Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 1xx (201x) **Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova**

Induction parabolique modulo p pour les groupes p-adiques quasi-déployés de rang 1

Ramla Abdellatif

Abstract – Let p be a prime number, C be an algebraically closed field of characteristic p and F be a non-archimedean local field with positive residual characteristic p and finite residue class field. This note aims to establish a classification of the irreducible smooth non-supercuspidal representations over C of the p-adic group $\mathcal{G}(F)$, where $\mathcal{G}$ denotes a quasi-split connected reductive group of relative rank 1 over F.

Mathematics Subject Classification (2010). 20G05; 20C08, 22E50.

Keywords. Mod p Langlands program, non-supercuspidal representations, quasi-split groups of rank 1.

1. Introduction

Soit p un entier premier, C un corps algébriquement clos de caractéristique p et F un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle p et de corps résiduel fini. Notons $G := \mathcal{G}(F)$ le groupe des points rationnels d'un groupe réductif connexe $\mathcal{G}$ défini sur F. Le premier pas dans l'étude des représentations lisses de G à coefficients dans C consiste à s'intéresser aux représentations de la forme $\mathrm{Ind}_Q^G(\sigma)$, où $Q = \mathcal{Q}(F)$ désigne le groupe des points rationnels d'un sous-groupe parabolique $\mathcal{Q}$ de $\mathcal{G}$ de sous-groupe de Levi $\mathcal{M}$ et où σ est une représentation lisse de Q obtenue par inflation d'une représentation lisse irréductible de $M = \mathcal{M}(F)$ sur C. Les deux questions à résoudre sont alors les suivantes : dispose-t-on d'un critère simple d'irréductibilité pour la représentation $\mathrm{Ind}_Q^G(\sigma)$? Lorsque celui-ci est en défaut, peut-on déterminer les facteurs de Jordan-Hölder de cette représentation ?

Le cas $\mathcal{G} = GL_2$ est entièrement traité par Barthel et Livné dans [4] et [5]. Par des méthodes reposant sur la compréhension des modules à droite sur les pro-p-algèbres de Hecke-Iwahori, Ollivier [14] obtient un critère simple d'irréductibilité

Ramla Abdellatif, UMPA - UMR 5669, Ecole Normale Supérieure de Lyon, 46 allée d'Italie, 69 034 Lyon Cedex 07, France
E-mail: Ramla.Abdellatif@ens-lyon.fr

pour $\mathcal{G} = GL_n$ avec $n \geq 2$ quelconque et donne une étude plus détaillée des facteurs de Jordan-Hölder dans les cas de réductibilité si $n = 3$. Vignéras [17] étend ensuite ces résultats au cas où $\mathcal{G}$ est déployé et de rang arbitraire sur F, avant que Herzig [12] ne complète cette étude pour $\mathcal{G} = GL_n$ et que Abe [3] ne généralise ces arguments pour $\mathcal{G}$ déployé.

Dans [2] et [1, Chapitre 4], nous répondons à ces questions lorsque $\mathcal{G}$ est respectivement égal à SL_2, qui est déployé sur F, et au groupe unitaire $U(2,1)$, qui est quasi-déployé mais non déployé sur F. Cet article propose une généralisation des arguments développés dans ces deux cas pour fournir une description complète des représentations de G obtenues comme sous-quotients d'induites paraboliques lorsque $\mathcal{G}$ est supposé quasi-déployé sur F et de rang relatif égal à 1. L'intérêt de ces deux hypothèses est essentiellement technique puisqu'elles assurent que tout sous-groupe parabolique propre de $\mathcal{G}$ en est un sous-groupe de Borel et que le sous-groupe de Levi standard est alors un tore, de sorte que la représentation irréductible σ n'est autre qu'un C-caractère lisse.

Présentation des principaux résultats

On note désormais en majuscule romane le groupe des points F-rationnels du groupe algébrique désigné par la majuscule calligraphiée correspondante (comme par exemple $G = \mathcal{G}(F)$, $T = \mathcal{T}(F)$, etc...). On fixe un tore déployé maximal $\mathcal{S}$ de $\mathcal{G}$ et l'on note $\mathcal{T}$ le centralisateur de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{G}$. Comme $\mathcal{G}$ est quasi-déployé sur F, le groupe $\mathcal{T}$ est un tore de $\mathcal{G}$ et est donc en particulier abélien. On choisit un sous-groupe de Borel $\mathcal{B}$ de $\mathcal{G}$ contenant $\mathcal{T}$ et l'on note $\mathcal{U}$ son radical unipotent. Soit $\chi : T \to C^\times$ un caractère lisse que l'on étend par inflation en un caractère lisse de B sur C. Notre premier énoncé décrit la structure de $C[B]$-module de la représentation $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ et montre notamment que la compréhension de cette structure fournit un critère simple d'irréductibilité du $C[G]$-module correspondant.

Théorème 1.1. *Soit $\chi : B \to C^\times$ un caractère lisse.*

(i) On dispose d'une suite exacte courte de $C[B]$-modules

$$0 \longrightarrow V_\chi \longrightarrow \mathrm{Ind}_B^G(\chi) \longrightarrow \chi \longrightarrow 0 \ , \tag{1.1}$$

où V_χ est un $C[B]$-module irréductible de dimension infinie sur C.

(ii) Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(a) la suite exacte (1.1) n'est pas scindée ;

(b) le $C[G]$-module $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ est irréductible ;

(c) le caractère χ ne se prolonge pas en un C-caractère lisse de G.

(iii) Lorsque χ se prolonge en un C-caractère lisse de G, le $C[G]$-module $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ est indécomposable de longueur 2. Il admet pour sous-quotients irréductibles le caractère χ (comme sous-objet) et la représentation $St_G \otimes \chi$ (comme quotient), où St_G désigne la représentation de Steinberg de G.

Nous pouvons ainsi répartir les représentations **non supercuspidales** de G, i.e. les sous-quotients irréductibles des représentations qui nous intéressent, en trois familles :

- les caractères lisses de G sur C ;
- les représentations *de la série principale*, qui sont de la forme $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ avec $\chi : B \to C^\times$ caractère lisse ne pouvant être étendu en un caractère lisse de G ;
- les représentations *de la série spéciale*, qui sont de la forme $St_G \otimes \eta$ avec $\eta : G \to C^\times$ caractère lisse.

Théorème 1.2. *Cette liste fournit une classification des classes d'isomorphisme des représentations lisses irréductibles non supercuspidales de G sur C. En outre, deux objets distincts d'une même famille ne peuvent être entrelacés.*

Pour démontrer cet énoncé, mais aussi en vue d'une utilisation future via les modules de Hecke-Iwahori, nous étudions les espaces de vecteurs invariants sous l'action d'un pro-p-Iwahori standard de G. Nous démontrons notamment les résultats suivants, où I désigne un sous-groupe d'Iwahori standard de pro-p-radical $I(1)$, où $T(\mathcal{O}_F)$ est la trace de T sur le stabilisateur du sommet spécial ayant servi à définir I et où w_0 est l'élément non trivial du groupe de Weyl fini de G relatif à T.

Théorème 1.3. *Notons $\chi^+ : I \to C^\times$ le caractère lisse obtenu par inflation de la restriction de χ à $T(\mathcal{O}_F)$ et $\chi^- : I \to C^\times$ celui obtenu par inflation de la restriction de χ^{w_0} à $T(\mathcal{O}_F)$.*

(i) Les vecteurs $I(1)$-invariants de $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ forment un C-espace vectoriel de dimension 2.

(ii) Le $C[G]$-module $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ admet une seule composante I-isotypique non nulle si et seulement si $\chi^+ = \chi^-$, et en admet deux sinon. En particulier, I agit trivialement sur l'espace des vecteurs $I(1)$-invariants de $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ si et seulement si la restriction de χ à $T(\mathcal{O}_F)$ est triviale (auquel cas χ est dit non ramifié*).*

(iii) On dispose de la suite exacte courte suivante d'espaces vectoriels sur C :

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow \left(\mathrm{Ind}_B^G(\mathbf{1})\right)^{I(1)} \longrightarrow St_G^{I(1)} \longrightarrow 0 \ .$$

En particulier, l'espace des vecteurs $I(1)$-invariants d'une représentation de la série spéciale est de dimension 1 sur C.

Corollaire 1.4. *Toute représentation lisse non supercuspidale de G sur C est admissible.*

Plan de l'article

La Section 2. est constituée de préliminaires nous permettant d'introduire les notations qui seront utilisées dans cet article et de rappeler quelques décompositions en double classes du groupe G. La Section 3., où est notamment prouvé le Théorème 1.1, constitue le cœur de cet article et réutilise certains arguments déjà présents dans [17]. La Section 4. contient une étude des espaces de vecteurs $I(1)$-invariants des représentations rencontrées jusqu'alors et mène en particulier à la démonstration du Théorème 1.3 et de son corollaire, ainsi qu'à l'achèvement de la preuve du Théorème 1.2.

2. Préliminaires

2.1 – *Notations*

Soit p un nombre premier et F un corps local non archimédien que l'on suppose complet pour une valuation discrète, de caractéristique résiduelle p et de corps résiduel fini. On désigne par $\mathcal{O}_F$ l'anneau des entiers de F, par $\mathfrak{p}_F$ son idéal maximal et par $k_F := \mathcal{O}_F/\mathfrak{p}_F$ son corps résiduel. On fixe une fois pour toutes une uniformisante $\varpi_F \in \mathfrak{p}_F$ ainsi qu'un corps algébriquement clos C de caractéristique p qui sera le corps des coefficients des représentations considérées, et l'on normalise la valuation discrète v_F du corps F par $v_F(\varpi_F) = 1$.

On considère un groupe réductif connexe $\mathcal{G}$ défini et quasi-déployé sur F, dont on note $G = \mathcal{G}(F)$ le groupe des points rationnels. On suppose en outre que $\mathcal{G}$ est de rang relatif égal à 1, ce qui signifie que les tores déployés maximaux de $\mathcal{G}$ sont isomorphes au groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$. On fixe un tel tore déployé maximal $\mathcal{S}$ et l'on note $\mathcal{T}$ son centralisateur dans $\mathcal{G}$: c'est encore un tore de $\mathcal{G}$ et il vérifie $\mathcal{T} = \mathcal{S}$ si et seulement si $\mathcal{G}$ est déployé sur F. Le tore $\mathcal{S}$ définit un appartement $\mathcal{A}$ de l'arbre de Bruhat-Tits $\mathcal{X}$ du groupe adjoint G_{ad} de G [15, Section 2] dont on fixe un sommet spécial $v_0 \in \mathcal{A}$. Comme F est de corps résiduel fini, on déduit de [15, Sections 3.2 et 3.4.1] que le stabilisateur de v_0 sous l'action de G sur $\mathcal{X}$ est un sous-groupe parahorique maximal spécial K canoniquement égal au groupe des $\mathcal{O}_F$-points d'un schéma en groupes lisse affine connexe $\mathcal{G}_K$ défini sur $\mathcal{O}_F$ et de fibre générique égale à $\mathcal{G}$. On sait de plus [9, 5.1.32.ii)] que si $\tilde{\mathcal{G}}_K$ désigne le quotient réductif maximal de la fibre spéciale de $\mathcal{G}_K$, alors l'application de réduction modulo ϖ_F induit un morphisme surjectif $red : K \twoheadrightarrow \tilde{\mathcal{G}}_K(k_F)$ dont le noyau est égal au pro-p-radical $K(1)$ de K.

On définit le groupe de Weyl fini W_0 de $\mathcal{G}$ relatif à $\mathcal{T}$ comme le quotient $\mathcal{N}_{\mathcal{G}}(\mathcal{T})/\mathcal{T}$, où $\mathcal{N}_{\mathcal{G}}(\mathcal{T})$ désigne le normalisateur de $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{G}$. D'après [7, Corollary V.21.4], le groupe W_0 est aussi égal au quotient $N_G(T)/T$, où $N_G(T)$ désigne le normalisateur de T dans G, ainsi qu'au quotient $(N_G(T) \cap K)/(T \cap K)$ puisque K est spécial. Comme $\mathcal{G}$ est de rang 1 sur F, le groupe W_0 ne contient que deux éléments [7, Proposition IV.13.13] et l'on peut choisir un représentant $w_0 \in N_G(T) \cap K$ de l'élément non trivial de W_0 : il vérifie alors $w_0^2 \in T \cap K$.

On choisit un sous-groupe de Borel $\mathcal{B}$ de $\mathcal{G}$ contenant $\mathcal{T}$ et l'on note $\mathcal{U}$ son radical unipotent. Le groupe $\mathcal{B}$ admet la décomposition de Levi standard $\mathcal{B} = \mathcal{T}\mathcal{U}$ qui fournit, par passage aux points rationnels, une décomposition en produit semi-direct $B = TU$ avec U radical unipotent de B. On note $\overline{\mathcal{B}} = \mathcal{B}^{w_0}$ le sous-groupe de Borel de $\mathcal{G}$ opposé à $\mathcal{B}$ (par rapport à $\mathcal{T}$) et $\overline{\mathcal{U}} = \mathcal{U}^{w_0}$ son radical unipotent. On a donc $\mathcal{B} \cap \overline{\mathcal{B}} = \mathcal{T}$ et $\overline{\mathcal{B}} = \mathcal{T}\overline{\mathcal{U}}$, ce qui assure que l'on a $\overline{B} = T\overline{U}$ avec $\overline{U} = w_0 U w_0^{-1}$ radical unipotent de $\overline{B} = w_0 B w_0^{-1}$.

Fixons une arête e de l'appartement $\mathcal{A}$ contenant v_0 et telle que e et B définissent les mêmes racines positives de S [16, II.1.3.(iii)]. Notons I le fixateur de e sous l'action de G : d'après [9, 5.2.6] et [15, Section 3.7, page 55], on sait que I est un sous-groupe d'Iwahori qui s'identifie à l'ensemble des éléments de K dont l'image par l'application *red* appartient à $\tilde{\mathcal{B}}(k_F)$, où $\tilde{\mathcal{B}}$ désigne le sous-groupe de Borel de $\tilde{\mathcal{G}}_K$ défini par $\mathcal{B}$. Cette dernière propriété justifie que I soit qualifié d'Iwahori *standard* par rapport à B. Le pro-p-radical de I, noté $I(1)$ et appelé *pro-p-Iwahori standard de G*, s'identifie quant à lui aux éléments de K dont l'image par l'application *red* appartient à $\tilde{\mathcal{U}}(k_F)$, où $\tilde{\mathcal{U}}$ est le radical unipotent de $\tilde{\mathcal{B}}$. En outre, si $\tilde{\mathcal{T}}$ désigne le sous-groupe de Levi de $\tilde{\mathcal{B}}$ défini par $\mathcal{T}$, on sait grâce à [15, Section 3.7] que le groupe quotient $I/I(1)$ est isomorphe au groupe fini $\tilde{\mathcal{T}}(k_F)$, sur lequel $T \cap K$ se surjecte via l'application *red*. En posant $T(\mathcal{O}_F) := T \cap K$, on obtient notamment l'égalité $I = T(\mathcal{O}_F)I(1)$.

Choisissons enfin un générateur dominant[1] λ du groupe $X_*(S)$ des F-cocaractères du tore déployé maximal S de G. En posant $t_0 := \lambda(\varpi_F)$, on dispose grâce à [10, Section 3.1] d'un isomorphisme de groupes de la forme $S/S \cap K \simeq t_0^{\mathbb{Z}}$.

2.2 – *Quelques décompositions en doubles classes de G*

On rappelle tout d'abord les énoncés des décompositions de Bruhat [6, Théorème 11.4.ii)], d'Iwahori [8, Proposition (6.4.9)] et d'Iwasawa [8, Propositions (4.4.3) et (4.4.6)].

Lemme 2.1 (Décompositions de Bruhat)**.** *(i) Le groupe G admet les décompositions en doubles classes disjointes suivantes :*

$$G = B \sqcup B w_0 B = B \sqcup B w_0 U \ ,$$

avec unicité de l'écriture dans la seconde décomposition. De plus, Bw_0U est une partie ouverte dense de G et B en est une partie fermée non ouverte.

(ii) On dispose aussi des décompositions en doubles classes disjointes suivantes :

$$\tilde{\mathcal{G}}(k_F) = \tilde{\mathcal{B}}(k_F) \sqcup \tilde{\mathcal{B}}(k_F) w_0 \tilde{\mathcal{B}}(k_F) = \tilde{\mathcal{B}}(k_F) \sqcup \tilde{\mathcal{B}}(k_F) w_0 \tilde{\mathcal{U}}(k_F) \ , \tag{2.1}$$

où w_0 désigne par abus de notation l'image dans $\tilde{\mathcal{G}}_K(k_F)$ de $w_0 \in N_F(T) \cap K$ par l'application red.

Lemme 2.2 (Décomposition d'Iwahori)**.** *L'application produit établit une bijection*

$$(I \cap U)(I \cap T)(I \cap \overline{U}) \xrightarrow{\simeq} I \ ,$$

[1] Par rapport à B, ce qui signifie que la conjugaison par t_0 contracte U.

cette propriété restant vraie quel que soit l'ordre choisi pour les facteurs du membre de gauche.

Puisque les ensembles $I \cap U$ et $I \cap \overline{U}$ sont inclus dans $I(1)$, la factorisation de I sous la forme $(I \cap U)(I \cap \overline{U})(I \cap T)$ assure que l'on dispose de la factorisation suivante de $I(1)$:

$$I(1) = (I(1) \cap U)(I(1) \cap \overline{U})(I(1) \cap T) \ . \tag{2.2}$$

Lemme 2.3 (Décomposition d'Iwasawa)**.** *Le groupe G admet la factorisation suivante : $G = BK$.*

Terminons par une description des doubles classes de G modulo B à droite et I ou $I(1)$ à gauche.

Lemme 2.4. *Le groupe G admet les décompositions en doubles classes disjointes suivantes :*

$$G = BI \sqcup Bw_0I = BI(1) \sqcup Bw_0I(1) \ .$$

Démonstration. Etant donné que w_0 normalise T, que T est un sous-groupe de B et que $I = T(\mathcal{O}_F)I(1)$, la décomposition associée à $I(1)$ est une conséquence directe de celle associée à I. Par ailleurs, le relèvement de la décomposition de Bruhat finie (2.1) via l'application de réduction modulo ϖ_F fournit la décomposition en doubles classes disjointes suivante de K :

$$K = I \sqcup Iw_0I \ ,$$

et permet de déduire de la décomposition d'Iwasawa que $G = BK = BI \sqcup BIw_0I$. Notons que cette dernière union reste disjointe grâce à la décomposition (2.1), à laquelle on peut se ramener via l'application *red* puisque l'on a choisi I standard par rapport à B. Remarquons maintenant par décomposition d'Iwahori, on a

$$BIw_0I = B(I \cap T)(I \cap U)(I \cap \overline{U})w_0I = B(I \cap \overline{U})w_0I \ .$$

Puisque $w_0^{-1}(I \cap \overline{U})w_0$ est contenu dans $K \cap w_0^{-1}\overline{U}w_0 = K \cap U$, donc en particulier dans $I(1) \subset I$, on en conclut que $BIw_0I = Bw_0I$, ce qui achève la démonstration. $\square$

2.3 – *Un lemme clé de la théorie modulo p*

Nous terminons ces rappels par un résultat fondamental de la théorie des représentations modulo p, démontré dans [4, Lemma 3(1)].

Lemme 2.5. *Soit P un pro-p-groupe et V une représentation lisse non nulle de P sur C. Alors V contient un vecteur non nul fixe sous l'action de P.*

3. Structure des représentations obtenues par induction parabolique

3.1 – *Etude de la restriction au sous-groupe de Borel*

Fixons un caractère lisse $\chi : T \to C^\times$ et notons encore $\chi : B \to C^\times$ le caractère lisse de B obtenu par inflation. L'application d'évaluation en l'élément neutre 1 de G définit alors un morphisme surjectif de $C[B]$-modules $\mathrm{Ind}_B^G(\chi) \twoheadrightarrow \chi$ dont le noyau V_χ est égal au sous-espace des éléments de $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ à support dans Bw_0U. Nous allons démontrer l'irréductibilité du $C[B]$-module V_χ, ce qui prouvera le premier point du Théorème 1.1. Pour ce faire, nous commençons par donner une caractérisation des éléments de V_χ en terme de support.

Lemme 3.1. *Un élément $f \in \mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ appartient à V_χ si et seulement s'il existe un sous-groupe ouvert compact U_f de U tel que le support de f soit inclus dans Bw_0U_f.*

Démonstration. Seule l'implication directe de cette équivalence nécessite un argument. Supposons que f soit un élément de V_χ. Puisque $f(1) = 0$, l'hypothèse de lissité implique que f s'annule sur un ensemble de la forme $B\overline{U}_f$ avec $\overline{U}_f$ sous-groupe ouvert compact de $\overline{U}$. Puisque $B \cap \overline{U} = \{1\}$, la décomposition de Bruhat raffinée assure que tout élément non trivial de $B\overline{U}_f$ appartient à Bw_0U. Rappelons alors que l'application envoyant un élément u sur la classe Bw_0u induit un homéomorphisme de U sur $B\backslash Bw_0U$ et que le quotient $B\backslash G$ est une compactification à un point de U. Par suite, l'image du support de f sous l'homéomorphisme sus-mentionné est incluse dans un sous-groupe ouvert compact U_f de U et le support de f est alors par construction contenu dans Bw_0U_f, ce qui termine la démonstration. □

Nous allons maintenant donner un autre modèle du $C[B]$-module V_χ grâce auquel l'assertion d'irréductibilité sera plus facile à démontrer. Notons $\mathcal{C}_c^\infty(U)$ l'espace des fonctions lisses à support compact définies sur U et à valeurs dans C, que l'on munit de l'action lisse de B définie par la formule suivante :

$$\forall\, b \in B,\ \forall\, f \in \mathcal{C}_c^\infty(U),\ b \cdot f := [x \mapsto \chi(w_0tw_0^{-1})f(t^{-1}xtu)]\ , \tag{3.1}$$

où $b = tu$ est une factorisation de b dans TU. Notons que cette action est essentiellement la tordue par χ^{w_0} de l'action induite par l'action par conjugaison de T sur U. Si l'on pose $\mathcal{J}(f) := [u \mapsto f(w_0u)]$ pour toute fonction $f \in V_\chi$, le Lemme 3.1 assure que $\mathcal{J}$ est à valeurs dans $\mathcal{C}_c^\infty(U)$. On vérifie alors immédiatement que $\mathcal{J}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels dont l'inverse est donné par l'application envoyant une fonction $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(U)$ sur l'élément $[bw_0u \mapsto \chi(b)\phi(u)]$ de V_χ. Un calcul direct prouve par ailleurs la B-équivariance de l'application $\mathcal{J}$, ce qui achève de démontrer le résultat suivant.

Lemme 3.2. *Le $C[B]$-module V_χ est isomorphe au $C[B]$-module défini sur $\mathcal{C}_c^\infty(U)$ par la formule* (3.1).

Nous sommes ainsi ramenée à prouver l'irréductibilité du $C[B]$-module $C_c^\infty(U)$. Pour ce faire, nous allons utiliser certaines propriétés topologiques du groupe U : d'après [16, II.1.3.ii)], U admet une filtration croissante exhaustive par des pro-p-sous-groupes ouverts compacts, et tout élément de $\mathcal{C}_c^\infty(U)$ est donc à support dans un tel sous-groupe. Démontrons à présent le résultat suivant.

Lemme 3.3. *Soit U_0 un sous-groupe ouvert compact de U.*

(i) L'espace vectoriel des éléments U_0-invariants de $\mathcal{C}_c^\infty(U_0)$ est de dimension 1 sur C et admet pour base la fonction indicatrice 1_{U_0} de U_0.

(ii) La fonction indicatrice 1_{U_0} engendre le $C[B]$-module $\mathcal{C}_c^\infty(U)$.

Démonstration. Si f est un élément U_0-invariant de $\mathcal{C}_c^\infty(U_0)$, la formule (3.1) assure que $f(u) = (u \cdot f)(1) = f(1)$ pour tout élément $u \in U_0$, donc que f est constante sur U_0. Pour prouver le second point de l'énoncé, posons $U_n := t_0^n U_0 t_0^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. En appliquant [16, I.3.v)] à l'élément $m = t_0 \in Z(T) = T$, on voit que la famille $\mathcal{U}^+ := \{U_n,\ n \geq 1\}$ est une filtration décroissante de sous-groupes ouverts compacts d'intersection triviale et une base de voisinages de l'élément neutre 1 tandis que la famille $\mathcal{U}^- := \{U_{-n},\ n \geq 1\}$ est une filtration croissante exhaustive de U. En outre, un calcul immédiat à partir de la formule (3.1) fournit les identités suivantes :

$$\begin{cases} \forall\, u \in U, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}, \quad u \cdot 1_{U_n} = 1_{U_n u^{-1}} \ , \\ \qquad\qquad\quad \forall\, t \in T, \quad t \cdot 1_{U_0} = \chi(w_0 t w_0^{-1}) 1_{t U_0 t^{-1}} \ , \end{cases}$$

ce qui prouve que l'action de $B = TU$ sur 1_{U_0} permet d'engendrer tout élément de $\mathcal{C}_c^\infty(U)$ et termine la démonstration. □

Corollaire 3.4. *Le $C[B]$-module $\mathcal{C}_c^\infty(U)$ est irréductible.*

Démonstration. Soit W une sous-B-représentation lisse non nulle de $\mathcal{C}_c^\infty(U)$. Fixons un élément non nul f de W et un pro-p-sous-groupe ouvert compact U_0 de U contenant le support de f. Le $C[U_0]$-module engendré par f est alors inclus dans $\mathcal{C}_c^\infty(U_0)$ et il contient un vecteur non nul invariant sous l'action de U_0 grâce au Lemme 2.5. D'après le premier point du Lemme 3.3, il doit donc contenir la fonction indicatrice 1_{U_0}, ce qui implique que le $C[B]$-module engendré par f, inclus dans W par construction, contient a fortiori la fonction 1_{U_0}. Le second point du Lemme 3.3 assure alors que $\mathcal{C}_c^\infty(U)$ est contenu dans W, ce qui implique que $W = \mathcal{C}_c^\infty(U)$. □

La définition de V_χ fournit alors directement les assertions suivantes.

Corollaire 3.5. *(i) Le $C[B]$-module $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ est de longueur 2, avec χ comme quotient et V_χ comme sous-objet.*

(ii) Les seuls sous-quotients irréductibles de $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ sont χ et V_χ, et tous deux sont de multiplicité 1.

(iii) Le seul sous-quotient de dimension finie du $C[B]$-module $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ est le caractère χ.

Une fois traitée la question de la réductibilité se pose celle de la décomposabilité du $C[B]$-module $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$, que le Corollaire 3.5 permet de reformuler comme suit : dans quels cas le caractère χ est-il un sous-$C[B]$-module de $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$? Supposons donc qu'il existe une fonction $f \in \mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ vérifiant $b \cdot f = \chi(b)f$ pour tout élément $b \in B$. On a alors :

$$\forall\ b \in B,\ \forall\ g \in G,\ f(bg) = \chi(b)f(g) = f(gb)\ . \tag{3.2}$$

Ces égalités vont nous permettre de démontrer la condition nécessaire suivante de décomposabilité, dont nous vérifierons ensuite la suffisance.

Lemme 3.6. *La droite engendrée par f sur C est stable sous l'action de G. Autrement dit : si χ est un sous-$C[B]$-module de $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$, alors χ s'étend en un caractère lisse de G sur C.*

Démonstration. Cette preuve est constituée de trois étapes : nous vérifions d'abord que f ne s'annule pas sur G, puis que f est fixe sous l'action de $\overline{U}$, ce qui nous permettra de conclure. L'irréductibilité du $C[B]$-module de dimension infinie V_χ assure que f n'appartient pas à V_χ, donc que $f(1)$ est non nul. On déduit de (3.2) que B est entièrement inclus dans le support de f, ce qui implique notamment que ce support est d'intersection non vide avec l'ouvert dense Bw_0U. La formule (3.2) assure alors que $f(w_0)$ doit être non nul, puis que Bw_0U est inclus dans le support de f. La décomposition de Bruhat raffinée permet alors de conclure que le support de f est égal à G.

Par ailleurs, on sait d'après [16, I.3.v)] que pour tout sous-groupe ouvert compact $\overline{U}_0$ de $\overline{U}$, la famille $\{t_0^{-n}\overline{U}_0t_0^n\}_{n\geq 1}$ est une suite décroissante de sous-groupes ouverts compacts de $\overline{U}$ d'intersection triviale tandis que la famille $\{t_0^n\overline{U}_0t_0^{-n}\}_{n\geq 1}$ est une filtration croissante exhaustive de $\overline{U}$. Fixons un tel $\overline{U}_0$: la lissité de f assure alors qu'il existe un entier $N \geq 1$ tel que f soit fixe sous l'action de $t_0^{-N}\overline{U}_0t_0^N$. Soit maintenant $u \in \overline{U}$, et soit $n \geq 1$ tel que u appartienne à $t_0^n\overline{U}_0t_0^{-n}$. En écrivant $n = -N + (n + N)$, on obtient l'existence d'un élément $v \in t_0^{-N}\overline{U}_0t_0^N$ tel que $u = t_0^{n+N}vt_0^{-(n+N)}$. Ainsi, on a :

$$u \cdot f = (t_0^{n+N}vt_0^{-(n+N)}) \cdot f = \chi(t_0^{-(N+n)})(t_0^{n+N}v) \cdot f = \chi(t_0^{-(N+n)})\chi(t_0^{N+n})f = f\ ,$$

ce qui montre que f est fixe sous l'action de $u \in \overline{U}$ arbitrairement choisi et permet de déduire de la formule (3.2) que la droite engendrée par f est stable sous l'action de B. Il nous reste donc à montrer que cette droite est stable sous l'action de w_0 pour déduire sa stabilité sous l'action de G de la décomposition de Bruhat. Nous allons prouver que w_0 agit que f par le scalaire $\lambda := \dfrac{f(w_0)}{f(1)}$, qui est bien défini et non nul d'après la première étape. Par décomposition de Bruhat raffinée, tout élément x de G satisfait à l'un des deux cas suivants.

- Soit $x = tu$ appartient à B, auquel cas l'on a

$$(w_0 \cdot f)(x) = f(xw_0) = \chi(x)f(w_0) = \frac{f(w_0)}{f(1)}\chi(x)f(1) = \frac{f(w_0)}{f(1)}f(x) = \lambda f(x)\ .$$

Notons ici que l'appartenance de w_0^2 à T assure alors que l'on a

$$\chi(w_0^2)f = w_0^2 \cdot f = \left(\frac{f(w_0)}{f(1)}\right)^2 f = \lambda^2 f \ . \tag{3.3}$$

- Soit $x = bw_0u$ appartient à Bw_0U, auquel cas l'on a

$$\begin{array}{rcll} (w_0 \cdot f)(x) & = & f(bw_0uw_0) & \\ & = & \chi(b)f(w_0uw_0^{-1}w_0^2) & \\ & = & \chi(b)(w_0^2 \cdot f)(w_0uw_0^{-1}) & \\ & = & \chi(b)\lambda^2 f(w_0uw_0^{-1}) & \text{par } (3.3) \\ & = & \chi(b)\lambda^2(w_0uw_0^{-1} \cdot f)(1) & \text{avec } w_0uw_0^{-1} \in \overline{U} \\ & = & \chi(b)\lambda^2 f(1) & \text{par la deuxième étape} \\ & = & \chi(b)\lambda f(w_0) & \\ & = & \lambda f(bw_0u) & \text{par } (3.2) \\ & = & \lambda f(x) \ . & \end{array}$$

Ainsi, on a $(w_0 \cdot f)(x) = \lambda f(x)$ pour tout $x \in G$, ce qui termine la démonstration. □

Supposons réciproquement que χ puisse être étendu en un caractère lisse de G sur C que l'on note encore χ. L'application $[f \mapsto \chi^{-1}f]$ définit alors un isomorphisme de $C[G]$-modules de $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ sur $\mathrm{Ind}_B^G(\mathbf{1}) \otimes \chi$, ce qui permet de se limiter à l'étude du cas où $\chi = \mathbf{1}$ est le caractère trivial de G. On constate alors immédiatement que l'ensemble des fonctions constantes $G \to C$ est un sous-$C[G]$-module de $\mathrm{Ind}_B^G(\mathbf{1})$ de dimension 1 sur C sur lequel G agit trivialement, ce qui achève de prouver le résultat suivant.

Proposition 3.7. *Le $C[B]$-module $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ est semi-simple si, et seulement si, le caractère χ s'étend en un caractère lisse de G sur C. Dans ce cas, on a $\mathrm{Ind}_B^G(\chi) = \chi \oplus V_\chi$, où V_χ est le noyau de la surjection $\mathrm{Ind}_B^G(\chi) \twoheadrightarrow \chi$ définie par l'application d'évaluation en l'élément neutre de G.*

3.2 – *Fin de la preuve du Théorème* 1.1

Si $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ est un $C[G]$-module réductible, le Corollaire 3.5 implique que c'est alors un module de longueur 2 possédant un sous-quotient de dimension 1 dont la restriction à B est égale au caractère χ, ce qui prouve que χ s'étend en un caractère lisse de G sur C. Réciproquement, l'argument précédant la Proposition 3.7 montre que si χ s'étend en un caractère lisse de G sur C, il définit un sous-objet de $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$. Le Corollaire 3.5 assure alors que le quotient $\dfrac{\mathrm{Ind}_B^G(\chi)}{\chi}$ est un $C[G]$-module irréductible, qui est par ailleurs isomorphe à la représentation $St_G \otimes \chi$, où $St_G := \dfrac{\mathrm{Ind}_B^G(\mathbf{1})}{\mathbf{1}}$ est la représentation de Steinberg de G. Vérifions enfin que le $C[G]$-module $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ est toujours indécomposable. Dans le cas contraire, le

Corollaire 3.5 impliquerait que l'espace V_χ des éléments de $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ s'annulant sur l'élément neutre de G est stable sous l'action de G, ce qui est faux : en effet, si U_0 est un sous-groupe ouvert compact de U, le Lemme 3.1 assure que l'élément de $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ de support égal à Bw_0U_0 appartient à V_χ. Son image sous l'action de $w_0 \in G$ est cependant égale à l'élément de $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ de support égal au fermé $Bw_0U_0w_0^{-1}$, et n'appartient donc pas à V_χ puisque l'élément neutre de G appartient à $Bw_0U_0w_0^{-1}$. Nous obtenons ainsi l'énoncé suivant, qui clôt la démonstration du Théorème 1.1.

Théorème 3.8. *Le $C[G]$-module $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ est réductible si et seulement si χ s'étend en un C-caractère lisse de G. Dans ce cas, c'est un objet indécomposable de longueur 2 dont les sous-quotients irréductibles sont χ (comme sous-objet) et $St_G \otimes \chi$ (comme quotient), où $St_G := \dfrac{\mathrm{Ind}_B^G(\mathbf{1})}{\mathbf{1}}$ désigne la représentation de Steinberg de G.*

3.3 – *Terminologie en vigueur et entrelacements entre familles*

Les résultats que nous avons démontrés jusqu'ici prouvent que toute représentation lisse irréductible de G sur C apparaissant comme sous-quotient d'une représentation de la forme $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$, avec $\chi : B \to C^\times$ caractère lisse obtenu par inflation d'un C-caractère lisse de T, appartient à l'une des trois familles suivantes :

(a) les C-caractères lisses de G ;

(b) les représentations *de la série principale*, qui sont les représentations de la forme $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ avec $\chi : B \to C^\times$ caractère lisse ne pouvant être étendu en un C-caractère lisse de G ;

(c) les représentations *de la série spéciale*, qui sont les représentations de la forme $St_G \otimes \eta$ avec $\eta : G \to C^\times$ caractère lisse.

Vérifions que deux objets issus de familles différentes ne peuvent être isomorphes. Remarquons tout d'abord que les seuls objets de dimension finie qui apparaissent dans cette liste sont les caractères, ce qui assure l'absence d'isomorphisme entre un objet de la famille (a) et un objet des familles (b) ou (c). Le Corollaire 3.5 et le Théorème 3.8 impliquent par ailleurs qu'un objet de la famille (b) ne peut être isomorphe à un objet de la famille (c) car ils définissent des $C[B]$-modules de longueurs différentes, à savoir 2 pour les représentations de la série principale et 1 pour celles de la série spéciale. La liste ci-dessus fournit donc effectivement une classification des représentations lisses irréductibles non supercuspidales de G sur C, ce qui prouve la première assertion du Théorème 1.2. Nous verrons dans la section suivante qu'il ne peut exister d'isomorphisme non trivial à l'intérieur d'une famille donnée, ce qui achèvera la preuve du Théorème 1.2.

4. Espaces de vecteurs $I(1)$-invariants

Nous prouvons à présent quelques énoncés portant sur les espaces de vecteurs invariants sous l'action du pro-p-Iwahori standard $I(1)$ des représentations non supercuspidales de G étudiées ci-avant. Nous calculons leur dimension en tant qu'espace vectoriel sur C, prouvant au passage l'admissibilité de toute représentation lisse non supercuspidale de G sur C, et étudions leur structure de $C[I]$-module. Nous montrons ensuite que tout sous-quotient d'une induite parabolique de la forme $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ est engendré par son espace de vecteurs $I(1)$-invariants, et terminons par l'étude des entrelacements à l'intérieur de chacune des familles de la classification établie dans la Section 3.3 –.

4.1 – *Cas des induites paraboliques*

Soit $\chi : B \to C^\times$ un caractère lisse. D'après le Lemme 2.4, les doubles classes ouvertes $BI(1)$ et $Bw_0I(1)$ forment une partition de G, et tout élément $I(1)$-invariant de $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ est donc entièrement caractérisé par ses valeurs en 1 et en w_0. Comme le Lemme 2.5 implique que χ est trivial sur $B \cap I(1)$, on obtient déjà le résultat suivant.

Lemme 4.1. *L'espace vectoriel des éléments $I(1)$-invariants de $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ est de dimension 2 sur C. Une base en est donnée par la famille $\{f_{1,\chi}, f_{2,\chi}\}$ des fonctions $I(1)$-invariantes caractérisées par le système suivant :*

$$\begin{cases} f_{1,\chi}(1) = 1 \ ; \quad f_{1,\chi}(w_0) = 0 \ ; \\ f_{2,\chi}(1) = 0 \ ; \quad f_{2,\chi}(w_0) = 1 \ . \end{cases}$$

Par ailleurs, la factorisation $I = T(\mathcal{O}_F)I(1)$ assure que le sous-groupe d'Iwahori I agit sur les éléments $I(1)$-invariants de $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ par des C-caractères lisses définis par inflation de caractères lisses $T(\mathcal{O}_F) \to C^\times$. Le prochain énoncé précise les différents caractères possibles. On rappelle qu'une *composante I-isotypique* d'une représentation π de G est un sous-espace de la forme $\{v \in \pi \mid \forall\, i \in I,\ i{\cdot}v = \chi(i)v\}$, où $\chi : I \to C^\times$ est un caractère lisse.

Lemme 4.2. *Notons $\chi^+, \chi^- : I \to C^\times$ les caractères lisses obtenus par inflation respective des caractères $\chi|_{T(\mathcal{O}_F)}$ et $\chi^{w_0}|_{T(\mathcal{O}_F)}$ de $T(\mathcal{O}_F)$, où l'on pose $\chi^{w_0}(t) := \chi(w_0tw_0^{-1})$.*

(i) Le groupe I agit sur $f_{1,\chi}$ (resp. $f_{2,\chi}$) par le caractère χ^+ (resp. χ^-) :

$$\forall\ i \in I, \ \begin{cases} i \cdot f_{1,\chi} = \chi^+(i) f_{1,\chi} \ ; \\ i \cdot f_{2,\chi} = \chi^-(i) f_{2,\chi} \ . \end{cases}$$

(ii) Le $C[G]$-module $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ admet au plus deux composantes I-isotypiques non nulles, qui sont celles associées à χ^+ et à χ^-. En particulier, $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ admet des vecteurs I-invariants non triviaux si et seulement si χ est trivial sur $T(\mathcal{O}_F)$ (auquel cas le caractère χ est dit non ramifié*).*

Démonstration. Soit f un élément $I(1)$-invariant de $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ et i un élément de I que l'on écrit sous la forme $i = ti_1$ avec $t \in T(\mathcal{O}_F)$ et $i_1 \in I(1)$. L'invariance de f sous l'action de $I(1)$ assure tout d'abord que l'on a :

$$\forall\ x \in G,\ (i \cdot f)(x) = f(xti_1) = f(xt) \ .$$

Le Lemme 2.4 permet à nouveau de distinguer deux cas :

- soit $x = bi_2$ est contenu dans $BI(1)$, auquel cas l'on a $xt = btt^{-1}i_2t$, avec $t^{-1}i_2t$ appartenant à $I(1)$ puisque t appartient à $T(\mathcal{O}_F)$, et l'invariance de f sous l'action de $I(1)$ implique alors que l'on a
$$f(xt) = \chi(bt)f(1) = \chi(t)f(x) = \chi^+(i)f(x) \ ;$$
- soit $x = bw_0i_2$ appartient à $Bw_0I(1)$, auquel cas l'on a $xt = (bw_0tw_0^{-1})w_0(t^{-1}i_2t)$ avec $bw_0tw^{-1} \in B$ et $t^{-1}i_2t \in I(1)$. Par invariance de f sous l'action de $I(1)$, ceci implique cette fois que l'on a
$$f(xt) = \chi(bw_0tw_0^{-1})f(w_0) = \chi(w_0tw_0^{-1})f(bw_0) = \chi^-(i)f(x) \ .$$

Comme $f_{1,\chi}$ et $f_{2,\chi}$ ont pour supports respectifs $BI(1)$ et $Bw_0I(1)$, l'action de I sur $f_{1,\chi}$ (resp. $f_{2,\chi}$) est entièrement déterminée par le premier cas (resp. le second cas), ce qui démontre la première assertion. Rappelons maintenant que $I(1)$ étant un pro-p-sous-groupe distingué de I, le Lemme 2.5 assure que toute composante I-isotypique de $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ est incluse dans l'espace des vecteurs $I(1)$-invariants, qui est de dimension 2 sur C par le lemme précédent. Comme nous venons de construire deux droites distinctes de $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)^{I(1)}$ sur lesquelles I agit par des caractères χ^+ et χ^-, nous avons ainsi obtenu toutes les composantes I-isotypiques de $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ et prouvé la première partie de l'assertion (*ii*). Il nous reste à remarquer que si $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ contient un vecteur I-invariant non nul, on doit avoir $\chi^+ = \mathbf{1}$ ou $\chi^- = \mathbf{1}$. Comme w_0^2 appartient au groupe abélien T, ces deux conditions sont équivalentes et impliquent donc que tout vecteur $I(1)$-invariant est en fait I-invariant, ce qui termine la démonstration car l'implication réciproque est immédiate. □

4.2 – *Cas des représentations de la série spéciale*

Théorème 4.3. *L'espace des vecteurs $I(1)$-invariants de la représentation de Steinberg est de dimension 1 sur C et il s'insère dans la suite exacte courte suivante de C-espaces vectoriels :*
$$0 \longrightarrow C \cdot 1_G \longrightarrow \left(\mathrm{Ind}_B^G(\mathbf{1})\right)^{I(1)} \longrightarrow St_G^{I(1)} \longrightarrow 0 \ .$$

Démonstration. Par définition de la représentation de Steinberg, on dispose de la suite exacte courte suivante de $C[G]$-modules :
$$0 \longrightarrow \mathbf{1} \longrightarrow \mathrm{Ind}_B^G(\mathbf{1}) \longrightarrow St_G \longrightarrow 0 \ .$$

En lui appliquant le foncteur des $I(1)$-invariants, qui est exact à gauche, nous obtenons la suite exacte suivante d'espaces vectoriels sur C :
$$0 \longrightarrow C \cdot 1_G \longrightarrow Cf_1 \oplus Cf_2 \longrightarrow St_G^{I(1)} \ , \tag{4.1}$$
où l'on a posé $f_j := f_{j,\mathbf{1}}$ (avec $j \in \{1,2\}$) pour alléger les notations et où 1_G désigne la fonction constante égale à l'unité 1 de C. Pour conclure, il suffit donc

de prouver la surjectivité de la flèche de droite dans la suite exacte (4.1), i.e. de prouver que tout élément $I(1)$-invariant de St_G admet un relèvement $I(1)$-invariant dans $\mathrm{Ind}_B^G(\mathbf{1})$.

Soit donc $\overline{f} \in St_G^{I(1)}$ et soit $f \in \mathrm{Ind}_B^G(\mathbf{1})$ un relèvement de $\overline{f}$. L'invariance de $\overline{f}$ sous l'action de $I(1)$ se traduit comme suit pour f :

$$\forall\ i \in I(1),\ \exists\ \lambda(i) \in C \mid i \cdot f - f = \lambda(i) 1_G\ .$$

Nous allons montrer que l'application $\lambda : I \to C$ ainsi définie est identiquement nulle, ce qui prouvera que f est invariant sous l'action de $I(1)$ et terminera la démonstration. Pour ce faire, on commence par rappeler que l'appartenance de f à $\mathrm{Ind}_B^G(\mathbf{1})$ assure que l'on dispose des identités suivantes :

$$\forall\ x, i \in I(1),\ \forall\ b \in B,\ \begin{cases} (i \cdot f - f)(bx) = f(xi) - f(x)\ ; \\ (i \cdot f - f)(bw_0x) = f(w_0xi) - f(w_0x)\ . \end{cases} \tag{4.2}$$

Remarquons maintenant que λ est un homomorphisme de groupes puisque l'on a :

$$\begin{aligned} \forall\ u, v \in I(1),\ \lambda(uv)1_G &= (uv) \cdot f - f \\ &= (uv) \cdot f - u \cdot f + u \cdot f - f \\ &= u \cdot (\lambda(v)1_G) + \lambda(u)1_G \\ &= \lambda(v)(u \cdot 1_G) + \lambda(u)1_G \\ &= (\lambda(v) + \lambda(u))1_G\ , \end{aligned}$$

ce qui prouve que $\lambda(uv) = \lambda(u) + \lambda(v)$. La factorisation (2.2) nous ramène donc à vérifier la nullité de λ sur $I(1) \cap U$, $I(1) \cap \overline{U}$ et $I(1) \cap \overline{T}$ pour pouvoir conclure. La première relation du système (4.2) assure que si i appartient à $I \cap U$ ou à $I \cap T$, il vérifie

$$\lambda(i) = (i \cdot f - f)(1) = f(i) - f(1) = 0\ ,$$

tandis que si i appartient à $I \cap \overline{U}$, l'élément $w_0iw_0^{-1}$ appartient alors à U et la seconde relation du système (4.2) montre que l'on a dans ce cas

$$\lambda(i) = (i \cdot f - f)(w_0) = f(w_0iw_0^{-1}w_0) - f(w_0) = f(w_0) - f(w_0) = 0\ ,$$

ce qui prouve le résultat voulu. □

Corollaire 4.4. *Si π est une représentation de la série spéciale, alors $\pi^{I(1)}$ est de dimension 1 sur C.*

Démonstration. D'après le Lemme 2.5, la restriction à $I(1)$ d'un caractère lisse de G sur C est triviale, de sorte que l'on a $\pi^{I(1)} \simeq St_G^{I(1)}$. □

Corollaire 4.5. *Toute représentation lisse non supercuspidale de G sur C est admissible.*

Démonstration. Les énoncés précédents assurent que l'espace des vecteurs fixes sous l'action du sous-groupe ouvert compact $I(1)$ d'une telle représentation est toujours de dimension 1 ou 2 sur C. □

4.3 – *Génération par les $I(1)$-invariants*

Nous présentons ici un résultat de génération pour les représentations lisses de G sur C qui sont sous-quotients (non nécessairement irréductibles) des représentations paraboliquement induites étudiées jusqu'alors.

Proposition 4.6. *Toute représentation lisse de G sur C qui apparaît comme sous-quotient d'une représentation paraboliquement induite est égale au $C[G]$-module engendré par l'espace de ses vecteurs $I(1)$-invariants.*

Démonstration. Si π est irréductible, il n'y a rien à démontrer car le Lemme 2.5 assure la non nullité de $\pi^{I(1)}$ et tout vecteur non nul de $\pi^{I(1)}$ engendre alors π en tant que $C[G]$-module. Les résultats démontrés dans la Section 3.2 – montrent alors que le seul cas restant à traiter est celui où π est de la forme $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ avec χ un C-caractère lisse de G. On dispose alors de la suite exacte courte suivante de $C[G]$-modules :

$$0 \longrightarrow \chi \longrightarrow \mathrm{Ind}_B^G(\chi) \longrightarrow St_G \otimes \chi \longrightarrow 0 \ .$$

Ainsi, si f est un élément de $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ et si $\overline{f}$ désigne son image dans $St_G \otimes \chi$, l'irréductibilité du $C[G]$-module $St_G \otimes \chi$ assure que $\overline{f}$ est une somme finie de la forme $\sum_{j \in J} g_j \cdot f_j$ avec $g_j \in G$ et $f_j \in (St_G \otimes \chi)^{I(1)} = St_G^{I(1)} \otimes \chi$ pour tout $j \in J$. Après torsion de la suite exacte courte du Théorème 4.3 par le caractère χ, on voit que chaque élément f_j admet un relèvement $I(1)$-invariant $F_j \in (\mathrm{Ind}_B^G(\chi))^{I(1)}$, et l'égalité $\overline{f} = \sum_{j \in J} g_j \cdot f_j$ signifie que la différence $f - \sum_{j \in J} g_j \cdot F_j$ appartient au noyau de la projection $\mathrm{Ind}_B^G(\chi) \twoheadrightarrow St_G \otimes \chi$, i.e. au caractère χ. C'est donc qu'il existe un élément $\phi \in \chi = \chi^{I(1)}$ tel que f puisse être écrit sous la forme $\phi + \sum_{j \in J} g_j \cdot F_j$, ce qui prouve que f appartient au $C[G]$-module engendré par les éléments $I(1)$-invariants de $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ et termine la démonstration. □

4.4 – *Entrelacements entre deux objets d'une même famille*

L'absence d'isomorphisme entre deux caractères distincts est immédiate. Le cas de représentations de la série principale définies par des caractères distincts n'est pas beaucoup plus difficile à prouver, comme en atteste le résultat suivant.

Lemme 4.7. *Soient $\chi_1, \chi_2 : B \to C^\times$ deux caractères lisses. Les $C[G]$-modules portés par $\mathrm{Ind}_B^G(\chi_1)$ et $\mathrm{Ind}_B^G(\chi_2)$ sont isomorphes si et seulement si $\chi_1 = \chi_2$. Dans ce cas, l'espace d'entrelacements $\mathrm{End}_{C[G]}(\mathrm{Ind}_B^G(\chi_1))$ est de dimension 1 sur C.*

Démonstration. Pour prouver la première assertion, il suffit de donner un argument pour l'implication en sens direct. Si les $C[G]$-modules $\mathrm{Ind}_B^G(\chi_1)$ et $\mathrm{Ind}_B^G(\chi_2)$ sont isomorphes, la réciprocité de Frobenius lisse [16, Section I.5.7.i)] implique l'existence d'un homomorphisme non nul de $C[B]$-modules de la forme $\mathrm{Ind}_B^G(\chi_1) \twoheadrightarrow \chi_2$. Le caractère χ_2 est donc un sous-quotient de dimension 1 du $C[B]$-module $\mathrm{Ind}_B^G(\chi_1)$, dont le seul sous-quotient de dimension finie est le caractère χ_1. On doit donc avoir $\chi_1 = \chi_2$, ce qui prouve l'implication voulue par contraposition. La seconde assertion découle à nouveau de la réciprocité de Frobenius lisse et du fait que le caractère χ_1 est un quotient de multiplicité 1 de $\mathrm{Ind}_B^G(\chi_1)$. $\square$

Notons ici l'énoncé du Lemme 4.7 est valable sans hypothèse d'irréductibilité sur les induites paraboliques considérées. Reste à traiter le cas des représentations de la série spéciale, qui font l'objet du lemme suivant.

Lemme 4.8. *Soit $\chi : G \to C^\times$ un caractère lisse.*

(1) *L'espace d'entrelacements $\mathrm{End}_{C[G]}(St_G)$ est de dimension 1 sur C.*

(2) *Les représentations St_G et $St_G \otimes \chi$ sont isomorphes si, et seulement si, χ est le caractère trivial.*

Démonstration. Le premier point de l'énoncé découle directement du Corollaire 4.4 et de l'irréductibilité de St_G. Supposons maintenant qu'il existe un isomorphisme G-équivariant $\varphi : St_G \to St_G \otimes \chi$. Grâce à [11, Remarque 6.2.2 et Proposition 6.2.8] et à [13, Chapitre 2, Lemme 15.1], la représentation de Steinberg du groupe dérivé de G satisfait au premier point de notre énoncé et est isomorphe à la restriction à DG de St_G. Ainsi, φ induit un isomorphisme DG-équivariant $St_{DG} \to St_{DG}$, qui doit être une homothétie de rapport $\lambda \in C^\times$ d'après le premier point prouvé ci-avant. Comme G/DG est abélien, on vérifie immédiatement que la G-équivariance de φ nécessite d'avoir $\lambda(\chi(g) - 1)g \cdot v = 0$ pour toute paire $(g, v) \in G \times St_G$, ce qui prouve la trivialité de χ et termine la démonstration. $\square$

Remarquons enfin que le premier point du Lemme 4.8 peut être prouvé sans recourir aux espaces de vecteurs $I(1)$-invariants. Grâce au Lemme 2.5, on peut par exemple prouver que le K-socle de St_G est réduit à la représentation de Steinberg du groupe fini $\overline{\mathcal{G}}_K(k_F)$ puis utiliser les énoncés correspondants sur les groupes finis pour conclure par le même type d'arguments. Il nous semblait cependant dommage de ne pas présenter une preuve aussi rapide une fois connus les résultats sur les $I(1)$-invariants, d'où l'organisation que nous avons choisie pour cet article.

Remerciements. Nous remercions Guy Henniart pour ses précieux commentaires sur une version préliminaire de cet article, ainsi que pour plusieurs discussions très intéressantes.

Références

[1] R. Abdellatif, *Autour des représentations modulo p des groupes réductifs p-adiques de rang* 1, Thèse de Doctorat de l'Université Paris-Sud 11, 2011.

[2] R. Abdellatif, *Classification des représentations modulo p de $SL(2, F)$*, à paraître au Bull. Math. Soc. Fr.

[3] N. Abe, *On a classification of irreducible admissible modulo p representations of a p-adic split reductive group*, à paraître à Compositio Math.

[4] L. Barthel – R. Livné, *Irreducible modular representations of GL(2) of a local field*, Duke Math. J. **75** (1994), no. 2, pp. 261–292.

[5] L. Barthel – R. Livné, *Modular representations of GL(2) of a local field : the ordinary, unramified case*, J. Number Theory **55** (1995), pp. 1–27.

[6] A. Borel, *Introduction aux groupes arithmétiques*, Publ. Math. de l'université de Strasbourg XV, Hermann, Paris, 1969.

[7] A. Borel, *Linear Algebraic groups*, Vol. 126 of Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New-York, 1991.

[8] F. Bruhat – J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local : I. Données radicielles valuées.*, Publ. Math. de l'IHES **41** (1972), pp. 5–251.

[9] F. Bruhat – J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local : II. Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée.*, Publ. Math. de l'IHES **60** (1984), pp. 5–184.

[10] P. Cartier, *Representations of* $\mathfrak{p}$*-adic groups.* in : *Proc. Sympos. Pure Math. XXXIII*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979, Part 1, pp. 111–155.

[11] M. Demazure, *Groupes réductifs, déploiements, sous-groupes, groupes quotients (Exposé XXII).* in : *SGA 3*, Documents Mathématiques no. 8 (2011), Soc. Math. Fr., pp. 109–175.

[12] F. Herzig, *The classification of irreducible admissible mod p representations of a p-adic* GL_n, Inventiones Math. **186** (2011), no. 2, pp. 373–434.

[13] T. Ly, *Représentations modulo p de* $GL(m, D)$*, D algèbre à division sur un corps local*, Thèse de doctorat de l'Université Paris VII (2013).

[14] R. Ollivier, *Critère d'irréductibilité pour les séries principales de* $GL(n, F)$ *en caractéristique p*, J. of Algebra **304** (2006), pp. 39–72.

[15] J. Tits, *Reductive groups over local fields.* in : *Proc. Sympos. Pure Math. XXXIII*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979, Part 1, pp. 29–69.

[16] M.-F. Vignéras, *Représentations* ℓ*-modulaires d'un groupe réductif p-adique avec* $\ell \neq p$, Progress in Math. **137**, Birkhäuser, Boston, 1996.

[17] M.-F. Vignéras, *Série principale modulo p de groupes réductifs p-adiques*, GAFA **17** (2008), pp. 2090–2112.

Received submission date; revised revision date