**1.** Puisque la dérivation et l'évaluation des polynômes sont des applications linéaires, l'application $\varphi$ est elle-même linéaire. Pour montrer que $\varphi$ est un isomorphisme, il faut et il suffit de montrer qu'elle est bijective et comme $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1 = \dim(\mathbb{R}^{n+1})$, il suffit de montrer que $\varphi$ est injective. Soit donc $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\varphi(P) = 0$. Ceci signifie que

$$\forall 0 \leq i \leq n,\ \forall 0 \leq j \leq \alpha_i,\ P^{(j)}(x_i) = 0.$$

Pour tout $0 \leq i \leq n$, on a donc $P(x_i) = P'(x_i) = \ldots = P^{(\alpha_i)}(x_i) = 0$, donc $P$ est divisible par $(X - x_i)^{\alpha_i+1}$. Comme les $(x_i)$ sont distinct deux à deux, les polynômes $(X - x_i)^{\alpha_i+1}$ sont premiers entre eux deux à deux et donc par le lemme de Gauss polynômial, on obtient que $P$ est divisible par $\displaystyle\prod_{i=0}^{m}(X - x_i)^{\alpha_i+1}$. Il existe donc $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$P(X) = Q(X)\prod_{i=0}^{m}(X - x_i)^{\alpha_i+1}.$$

En appliquant la fonction degré à cette équation, on obtient

$$\deg(P) = \deg(Q) + \sum_{i=0}^{m}(\alpha_i + 1) = \deg(Q) + m + 1 + \sum_{i=0}^{m}\alpha_i = \deg(Q) + n + 1.$$

Or, comme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $\deg(P) \leq n$ et donc $n \geq \deg(P) = \deg(Q) + n + 1$, ce qui entraîne $\deg(Q) \leq -1$, donc $Q = 0$ et donc $P = 0$, comme souhaité.

**2.** Pour tout $0 \leq i \leq n$, on a $\deg(\pi_i) = i$, c'est-à-dire que la famille $(\pi_i)_{i=0}^{n}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ est échelonnée en degré. Comme elle comporte $n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ éléments, c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Puisque $P_n$ existe et est unique, il se décompose de façon unique dans cette base, ce qui assure l'existence et l'unicité de $(a_0, \ldots, a_n)$.

**3.** Comme $y_k = y_{k-1} = \ldots = y_{k-\ell}$, les termes $(x - y_{k-1}), \ldots, (x - y_{k-\ell})$ apparaissent dans $\pi_k(x)$, qui est donc divisible par

$$\prod_{j=1}^{\ell}(x - y_{k-j}) = (x - y_{k-1})^{\ell} = (x - y_k)^{\ell}.$$

Ainsi, on a

$$\pi_k(x) = (x - y_k)^{\ell}\prod_{i=0}^{k-\ell-1}(x - y_i)$$

et on peut donc poser $q(x) := \displaystyle\prod_{0\leq i\leq k-\ell-1}(x - y_i)$ et comme $y_i \leq y_{k-\ell-1} < y_k$ pour tout $0 \leq i \leq k - \ell - 1$, on a $q(y_k) \neq 0$. La formule de Leibniz appliquée à $\pi_k$ donne alors

$$\pi_k^{(\ell)}(x) = \sum_{p=0}^{\ell}\binom{\ell}{p}\ell(\ell-1)\cdots(\ell-p+1)(x - y_k)^{\ell-p}q^{(\ell-p)}(x)$$

et en évaluant en $y_k$, le seul terme non nul de la somme correspond à l'indice $p = \ell$, d'où

$$\pi_k^{(\ell)}(y_k) = \ell! q(y_k) \neq 0,$$

comme souhaité.

**4.** Par définition de $P_k$, on a

$$P_k = P_{k-1} + f\{y_0, \ldots, y_k\}\pi_k,$$

donc

$$P_k^{(\ell)}(y_k) = P_{k-1}^{(\ell)}(y_k) + f\{y_0, \ldots, y_k\}\pi_k^{(\ell)}(y_k).$$

Puisque $\pi_k^{(\ell)}(y_k) \neq 0$, on peut écrire

$$f\{y_0, \ldots, y_k\} = \frac{P_k^{(\ell)}(y_k) - P_{k-1}^{(\ell)}(y_k)}{\pi_k^{(\ell)}(y_k)}.$$

Pour conclure, il nous reste à montrer que

$$P_k^{(\ell)}(y_k) = f^{(\ell)}(y_k).$$

Comme on a $f^{(\ell)}(y_k) = P_n^{(\ell)}(y_k)$, il suffit de montrer que $P_k^{(\ell)}(y_k) = P_n^{(\ell)}(y_k)$ et puisque $P_n = P_k + a_{k+1}\pi_{k+1} + \cdots + a_n\pi_n$, ceci revient à montrer que

$$a_{k+1}\pi_{k+1}^{(\ell)}(y_k) + \cdots + a_n\pi_n^{(\ell)}(y_k) = 0$$

et finalement, il suffit de montrer que $\pi_i^{(\ell)}(y_k) = 0$ pour tout $k+1 \leq i \leq n$. On a

$$\pi_i(x) = \prod_{p=0}^{i-1}(x - y_p) = \pi_{k+1}(x) \prod_{p=k+1}^{i-1}(x - y_p),$$

le second produit étant égal à 1 si $i = k+1$, par convention ; on le note $r(x)$. En reprenant le polynôme $q$ introduit dans la question précédente, il vient alors

$$\pi_i(x) = r(x)\pi_{k+1}(x) = r(x)\pi_k(x)(x - y_k) = q(x)r(x)(x - y_k)^{\ell+1}.$$

On peut appliquer la formule de Leibniz pour obtenir

$$\pi_i^{\ell}(x) = \sum_{p=0}^{\ell}\binom{\ell}{p}(\ell+1)\ell(\ell-1)\cdots(\ell-p+2)(x-y_k)^{\ell+1-p}(qr)^{(\ell-p)}(x)$$

$$= (x-y_k)\left(\sum_{p=0}^{\ell}\binom{\ell}{p}(\ell+1)\ell(\ell-1)\cdots(\ell-p+2)(x-y_k)^{\ell-p}(qr)^{(\ell-p)}(x)\right),$$

donc le polynôme $\pi_i^{(\ell)}(x)$ est divisible par $(x - y_k)$ et donc $\pi_i^{(\ell)}(y_k) = 0$, d'où le résultat.

**5.** Par construction de $\theta$, on a $x_{\theta(k)} = y_k$ pour tout $0 \leq k \leq n$. Remarquons que $\theta$ est surjective. Supposons que $P$ soit solution du premier problème et soient $0 \leq k \leq n$ et $0 \leq j \leq \alpha_{\theta(k)}$. Si $i := \theta(k) \in \{0, \ldots, m\}$, alors $\alpha_{\theta(k)} = \alpha_i$ et donc $P^{(j)}(y_k) = P^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(y_k)$ et donc $P$ est solution du second problème. Réciproquement, si $P$ est solution du second problème et si on prend $0 \leq i \leq m$ et $0 \leq j \leq \alpha_i$, comme $\theta$ est surjective, il existe $0 \leq k \leq n$ tel que $\theta(k) = i$ et alors $P^{(j)}(x_i) = P^{(j)}(x_{\theta(k)}) = P^{(j)}(y_k) = f^{(j)}(y_k) = f^{(j)}(x_i)$ et donc $P$ est bien solution du premier problème.

Soit $P_\sigma$ l'unique solution du problème

$$\forall 0 \leq k \leq n,\ \forall 0 \leq j \leq \beta_{\sigma(k)},\ P_\sigma^{(j)}(y_{\sigma(k)}) = f^{(j)}(y_{\sigma(k)}).$$

Alors $P_\sigma$ est également solution du problème originel (sans permutation)

$$\forall 0 \leq k \leq n,\ \forall 0 \leq j \leq \beta_k,\ P_\sigma^{(j)}(y_k) = f^{(j)}(y_k)$$

et donc, par unicité, on a $P_n = P_\sigma$. Par construction, on peut écrire

$$P_n(x) = Q(x) + f\{y_0, \ldots, y_n\} \prod_{i=0}^{n-1}(x - y_i)$$

ainsi que

$$P_\sigma(x) = Q_\sigma(x) + f\{y_{\sigma(0)}, \ldots, y_{\sigma(n)}\} \prod_{i=0}^{n-1}(x - y_{\sigma(i)}),$$

avec $Q$ et $Q_\sigma$ des polynômes de degré au-plus $n-1$. En identifiant les coefficients dominants de $P_n$ et $P_\sigma$, on obtient finalement

$$f\{y_0, \ldots, y_n\} = f\{y_{\sigma(0)}, \ldots, y_{\sigma(n)}\}.$$

**6.** Soient donc $0 \leq k \leq n$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_{k+1}$. En reprenant les notations de la question précédente, le polynôme $P_k$ est de degré au-plus $k$ et est solution du problème

$$\forall 0 \leq i \leq k,\ \forall 0 \leq j \leq \beta_i,\ P_k^{(j)}(y_i) = f^{(j)}(y_i)$$

et si l'on note $(P_k)_\sigma$ la solution du problème permuté

$$\forall 0 \leq i \leq k,\ \forall 0 \leq j \leq \beta_{\sigma(i)},\ (P_k)_\sigma^{(j)}(y_{\sigma(i)}) = f^{(j)}(y_{\sigma(i)})$$

alors par unicité on a $P_k = (P_k)_\sigma$ et, comme ci-dessus, on conclut en identifiant les coefficients dominants.

**7.** Remarquons déjà que $f\{y_0\} = f(y_0) = f(x_0)$. Soit maintenant $1 \leq k \leq n$ et supposons dans un premier temps que $y_k = y_0$. Comme les $(y_p)$ sont ordonnés, le plus grand entier $\ell$ tel que $y_k = y_{k-1} = \ldots = y_{k-\ell}$ vaut $\ell = k$ et d'après la question 4, on en déduit que

$$f\{y_0, \ldots, y_k\} = \frac{f^{(k)}(y_k) - P_{k-1}^{(k)}(y_k)}{\pi_k^{(k)}(y_k)}.$$

Or, comme $P_{k-1}$ est de degré au-plus $k-1$, on a $P_{k-1}^{(k)} = 0$. D'autre part, comme $\pi_k(x) = (x - y_0)\cdots(x - y_{k-1}) = (x - y_0)^k$, on a $\pi_k^{(k)} = k!$ et donc

$$f\{y_0, \ldots, y_k\} = \frac{f^{(k)}(y_k)}{k!},$$

comme annoncé.

Supposons maintenant que $y_k \neq y_0$ et notons $\sigma \in \mathfrak{S}_{k+1}$ le cycle envoyant $i$ sur $i+1$, modulo $k+1$. Il existe deux polynôme $Q$ et $Q_\sigma$ de degré au-plus $k-2$ tels que

$$\begin{aligned}
P_k(x) &= Q(x) + f\{y_0, \ldots, y_{k-1}\} \prod_{i=1}^{k-1}(x - y_i) + f\{y_0, \ldots, y_k\}\pi_k(x) \\
&= Q_\sigma(x) + f\{y_1, \ldots, y_{k-1}, y_k\} \prod_{i=1}^{k-1}(x - y_i) + f\{y_1, \ldots, y_k, y_0\} \prod_{i=1}^{k}(x - y_i) \\
&= Q_\sigma(x) + f\{y_1, \ldots, y_{k-1}, y_k\} \prod_{i=1}^{k-1}(x - y_i) + f\{y_0, \ldots, y_k\} \prod_{i=1}^{k}(x - y_i)
\end{aligned}$$

la dernière égalité découlant de la question précédente. On peut alors identifier les coefficients de degré $k-1$ dans la première et la troisième ligne. Pour cela, on rappelle (cf TD3) que le coefficient de degré $k-1$ du produit

$$\prod_{i=1}^{k}(x - y_i) \quad \text{(resp. de } \pi_k(x)\text{)}$$

est égal à

$$-\sum_{i=1}^{k} y_i \quad (\text{resp. à } -\sum_{i=0}^{k-1} y_i).$$

Ainsi, les coefficients de degré $k-1$ de la première et de la troisième ligne sont égaux :

$$f\{y_0,\dots,y_{k-1}\} - f\{y_0,\dots,y_k\}\sum_{i=0}^{k-1} y_i = f\{y_1,\dots,y_k\} - f\{y_0,\dots,y_k\}\sum_{i=1}^{k} y_i$$

soit

$$f\{y_0,\dots,y_k\}(y_k - y_0) = f\{y_0,\dots,y_k\}\left(\sum_{i=1}^{k} y_i - \sum_{i=0}^{k-1} y_i\right) = f\{y_1,\dots,y_k\} - f\{y_0,\dots,y_{k-1}\},$$

d'où l'égalité voulue.

**8.** Si $m=0$, alors on a $n=\alpha_0$ et $x_0 = y_0 = y_1 = \ldots = y_{\alpha_0} = y_n$ et donc on a

$$\forall 0 \le k \le n,\ f\{y_0,\dots,y_k\} = \frac{f^{(k)}(y_k)}{k!} = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

et donc

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\{y_0,\dots,y_n\}\pi_k(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Ainsi, on retrouve le polynôme de Taylor d'ordre $n=\alpha_0$ de $f$ en $x_0$.

**9.** Le réel $A_x$ est donné par

$$A_x := \frac{(n+1)!(f(x)-P_n(x))}{\pi_{n+1}(x)}.$$

Par construction, la fonction $\phi$ s'annule en $x$. De plus, pour $0 \le i \le m$ et $0 \le j \le \alpha_i < n+1$, on a $\pi_{n+1}^{(j)}(x_i) = 0$ et $P_n^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i)$, donc $\phi^{(j)}(x_i) = 0$. Donc $\phi$ s'annule en chaque $x_i$, avec multiplicité (au-moins) $\alpha_i + 1$. Ainsi, (en comptant les multiplicités), $\phi$ s'annule en au-moins $1 + \sum_{i=0}^{m}(\alpha_i + 1) = n+2$ points.

**10.** Fixons $x \in [a,b]$. Par le théorème de Rolle généralisé, il existe $\xi_x \in ]a,b[$ tel que $\phi^{(n+1)}(\xi_x) = 0$. Puisque $P_n$ est de degré $n$, on a $P_n^{(n+1)} = 0$ et $\pi_{n+1}^{(n+1)}(t) = (n+1)!$, d'où

$$0 = \phi^{(n+1)}(\xi_x) = f^{(n+1)}(\xi_x) - A_x$$

et donc

$$f^{(n+1)}(\xi_x) = A_x = \frac{(n+1)!(f(x)-P_n(x))}{\pi_{n+1}(x)} \implies f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\pi_{n+1}(x).$$

**11.** Ici, on a

$$-1 = x_0 = y_0 = y_1 < 0 = x_1 = y_2 = y_3 = y_4 < 1 = x_2 = y_5 = y_6$$

et on peut calculer les différences divisées généralisées $f\{y_0,\dots,y_k\}$ comme pour la forme de Newton, en prenant garde aux cas où $y_k = y_0$. On obtient le polynôme de Hermite :

$$P_6(x) = \frac{2 + 2(x+1) - 2x(x+1)^2 + x^3(x+1)^2 - x^3(x-1)(x+1)^2}{4} = 1 - x^2 + \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{4}x^6$$

que l'on peut calculer à l'aide du tableau suivant :

| $y_k$ | $f\{y_k\}$ | $f\{y_{k-1}, y_k\}$ | $f\{y_{k-2}, y_{k-1}, y_k\}$ | $f\{y_{k-3}, \ldots, y_k\}$ | $f\{y_{k-4}, \ldots, y_k\}$ | $f\{y_{k-5}, \ldots, y_k\}$ | $f\{y_0, \ldots, y_6\}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-1$ | $1/2$ | | | | | | |
| $-1$ | $1/2$ | $1/2$ | | | | | |
| $0$ | $1$ | $1/2$ | $0$ | | | | |
| $0$ | $1$ | $0$ | $-1/2$ | $-1/2$ | | | |
| $0$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $-1/2$ | $0$ | | |
| $1$ | $1/2$ | $-1/2$ | $-1/2$ | $1/2$ | $1/2$ | $1/4$ | |
| $1$ | $1/2$ | $-1/2$ | $0$ | $1/2$ | $0$ | $-1/4$ | $-1/4$ |