]a,b[$.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme $]a,b[$ est ouvert, on peut choisir $\eta > 0$ tel que
$[c-\eta, c+\eta] \subset]a,b[$ et $2\eta(M-m) < \frac{\varepsilon}{3}$ où l'on a posé $M := \sup_{x\in[a,b]} f(x)$ et $m := \inf_{x\in[a,b]} f(x)$.
Par hypothèse, f est continue, donc intégrable sur $[a, c-\eta]$ et sur $[c+\eta, b]$, donc il existe

$$(\delta_1, \delta_2) \in \Delta_{a,c-\eta} \times \Delta_{c+\eta,b} \ ; \ S_{\delta_1}(f) - s_{\delta_1}(f) < \frac{\varepsilon}{3}, \ S_{\delta_2}(f) - s_{\delta_2}(f) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Donc

$$S_{\delta_1 \vee \delta_2}(f) - s_{\delta_1 \vee \delta_2}(f) < \varepsilon$$

□

Remarque 6. 1) Ce résultat montre donc qu'en modifiant la valeur d'une fonction en un nombre fini de points, on ne change ni son intégrabilité, ni la valeur de son intégrale.
2) Supposons que l'on ait choisi de définir l'intégrale avec

$$\int_{[a,b]}^{I} f(t)\mathrm{d}t = \sup_{h\in\mathcal{E}_{a,b},\ h\leq f} \int_a^b h(t)\mathrm{d}t, \ \int_{[a,b]}^{S} f(t)\mathrm{d}t = \inf_{h\in\mathcal{E}_{a,b},\ h\geq f} \int_a^b h(t)\mathrm{d}t$$

(Cette définition est équivalente à celle des sommes de Darboux d'après la Proposition 4.) Alors le Théorème précédent devient trivial.
3) On retrouve ici le fait que les fonctions en escalier sont intégrables.

De plus, on dispose d'un résultat géneral, dû à Darboux, que l'on admettra :

Théorème 6.

$$\forall f \in \mathcal{I}_{a,b},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \ ; \ \forall \delta \in \Delta_{a,b},\ |\delta| < \eta \ \Rightarrow \ S_\delta(f) - s_\delta(f) < \varepsilon.$$

On en déduit l'important résultat suivant traitant de ce qu'on appelle les sommes de Riemann :

<u>Corollaire</u> 1. *Soit* $f \in \mathcal{I}_{a,b}$ *Alors :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ ;\ \forall \delta = (a = x_0 < \ldots < x_n = b) \in \Delta_{a,b}\ ;\ |\delta| < \eta,$$
$$\forall 1 \leq i \leq n,\ \forall c_i \in [x_{i-1}, x_i],$$
$$|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})| < \varepsilon$$

Démonstration. On peut utiliser le théorème précédent, en remarquant que :

$$s_\delta(f) \leq \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \leq S_\delta(f)$$
$$s_\delta(f) \leq \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leq S_\delta(f)$$

Donc, si $S_\delta(f) - s_\delta(f) < \varepsilon$, alors :

$$|\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t| < \varepsilon.$$

□

Le goût amère que laisse le fait d'admettre le théorème de Darboux peut être contourné en démontrant une version alternative du Corollaire précédent, pour laquelle nous devront tout-de-même admettre les propriétés de positivité, linéarité de l'intégrale, ainsi que la relation de Chasles et l'inégalité triangulaire, que nous démontrerons dans la partie suivante.

<u>Théorème</u> 7. *Soient* $n \in \mathbb{N}^*$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue et* $\delta_n := (a = x_0 < \ldots < x_n = b) \in \Delta_{a,b}$
Alors, $\forall 1 \leq i \leq n,\ \forall c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, *on a :*

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

Démonstration. On a

$$f(c_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(c_i)\mathrm{d}t \;\Rightarrow\; f(c_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\mathrm{d}t = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(c_i) - f(t)\mathrm{d}t$$

D'où

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(c_i) - f(t)\mathrm{d}t$$

Pour tout $\eta > 0$, on pose $\omega(\eta) := \sup\{|f(u) - f(v)|,\ a \leq u, v \leq b,\ |u - v| \leq \eta\}$
Il vient alors

$$|\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t| \leq \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \omega(|\delta_n|)\mathrm{d}t = (b-a)\omega([\delta_n|)$$

Or, d'après le Théorème de Heine, $\lim_{\eta \to 0} \omega(\eta) = 0$ d'où $\lim_{n \to +\infty} \omega(|\delta_n|) = 0$ car $\lim_{n \to +\infty} |\delta_n| = 0$. Finalement, on obtient bien

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

□

<u>**Corollaire**</u> **2.** *Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la subdivision régulière*

$$\forall 0 \leq k \leq n,\ x_k := a + k\frac{b-a}{n}$$

Alors

$$\lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a + k\frac{b-a}{n}) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

Démonstration. Clair avec le Théorème 7. □

On peut encore mentionner un corollaire évident du résultat précédent :

Corollaire 3. *Soit* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Alors*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$$

Exemple 3. Soit à calculer :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$$

Avec le Corollaire 3, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \int_0^1 t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$

Quatrième partie

Propriétés générales de l'intégrale

1 Relation de Chasles

Proposition 6. *Soient $[a,c]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $b \in [a,c]$ et $f : [a,c] \to \mathbb{R}$ une application. On a*
1) f est intégrable sur $[a,c]$ si et seulement si elle est intégrable sur $[a,b]$ et sur $[b,c]$.
2) Si f est intégrable sur $[a,c]$ alors,

$$\int_a^c f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\mathrm{d}t$$

Démonstration. 1) ($\Rightarrow$) Supposons f intégrable sur $[a,c]$. Soient $\varepsilon > 0$ et $\delta \in \Delta_{a,c}$ tels que $S_\delta(f) - s_\delta(f) < \varepsilon$. Soient $\gamma \in \Delta_{a,c}$ la subdivision obtenue en ajoutant le point b à δ et $(\delta_1, \delta_2) \in \Delta_{a,b} \times \Delta_{b,c}$ les subdivisions extraites de γ. On a

$$(S_{\delta_1}(f) - s_{\delta_1}(f)) + (S_{\delta_2}(f) - s_{\delta_2}(f)) = S_\gamma(f) - s_\gamma(f) \leq S_\delta(f) - s_\delta(f) < \varepsilon.$$

D'où

$$S_{\delta_1}(f) - s_{\delta_1}(f) < \varepsilon,\ S_{\delta_2}(f) - s_{\delta_2}(f) < \varepsilon.$$

($\Leftarrow$) Supposons f intégrable sur $[a,b]$ et sur $[b,c]$.
Soient $\varepsilon > 0$ et $(\delta_1, \delta_2) \in \Delta_{a,b} \times \Delta_{b,c}$ tels que
$S_{\delta_1}(f) - s_{\delta_1}(f) < \frac{\varepsilon}{2}$, $S_{\delta_2}(f) - s_{\delta_2}(f) < \frac{\varepsilon}{2}$. Soit encore $\delta := \delta_1 \vee \delta_2 \in \Delta_{a,c}$.
On a :

$$S_\delta(f) - s_\delta(f) = S_{\delta_1}(f) + S_{\delta_2}(f) - s_{\delta_1}(f) - s_{\delta_2}(f) < \varepsilon.$$

2) En reprenant les notation précédentes :

$$s_{\delta_1}(f) \leq \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leq S_{\delta_1}(f)$$

$$s_{\delta_2}(f) \leq \int_b^c f(t)\mathrm{d}t \leq S_{\delta_2}(f)$$

$$\Rightarrow\ s_{\delta_1}(f)+s_{\delta_2}(f)=s_\delta(f)\le\int_a^c f(t)\mathrm{d}t\le S_\delta(f)=S_{\delta_1}(f)+S_{\delta_2}(f).$$

Donc $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t+\int_b^c f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$ sont dans l'intervalle $[s_\delta(f),S_\delta(f)]$ qui est de longueur strictement inférieure à ε. On a donc :

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t+\int_b^c f(t)\mathrm{d}t-\int_a^c f(t)\mathrm{d}t\right|<\varepsilon$$

Ceci étant vrai quel que soit $\varepsilon>0$, on a bien l'égalité recherchée. $\square$

Définition 7. Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction intégrable. Par convention, on pose :

$$\int_b^a f(t)\mathrm{d}t:=-\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

Avec la Proposition 6 et la Définition 7, on a de manière évidente :

Théorème 8. *Soient $a,b,c\in\mathbb{R}$ quelconques. Soit f une fonction intégrable sur chaque intervalle fermé $(a,b),(b,c)$ et (a,c). Alors on a :*

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t+\int_b^c f(t)\mathrm{d}t=\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$$

2 Structure algébrique de l'espace des fonctions intégrables

Proposition 7. *Soient $f,g\in\mathcal{I}_{a,b},\ \lambda\in\mathbb{R}$. Alors*

1) $f+g\in\mathcal{I}_{a,b}$ et $\displaystyle\int_a^b f(t)+g(t)\mathrm{d}t=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t+\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$.

2) $\lambda f\in\mathcal{I}_{a,b}$ et $\displaystyle\int_a^b \lambda f(t)\mathrm{d}t=\lambda\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Démonstration. 1) Soient $\varepsilon > 0$ et $\delta_1, \delta_2 \in \Delta_{a,b}$ tels que
$S_{\delta_1}(f) - s_{\delta_1}(f) < \frac{\varepsilon}{2}$, $S_{\delta_2}(g) - s_{\delta_2}(g) < \frac{\varepsilon}{2}$. On pose $\delta := \delta_1 \vee \delta_2$. Alors

$$S_\delta(f) - s_\delta(f) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$S_\delta(g) - s_\delta(g) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Si l'on écrit $\delta = (a = x_0 < \ldots < x_n = b)$, on a, pour tout $1 \leq i \leq n$,

$$\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) + g(x) \leq \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) + \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} g(x)$$

$$\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) + g(x) \geq \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) + \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} g(x).$$

Or, $S_\delta(f) + S_\delta(g) - s_\delta(f) - s_\delta(g) < \varepsilon$ et
$s_\delta(f) + s_\delta(g) \leq s_\delta(f+g) \leq S_\delta(f+g) \leq S_\delta(f) + S_\delta(g)$ donc
$S_\delta(f+g) - s_\delta(f+g) < \varepsilon \;\Rightarrow\; f+g \in \mathcal{I}_{a,b}$.
Par ailleurs,

$$s_\delta(f) + s_\delta(g) \leq \int_a^b f(t) + g(t)\mathrm{d}t \leq S_\delta(f) + S_\delta(g)$$

$$s_\delta(f) + s_\delta(g) \leq \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\mathrm{d}t \leq S_\delta(f) + S_\delta(g)$$

Et donc :

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\mathrm{d}t - \int_a^b f(t) + g(t)\mathrm{d}t\right| < \varepsilon$$

On fait tendre ε vers 0, et on a le résultat.
2) C'est clair. $\square$

Proposition 8. *Soient $f, g \in \mathcal{I}_{a,b}$. Alors $fg \in \mathcal{I}_{a,b}$.*

Démonstration. Supposons d'abord que f et g soient à valeurs positives ou nulles.
Soit $K > 0$; $\forall x \in [a,b]$, $f(x), g(x) \leq K$.

Soient aussi $\varepsilon > 0$ et $\delta := (a = x_0 < \ldots < x_n = b) \in \Delta_{a,b}$ tels que

$$S_\delta(f) - s_\delta(f) < \frac{\varepsilon}{2K},\ S_\delta(g) - s_\delta(g) < \frac{\varepsilon}{2K}.$$

Pour tout $1 \leq i \leq n$ on pose :

$$m_i := \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x),\ m_i' := \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} g(x),\ m_i'' := \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)g(x)$$

$$M_i := \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x),\ M_i' := \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} g(x),\ M_i'' := \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)g(x)$$

On a alors $M_i'' \leq M_iM_i'$ et $m_i'' \geq m_im_i'$, d'où :

$$M_i'' - m_i'' \leq M_iM_i' - m_im_i' = M_iM_i' - m_iM_i' + m_iM_i' - m_im_i'$$

$$= M_i'(M_i-m_i)+m_i(M_i'-m_i') \leq K(M_i-m_i)+K(M_i'-m_i') = K(M_i-m_i+M_i'-m_i')$$

Et donc :

$$S_\delta(fg) - s_\delta(fg) \leq K(S_\delta(f) - s_\delta(f) + S_\delta(g) - s_\delta(g)) < \varepsilon \ \Rightarrow\ fg \in \mathcal{I}_{a,b}$$

Supposons maintenant f et g à valeurs quelconques.
Posons $m := \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ et $m' := \inf_{x\in[a,b]} g(x)$. On a :

$$fg = (f-m)(g-m') + m'f + mg - mm'$$

$f-m$ et $g-m'$ sont positives, donc $(f-m)(g-m')$ est intégrable d'après ce qui précède et on peut appliquer la Proposition 7 pour voir que $m'f$ et mg sont intégrable et donc, toujours avec la Proposition 7, que fg est intégrable. $\square$

Proposition 9. *Soit $f \in \mathcal{I}_{a,b}$. Alors $|f| \in \mathcal{I}_{a,b}$.*

Démonstration. Soient $\varepsilon > 0$ et $\delta := (a = x_0 < \ldots < x_n = b) \in \Delta_{a,b}$ tels que $S_\delta(f) - s_\delta(f) < \varepsilon$.
Pour tout $1 \leq i \leq n$, on pose :

$$m_i := \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x),\ m_i' := \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} |f(x)|$$

$$M_i := \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x),\ M_i' := \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} |f(x)|$$

1) Si $\forall x \in [x_{i-1}, x_i],\ f(x) \geq 0$,
alors $M'_i = M_i$ et $m'_i = m_i$ donc $M'_i - m'_i = M_i - m_i$.

2) Si $\forall x \in [x_{i-1}, x_i],\ f(x) \leq 0$,
alors $M'_i = -m_i$ et $m'_i = -M_i$ donc $M'_i - m'_i = M_i - m_i$.

3) Si f prend des valeurs positives ou nulles et négatives ou nulles sur $[x_{i-1}, x_i]$, on a :

$$M'_i = \max(M_i, -m_i) \leq M_i - m_i,\ m'_i \geq 0$$

donc $M'_i - m'_i \leq M_i - m_i$.

Dans tous les cas, on a $S_\delta(|f|) - s_\delta(|f|) \leq S_\delta(f) - s_\delta(f) < \varepsilon$ et donc $|f|$ est bien intégrable. □

On peut résumer les Propositions 7, 8 et 9 sous la forme d'un théorème :

Théorème 9. *L'ensemble $\mathcal{I}_{a,b}$ est une sous-algèbre de l'algèbre des applications de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, stable par passage à la valeur absolue.*
De plus, l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{I}_{a,b} & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \end{array}$ *est une forme linéaire.*

3 Relation entre l'intégrale et l'ordre sur l'ensemble des réels

Théorème 10. *Soient $f, g \in \mathcal{I}_{a,b}$. On note $f \geq 0 \ \Leftrightarrow\ \forall x \in [a,b],\ f(x) \geq 0$ et $||f||_\infty := \sup_{x\in[a,b]} f(x)$.*
1)

$$f \geq 0 \ \Rightarrow\ \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geq 0$$

2)

$$f \leq g \ \Rightarrow\ \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$$

3)
$$|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t| \leq \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t \leq (b-a)||f||_\infty$$

4) Si f est continue et positive sur $[a,b]$, alors :
$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0 \;\Leftrightarrow\; f = 0$$

Démonstration. 1) Si, $\forall x \in [a,b],\ f(x) \geq 0$ alors $\forall \delta \in \Delta_{a,b},\ s_\delta(f) \geq 0$ et donc :
$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \sup_{\delta \in \Delta_{a,b}} s_\delta(f) \geq 0$$

2)
$$f \leq g \;\Rightarrow\; g - f \geq 0 \;\Rightarrow\; \int_a^b g(t) - f(t)\mathrm{d}t \geq 0 \;\Rightarrow\; \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$$

3) On a $\forall x \in [a,b]$,
$$f(x) \leq |f(x)|$$
$$-f(x) \leq |f(x)|$$
Donc
$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leq \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$$
$$-\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leq \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$$
Ce qui donne bien
$$|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t| \leq \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$$
De plus, $\forall x \in [a,b],\ |f(x)| \leq ||f||_\infty$, d'où :
$$\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t \leq \int_a^b ||f||_\infty \mathrm{d}t = ||f||_\infty \int_a^b \mathrm{d}t = (b-a)||f||_\infty$$

4) ($\Rightarrow$) On suppose que $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0$. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) > 0$.
Comme f est continue, il existe un intervalle $[\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$ tel que
$\forall x \in [\alpha, \beta],\ \ f(x) > \frac{f(c)}{2}$
On a

$$\int_a^\alpha f(t)\mathrm{d}t \geq 0,\ \int_\beta^b f(t)\mathrm{d}t \geq 0,\ \int_\alpha^\beta f(t)\mathrm{d}t \geq \frac{f(c)}{2}(\beta - \alpha) > 0$$

Donc

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^\alpha f(t)\mathrm{d}t + \int_\alpha^\beta f(t)\mathrm{d}t + \int_\beta^b f(t)\mathrm{d}t > 0 \ \Rightarrow\ \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \neq 0$$

ce qui est absurde. On a donc bien $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0 \ \Rightarrow\ f = 0$.
($\Leftarrow$) C'est évident. □

Corollaire 4. *Soient $f, g \in \mathcal{I}_{a,b}$ et $m := \inf_{x\in[a,b]} f(x),\ \ M := \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Alors*
1)

$$m \int_a^b g(t)\mathrm{d}t \leq \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t \leq M \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$$

2) En particulier, pour $g = 1$, on a :

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leq M(b - a)$$

Démonstration. C'est clair. □

On a aussi

<u>Théorème</u> 11. *Soient* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue et* $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction intégrable à valeurs positives ou nulles.*
Alors
1)

$$\exists c_g \in [a,b] \ ; \ \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t = f(c_g)\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$$

2) En particulier, si $g = 1$*, alors :*

$$\exists c \in [a,b] \ ; \ f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

On appelle ce réel la valeur moyenne de f *sur* $[a,b]$.

Démonstration. Si $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t = 0$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t = 0$ et on peut choisir c_g quelconque.
Sinon, on a :

$$\frac{\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t}{\int_a^b g(t)\mathrm{d}t} \in [m, M].$$

Or f est continue, donc d'après le Théorème des valeurs intermédiaires, elle prend toute valeur comprise entre m et M, d'où l'existence de c_g. $\square$

Cinquième partie

Théorème fondamentale de l'Analyse et applications

Commençons par une définition et un lemme :

Définition 8. Soit $f, F : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions. On dit que F est une primitive de f sur I si F est dérivable sur I et si pour tout $x \in I$ on a $F'(x) = f(x)$.

Lemme 1. *Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors la fonction*

$$\begin{array}{cccc} F & : & [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \lambda + \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \end{array}$$

est l'unique primitive de f valant λ en a.

Démonstration. Existence :
Nous voulons montrer que $F' = f$. Soit donc $x_0 \in [a,b]$ et montrons que $F'(x_0) = f(x_0)$.
Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de f en x_0, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in [a,b],\ |x - x_0| < \eta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Soit donc $x \in [a,b]$; $|x - x_0| < \eta,\ x \neq x_0$. On calcule :

$$|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)| = |\frac{1}{x - x_0}(\lambda + \int_a^x f(t)\mathrm{d}t - \lambda - \int_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t) - f(x_0)|$$

$$= |\frac{1}{x - x_0}(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t - (x - x_0)f(x_0))|$$

Si $x > x_0$, alors, par linéarité et croissance

$$|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)| = \frac{1}{x - x_0}|\int_{x_0}^{x} f(t) - f(x_0)\mathrm{d}t|$$
$$\leq \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} |f(t) - f(x_0)|\mathrm{d}t < \varepsilon$$

De même, si $x < x_0$, alors

$$|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)| = \frac{1}{x_0 - x}|\int_{x}^{x_0} f(x_0) - f(t)\mathrm{d}t|$$
$$\leq \frac{1}{x_0 - x}\int_{x}^{x_0} |f(x_0) - f(t)|\mathrm{d}t < \varepsilon$$

On a donc :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ ;\ \forall x \in [a, b],\ |x - x_0| < \eta \ \Rightarrow\ |\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)| < \varepsilon$$

Ce qui est exactement dire

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$$

soit, par définition : $F'(x_0) = f(x_0)$. Donc F est bien une primitive de f et comme $F(a) = \lambda$, on a l'existence.

<u>Unicité :</u>
Soit G une autre primitive de f telle que $G(a) = \lambda$. On a $G' = f = F'$ donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $G = F + k$. Or $G(a) = F(a) + k \ \Leftrightarrow\ \lambda = \lambda + k$
$\Leftrightarrow\ k = 0\ \Leftrightarrow\ F = G$ d'où l'unicité. □

Nous pouvons à présent énoncer et démontrer le "Théorème fondamentale de l'Analyse" :

<u>Théorème</u> 12. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et soit F une primitive de f sur $[a, b]$. Alors :*

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a) =: [F(t)]_a^b$$

Démonstration. D'après le Lemme précédent, F existe et s'exprime :

$$\forall x \in [a,b],\ F(x) = \lambda + \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

Or $\lambda = F(a)$, on écrit donc :

$$\forall x \in [a,b],\ F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

Et, en évaluant en $x = b$, on obtient :

$$F(b) = F(a) + \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \ \Leftrightarrow\ \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

□

Remarque 7. La puissance de ce Théorème saute aux yeux ; le nombre d'intégrales qu'il permet de calculer est impressionnant. On peut, pour ansi dire, calculer l'intégrale de n'importe quelle fonction pour peu qu'elle soit continue et que l'on en connaisse une primitive. C'est pourquoi un tableau des primitives usuelles est donné en annexe. Cependant, il est souvent bien plus difficile de calculer une primitive qu'une dérivée et il se peut que l'on ait à calculer l'intégrale d'une fonction dont on ne connaît pas de primitive. Heureusement, on dispose de deux résultats complémentaires permettant de contourner ce problème dans certains cas. Mais il existe tout-de-même des situations pour lesquelles aucun des résultat énoncés ici ne fonctionne et on a alors recours à des techniques (beaucoup) plus sophistiquées, comme pour montrer par exemple que :

$$\int_0^\pi \frac{1}{a+\cos(t)}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}},\ a > 1$$

Pour calculer cette dernière intégrale, on peut entre autre utiliser le Théorème des Résidus, qui dépasse largement notre propos.

Exemple 4. 1) Si l'on reprend l'exemple 3, on a :

$$\int_0^1 t\mathrm{d}t = [\frac{t^2}{2}]_0^1 = \frac{1^2-0^2}{2} = \frac{1}{2}$$

On a aussi

$$\int_a^b t^2 \mathrm{d}t = [\frac{t^3}{3}]_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3}$$

2) Plus généralement, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_a^b t^n \mathrm{d}t = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$$

On peut donc intégrer simplement n'importe quel polynôme sur n'importe quel intervalle ; plus précisément, si $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ on a, par linéarité :

$$\int_a^b (\sum_{i=0}^n a_i t^i) \mathrm{d}t = \sum_{i=0}^n a_i \int_a^b t^i \mathrm{d}t = \sum_{i=0}^n a_i \frac{b^{i+1} - a^{i+1}}{i+1}$$

3) On peut même calculer des intégrales un peu plus subtiles :

$$\int_1^2 \frac{1}{t} \mathrm{d}t = [\ln(t)]_1^2 = \ln(2) - \ln(1)$$

<u>Théorème</u> 13. *Soient $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Alors :*

$$\int_a^b u'(t)v(t) \mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) \mathrm{d}t$$

Démonstration. On a $\forall t \in [a, b]$, $(uv)'(t) = u'(t)v(t) + u(t)v'(t)$ et si l'on intègre cette relation sur$[a, b]$, par linéarité et avec le Théorème fondamentale on obtient :

$$\int_a^b (uv)'(t) \mathrm{d}t = \int_a^b u'(t)v(t) \mathrm{d}t + \int_a^b u(t)v'(t) \mathrm{d}t$$

$$\Leftrightarrow \ [u(t)v(t)]_a^b = \int_a^b u'(t)v(t) \mathrm{d}t + \int_a^b u(t)v'(t) \mathrm{d}t$$

$$\Leftrightarrow \ \int_a^b u'(t)v(t) \mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) \mathrm{d}t$$

□

Remarque 8. En pratique, il est bon, dans un premier temps, de toujours noter explicitement les fonctions u et v utilisées pour ne pas se tromper lors de l'application du théorème.

Exemple 5. 1) On veut calculer :

$$\int_0^\pi 2t\cos(t)\mathrm{d}t$$

Pour cela, on pose $u'(t) := \cos(t),\ v(t) := 2t$, alors $u(t) = \sin(t),\ v'(t) = 2$ et en appliquant le théorème précédent, on obtient :

$$\int_0^\pi 2t\cos(t)\mathrm{d}t = [2t\sin(t)]_0^\pi - \int_0^\pi 2\sin(t)\mathrm{d}t = -2[-\cos(t)]_0^\pi = -4$$

2) Grâce à ce théorème, on peut calculer une primitive du logarithme népérien en posant $u'(t) := 1,\ v(t) := \ln(t)$ et alors $u(t) = t,\ v'(t) = \frac{1}{t}$, d'où, pour $a, b \in \mathbb{R}_+^*,\ a < b$:

$$\int_a^b \ln(t)\mathrm{d}t = \int_a^b 1 \times \ln(t)\mathrm{d}t = [t\ln(t)]_a^b - \int_a^b t \times \frac{1}{t}\mathrm{d}t = [t\ln(t) - t]_a^b$$

Donc une primitive de $t \mapsto \ln(t)$ est $t \mapsto t\ln(t) - t$.

Théorème 14. *Soient $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $f : \varphi([a, b]) \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors on a :*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi(t)\mathrm{d}t$$

Démonstration. Soit F une primitive de f, on a :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{d}x = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = (F \circ \varphi)(b) - (F \circ \varphi)(a)$$

$$= \int_a^b (F \circ \varphi)'(t)\mathrm{d}t = \int_a^b (F' \circ \varphi)(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

□

Remarque 9. On note que dans le théorème précédent, on n'a pas besoin de la bijectivité de φ. En fait, on peut montrer que si l'on impose φ strictement croissante sur $[a,b]$ (ie. $\varphi'(t) > 0$ et φ bijective) alors, si l'on connaît une primitive G de $t \mapsto f(\varphi(t))\varphi'(t)$, alors la fonction $F := G \circ \varphi^{-1}$ est une primitive de f.

Exemple 6. On peut vérifier que si l'on veut calculer l'aire du demi-disque de centre 0 et de rayon 1, on doit en fait calculer :

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$$

Nous allons appliquer le théorème précédent en posant $x = \cos(t)$. On a $x = -1 \Leftrightarrow t = \pi$, $x = 1 \Leftrightarrow t = 0$ et $\cos'(t) = -\sin(t)$, d'où

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \int_{\pi}^{0} -\sqrt{1-\cos^2(t)}\sin(t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{\pi} \sin^2(t)\mathrm{d}t$$

car sin est positive sur $[0,\pi]$. De plus, on a :

$$\forall t \in [0,\pi],\ \sin^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2}$$

dont une primitive est

$$t \mapsto \frac{2t - \sin(2t)}{4}$$

Et donc,

$$\int_0^{\pi} \sin^2(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos(2t)}{2}\mathrm{d}t = [\frac{2t-\sin(2t)}{4}]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

On remarque qu'il s'agit bien de l'aire du demi-disque de centre 0 et de rayon 1, donc en ce sens la valeur $\frac{\pi}{2}$ n'est pas étonnante, mais si l'on ne prend en compte que le calcul d'intégrale, le résultat $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$ n'est en fait pas clair du tout...

Conclusion

Nous avons donc construit ici la forme la plus simple d'intégrale qui existe. C'est aussi la premiére à avoir vu le jour. Elle permet d'avoir une vision assez intuitive des phénomènes relatifs au procédé d'intégration.
Mais cette construction commence à poser problème lorsqu'on s'intéresse aux suites de fonctions notamment : pour assurer que la propriété d'intégrabilité "passe à la limite", il faut imposer de fortes hypothèses à la suite de fonctions considérée qui ne sont pas toujours aisées à vérifier.
C'est pourquoi une autre théorie de l'intégration fut mise au point par Lebesgue en 1902 ; théorie bien plus générale que celle de Riemann, reposant sur la théorie de la mesure et qui s'applique non seulement à $\mathbb{R}$ mais aussi à tout autre "espace mesuré". Cette nouvelle façon de considérer ce qu'on appelle une intégrale permet des passages à la limite beaucoup plus simples. Bien entendu l'intégrale de Lebesgue coïncide avec celle de Riemann lorsqu'on se restreint au même cadre d'étude. Cependant la théorie de Lebesgue est bien plus abstraite et difficile d'accès que celle de Riemann mais c'est probablement la théorie d'intégration la plus aboutie à ce jour, et c'est aussi celle la plus communément admise par les mathématiciens contemporains.
L'on peut encore citer une troisième forme d'intégrale qui est celle de Kurzweil-Henstock. Sa construction se place (à peu près) dans le même cadre que celle de Riemann et est à peine plus élaborée. La force de l'intégrale de Kurzweil-Henstock est qu'elle jouit des mêmes bonnes propriétes de passage à la limite que celle de Lebesgue (en particulier le théorème de convergence dominée) sans pour autant avoir recours à une théorie abstraite comme celle de Lebesgue, mais cette dernière reste tout-de-même plus générale.

Annexe

Faisons un petit peu de topologie :

Démonstration. (du théorème des bornes) Nous allons montrer que f atteint son sup, la preuve pour l'inf étant complètement analogue.
Par l'absurde, supposons que f n'atteigne pas son sup sur K. On peut choisir une suite strictement croissante $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels qui converge vers $\sup_{x\in K} f(x)$. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $]-\infty, t_n[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ et comme f est continue, $f^{-1}(]-\infty, t_n[)$ est aussi un ouvert, donc on a le recouvrement ouvert :

$$K = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(]-\infty, t_n[)$$

Or K est compact, il existe donc une partie finie $J \subset \mathbb{N}$ telle que

$$K = \bigcup_{n\in J} f^{-1}(]-\infty, t_n[)$$

Soit $n_0 := \max(J)$. (t_n) est une suite croissante,
donc $]-\infty, t_n[\subset]-\infty, t_{n+1}[, \ \forall n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow \ f^{-1}(]-\infty, t_n[) \subset f^{-1}(]-\infty, t_{n+1}[), \ \forall n \in \mathbb{N}$
Et donc

$$K = f^{-1}(]-\infty, t_{n_0}[) \ \Rightarrow \ \forall x \in K, \ f(x) < t_{n_0} < \sup_K f \ \Rightarrow \ \sup_K f \leq t_{n_0} < \sup_K f$$

Ce qui est absurde. □

Démonstration. (du théorème de Heine) Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de f, pour tout $x \in K$, on peut choisir $\alpha_x > 0$ tel que

$$\forall y \in K, \ d(x,y) < \alpha_x \ \Rightarrow \ d(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

On a

$$K \subset \bigcup_{z\in K} B(z, \frac{\alpha_z}{2})$$

Par compacité de K, il existe une partie finie $L \subset K$ telle que

$$K \subset \bigcup_{z \in L} B(z, \frac{\alpha_z}{2})$$

On pose $\alpha := \frac{1}{2} \min_{z \in L} \alpha_z$. Soient alors $x, y \in K$; $d(x, y) < \alpha$. On peut choisir $z \in L$ tel que $x \in B(z, \frac{\alpha_z}{2})$ (*ie.* $d(x, z) < \frac{\alpha_z}{2}$), on a alors

$$d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z) < \alpha + \frac{\alpha_z}{2} \leq \alpha_z$$

Et donc,

$$d'(f(x), f(y)) \leq d'(f(x), f(z)) + d'(f(z), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

α étant indépendant de $x, y \in K$, on a bien le définition de la continuité uniforme. $\square$

Remarque 10. Pour appliquer ces deux résultats aux cas qui nous intéressent plus haut, il suffit de remarquer que $\mathbb{R}$ est un espace métrique (donc un espace topologique) et que $[a, b]$ est compact dans $\mathbb{R}$.

Enfin, voici un tableau donnant quelques primitives usuelles, ainsi que leurs domaines de validité :

$f(x)$	$F(x)$	Domaine de validité
$x^a,\ a \in \mathbb{R} - \{-1\}$	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x^n,\ n \in \mathbb{N}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}^*$
$\ln(x)$	$x\ln(x) - x$	$\mathbb{R}_+^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$a^x,\ a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$	$\frac{a^x}{\ln(a)}$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$	$\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
$\mathrm{cotan}(x)$	$\ln\lvert\sin(x)\rvert$	$\mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$	$\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
$\frac{1}{\sin^2(x)}$	$-\mathrm{cotan}(x)$	$\mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{ch}(x)$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{th}(x)$	$\ln(\mathrm{ch}(x))$	$\mathbb{R}$
$\coth(x)$	$\ln\lvert\mathrm{sh}(x)\rvert$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$	$\mathrm{th}(x)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\mathrm{sh}^2(x)}$	$-\coth(x)$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$]-1,1[$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}},\ a > 0$	$\arcsin(\frac{x}{a})$	$]-a,a[$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\ln(x + \sqrt{1+x^2})$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}},\ a \neq 0$	$\ln(x + \sqrt{a^2+x^2})$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ln\lvert x + \sqrt{x^2-1}\rvert$	$\mathbb{R} - [-1,1]$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}},\ a \neq 0$	$\ln\lvert x + \sqrt{x^2-a^2}\rvert$	$\mathbb{R} - [-a,a]$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2+a^2},\ a \neq 0$	$\frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a})$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{a^2-x^2},\ a \neq 0$	$\frac{1}{2a}\ln\lvert\frac{x+a}{x-a}\rvert$	$\mathbb{R} - \{-a,a\}$

Références

[1] X. Gourdon, *Les maths en tête : Analyse.* Ellipses, 1994.

[2] A. Autin, “Cours de mathématiques supérieures,” Amiens, 2012-2013.

[3] G. Barou, “Cours de licence 2 de mathématiques,” 2013. [Online]. Available : http ://www.math.unicaen.fr/ barou/L2Math/

[4] Wikipédia, “Sommes de Riemann,” 2001. [Online]. Available : http ://wikipedia.org/