

L'association

*femmes  
mathématiques*

en partenariat avec  
la Mission pour la Place des Femmes du CNRS  
présente le

Livret des participant-e-s  
du 12ème Forum des  
Jeunes Mathématicien-ne-s

Thèmes privilégiés : Algèbre et Géométries

12 au 14 novembre 2012,  
Institut Henri Poincaré, Paris

Avec le soutien de l'INSMI, l'INS2I, la MIPADI du Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche, la **Fédération de Recherche en Mathématiques de Paris Centre**, ainsi que le parrainage de la **Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles**, la **Société Mathématique de France**, la **Fondation Sciences Mathématiques de Paris** et **European Women in Mathematics**.





## Sessions Jeunes Mathématicien-ne-s

- Ramla Abdellatif  
*Classification des représentations modulo  $p$  de  $SL(2, \mathbb{Q}_p)$*
- Sandrine Caruso  
*Tresses et diagrammes de courbes*
- Benjamin Collas  
*Espaces de modules de courbes, inerties et théories de Grothendieck-Teichmüller*
- Jehanne Dousse  
*Une généralisation du théorème de Roth et son application aux sous-ensembles sum-free*
- Clément Dupont  
*Polylogarithmes d'Aomoto, structures de Hodge mixtes et coproduit motivique*
- Banafsheh Farang-Hariri  
*La fonctorialité de Langlands géométrique locale au niveau Iwahori*
- Ann Kiefer  
*Les unités dans les anneaux de groupes et la géométrie hyperbolique*
- Cécile Le Rudulier  
*Points algébriques et conjecture de Batyrev-Manin*
- Victoria Lebed  
*Homologies des structures algébriques : approche unificatrice via tressages*
- Florent Martin  
*Cohomologie tale des ensembles semi-algébriques dans les espaces de Berkovich*
- Delphine Moussard  
*Invariants de type fini des sphères d'homologie rationnelle de dimension 3*
- Stéphanie Reglade  
*Approche formelle la manière de Neukirch de la théorie  $\ell$ -adique du corps des classes*
- Louis-Hadrien Robert  
*Algebras for  $\mathfrak{sl}_3$ -homology*
- Anna Leah Seigal  
*Intersection Multiplicity Growth in Local Dynamical Systems*
- Sofia Tirabassi  
*Birational geometry of varieties of maximal Albanese dimension via integral transforms*
- Anne Vaugon  
*Orbites périodiques du champ de Reeb et hyperbolicité*



# CLASSIFICATION DES REPRÉSENTATIONS MODULO $p$ DE $SL(2, \mathbb{Q}_p)$

**Ramla ABDELLATIF**

École Normale Supérieure de Lyon

46, allée d'Italie

69364 Lyon Cedex 07

**ramla.abdellatif@ens-lyon.fr**

**Résumé** - *Nous expliquons comment obtenir une classification complète des représentations lisses irréductibles du groupe spécial linéaire  $SL(2, \mathbb{Q}_p)$  à coefficients dans une clôture algébrique  $\overline{\mathbb{F}}_p$  du corps à  $p$  éléments. Nous en déduisons ensuite une correspondance de Langlands locale semi-simple, qui peut être vue comme un dictionnaire entre certaines classes d'isomorphisme de représentations galoisiennes projectives semi-simples et certains paquets de classes d'isomorphisme de représentations lisses semi-simples de  $SL(2, \mathbb{Q}_p)$ .*

**Mots clés** - **Représentations modulo  $p$  ; groupe spécial linéaire ; algèbres de Hecke ; correspondance de Langlands locale semi-simple.**

## 1 Introduction et rappels

Durant les trente dernières années, l'étude des congruences entre formes modulaires a permis l'obtention de très beaux résultats arithmétiques, tels la preuve par Wiles du grand théorème de Fermat. Une généralisation de ces objets est donnée par la théorie des formes automorphes, elle-même naturellement reliée à celle des représentations automorphes. Ces dernières sont des objets adéliques ayant le bon goût de se décomposer en « produit » de représentations de groupes  $v$ -adiques, avec  $v$  place finie ou non. Ces théories furent initialement considérées dans le cadre de coefficients complexes ; cependant, leurs avatars locaux présentèrent rapidement un grand intérêt arithmétique, qu'ils soient à coefficients dans  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$  (auquel cas on parle de représentations  $\ell$ -adiques) ou dans  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$  (auquel cas on parle de représentations modulo  $\ell$ ).

Intéressons-nous aux théories modulaires. Si  $\ell$  et  $p$  sont deux nombres premiers distincts, la théorie des représentations modulo  $\ell$  de groupes  $p$ -adiques est relativement bien comprise, notamment grâce aux travaux de Vignéras pour le groupe linéaire général  $GL_n$  [15], et peut être obtenue par adaptation de méthodes classiques. Les choses se compliquent très sérieusement lorsque l'on s'intéresse aux représentations modulo  $p$  de groupes  $p$ -adiques : en effet, la plupart des outils développés dans la théorie complexe sont inutilisables, et l'on dispose actuellement de bien peu de résultats complets. Dans ce papier, nous présentons l'un des rares cas dans lequel existe une classification exhaustive des représentations lisses irréductibles à coefficients dans  $\overline{\mathbb{F}}_p$  : celui du groupe spécial linéaire  $SL(2, \mathbb{Q}_p)$ .

## Vocabulaire de la théorie des représentations

On rappelle que si  $\Gamma$  est un groupe topologique et si  $L$  est un corps, une *représentation* de  $\Gamma$  sur  $L$  est la donnée d'une action du groupe  $\Gamma$  sur un  $L$ -espace vectoriel  $V$ , ou encore d'un homomorphisme de groupes  $\rho : \Gamma \rightarrow GL(V)$ . Une telle représentation sera indifféremment notée  $(\rho, V)$ ,  $V$  ou  $\rho$ . Si  $V$  est de dimension 1 sur  $L$ , on dit que  $\rho$  est un  $L$ -*caractère* de  $\Gamma$ .

Par ailleurs, une représentation  $(\rho, V)$  de  $\Gamma$  sur  $L$  est dite *irréductible* si les seuls sous-espaces vectoriels de  $V$  stables sous l'action de  $\Gamma$  sont  $\{0\}$  et  $V$ ; elle est dite *lisse* lorsque tout vecteur de  $v$  est fixe sous l'action d'un sous-groupe ouvert de  $\Gamma$ .

## Notations de l'article

On fixe un entier premier  $p$ , une clôture algébrique  $\overline{\mathbb{F}}_p$  du corps résiduel  $\mathbb{F}_p$  de  $\mathbb{Q}_p$  ainsi qu'un plongement  $\iota : \mathbb{F}_p \hookrightarrow \overline{\mathbb{F}}_p$ . Pour tout entier  $r \in \{0, \dots, p-1\}$ , on note  $\iota^r : \mathbb{Q}_p^\times \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_p^\times$  le caractère qui est trivial sur  $p$  et dont l'action sur  $\mathbb{Z}_p^\times$  est définie par la composition

$$\mathbb{Z}_p^\times \rightarrow \mathbb{F}_p^\times \rightarrow \mathbb{F}_p^\times \xrightarrow{\iota} \overline{\mathbb{F}}_p^\times ,$$

la première flèche étant l'application de réduction modulo  $p$  tandis que la flèche de milieu est donnée par l'élévation à la puissance  $r$ . Pour tout scalaire  $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ , on note  $\mu_\lambda$  le  $\overline{\mathbb{F}}_p$ -caractère de  $\mathbb{Q}_p^\times$  qui est trivial sur  $\mathbb{Z}_p^\times$  et qui envoie  $p$  sur  $\lambda$ .

On désigne enfin par  $K := SL(2, \mathbb{Z}_p)$  le sous-groupe ouvert compact maximal standard de  $G := SL(2, \mathbb{Q}_p)$  et par  $B$  le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures de  $G$ . Ce dernier admet une décomposition de Levi de la forme  $B = TU$  où  $T$  est le sous-groupe des matrices diagonales de  $G$  tandis que  $U$  est le radical unipotent de  $B$ .

## 2 Description des représentations non supercuspidales

### 2.1 Induction parabolique et supercuspidalité

Soit  $\chi$  un  $\overline{\mathbb{F}}_p$ -caractère lisse de  $B$ . On note  $\text{Ind}_B^G(\chi)$  l'espace vectoriel sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$  des fonctions  $f : G \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_p$  telles qu'il existe un sous-groupe ouvert compact  $K_f$  de  $G$  pour lequel on a :

$$\forall g \in G, \forall k \in K_f, \forall b \in B, f(bgk) = \chi(b)f(g) .$$

Cet espace est naturellement muni d'une action de  $G$  par translations à droite :

$$\forall g, x \in G, (g \cdot f)(x) := f(xg) .$$

La représentation de  $G$  ainsi définie est appelée une *induite parabolique*, ou *représentation obtenue par induction parabolique*, et est simplement notée  $\text{Ind}_B^G(\chi)$ .

Les représentations lisses irréductibles de  $G$  sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$  ne pouvant être réalisées (à isomorphisme près) comme sous-quotient d'une induite parabolique sont alors dites *supercuspidales*. Quel que soit le groupe considéré, ce sont les représentations les plus difficiles à décrire et elles sont généralement très peu comprises, même dans le cadre de la théorie complexe. A contrario, nous allons voir que la description des représentations non supercuspidales de  $G$  est parfaitement explicite et très agréable.

## 2.2 Classification des représentations non supercuspidales de $G$

Fixons un  $\overline{\mathbb{F}}_p$ -caractère lisse  $\chi$  de  $B$  : l'application d'évaluation en  $I_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  définit alors un homomorphisme surjectif de  $\overline{\mathbb{F}}_p[B]$ -modules  $\text{Ind}_B^G(\chi) \rightarrow \chi$  dont le noyau est un sous- $\overline{\mathbb{F}}_p[B]$ -module irréductible de  $\text{Ind}_B^G(\chi)$  [1, Proposition 2.3]. À l'aide de quelques arguments topologiques et de la décomposition de Bruhat de  $G$ , on peut en déduire le résultat suivant.

**Théorème 2.1** ([1], **Théorème 0.1**) *Soit  $\chi : B \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_p^\times$  un caractère lisse.*

1. *Les assertions suivantes sont équivalentes.*
  - (a) *Le  $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$ -module  $\text{Ind}_B^G(\chi)$  est irréductible.*
  - (b) *Le  $\overline{\mathbb{F}}_p[B]$ -module  $\text{Ind}_B^G(\chi)$  est indécomposable.*
  - (c) *Le caractère  $\chi$  est non trivial.*
2. *Le  $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$ -module  $\text{Ind}_B^G(\mathbf{1})$  est indécomposable de longueur 2, avec le caractère trivial comme sous-objet et la représentation de Steinberg comme quotient.*
3. *Il n'existe pas d'isomorphisme entre sous-quotients d'induites paraboliques définies par des caractères distincts de  $B$ .*

Par suite, toute représentation lisse irréductible non supercuspidale de  $G$  sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$  est isomorphe à une et une seule des représentations suivantes : le caractère trivial  $\mathbf{1}$  ; la représentation de Steinberg  $\text{St}$  ; une induite parabolique  $\text{Ind}_B^G(\chi)$  avec  $\chi : B \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_p^\times$  caractère lisse non trivial.

Pour tenter de comprendre les représentations supercuspidales de  $G$ , nous allons faire appel à des représentations définies par induction compacte et à leurs algèbres d'endomorphismes : les algèbres de Hecke sphériques. Nous obtiendrons ainsi une nouvelle caractérisation des représentations supercuspidales de  $G$  et pourrons alors compléter notre classification des représentations lisses irréductibles de  $SL(2, \mathbb{Q}_p)$  sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$ .

## 3 Algèbres de Hecke sphériques et représentations supercuspidales

### 3.1 Induction compacte et algèbres de Hecke sphériques

Pour tout entier  $r \in \{0, \dots, p-1\}$ , notons  $\sigma_r$  la représentation lisse irréductible de  $K$  obtenue par inflation de la représentation  $\text{Sym}^r(\overline{\mathbb{F}}_p^2)$  de  $SL(2, \mathbb{F}_p) \simeq K/K(1)$ , où  $K(1)$  désigne le pro- $p$ -radical de  $K$ . D'après [10, Section 1], la famille  $\{\sigma_0, \dots, \sigma_{p-1}\}$  est un système de représentants des classes d'isomorphisme des représentations lisses irréductibles de  $K$  sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$ . On définit alors le  $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$ -module  $\text{ind}_K^G(\sigma_r)$  comme l'espace vectoriel des fonctions à support compact  $f : G \rightarrow \sigma_r$  pour lesquelles il existe un sous-groupe ouvert compact  $K_f$  de  $G$  tel que :

$$\forall g \in G, \forall k \in K, \forall h \in K_f, f(kgh) = \sigma_r(k)f(g),$$

sur lequel  $G$  agit par translations à droite. Ces représentations de  $G$ , construites par *induction compacte*, vérifient la proposition suivante, qui découle de la propriété d'adjonction énoncée dans [15, I.5.7.ii)].

**Proposition 3.1 (Réciprocité de Frobenius compacte)** *Soit  $r \in \{0, \dots, p-1\}$ . Pour toute représentation lisse  $\pi$  de  $G$  sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$ , il existe un isomorphisme de  $\overline{\mathbb{F}}_p$ -espaces vectoriels*

$$\mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{F}}_p[G]}(\mathrm{ind}_K^G(\sigma_r), \pi) \simeq \mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{F}}_p[K]}(\sigma_r, \pi|_K) . \quad (1)$$

Remarquons ici que le membre de gauche de (1) est muni d'une action naturelle<sup>1</sup> de l'algèbre de Hecke sphérique  $\mathcal{H}_r := \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p[G]}(\mathrm{ind}_K^G(\sigma_r))$ . Cette algèbre est très simple à décrire dans le cas que nous considérons comme en atteste le résultat suivant.

**Théorème 3.2 ([1], Corollaire 3.9)** *Pour tout paramètre  $r \in \{0, \dots, p-1\}$ , il existe un endomorphisme  $\tau_r \in \mathcal{H}_r$  tel que  $\mathcal{H}_r$  soit l'algèbre des polynômes en  $\tau_r$  à coefficients dans  $\overline{\mathbb{F}}_p$ .*

Ceci mène à l'introduction des représentations conoyaux  $\pi(r, \lambda)$  définies comme suit : pour toute paire de paramètres  $(r, \lambda) \in \{0, \dots, p-1\} \times \overline{\mathbb{F}}_p$ , on pose

$$\pi(r, \lambda) := \mathrm{Coker}(\tau_r - \lambda \mathrm{Id} : \mathrm{ind}_K^G(\sigma_r) \rightarrow \mathrm{ind}_K^G(\sigma_r)) = \frac{\mathrm{ind}_K^G(\sigma_r)}{\mathrm{Im}(\tau_r - \lambda \mathrm{Id})} .$$

Comprendre la structure de  $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$ -module portée par ces conoyaux nous permettrait de connaître toutes les  $\overline{\mathbb{F}}_p$ -représentations lisses irréductibles de  $G$  grâce à l'énoncé suivant.

**Théorème 3.3 ([1], Théorème 3.36.3)** *Si  $\pi$  est une représentation lisse irréductible de  $G$  sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$ , alors il existe une paire de paramètres  $(r, \lambda) \in \{0, \dots, p-1\} \times \overline{\mathbb{F}}_p$  telle que  $\pi$  soit un quotient du  $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$ -module  $\pi(r, \lambda)$ .*

### 3.2 Nouvelle caractérisation des représentations supercuspidales

Une première étape consiste à détecter les représentations conoyaux comptant des représentations non supercuspidales parmi leurs quotients irréductibles. Le prochain énoncé montre notamment que l'on doit imposer une condition forte sur le paramètre  $\lambda$  pour espérer l'apparition d'une représentation supercuspidale parmi les quotients irréductibles du  $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$ -module  $\pi(r, \lambda)$ .

**Théorème 3.4 ([1], Théorème 3.18)** *Soit  $(r, \lambda) \in \{0, \dots, p-1\} \times \overline{\mathbb{F}}_p^\times$  une paire de paramètres.*

1. *Si  $(r, \lambda) \neq (0, 1)$ , alors le  $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$ -module  $\pi(r, \lambda)$  est isomorphe à l'induite parabolique  $\mathrm{Ind}_B^G(\mu_{\lambda^{-1}} \iota^{p-1-r})$ .*
2. *Le  $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$ -module  $\pi(0, 1)$  satisfait à la suite exacte courte non scindée suivante :*

$$0 \longrightarrow \mathrm{St} \longrightarrow \pi(0, 1) \longrightarrow \mathbf{1} \longrightarrow 0 .$$

**Corollaire 3.5** *Soit  $(r, \lambda) \in \{0, \dots, p-1\} \times \overline{\mathbb{F}}_p$  une paire de paramètres. Si le  $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$ -module  $\pi(r, \lambda)$  admet un quotient irréductible supercuspidal, alors  $\lambda = 0$ .*

En réalité, cette condition fournit une nouvelle caractérisation des représentations supercuspidales de  $G$  : on démontre en effet [1, Corollaire 3.41] que les représentations supercuspidales de  $G$  sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$  sont exactement les quotients irréductibles des représentations conoyaux de la forme  $\pi(r, 0)$  avec  $r \in \{0, \dots, p-1\}$ .

---

1. Par composition à droite.

### 3.3 Description des représentations supercuspidales

A l'aide des travaux de Breuil sur les représentations supercuspidales de  $GL(2, \mathbb{Q}_p)$  [5], nous démontrons le résultat suivant, qui permet de terminer la classification des représentations lisses irréductibles de  $SL(2, \mathbb{Q}_p)$  sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$  débutée dans la section précédente.

**Théorème 3.6** ([1], **Théorème 0.7.1 et Corollaire 3.26.3**) *1. Les représentations supercuspidales de  $G$  sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$  se partitionnent en  $p$  classes d'isomorphisme, pour lesquelles on dispose d'un système explicite  $\{\pi_0, \dots, \pi_{p-1}\}$  de représentants.*

*2. Pour tout paramètre  $r \in \{0, \dots, p-1\}$ , on dispose d'une suite exacte courte non scindée de  $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$ -modules de la forme*

$$0 \longrightarrow \pi_{p-1-r} \longrightarrow \pi(r, 0) \longrightarrow \pi_r \longrightarrow 0 .$$

## 4 Correspondance de Langlands semi-simple modulo $p$

Dans [5, Définition 4.2.4], Breuil établit la correspondance de Langlands locale semi-simple modulo  $p$  pour  $GL(2, \mathbb{Q}_p)$ . Comme une correspondance de Langlands locale semi-simple modulo  $p$  pour  $SL(2, \mathbb{Q}_p)$  doit lui être compatible après restriction de  $GL(2, \mathbb{Q}_p)$  à  $SL(2, \mathbb{Q}_p)$ , les résultats démontrés dans [1] sur la restriction à  $SL(2, \mathbb{Q}_p)$  des représentations de  $GL(2, \mathbb{Q}_p)$  mènent naturellement à la définition suivante.

**Définition 4.1** Désignons par  $G_{\mathbb{Q}_p}$  le groupe de Galois absolu de  $\mathbb{Q}_p$ , par  $\omega_2$  le caractère fondamental de Serre de niveau 2 et par  $\varepsilon$  le caractère cyclotomique modulo  $p$ . Pour tout entier  $r \in \{0, \dots, p-1\}$ , on note  $[p-3-r]$  l'unique entier de  $\{0, \dots, p-2\}$  congru à  $p-3-r$  modulo  $p-1$ , et l'on note  $\text{ind}(\omega_2^{r+1})$  l'unique représentation irréductible de  $G_{\mathbb{Q}_p}$  de dimension 2 sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$  ayant  $\varepsilon^{r+1}$  pour déterminant et  $\omega_2^{r+1} \oplus \omega_2^{p(r+1)}$  pour restriction au sous-groupe d'inertie de  $G_{\mathbb{Q}_p}$ . Notons enfin  $\text{proj}$  la projection canonique de  $GL_2(\dots)$  vers  $PGL_2(\dots)$ .

La *correspondance de Langlands locale semi-simple modulo  $p$  pour  $SL(2, \mathbb{Q}_p)$*  est définie comme étant la bijection entre les classes d'isomorphisme des représentations projectives semi-simples de  $G_{\mathbb{Q}_p}$  de dimension 2 sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$  et certains paquets de classes d'isomorphisme de représentations lisses semi-simples de  $SL(2, \mathbb{Q}_p)$  sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$  caractérisée par les flèches suivantes :

– pour tout entier  $r \in \left\{0, \dots, \left\lfloor \frac{p-1}{2} \right\rfloor\right\}$ ,

$$\text{proj} \circ \text{ind}(\omega_2^{r+1}) \longleftrightarrow \{\pi_r, \pi_{p-1-r}\} ;$$

– pour toute paire de paramètres  $(r, \lambda) \in \{0, \dots, p-1\} \times \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ ,

$$\text{proj} \circ \begin{pmatrix} \varepsilon^{r+1} \mu_\lambda & 0 \\ 0 & \mu_{\lambda^{-1}} \end{pmatrix} \longleftrightarrow \pi(r, \lambda)^{ss} \oplus \pi([p-3-r], \lambda^{-1}) .$$

## Conclusion

Les seuls groupes pour lesquels la classification des représentations lisses irréductibles (admissibles) sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$  est actuellement connue sont  $GL(2, \mathbb{Q}_p)$  [3, 4, 5] et  $SL(2, \mathbb{Q}_p)$  [1]. Pour les autres groupes, l'une des principales difficultés réside dans l'absence quasi-totale de compréhension

des représentations supercuspidales. On sait parfois en construire des exemples [6, 11, 13], en donner certaines propriétés [9, 14] ou d'autres caractérisations via les induites compactes [2, 8, 7, 12], mais l'on est encore loin d'en avoir une description complète, même pour un groupe comme  $GL(2, F)$  avec  $F$  extension quadratique de  $\mathbb{Q}_p$ . Toutes les nouvelles idées sont donc les bienvenues pour percer le mystère des supercuspidales !

## Références

- [1] R. Abdellatif, Classification des représentations modulo  $p$  de  $SL(2, F)$ , à paraître à *Bull. Soc. Math. Fr.* (2012).
- [2] R. Abdellatif, Autour des représentations modulo  $p$  des groupes réductifs  $p$ -adiques de rang 1, Thèse de doctorat de l'Université Paris-Sud 11 (2011).
- [3] L. Barthel, R. Livné, Irreducible modular representations of  $GL(2)$  of a local field, *Duke Math. J.* **vol. 75** (1994), no. 2, 261–292.
- [4] L. Barthel, R. Livné, Modular representations of  $GL(2)$  of a local field : the ordinary, unramified case, *J. Numb. Theory* **vol 55** (1995), 1–27.
- [5] Ch. Breuil, Sur quelques représentations modulaires et  $p$ -adiques de  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ , I, *Compos. Math.* **vol. 138** (2003), 165–188.
- [6] Ch. Breuil, V. Paškūnas, Towards a modulo  $p$  Langlands correspondence for  $GL_2$ , à paraître à *Memoirs of AMS* (2011).
- [7] G. Henniart, M.-F. Vignéras, Comparison of compact induction with parabolic induction, prépublication (2011).
- [8] F. Herzig, The classification of irreducible admissible mod  $p$  representations of a  $p$ -adic  $GL_n$ , *Invent. Math.* **vol. 186** (2011), no. 2, 373–434.
- [9] Y. Hu, Diagrammes canoniques et représentations modulo  $p$  de  $GL_2(F)$ , *J. Inst. Math. Jussieu* **vol. 11** (2012), 67–118.
- [10] A.V. Jeyakumar, Principal indecomposable representations for the group  $SL(2, q)$ , *J. of Algebra* **vol. 30** (1974), 444–458.
- [11] K. Koziol, P. Xu, Hecke modules and supersingular representations of  $U(2, 1)$ , prépublication (2012).
- [12] T. Ly, Irreducible modulo  $p$  representations of  $GL(2, D)$ , en préparation.
- [13] V. Paškūnas, *Coefficient systems and supersingular representations of  $GL_2(F)$* , Mémoires de la SMF **vol. 99** (2004).
- [14] B. Schraen, Sur la présentation des représentations supersingulières de  $GL_2(F)$ , prépublication (2012).
- [15] M.-F. Vignéras, *Représentations  $\ell$ -modulaires d'un groupe réductif  $p$ -adique avec  $\ell \neq p$* , Progress in Math. 137, Birkhäuser, Boston (1996).

# TRESSES ET DIAGRAMMES DE COURBES

**Sandrine Caruso**

IRMAR, Université de Rennes 1  
Campus de Beaulieu, Rennes, France  
[sandrine.caruso@univ-rennes1.fr](mailto:sandrine.caruso@univ-rennes1.fr)

**Résumé** - *La théorie des tresses s'inscrit au croisement de l'algèbre, de la géométrie et de la topologie. Cette ambivalence est reflétée par l'existence de plusieurs définitions équivalentes des groupes de tresses : la première définition, qui offre la vision la plus intuitive de ces objets, est une définition géométrique et topologique. La deuxième, algébrique, permet de manipuler les groupes de tresses plus aisément. Pour finir, une autre définition géométrique nous offre un point de vue différent. Elle aboutit à la notion de diagramme de courbes, et nous présentons un algorithme permettant de relier cette notion au point de vue algébrique.*

**Mots clés** - tresses, présentation, groupe modulaire, diagramme de courbes, algorithme

## 1 Différents points de vue sur les groupes de tresses

Les groupes de tresses ont été définis pour la première fois par Emil Artin en 1925 dans [1]. Il existe plusieurs définitions équivalentes de ces groupes, que nous allons détailler plus bas. Les deux premières définitions que nous donnons, *via* les tresses géométriques puis *via* une présentation par générateurs et relations, sont les plus classiques, et ont été données par Artin dès 1925. La troisième définition est un peu postérieure et donnée par Magnus en 1934 dans [4], et est celle que nous exploiterons dans la partie suivante.

Dans toute la suite, on fixe un entier strictement positif  $n$ .

### 1.1 Tresses géométriques, groupe de tresses à $n$ brins

**Definition 1 (tresse géométrique)** Soient  $p_1, \dots, p_n$   $n$  points de  $\mathbb{C}$ , que l'on choisira pour plus de simplicité alignés sur l'axe réel (par exemple, on peut choisir  $p_j = j$ ). On appelle tresse géométrique la donnée de  $n$  applications  $b_j : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  vérifiant les conditions suivantes :

- $b_j(0) = p_j$ ,  $b_j(1) \in \{p_1, \dots, p_n\}$ ,
- pour tout  $t \in [0, 1]$ , les  $b_j(t)$  sont deux à deux distincts.

On appelle  $j$ -ème brin le sous-ensemble de  $\mathbb{C} \times [0, 1]$  donné par  $\{(b_j(t), t), t \in [0, 1]\}$ .

Le terme de tresse se comprend aisément lorsque l'on représente les  $n$  brins dans  $\mathbb{C} \times [0, 1]$  : voir figure 1.

**Definition 2 (isotopie)** On appelle isotopie entre deux tresses géométriques (d'extrémités les  $p_j$ ) une application continue  $F$  de  $[0, 1] \times [0, 1]$  dans  $\mathbb{C}^n$  telle que  $F(0, \cdot)$  est égal à la

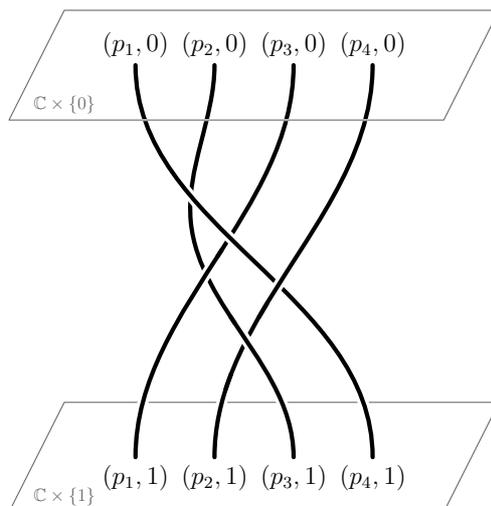


FIG. 1 – Une tresse géométrique

première tresse,  $F(1, \cdot)$  à la deuxième, et  $F(t, \cdot)$  est une tresse géométrique d'extrémités les  $p_j$  pour tout  $t$  (ie vérifie les conditions de la définition 1).

**Definition 3 (tresse)** On appelle tresse à  $n$  brins la classe d'isotopie d'une tresse géométrique à  $n$  brins.

On représente généralement une tresse à l'aide de ce que l'on appelle un *diagramme de tresse*. Il s'agit de la projection des brins d'un représentant de la classe d'isotopie sur  $\mathbb{R} \times [0, 1]$ , tel que la projection n'a que des points doubles transverses. On peut toujours trouver un tel représentant. Les points doubles, appelés *croisements*, peuvent être de deux natures différentes : soit, sur la tresse d'origine en 3 dimensions, le premier brin passe *dessous* l'autre, soit il passe *dessus*. On fait apparaître cette information en dessinant le croisement de l'une des façons suivantes :



Par exemple, la classe d'isotopie de la tresse géométrique représentée plus haut peut être dessinée comme sur la figure 2.

Un tel dessin comporte toutes les informations nécessaires pour décrire la tresse. Notons que plusieurs diagrammes de tresse peuvent représenter la même tresse.

L'ensemble des tresses à  $n$  brins est muni d'une structure de groupe, en concaténant les brins puis en rééchelonnant le tout afin de se ramener dans le bon intervalle.

On note  $B_n$  le groupe des tresses à  $n$  brins.

## 1.2 Présentation par générateurs et relations

Le groupe des tresses à  $n$  brins, tel que défini dans la section précédente, peut être finiment présenté par générateurs et relations.

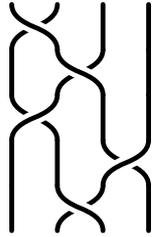


FIG. 2 – Un diagramme de tresse

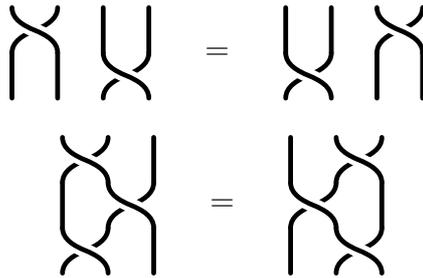


FIG. 3 – Relations

**Théorème 1 (Artin, 1925)** *Le groupe des tresses à  $n$  brins  $B_n$  admet la présentation suivante*

$$B_n = \langle s_1, \dots, s_{n-1} \mid s_i s_j = s_j s_i \text{ si } |i - j| \geq 2, s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} \rangle.$$

Le générateur  $s_i$  correspond au croisement du  $i$ -ème brin et du  $(i+1)$ -ème, le  $i$ -ème passant en dessous de l'autre. L'inverse  $s_i^{-1}$  correspond au croisement où le  $i$ -ème brin passe au dessus. Ainsi, l'expression d'une tresse en terme des  $s_i$  se déduit facilement de son diagramme de tresse, et inversement, il est facile de dessiner le diagramme de tresse d'une tresse exprimée en terme des  $s_i$ . L'exemple de la section 1.1 est  $s_1^{-1} s_2^{-1} s_1 s_3 s_2^{-1}$ . L'interprétation géométrique des relations  $s_i s_j = s_j s_i$  et  $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$  se constate sur les diagrammes de tresse de la figure 3.

### 1.3 Groupe modulaire du disque à trous

Pour les lecteurs qui souhaiteraient approfondir leurs connaissances au sujet des groupes modulaires en général, une excellente référence est le livre de Farb et Margalit, [3].

**Definition 4 (groupe modulaire du disque épointé)** *Soit  $D$  le disque unité fermé dans  $\mathbb{C}$ . Soient  $p_1, \dots, p_n$   $n$  points de l'intérieur de  $D$ , alignés sur l'axe réel (par exemple,  $p_j = \frac{2j-n-1}{n}$ ). On appelle groupe modulaire de  $D \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$  le groupe des applications continues de  $D \rightarrow D$ , modulo homotopie, qui permutent les  $p_i$  et qui fixent point par point le bord de  $D$ .*

**Théorème 2** *Le groupe modulaire du disque à  $n$  trous est isomorphe au groupe des tresses à  $n$  brins.*

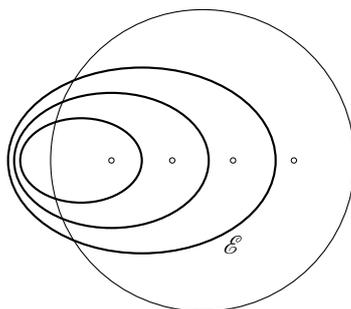


FIG. 4 – Le diagramme trivial

Voici, intuitivement, comment l'on peut construire cet isomorphisme. Donnons-nous une tresse géométrique dont les extrémités sont les trous du disque. En « faisant glisser » le disque vers le bas, tel un disque de pâte à modeler, de sorte que les trous suivent exactement les brins de la tresse, on obtient au final une déformation du disque, les trous ayant été permutés.

Une définition plus formelle de cette application, et une démonstration du fait qu'il s'agisse d'un isomorphisme, peuvent être trouvées dans [3].

## 2 Diagrammes de courbes

De même que le diagramme de tresse était une manière visuelle pratique de représenter la classe d'isotopie d'une tresse géométrique, le diagramme de courbes est une manière visuelle pratique de représenter un élément du groupe modulaire.

### 2.1 Définitions et propriétés

On appelle *diagramme trivial* l'ensemble des courbes représentées sur le dessin 4 (avec l'exemple de  $n = 4$ ), à homotopie dans  $D \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$  près. La première courbe entoure uniquement le premier trou, la suivante les deux premiers trous, etc, chaque courbe ayant une petite portion d'arc à l'extérieur du disque unitaire, comme sur la figure 4.

On appelle *diagramme de courbes* l'image, à homotopie près, du diagramme trivial par un élément du groupe modulaire (les portions d'arc à l'extérieur du disque restant identiques). Voici, par exemple, sur la figure 5, les diagrammes que l'on obtient pour  $n = 3$  et pour les tresses  $s_2^{-1}s_1$ ,  $(s_2^{-1}s_1)^2$ ,  $(s_2^{-1}s_1)^3$ , exprimées en termes des générateurs de la présentation du théorème 1. (Pour plus de lisibilité, les intersections des courbes avec le bord du disque ont été légèrement déplacées sur le dessin.)

**Proposition 1** *Le diagramme de courbes caractérise la tresse utilisée. Autrement dit, deux tresses différentes ont des diagrammes de courbes différents.*

Une question naturelle qui vient à l'esprit est alors la suivante : si l'on nous donne un diagramme de courbes, comment retrouver la tresse qui lui correspond (exprimée en les générateurs du théorème 1) ?

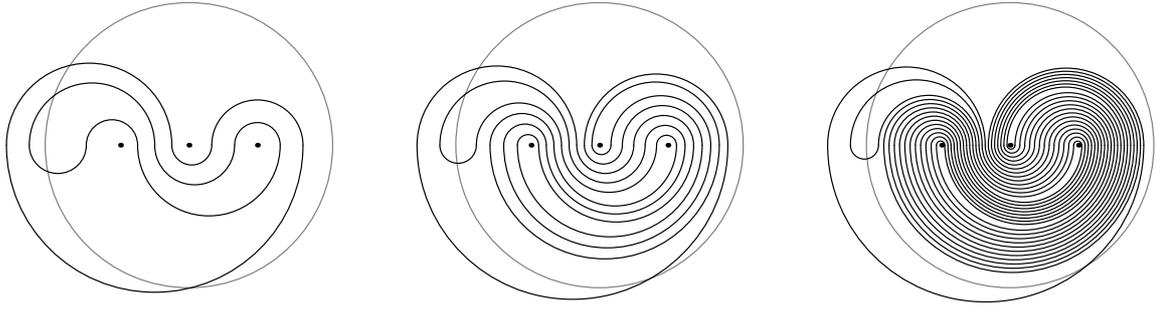


FIG. 5 – Des diagrammes de courbes

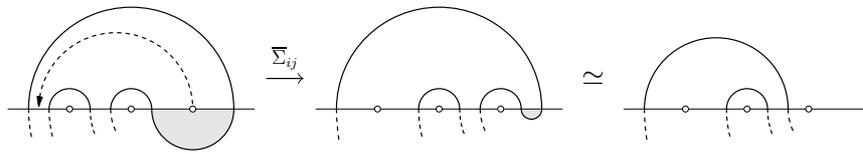


FIG. 6 – Élimination du bigone le plus à droite

## 2.2 Algorithmes de démantèlement

Un premier algorithme, dit de *transmissions et relaxations*, a été donné par Dynnikov et Wiest dans [2]. Nous en donnons ici un deuxième, dit de *transmissions par la droite*.

On appelle *bigone* une portion du diagramme de courbes constitué d'un arc dont les extrémités sont sur l'axe réel, qui est entièrement inclus dans l'un des demi-plans séparés par l'axe réel, et tel que la surface située entre cet arc et l'axe réel ne contienne pas d'autre portion du diagramme de courbes. Remarquons que cette surface contient au plus un trou. Si elle n'en contient pas, on peut déformer le diagramme de courbes par homotopie pour supprimer ce bigone; on choisira toujours un représentant du diagramme tel qu'on a supprimé tous ces bigones triviaux.

Soit  $\mathcal{D}$  un diagramme de courbes non trivial. Alors, il admet au moins un bigone (qui contourne un unique trou). On choisit celui de ces bigones situé le plus à droite, et on applique au diagramme de courbes une tresse de façon à supprimer ce bigone comme sur la figure 6. La tresse appliquée consiste à échanger les trous (c'est-à-dire à croiser les brins) de proche en proche pour déplacer le trou le plus à gauche possible sans créer de nouveau bigone. En répétant cette opération, on finit par obtenir le diagramme trivial, et les opérations effectuées nous donnent l'inverse de la tresse correspondant au diagramme. Sur les figures, on emploie les notations  $\Sigma_{ij} = s_{j-1}s_{j-2}\cdots s_i$  et  $\bar{\Sigma}_{ij} = s_{j-1}^{-1}s_{j-2}^{-1}\cdots s_i^{-1}$ .

La figure 7 représente l'application de cet algorithme au diagramme obtenu par la tresse  $s_1^{-1}s_2^{-1}s_1s_3s_2^{-1}$  (on n'a pas représenté le disque unité sur cette figure). Pour éliminer le premier bigone, on applique  $s_3^{-1}$  puis  $s_2^{-1}$ . Pour éliminer le deuxième, on applique  $s_3$  puis  $s_2$ . Ensuite, on applique  $s_2$  puis  $s_1$ . Et pour finir, on applique  $s_2^{-1}$ . On obtient la tresse  $s_3^{-1}s_2^{-1}s_3s_2^2s_1s_2^{-1}$ , dont on peut vérifier, en appliquant des relations de la présentation du groupes de tresses, qu'elle est bien égale à l'inverse de  $s_1^{-1}s_2^{-1}s_1s_3s_2^{-1}$ .

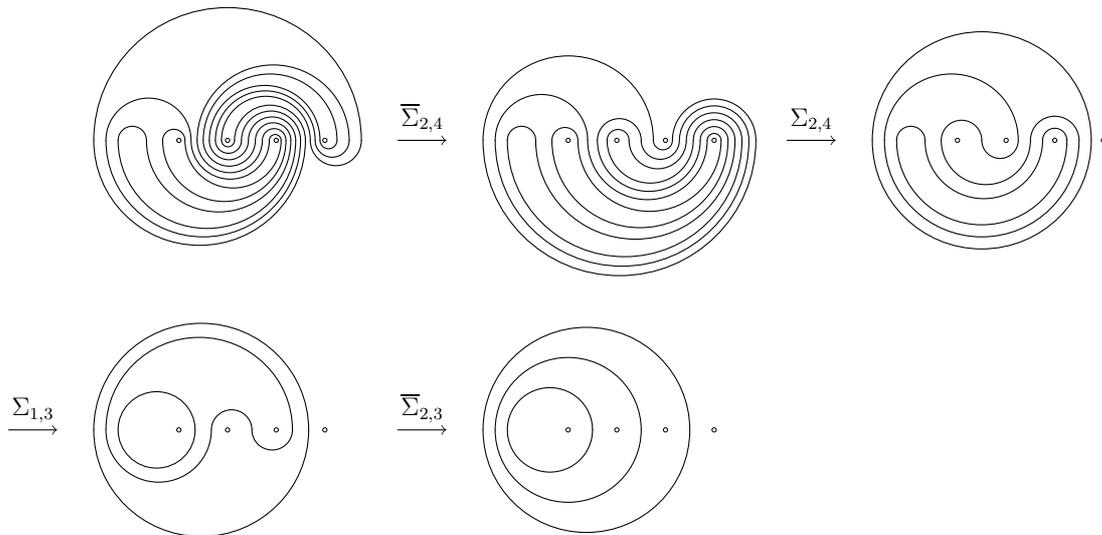


FIG. 7 – Exécution de l'algorithme

## Références

- [1] E. Artin (1925), Theorie der Zöpfe, *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, vol. 4, p. 47-72
- [2] I. Dynnikov, B. Wiest (2007), On the complexity of braids, *Journal of the European Mathematical Society*, vol. 9, p. 801-840
- [3] B. Farb, D. Margalit (2011), *A primer on mapping class groups*, Princeton University Press
- [4] W. Magnus (1934), Über Automorphismen von Fundamentalgruppen berandeter Flächen, *Mathematische Annalen*, p. 617-646

# JOURNÉES FEMMES ET MATHÉMATIQUES 2012

## SOUSSION DE CONTRIBUTION

—

### ESPACES DE MODULES DE COURBES, INERTIES ET THÉORIES DE GROTHENDIECK-TEICHMÜLLER.

**Benjamin Collas**

Bayreuth University, Germany

**collas@math.jussieu.fr**

**Résumé** - *L'objectif de cet exposé est de présenter l'action de groupes de Grothendieck-Teichmüller sur la torsion profinie d'ordre premier des mapping class groups à points marqués de genre 0 et 1. Le résultat obtenu s'applique à l'action du groupe de Galois absolu sur l'inertie champêtre des espaces de modules de courbes, prouvant un analogue à l'action de Galois sur l'inertie à l'infini de la compactification Deligne-Mumford. Les résultats présentés ont été obtenus lors d'une thèse soutenue en septembre 2011, menée sous la direction du Pr. Leila Schneps.*

**Mots clés** - Algebraic Geometry, Number Theory, Moduli Spaces of Curves, Mapping Class groups, Braids Groups, Grothendieck-Teichmüller.

My research subject deals with Arithmetic Geometry, i.e. the study of properties of the absolute Galois group  $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  through geometric representations of fundamental groups

$$Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \hookrightarrow Out(\pi_1^{alg}(X \otimes \overline{\mathbb{Q}})),$$

where  $X$  are some algebraic objects – varieties, stacks – defined over  $\mathbb{Q}$  and chosen for their combinatorial properties.

## 1 Grothendieck-Teichmüller theory, moduli spaces of curves, mapping class groups

Following the generic idea of A.Grothendieck in *Esquisse d'un programme*, the Grothendieck-Teichmüller theory study the arithmetic geometry from the point of view of the moduli spaces  $\mathcal{M}_{g,n}$  – or  $\mathcal{M}_{g,[n]}$  when points can be permuted – that are provided with a Deligne-Mumford algebraic  $\mathbb{Q}$ -stack structure.

Following this approach, V.G.Drinfel'd gave the definition of a Grothendieck-Teichmüller group  $\widehat{GT}$  in a framework of quasi-Hopf quasitriangular algebra [Dri90]. V. G.Drinfel'd showed that  $\widehat{GT}$  acts on the profinite completion of the Artin braid groups  $\widehat{B}_n$  using the following formulae on the braid generators  $\sigma_i$ :

$$\sigma_i \mapsto f(y_i, \sigma_i^2) \sigma_i^\lambda f(\sigma_i^2, y_i) \quad (\lambda, f) \in \widehat{GT}$$

where  $y_i = \sigma_{i-1}\sigma_{i-2}\cdots\sigma_1^2\cdots\sigma_{i-2}\sigma_{i-1}$ . One shows that this action factorize by  $\widehat{\Gamma}_{0,[n]}$  by identifying  $\widehat{\Gamma}_{0,[n]}$  with a quotient of  $\widehat{B}_n$ .

In all genera, one use the following identification of the fundamental groups

$$\pi_1^{orb}(\mathcal{M}_{g,[n]}) = \Gamma_{g,[n]} \quad \pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{g,[n]}) = \widehat{\Gamma}_{g,[n]}$$

with respectively the mapping class group  $\Gamma_{g,[n]}$  and its profinite completion. The group  $\Gamma_{g,[n]}$  is defined as the group of the diffeomorphisms of  $(g, n)$ -surface type which preserve orientation modulo diffeomorphisms isotopic to the identity.

In [Iha94], Y.Ihara established the existence of a parametrisation  $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \hookrightarrow \widehat{GT}$ , and Y.Ihara and M.Matsumoto [IM95] established the compatibility between the  $\widehat{GT}$  and  $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  action on  $\widehat{\Gamma}_{0,[n]}$ . This has been done by the choice of a specific tangential base point at infinity as a base point for the fundamental group in order to fix the  $\widehat{GT}$  and  $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  actions on  $\pi_1(\mathcal{M}_{g,n})$ .

These results have been extend to a  $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -compatible action of a Grothendieck-Teichmüller subgroup  $\mathbb{I}$  on the *pure* mapping class groups  $\widehat{\Gamma}_{g,n}$  by H.Nakamura and L.Schneps [NS00], and in a  $\mathbb{I}$ -action on the *full* mapping class groups  $\widehat{\Gamma}_{g,[n]}$  in [Col12].

## 2 Action on inertia at infinity, stack inertia

In the Deligne-Mumford compactification  $\overline{\mathcal{M}}_{g,[n]}$  of  $\mathcal{M}_{g,[n]}$ , the divisor at infinity  $D_\infty$  factorize into irreducible components:

$$D_\infty = \overline{\mathcal{M}}_{g,[n]} \setminus \mathcal{M}_{g,[n]} = \cup D,$$

where  $D$  is a normal crossing divisors in  $\overline{\mathcal{M}}_{g,[n]}$ .

For  $g = 0$ , and  $D$  such a normal crossing divisor, each *inertia subgroup*  $I_D$  of  $\pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{0,[n]})$  is conjugate to a cyclic group  $\langle \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_k \rangle$  for  $1 \leq k \leq n - 3$ , where  $\sigma_i$  is a braid generator. Then using morphisms between "flat ribbons", one shows that *the action of the Grothendieck-Teichmüller group  $\widehat{GT}$ , hence the  $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -action, on the inertia generators  $I_D$  at the infinity of  $\mathcal{M}_{0,[n]}$  is given by  $\lambda$ -conjugacy.*

For the *pure* moduli spaces  $\mathcal{M}_{g,n}$  - i.e. where points can not be permuted, H.Nakamura proved with a generalized Grothendieck-Murre theory that *the action of the absolute Galois group  $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  on inertia at infinity of  $\mathcal{M}_{g,n}$  is given by  $\chi(\sigma)$ -conjugacy*, i.e. conjugate of an inertia generator and raised to  $\chi(\sigma)$ -power [Nak02; Nak99].

**Action on stack inertia** As Deligne-Mumford algebraic stacks, moduli spaces  $\mathcal{M}_{g,[n]}$  admit *geometric stack inertia*  $I_x = Aut(x)$  defined as finite automorphisms of isomorphism classes of an object  $x \in \mathcal{M}_{g,[n]}$ . Following B.Noohi [Noo04] these groups of *geometric* automorphisms inject into the fundamental group

$$\omega_x : I_x \rightarrow \pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{g,[n]}).$$

Equivalently this comes from the *residual finiteness* of the mapping class groups

$$\Gamma_{g,[n]} \hookrightarrow \widehat{\Gamma}_{g,[n]} \tag{*}$$

when the  $\pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{g,[n]})$  is identified with the mapping class groups  $\widehat{\Gamma}_{g,[n]}$ . Such inertia groups correspond bijectively to the finite subgroups of  $\Gamma_{g,[n]}$  following the Nielsen realisation theorem of S.Kerckhoff.

In analogous to the inertia at infinity, we consider *cyclic* geometric stack inertia, i.e. finite torsion element of  $\Gamma_{g,[n]}$ , which by (\*) are specific cases of *profinite elements* in  $\widehat{\Gamma}_{g,[n]}$ .

In analogous with the inertia at infinity, we then ask:

**Questions.**

1. Is the profinite torsion  $\pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{g,[n]})$  of of Galois type, i.e. is the Galois action given by  $\chi(\sigma)$ -conjugacy on torsion elements of  $\widehat{\Gamma}_{g,[n]}$ ?

Which leads to the following intermediate question:

2. How can be characterized the profinite torsion elements of  $\pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{g,[n]})$ , i.e. of  $\widehat{\Gamma}_{g,[n]}$ ?

Following [Col11; Col12], the goal of this talk would be to present the main result below:

**Théorème 1** *The Grothendieck-Teichmüller group  $\widehat{GT}$ , resp.  $\mathbb{I}$ , acts on the profinite prime order torsion elements of  $\pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{0,[n]})$ , resp.  $\pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{1,[n]})$ , by conjugacy and raising to the cyclotomic power.*

Since  $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \subset \mathbb{I} \subset \widehat{GT}$ , this implies the same result for the Galois action, hence a *answer to question 1.* in the cases of genus 0 and 1. This result relies on some *partial answer to question 2.* that restricts the characterization of profinite torsion to *primer order only.*

At first, we would explain in which way the *Serre's cohomological theory* applied to the mapping class groups of genus 0 and 1 reduces the study of profinite torsion to discrete one, and leads to the following partial answer to question 2.

**Théorème 2** *For genus 0 ans 1, the prime order profinite torsion of  $\widehat{\Gamma}_{g,[n]}$  is conjugate to the finite geometric torsion of  $\Gamma_{g,[n]}$ .*

This result relies on properties of the mapping class groups, such as their *bonté*, their virtual cohomological dimension finiteness and the existing permuting/Birman-deleting-point exact sequences.

We then would explain the result of theorem 1 in the case of the genus 0. In this case, torsion elements are given by rotation of the sphere, and their conjugacy classes admit explicit expressions as braids elements. Braids computation with  $\widehat{GT}$  then leads to the result.

In order to extend the main theorem 1 to the genus 1, the  $\mathbb{I}$ -action on *pure* mapping class group must be extend to the *full* mapping class group. We would briefly present how to obtain this Grothendieck-Teichmüller theory result, which is based on some specific mapping class group presentation as well as the *Johnson's Lantern* relation:

**Théorème 3** *There exists a  $\mathbb{I}$ -action on the full mapping class groups  $\widehat{\Gamma}_{g,[n]}$  which extends both  $\widehat{GT}$ -action on the genus 0 braided elements and  $\mathbb{I}$ -action on the pure mapping class groups  $\widehat{\Gamma}_{g,n}$ .*

We would then finish by presenting the genus 1 case. Thanks to the Serre cohomological theory and theorem 2, the prime order profinite torsion splits into 21 conjugacy classes. Albeit no simple expression could be obtained to compute the Galois- $\Gamma$  action, we would explain how the computation reduces to the genus 0 case and the case of  $\Gamma_{1,1}$  identified to a braid group quotient.

## Publications

- [Col11] Benjamin Collas. “Action of the Grothendieck-Teichmüller group on torsion elements of full Teichmüller modular groups in genus zero”. In: *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux* (2011). to appear.
- [Col12] Benjamin Collas. “Action of a Grothendieck-Teichmüller group on torsion elements of full Teichmüller modular groups of genus one”. In: *International Journal of Number Theory* 84.3 (2012), pp. 763–787.

## References

- [Dri90] V. G. Drinfel’d. “On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with  $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ ”. In: *Algebra i Analiz* 2.4 (1990), pp. 149–181.
- [Iha94] Yasutaka Ihara. “On the embedding of  $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  into  $\widehat{GT}$ ”. In: *The Grothendieck theory of dessins d’enfants (Luminy, 1993)*. Vol. 200. London Math. Soc. Lecture Note Ser. With an appendix: the action of the absolute Galois group on the moduli space of spheres with four marked points by Michel Emsalem and Pierre Lochak. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1994, pp. 289–321.
- [IM95] Yasutaka Ihara and Makoto Matsumoto. “On Galois actions of profinite completions of braid groups”. In: *Recent Developments in the inverse Galois problem*. M. Fried et al. Eds., AMS, 1995.
- [Nak99] Hiroaki Nakamura. “Limits of Galois representations in fundamental groups along maximal degeneration of marked curves. I”. In: *Amer. J. Math.* 121.2 (1999), pp. 315–358.
- [Nak02] Hiroaki Nakamura. “Limits of Galois representations in fundamental groups along maximal degeneration of marked curves. II”. In: *Arithmetic fundamental groups and noncommutative algebra (Berkeley, CA, 1999)*. Vol. 70. Proc. Sympos. Pure Math. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2002, pp. 43–78.
- [NS00] Hiroaki Nakamura and Leila Schneps. “On a subgroup of the Grothendieck-Teichmüller group acting on the tower of profinite Teichmüller modular groups”. In: *Inventiones mathematicae* 141.141 (2000), pp. 503–560.
- [Noo04] B. Noohi. “Fundamental groups of algebraic stacks”. In: *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu* 3.01 (2004), pp. 69–103.

# UNE GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE ROTH ET SON APPLICATION AUX SOUS-ENSEMBLES SUM-FREE

**Jehanne Dousse**

LIAFA, ENS Lyon

175 rue du Chevaleret, Paris, France

**jehanne.dousse@ens-lyon.fr**

**Résumé** - *Nous prouvons une généralisation du théorème de Roth sur les progressions arithmétiques [Rot53] aux  $d$ -configurations, en utilisant la stratégie d'incrément de densité originale de Roth et des techniques d'analyse de Fourier. Nous utilisons ensuite cette généralisation pour améliorer un résultat de Sudakov, Szemerédi et Vu concernant les sous-ensembles sum-free [SSV05] et prouvons ainsi que tout ensemble de  $n$  entiers contient un sous-ensemble sum-free de taille  $\log n \left( \log^{(3)} n \right)^{1/32772 - o(1)}$ .*

**Mots clés** - **théorème de Roth, progressions arithmétiques, analyse de Fourier, sous-ensembles sum-free**

## 1 Introduction

La combinatoire additive consiste en l'étude de la structure d'ensembles d'entiers. Un problème de recherche important dans ce domaine est de déterminer quels ensembles d'entiers contiennent une progression arithmétique, c'est-à-dire un ensemble de la forme  $\{x, x+d, \dots, x+(k-1)d\}$ , où  $x, d \in \mathbb{N}$ , et l'entier  $k \geq 2$  est appelé la longueur de la progression.

Le premier résultat significatif concernant ce problème a été obtenu par Roth en 1953 [Rot53]. Il montra que tout sous-ensemble de  $\{1, \dots, N\}$  de taille au moins  $\alpha N$  avec  $N \geq N_0(\alpha)$  contient une progression arithmétique non triviale de longueur 3 (un ensemble  $\{x, x+d, x+2d\}$  avec  $d \neq 0$ ). Puis Szemerédi étendit ce résultat aux progressions de longueur 4 en 1969 [Sze69] et aux progressions de longueur arbitraire  $k$  en 1975 [Sze75]. Récemment Green et Tao [GT08] ont effectué une avancée majeure en prouvant que l'ensemble des nombres premiers contient des progressions arithmétiques de longueur arbitraire, résolvant ainsi une conjecture ouverte depuis des années.

Mais les mathématiciens ont continué à travailler sur le théorème de Roth, pour le généraliser comme Szemerédi, ou pour améliorer la borne  $N_0(\alpha)$ . Ainsi de nouvelles preuves sont apparues, dûes à Gowers [Gow01] (il s'agit en fait d'une preuve du théorème de Szemerédi sur les progressions de longueur arbitraire  $k$ , mais le cas  $k = 3$  donne une preuve intéressante du théorème de Roth), Heath-Brown [HB87], Szemerédi [Sze90], et Bourgain [Bou99]. Alors que la preuve originale de Roth nécessitait que  $N \geq \exp(\exp(\frac{C}{\alpha}))$  pour une certaine constante  $C$ , la preuve de Bourgain montre que  $N \geq \left(\frac{C}{\alpha}\right)^{C'/\alpha^2}$  est suffisant.

Une autre question intéressante est l'étude des sous-ensembles sum-free. Pour deux ensembles finis d'entiers  $A$  et  $B$ , on dit que  $B$  est sum-free par rapport à  $A$  si l'ensemble  $\{b + b' | b, b' \in$

$B, b \neq b'$  est disjoint de  $A$ . Soit  $\phi(n)$  le plus grand entier tel que tout ensemble  $A$  de taille  $n$  contient un sous-ensemble de cardinalité  $\phi(n)$  qui soit sum-free par rapport à  $A$ . Plusieurs articles de recherche se sont attachés à déterminer la valeur de  $\phi(n)$ . Erdős [Erd65] fut le premier à poser cette question en 1965 et mentionna que  $\phi(n) \geq c \log n$  pour une certaine constante  $c$ . La première preuve publiée de ce résultat est due à Choi [Cho71] qui prouva que  $\phi(n) \geq \log_2 n$ . Ruzsa [Ruz05] améliora ensuite légèrement ce résultat en montrant que  $\phi(n) \geq 2 \log_3 n - 1$ . Récemment Sudakov, Szemerédi et Vu [SSV05] obtinrent la première borne superlogarithmique en prouvant que  $\phi(n) \geq \log n \left( \log^{(5)} n \right)^{1-o(1)}$ .

Nous étudierons d'abord la généralisation du théorème de Roth à une structure appelée  $d$ -configuration, puis nous montrerons comment cette généralisation nous permet d'améliorer la borne de Sudakov, Szemerédi et Vu sur  $\phi(n)$ .

## 2 Le théorème de Roth pour les $d$ -configurations

### 2.1 Définitions et énoncé des théorèmes

Nous allons étudier une généralisation du théorème de Roth. Rappelons donc tout d'abord la définition des progressions arithmétiques.

**Definition 1** Soit  $k \geq 2$ . Une progression arithmétique de longueur  $k$  est un ensemble  $\{x, x + d, \dots, x + (k - 1)d\}$ , avec  $x, d \in \mathbb{N}$ .

La progression est dite non triviale si  $d \neq 0$ .

Voici la version originale du théorème de Roth [Rot53].

**Théorème 1 (Théorème de Roth)** Soient  $\alpha > 0$  et  $N \geq \exp(\exp(\frac{C}{\alpha}))$ . Tout sous-ensemble  $A$  de  $\{1, \dots, N\}$  de taille  $|A| \geq \alpha N$  contient une progression arithmétique non triviale de longueur 3.

Nous voulons généraliser ce théorème aux  $d$ -configurations, définies comme suit.

**Definition 2** Soit  $d \geq 2$ . Une  $d$ -configuration est un ensemble  $\{n_i + n_j + a\}_{1 \leq i < j \leq d}$ , avec  $a, n_1, \dots, n_d \in \mathbb{N}$ .

La  $d$ -configuration est dite non triviale si pour tout  $i \neq j$ ,  $n_i \neq n_j$ .

Les 2-configurations sont exactement les progressions arithmétiques de longueur 3. En effet  $\{2n_1 + a, n_1 + n_2 + a, 2n_2 + a\} = \{(2n_1 + a), (2n_1 + a) + (n_2 - n_1), (2n_1 + a) + 2(n_2 - n_1)\}$ . Ainsi les  $d$ -configurations sont bien une généralisation des progressions arithmétiques de longueur 3 et le théorème de Roth se généralise de manière naturelle aux  $d$ -configurations.

**Théorème 2 (Théorème de Roth pour les  $d$ -configurations)** Soient  $\alpha > 0$  et  $N \geq \exp\left(\exp\left(\left(\frac{C}{\alpha}\right)^{\frac{d(d-1)}{2}}\right)\right)$ . Tout sous-ensemble  $A$  de  $\{1, \dots, N\}$  de taille  $|A| \geq \alpha N$  contient une  $d$ -configuration non triviale.

Le cas particulier  $d = 2$  du théorème précédent est exactement le théorème de Roth.

## 2.2 Preuve du théorème de Roth pour les $d$ -configurations

Pour prouver le Théorème 2, nous avons utilisé la stratégie d'incrément de densité, qui consiste à montrer que soit  $A$  contient une  $d$ -configuration non triviale, soit  $A$  est de densité  $\alpha' > \alpha$  sur une progression arithmétique  $P \subseteq \{1, \dots, N\}$ . Nous itérons ensuite cette proposition jusqu'à ce que la densité dépasse 1 afin d'obtenir une contradiction.

Ainsi nous avons prouvé la proposition clé suivante.

**Proposition 1** *Soient  $0 < \alpha < 1$  et  $N > 16^d \alpha^{-\frac{d(d+1)}{2}}$ . Soit  $P \subseteq \mathbb{Z}$  une progression arithmétique de longueur  $N$  et  $A \subseteq P$  de taille  $\alpha N$ . Alors l'une des propositions suivantes est vérifiée :*

- $A$  contient au moins  $\frac{\alpha^{d(d+1)/2} N^d}{2^{d-1} + 1}$   $d$ -configurations ;
- Il existe une progression arithmétique  $P'$  de longueur  $\geq \left(\frac{\alpha}{C}\right)^{d(d-1)+2} N^{1/2}$  telle que, si on écrit  $A' := A \cap P'$  et  $\alpha' := |A'|/|P'|$ , on a  $\alpha' > \alpha + \left(\frac{\alpha}{C}\right)^{\frac{d(d-1)}{2}+1}$  pour une constante  $C > 0$ .

Si  $A$  ne contient pas de  $d$ -configuration non triviale, il ne peut y avoir plus de  $\left(\frac{C'}{\alpha}\right)^{\frac{d(d-1)}{2}}$  itérations sous peine d'obtenir une densité supérieure à 1. Ainsi, si  $A$  ne contient pas de  $d$ -configuration non triviale, alors  $\log \log N \leq \left(\frac{C''}{\alpha}\right)^{\frac{d(d-1)}{2}}$ .

Pour prouver la Proposition 1, nous utilisons des techniques d'analyse de Fourier. Définissons d'abord l'espérance d'une fonction.

**Definition 3** *Soit  $f : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction. L'espérance de  $f$  est définie par*

$$\mathbb{E}_{x \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} f(x) := \frac{1}{N} \sum_{x \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} f(x).$$

Définissons aussi la transformée de Fourier.

**Definition 4** *Soit  $f : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction. La transformée de Fourier  $\hat{f}$  de  $f$  est définie, pour tout  $\xi \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ , par la formule*

$$\hat{f}(\xi) := \mathbb{E}_{x \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} f(x) e(-\xi x/N),$$

avec la notation  $e(\theta) := e^{2i\pi\theta}$ .

Puis nous montrons à l'aide d'arguments combinatoires et de quelques théorèmes classiques d'analyse de Fourier que si  $A$  ne contient pas de  $d$ -configuration non triviale, la fonction  $f_A := 1_A - \alpha 1_{[N]}$  possède un grand coefficient de Fourier

$$|\hat{f}_A(r)| \geq \left(\frac{\alpha}{C}\right)^{\frac{d(d-1)}{2}+1}.$$

Enfin nous utilisons le théorème suivant dû à Roth pour obtenir un incrément de densité.

**Théorème 3 (Grand coefficient de Fourier implique incrément de densité)** *Soit  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de support  $\{1, \dots, N\}$  telle que  $|f(n)| \leq 1$  pour tout  $n$ ,  $\sum_n f(n) = 0$  et*

$$|\mathbb{E}_{x \in [N]} f(x) e(\theta x)| \geq \sigma$$

pour un certain  $\theta \in [0, 1]$  et  $\sigma > 0$ . Alors il existe une progression arithmétique non triviale  $P \subseteq \{1, \dots, N\}$  de longueur  $|P| \geq c\sigma^2\sqrt{N}$  telle que

$$\mathbb{E}_{x \in P} f(x) \geq \frac{\sigma}{4}.$$

En effet si nous appliquons le Théorème 3 avec  $f = f_A$  et  $\sigma = \left(\frac{\alpha}{C}\right)^{\frac{d(d-1)}{2}+1}$ , nous obtenons une progression arithmétique  $P \subseteq \{1, \dots, N\}$  de longueur  $|P| \geq \left(\frac{\alpha}{C}\right)^{d(d-1)+2} \sqrt{N}$  sur laquelle  $A$  est de densité  $\alpha' \geq \alpha + \left(\frac{\alpha}{C'}\right)^{\frac{d(d-1)}{2}+1}$ .

Ainsi la Proposition 1 et le Théorème 2 sont prouvés.

### 3 Application aux sous-ensembles sum-free

Dans cette partie nous allons utiliser le Théorème 2 pour améliorer le résultat de Sudakov, Szemerédi et Vu concernant les sous-ensembles sum-free [SSV05].

Rappelons la définition d'un sous-ensemble sum-free.

**Definition 5** Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles finis d'entiers. L'ensemble  $B$  est dit sum-free par rapport à  $A$  si l'ensemble  $\{b + b' \mid b, b' \in B, b \neq b'\}$  est disjoint de  $A$ .

Soit  $\phi(A)$  la taille maximale d'un sous-ensemble de  $A$  qui est sum-free par rapport à  $A$ . On définit  $\phi(n)$  comme le minimum de  $\phi(A)$  sur tous les ensembles  $A$  de  $n$  entiers.

Sudakov, Szemerédi et Vu [SSV05] ont obtenu la première borne superlogarithmique sur  $\phi(n)$  en prouvant que

$$\phi(n) \geq \log n \left( \log^{(5)} n \right)^{1-o(1)},$$

où  $\log^{(i)} n$  désigne le logarithme itéré  $i$  fois de  $n$  ( $\log^{(1)} x = x$ ,  $\log^{(i+1)} x = \log(\log^{(i)} x)$ ).

Dans la preuve de ce résultat, ils utilisent le lemme suivant, dans lequel nous avons adopté la notation  $p \uparrow q := p^q$ , avec la convention que  $p \uparrow q \uparrow r = p \uparrow (q \uparrow r)$ .

**Lemme 1** Si  $A \subseteq \{1, \dots, N\}$  est un ensemble de taille  $\alpha N$ , et si  $N > 2 \uparrow 2 \uparrow (\alpha)^{-1} \uparrow 2 \uparrow 2 \uparrow (2k + 9)$ , alors il existe un sous-ensemble  $A' \subseteq A$  de  $k$  éléments tel que, pour tous  $x, y \in A'$ , il existe un élément  $z$  de  $A$  qui satisfait  $x + y = 2z$ .

Pour prouver le Lemme 1, ils utilisent le théorème de Szemerédi qui est très puissant mais entraîne de mauvaises bornes.

Or, grâce à notre généralisation du théorème de Roth, nous pouvons remplacer le Lemme 1 par le lemme suivant.

**Lemme 2** Si  $A \subseteq \{1, \dots, N\}$  est un ensemble de taille  $\alpha N$ , et si  $N > e \uparrow e \uparrow \left(\frac{C}{\alpha}\right) \uparrow \frac{k(k-1)}{2}$ , alors il existe un sous-ensemble  $A' \subseteq A$  de  $k$  éléments tel que, pour tous  $x, y \in A'$ , il existe un élément  $z$  de  $A$  qui satisfait  $x + y = 2z$ .

En effet, d'après le Théorème 2,  $A$  contient une  $k$ -configuration non triviale  $(n_i + n_j + a)_{1 \leq i < j \leq k}$ . Posons  $A' = \{2n_1 + a, \dots, 2n_k + a\}$ . Ainsi pour tous  $2n_i + a$  et  $2n_j + a \in A'$ ,  $(2n_i + a) + (2n_j + a) = 2(n_i + n_j + a)$  avec  $n_i + n_j + a \in A$ .

En remplaçant dans leur preuve le Lemme 1 par le Lemme 2, et après quelques calculs, nous obtenons que

$$\phi(n) \geq \log n \left( \log^{(3)} n \right)^{\frac{1}{32772} - o(1)}.$$

Ainsi nous avons prouvé le théorème suivant, qui donne la meilleure borne inférieure connue à ce jour sur  $\phi(n)$ .

**Théorème 4** *Il existe une fonction  $g(n)$  de l'ordre de  $(\log^{(3)} n)^{\frac{1}{32772} - o(1)}$  telle que tout ensemble  $A$  de  $n$  entiers contient un sous-ensemble  $B$  de cardinalité  $g(n) \log n$  qui est sum-free par rapport à  $A$ .*

## 4 Conclusion

Nous avons généralisé le théorème de Roth aux  $d$ -configurations et avons obtenu une borne satisfaisante. Nous l'avons ensuite utilisé pour améliorer le théorème de Sudakov, Szemerédi et Vu concernant les sous-ensembles sum-free et avons obtenu la meilleure borne connue à ce jour sur  $\phi(n)$ .

Bourgain [Bou99] modifia la preuve originale du théorème de Roth en obtenant un incrément de densité non pas sur une progression arithmétique mais sur un ensemble de Bohr. Cette technique lui permit de montrer que si  $N \geq \left(\frac{C}{\alpha}\right)^{C'/\alpha^2}$ , tout sous-ensemble  $A$  de  $\{1, \dots, N\}$  de taille  $|A| \geq \alpha N$  contient une progression arithmétique non triviale de longueur 3. Une perspective de recherche intéressante serait d'adapter la preuve de Bourgain au théorème de Roth

pour les  $d$ -configurations afin d'obtenir une meilleure borne du type  $N \geq \left(\frac{c(d)}{\alpha}\right)^{\left(\frac{c'(d)}{\alpha}\right)^{d(d-1)}}$ .

Cette technique devrait permettre d'améliorer notre résultat concernant les sous-ensembles sum-free et de prouver une borne de la forme  $\phi(n) \geq \log n (\log^{(2)} n)^{c-o(1)}$ .

Cependant cette borne inférieure est encore loin de la meilleure borne supérieure connue à ce jour,  $\phi(n) \leq O(e^{\sqrt{\log n}})$ , dûe à Ruzsa [Ruz05]. Nous pouvons donc supposer que de nombreux progrès sont encore à faire dans le domaine des sous-ensembles sum-free.

## Références

- [Bou99] Jean Bourgain. On triples in arithmetic progression. *Geometric And Functional Analysis*, 9 :968–984, 1999.
- [Cho71] S. L. G. Choi. On a combinatorial problem in number theory. *Proc. London Math. Soc.*, 3 :629–642, 1971.
- [Erd65] Paul Erdős. Extremal problems in number theory. In *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, volume 8, pages 181–189. American Mathematical Society, 1965.
- [Gow01] William Timothy Gowers. A new proof of szemerédi's theorem. *Geometric And Functional Analysis*, 11 :465–588, 2001.
- [GT08] Ben Green and Terence Tao. Primes contain arbitrarily long arithmetic progressions. *Annals of Mathematics*, 167(2) :481–547, 2008.
- [HB87] David Rodney Heath-Brown. Integer sets containing no arithmetic progressions. *J. London Math. Soc.*, 35 :385–394, 1987.

- [Rot53] Klaus Roth. On certain sets of integers. *J. London Math. Soc.*, 28(1) :104–109, 1953.
- [Ruz05] Imre Z. Ruzsa. Sum-avoiding subsets. *The Ramanujan Journal*, 9 :77–82, 2005.
- [SSV05] Benny Sudakov, Endre Szemerédi, and Van Vu. On a question of Erdős and Moser. *Duke Math. J.*, 129(1) :129–155, 2005.
- [Sze69] Endre Szemerédi. On sets of integers containing no four elements in arithmetic progression. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 20 :89–104, 1969.
- [Sze75] Endre Szemerédi. On sets of integers containing no  $k$  elements in arithmetic progression. *Acta Arithmetica*, 27 :199–245, 1975.
- [Sze90] Endre Szemerédi. Integer sets containing no arithmetic progressions. *Acta Math. Hungar.*, 56 :155–158, 1990.

# POLYLOGARITHMES D'AOMOTO ET COPRODUIT MOTIVIQUE

Clément Dupont

IMJ, Université Paris 6 Pierre et Marie Curie

4 place Jussieu, Paris, France

[cdupont@math.jussieu.fr](mailto:cdupont@math.jussieu.fr)

**Résumé** - *Les polylogarithmes d'Aomoto forment une famille particulièrement simple de périodes au sens de Kontsevich et Zagier. La théorie des motifs de Tate mixte fournit une algèbre de Hopf où vivent des versions "motiviques" de ces nombres. Le calcul du coproduit de ces éléments est un problème ouvert. Nous présentons des avancées récentes sur ce problème, qui mettent en jeu les configurations d'hyperplans et une version relative du théorème de Brieskorn-Orlik-Solomon.*

**Mots clés** - périodes, polylogarithms d'Aomoto, motifs de Tate mixtes, coproduit motivique, configurations d'hyperplans

## 1 Périodes et polylogarithmes d'Aomoto

Une période, au sens de Kontsevich et Zagier ([4]), est un nombre complexe dont la partie réelle et la partie imaginaire peuvent s'écrire sous la forme d'une intégrale absolument convergente

$$\int_{\Omega} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

où  $f$  est une fraction rationnelle à coefficients rationnels et  $\Omega$  un domaine de  $\mathbb{R}^n$  défini par des inégalités polynômiales à coefficients rationnels. Les périodes forment un sous-anneau dénombrable  $\mathcal{P}$  de  $\mathbb{C}$  qui contient le corps  $\overline{\mathbb{Q}}$  des nombres algébriques. Les exemples les plus simples de périodes transcendentes sont  $\pi$  et  $\log(2)$ .

Les polylogarithmes d'Aomoto, définis initialement dans [1], sont les périodes définies par une intégrale du type

$$\int_{\Delta} \frac{dz_1}{z_1} \cdots \frac{dz_n}{z_n}$$

où  $\Delta$  est un  $n$ -simplexe singulier dont le bord est contenu dans des hyperplans rationnels de  $\mathbb{C}^n$ . En un sens, ce sont les périodes qui sont déterminées par une donnée linéaire. Dans le cas  $n = 1$  on retrouve les logarithmes des nombres rationnels

$$\log(q) = \int_1^q \frac{dz}{z}$$

Le cas  $n = 2$  contient déjà des généralisations intéressantes, comme le dilogarithme, défini initialement par Euler :

$$\text{Li}_2(t) = \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n^2} = \int_{0 \leq x \leq y \leq t} \frac{dx}{1-x} \frac{dy}{y}$$

## 2 L'algèbre de Hopf des périodes motiviques

La théorie des motifs, initiée par Grothendieck et développée par Deligne, Levine, Suslin, Voevodsky et bien d'autres, est censée fournir un avatar algébrique de la notion de période. On dispose notamment d'une catégorie MTM des motifs de Tate mixtes sur  $\mathbb{Q}$ . C'est la catégorie des représentations d'un certain schéma en groupes  $G$ . L'algèbre  $\mathcal{H}$  des fonctions sur  $G$  est un avatar de l'algèbre des périodes (ou plus précisément, d'une sous-algèbre).

Un polylogarithme d'Aomoto est déterminé par deux familles d'hyperplans  $L = (L_0, \dots, L_n)$  et  $M = (M_0, \dots, M_n)$  dans l'espace projectif  $\mathbb{P}^n(\mathbb{Q})$ . La première est la famille des singularités de la forme différentielle qu'on intègre, c'est-à-dire  $L_i = \{x_i = 0\}$ , la deuxième est le bord du domaine d'intégration  $\Delta$ . A une telle donnée  $(L; M)$  on associe un élément  $H(L, M)$  de l'algèbre  $\mathcal{H}$  qui est un avatar "motivique" du polylogarithme d'Aomoto correspondant.

L'algèbre  $\mathcal{H}$  est naturellement graduée :  $\mathcal{H} = \sum_{n \geq 0} \mathcal{H}_n$ . On a  $\mathcal{H}_0 = \mathbb{Q}$  et  $\mathcal{H}_1 \cong \mathbb{Q}^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  et l'élément  $q \in \mathbb{Q}^*$  est la version motivique de la période  $\log(q)$ .

L'algèbre  $\mathcal{H}$  étant l'algèbre des fonctions sur un schéma en groupe, c'est une algèbre de Hopf, c'est-à-dire qu'il y a un coproduit

$$\Delta_{i,j} : \mathcal{H}_{i+j} \rightarrow \mathcal{H}_i \otimes \mathcal{H}_j$$

Ce coproduit reflète des propriétés profondes des périodes. Par exemple, l'équation différentielle du dilogarithme

$$d\text{Li}_2(t) = -\log(1-t)d\log(t)$$

se lit sur le coproduit de la version motivique de  $\text{Li}_2(t)$  :

$$\Delta_{1,1}(\text{Li}_2(t)) = -(1-t) \otimes t$$

## 3 Calculer le coproduit motivique des polylogarithmes d'Aomoto

Le coproduit des (versions motiviques des) polylogarithmes d'Aomoto n'est connu que partiellement. Plus précisément, on sait le calculer dans le cas  $n \leq 3$  ([1],[6]) et dans tous les cas lorsque la configuration  $(L; M)$  est en position générale dans  $\mathbb{P}^n(\mathbb{Q})$  ([6]).

Le but de mon travail est d'étendre ces calculs. Cela suppose de bien comprendre certains groupes de cohomologie relative. Par exemple, dans le cas où  $(L; M)$  est en position générale dans  $\mathbb{P}^n$ , on a

$$H(L, M) = H^n(\mathbb{P}^n \setminus L, M \setminus L \cap M)$$

Ce groupe de cohomologie singulière est muni d'une structure de Hodge mixte au sens de [2], et le calcul du coproduit passe par la détermination des gradués de la filtration par le poids

$$\mathrm{gr}_{2k}^W H(L, M)$$

Nous avons besoin d'un analogue relatif du théorème de Brieskorn-Orlik-Solomon ([5]), qui calcule la cohomologie  $H^\bullet(\mathbb{P}^n \setminus L)$  du complémentaire d'un arrangement d'hyperplans. Je rappellerai ce théorème et j'en énoncerai l'analogue suivant :

**Théorème 1** *Supposons que  $L$  et  $M$  sont non dégénérés. Le groupe*

$$\mathrm{gr}_{2k}^W H^n(\mathbb{P}^n \setminus L, M \setminus L \cap M)$$

*est le quotient de*

$$\Lambda^{k+1}(x_0, \dots, x_n) \otimes \Lambda^{n-k}(y_0, \dots, y_n)$$

*par les relations*

1.  $dx_{S'} \otimes y_T = 0$  pour  $|S'| = k + 2$
2.  $x_S \otimes dy_{T'} = 0$  pour  $|T'| = n - k - 1$
3.  $x_S \otimes y_T = 0$  pour  $(S, T)$  telle que  $\mathrm{codim}(L_S \cap M_T) < |S| + |T|$ .

Je montrerai comment cet outil permet de calculer le coproduit de certaines familles de polylogarithmes d'Aomoto. Par exemple, on montrera comment retrouver le résultat de Goncharov ([3]) dans le cas de certaines intégrales itérées

$$I(a_0; a_1, \dots, a_n; a_{n+1}) = \int_{a_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq a_{n+1}} \frac{dt_1}{t_1 - a_1} \dots \frac{dt_n}{t_n - a_n}$$

Si le temps le permet, on évoquera d'autres exemples de calculs.

## Références

- [1] A. A. Beilinson, A. N. Varchenko, A. B. Goncharov, V. V. Shekhtman (1991), Projective geometry and K-theory, *Leningrad Math. J.*, **Vol. 2** pp. 523-576.
- [2] P. Deligne (1974), *Théorie de Hodge, III*, Publications mathématiques de l'I.H.E.S., pp. 5-77.
- [3] A. B. Goncharov (2001), *Multiple polylogarithms and mixed Tate motives*, preprint, arXiv : math/0103059v4
- [4] M. Kontsevich, D. Zagier (2001), Periods, in "Mathematics Unlimited, Year 2001 and Beyond", eds. B.Engquist and W.Schmidt, Springer,
- [5] P. Orlik, H. Terao (1992), *Arrangements of Hyperplanes*, Springer-Verlag
- [6] J. Zhao (2004), Motivic cohomology of pairs of simplices, *Proceedings of the London Mathematical Society*, **Vol. 3** pp. 313-354.

# LA FONCTORIALITÉ DE LANGLANDS GÉOMÉTRIQUE LOCALE AU NIVEAU IWAHORI

**Banafsheh Farang-Hariri**

Université de Versailles Saint-Quentin-En-Yvelines  
bâtiment Fermat - 45 avenue des États-Unis, 78035 Versailles cedex  
**banafsheh@math.jussieu.fr**

**Résumé** - Dans ce texte on présente une conjecture sur la functorialité de Langlands géométrique locale au niveau Iwahori. Étant donné un morphisme  $\sigma : \check{G} \times SL_2 \rightarrow \check{H}$  entre deux groupes Langlands duaux sur  $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ , on construit un bimodule à l'aide des variétés de Steinberg associées à  $\check{G}$  et  $\check{H}$  sur les algèbres de Hecke affines étendues de  $G$  et  $H$  qui devrait réaliser la functorialité de Langlands géométrique locale au niveau Iwahori. On énoncera une seconde conjecture reliant ce bimodule à la correspondance de Howe géométrique au niveau Iwahori, cette conjecture est vraie pour la paire  $(G = \mathbf{GL}_1, H = \mathbf{GL}_m)$ .

**Mots clés** - Functorialité de Langlands géométrique, algèbre de Hecke affine étendue, variété de Steinberg, K-théorie équivariante, correspondance de Howe géométrique.

## 1 Introduction

La correspondance de Langlands introduite dans fin des années 60 par Robert Langlands [Lan70] se présente sous la forme d'un lien profond entre la théorie des nombres et la théorie des représentations. Elle relie les représentations de groupes de Galois et les représentations automorphes des groupes réductifs. Durant ces dernières 40 années ce programme a connu des progrès considérables mais beaucoup reste encore à démontrer. Les objets clefs de ce programme du point de vue global sont les représentations automorphes d'un groupe réductif  $G$  sur un corps global  $F$ , qui est soit un corps de nombres, soit un corps de fonctions. Cette correspondance à un pendant local obtenu en considérant les représentations (lisses) d'un groupe réductif sur un corps local d'une part et les représentations galoisiennes sur le même corps d'autre part.

Notons  $\overline{\mathbb{Q}}$  la clôture algébrique du corps des rationnels  $\mathbb{Q}$  ainsi que  $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$  l'anneau des adèles de  $\mathbb{Q}$ . Schématiquement la correspondance de Langlands sur  $\mathbb{Q}$  pour le groupe linéaire  $GL_n$  peut être formulée par l'existence d'un lien entre les classes d'équivalence de représentations de dimension  $n$  du groupe de Galois  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  et de représentations irréductibles automorphes de  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$  apparaissant dans l'espace des fonctions  $L^2$  du quotient  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{Q}) \backslash \mathbf{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ . De plus, de nombreux invariants importants attachés aux représentations galoisiennes et automorphes devraient coïncider via cette correspondance. Quand  $n = 1$ , on est dans le cas abélien et cette correspondance est très bien comprise et est donnée par le théorème de Kronecker-Weber.

Si on se place sur un corps de nombres général  $F$  ceci est l'objet d'étude de la théorie des corps de classes abéliennes qui donne une description adélique du quotient maximal abélien du groupe de Galois  $\text{Gal}(\overline{F}/F)$ , et plus généralement de la théorie des corps de classes non-abéliennes.

Considérons maintenant le cas où  $F$  est un corps de fonctions sur une courbe projective lisse définie sur un corps fini  $\mathbb{F}_q$  et notons  $W(F)$  le groupe de Weil de  $F$ . La correspondance de Langlands pour  $\mathbf{GL}_n$  se traduit alors par une bijection entre les classes d'équivalence de représentations de dimension  $n$  de  $W(F)$  et les classes d'équivalence de représentations irréductibles automorphes tempérées de  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{A}_F)$  apparaissant dans l'espace des fonctions  $\mathit{mathrm}L^2$  du quotient  $\mathbf{GL}_n(F)\backslash\mathbf{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ . Cette correspondance a été démontrée par Drinfeld pour  $n = 2$  [Dri80], [Dri83] et par L. Lafforgue pour  $n > 2$  [Laf02].

L'idée originale de R. Langlands a été de généraliser cette correspondance pour tout groupe réductif connexe  $G$  défini sur  $F$  et ainsi d'introduire ce qu'on appelle aujourd'hui le groupe de Langlands dual  $\check{G}$ . La correspondance conjecturale de Langlands s'énonce alors sous la forme d'un lien entre les homomorphismes  $W(F) \rightarrow \check{G}$  et les représentations irréductibles automorphes tempérées de  $G(\mathbb{A}_F)$ . On remarquera qu'ici un homomorphisme  $W(F) \rightarrow \check{G}$  ne correspond pas en général à une seule représentation irréductible tempérée automorphe de  $G(\mathbb{A}_F)$  mais à un ensemble de telles représentations appelé un L-paquet.

Soient  $G$  et  $H$  deux groupes réductifs sur un corps de fonctions  $F$  et supposons que le groupe  $G$  est quasi-déployé. Notons  $\check{G}$  et  $\check{H}$  leurs groupes de Langlands duaux et soit  $\sigma : \check{H} \rightarrow \check{G}$  un homomorphisme entre ces deux groupes induisant l'identité sur les parties Galois. Étant donné un homomorphisme  $a : W(F) \rightarrow \check{H}$  on obtient un homomorphisme  $\sigma \circ a : W(F) \rightarrow \check{G}$  et donc un morphisme naturel entre l'ensemble des classes d'équivalence d'homomorphismes  $W(F) \rightarrow \check{H}$  et d'homomorphismes  $W(F) \rightarrow \check{G}$ . En supposant la correspondance de Langlands est valable, on conclut qu'à chaque L-paquet de représentations tempérées automorphes de  $H(\mathbb{A}_F)$  doit correspondre un L-paquet de représentations automorphes de  $G(\mathbb{A}_F)$ . Ceci est appelé la functorialité de Langlands ou le transfert de représentations automorphes.

Le point mystérieux est que, même s'il existe un tel morphisme  $\sigma$  entre les groupes Langlands duaux  $\check{G}$  et  $\check{H}$ , il n'y a à priori aucune raison pour qu'un lien existe entre les groupes  $G$  et  $H$  eux-mêmes. La functorialité a été établie dans des cas très particuliers mais reste inconnue en général.

Plus récemment, Arthur [Art03] a présenté une série de conjectures en affirmant que pour pouvoir considérer la classe plus large des représentations automorphes (non-tempérées) de  $G(\mathbb{A}_F)$  l'homomorphisme  $W(F) \rightarrow \check{G}$  devrait être remplacé par des paramètres d'Arthur qui sont les classes d'équivalence d'homomorphismes  $\sigma : W(F) \times \text{SL}_2 \rightarrow \check{G}$  vérifiant certaines propriétés. En utilisant les conjectures d'Arthur on peut donner une forme plus générale à la functorialité. R. Langlands a présenté une stratégie de preuve de la functorialité basée sur la formule des traces dans [Lan04] et [Lan07]. Depuis plusieurs travaux ont été réalisés sur ce sujet [FLN10], quelques avancements sur la version géométrique de la functorialité de Langlands et la formule des traces géométrique [FN11], la théorie de l'endoscopie par Waldspurger [Wal09], et le récent lemme fondamental [Ngô10].

On espère qu'un agrandissement du champ du programme de Langlands aidera à mieux comprendre les grandes questions sur la functorialité. La correspondance de Langlands (globale

et locale) sur un corps de fonctions admet une version géométrique où chaque objet est soigneusement remplacé par un objet géométrique via le dictionnaire Faisceaux-Fonctions de Grothendieck. L'intérêt majeur de cette version est que les objets géométriques, admettant des structures additionnelles permettent une meilleure compréhension de la situation. Mise à part les méthodes signalées plus haut il existe une autre approche pour démontrer des cas particuliers de la functorialité de Langlands. Il s'agit d'utiliser la correspondance theta qui réalise la functorialité de Langlands dans des cas particuliers. Cette correspondance dans sa version classique a été étudiée dans [Ral82], [Kud86] et sa version géométrique a été développée et étudiée partiellement dans [Lys11], [LL09] et [FH12].

Nous allons nous intéresser à la functorialité de Langlands locale. Pour simplifier on se limitera aux cas des représentations modérément ramifiées. Soit  $k$  un corps algébriquement clos de caractéristique  $p$  et soit  $F$  le corps local  $k((t))$ . Soit  $G$  un groupe réductif connexe sur  $k$ ,  $B$  un sous groupe de Borel de  $G$  et  $I$  le sous groupe d'Iwahori lui correspondant dans  $G(F)$ . Une représentation irréductible lisse de  $G(F)$  est appelée modérément ramifiée si l'espace des invariants sous l'action de sous groupe d'Iwahori  $I$  est non vide. Le foncteur envoyant une représentation modérément ramifiée  $V$  sur l'espace des invariants  $V^I$  est une équivalence de catégories entre la catégorie des représentations modérément ramifiées lisses de  $G(F)$  et la catégorie des modules de dimensions finies sous l'action de l'algèbre de Hecke-Iwahori associé à  $G$ . Dans notre cas, au lieu d'étudier les représentations du groupe  $G(F)$  lui même, on est réduit à étudier les représentations de l'algèbre de Hecke-Iwahori associée à  $G$ . Les algèbres de Hecke-Iwahori admettent d'autres structures et apparaissent sous des formes très variées. Entre autres propriétés, elles sont très proches des algèbres de Hecke affines étendues qui admettent une version K-théorique.

Dans ce qui suit on présentera les grandes lignes d'une nouvelle approche géométrique de la functorialité de Arthur-Langlands géométrique locale modérément ramifiée associée à un morphisme donné  $\sigma : \check{G} \times \mathrm{SL}_2 \rightarrow \check{H}$  entre deux groupes Langlands duaux  $\check{G}$  et  $\check{H}$  sur  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ , où  $\ell$  est un nombre premier différent de  $p$ . Cette approche utilise la K-théorie équivariante des variétés de Steinberg et est basée sur l'isomorphisme de Kazhdan-Lusztig décrivant les algèbres de Hecke affines étendues comme la K-théorie équivariante des variétés de Steinberg. On reliera ensuite cette functorialité locale au pendant local de la correspondance de theta appelé la correspondance de Howe.

## 1.1 L'énoncé de la conjecture sur la functorialité

Soit  $k$  un corps algébriquement clos de caractéristique  $p$ . Notons  $F$  le corps  $k((t))$  les séries de Laurent à coefficients dans  $k$ . Soient  $G$  et  $H$  deux groupes réductifs connexes sur  $k$  et  $\check{G}$  et  $\check{H}$  leurs groupes Langlands duaux sur  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ . Supposons de plus que  $[\check{G}, \check{G}]$  et  $[\check{H}, \check{H}]$  sont simplement connexes. Soit  $\mathfrak{g}$  l'algèbre de Lie de  $\check{G}$ ,  $\mathcal{B}_{\check{G}}$  la variété des sous algèbres de Borel et  $\mathcal{N}_{\check{G}}$  le cône nilpotent dans  $\mathfrak{g}$ . La résolution de Springer  $\tilde{\mathcal{N}}_{\check{G}}$  de  $\mathcal{N}_{\check{G}}$  est donnée par

$$\tilde{\mathcal{N}}_{\check{G}} = \{(x, \mathfrak{b}) \in \mathcal{N}_{\check{G}} \times \mathcal{B}_{\check{G}} \mid x \in \mathfrak{b}\}.$$

On note  $\mu : \tilde{\mathcal{N}}_{\check{G}} \rightarrow \mathcal{N}_{\check{G}}$  le morphisme de Springer. Soit  $s$  la coordonnée standard de  $\mathbb{G}_m$ . On fait agir  $\mathbb{G}_m$  sur  $\mathfrak{g}$  exigeant que  $s$  envoie un élément  $x$  sur  $s^{-2}x$ . De même on définit une action de  $\check{G} \times \mathbb{G}_m$  sur  $\tilde{\mathcal{N}}_{\check{G}}$  par la formule suivante :

$$(g, s).(x, \mathfrak{b}) = (s^{-2}gxg^{-1}, g\mathfrak{b}g^{-1}).$$

Le morphisme  $\mu$  devient alors  $\check{G} \times \mathbb{G}_m$  équivariant. La variété de Steinberg est définie par

$$Z_{\check{G}} = \tilde{\mathcal{N}}_{\check{G}} \times_{\mathcal{N}_{\check{G}}} \tilde{\mathcal{N}}_{\check{G}} = \{(x, \mathfrak{b}, \mathfrak{b}') \mid x \in \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'\}.$$

L'algèbre de Hecke affine étendue  $\mathbb{H}_G$  peut être considérée comme un  $\mathbb{Z}[s, s^{-1}]$ -module. Il existe un isomorphisme [CG10, Théorème 7.2.5] de  $\mathbb{Z}[s, s^{-1}]$ -modules entre  $\mathbb{H}_G$  et la K-théorie  $\check{G} \times \mathbb{G}_m$ -équivariante  $K^{\check{G} \times \mathbb{G}_m}(Z_{\check{G}})$  de la variété de Steinberg  $Z_{\check{G}}$ .

Supposons qu'on ait un morphisme  $\kappa : \check{G} \times \mathrm{SL}_2 \rightarrow \check{H}$  dont la première composante est un morphisme de groupes de Langlands duaux  $\eta : \check{G} \rightarrow \check{H}$  et la seconde composante est donnée par un morphisme  $\xi : \mathrm{SL}_2 \rightarrow \check{H}$ . Soit  $\alpha : \mathbb{G}_m \rightarrow \mathrm{SL}_2$  le tore maximal standard envoyant  $x$  sur  $\mathrm{diag}(x, x^{-1})$ . Notons  $\sigma : \check{G} \times \mathbb{G}_m \rightarrow \check{H}$  la restriction de  $\kappa$  par le morphisme  $\mathrm{id} \times \alpha$ . Par abus de notation l'image d'un élément  $g$  de  $\check{G}$  par le morphisme  $\eta$  sera encore noté  $g$ , il en sera de même pour l'application induite au niveau des algèbres de Lie. Soit  $\bar{\sigma} : \check{G} \times \mathbb{G}_m \rightarrow \check{H} \times \mathbb{G}_m$  le morphisme dont la première composante est  $\sigma$  et la seconde est la projection  $pr_2 : \check{G} \times \mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m$ . Soit  $e$  l'élément nilpotent  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  dans l'algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}_2$  de  $\mathrm{SL}_2$ ,  $d\xi : \mathfrak{sl}_2 \rightarrow \mathfrak{h}$  le morphisme linéarisé associé à  $\xi$  entre les algèbres Lie correspondantes et  $x = d\xi(e)$ .

Considérons le morphisme  $f : \mathcal{N}_{\check{G}} \rightarrow \mathcal{N}_{\check{H}}$  envoyant un élément  $z$  dans  $\mathcal{N}_{\check{G}}$  sur  $x + z$  (qui est bien un élément de  $\mathcal{N}_{\check{H}}$ ). Le morphisme  $f$  est  $\bar{\sigma}$ -équivariant et induit un morphisme de champs quotients

$$\bar{f} : \mathcal{N}_{\check{G}}/(\check{G} \times \mathbb{G}_m) \rightarrow \mathcal{N}_{\check{H}}/(\check{H} \times \mathbb{G}_m).$$

De plus, la résolution de Springer  $\tilde{\mathcal{N}}_{\check{H}} \rightarrow \mathcal{N}_{\check{H}}$  est  $(\check{H} \times \mathbb{G}_m)$ -équivariante et ceci nous permet de définir le produit fibré de champs quotients suivant :

$$\mathcal{X} = (\tilde{\mathcal{N}}_{\check{G}}/(\check{G} \times \mathbb{G}_m)) \times_{\mathcal{N}_{\check{H}}/(\check{H} \times \mathbb{G}_m)} (\tilde{\mathcal{N}}_{\check{H}}/(\check{H} \times \mathbb{G}_m)).$$

La K-théorie de ce champ  $\mathcal{X}$  est naturellement un module sous l'action des algèbres associatives  $K^{\check{H} \times \mathbb{G}_m}(Z_{\check{H}})$  et  $K^{\check{G} \times \mathbb{G}_m}(Z_{\check{G}})$ , l'action étant définie par convolution au niveau de la K-théorie. D'après l'isomorphisme de Kazhdan-Lusztig énoncé plus haut ces deux algèbres sont isomorphes aux algèbres de Hecke affines étendues  $\mathbb{H}_H$  et  $\mathbb{H}_G$  de  $H$  et  $G$  respectivement et par conséquent  $K(\mathcal{X})$  est naturellement un bimodule sous l'action de  $\mathbb{H}_H$  et  $\mathbb{H}_G$ .

**Conjecture 1 ([FH12])** *Le bimodule sur l'action des algèbres de Hecke affines étendues  $\mathbb{H}_G$  et  $\mathbb{H}_H$  réalisant la functorialité de Langlands géométrique local au niveau Iwahori pour le morphisme  $\sigma : \check{G} \times \mathbb{G}_m \rightarrow \check{H}$  s'identifie avec  $K(\mathcal{X})$ .*

Si  $G = H$  alors le morphisme  $\xi$  est trivial et  $K(\mathcal{X})$  s'identifie avec l'algèbre de Hecke affine étendue de  $H$ . Dans ce cas  $K(\mathcal{X})$  est un module libre de rang un sous l'action des deux algèbres de Hecke affines étendues.

## 1.2 La relation de la functorialité et la correspondance de Howe géométrique

La correspondance theta du point de vue global et la correspondance de Howe du point de vue local réalisent dans des cas particuliers la functorialité de Langlands [Ral82], [Lys11], [Kud86]. Dans cette section on constatera que le bimodule  $K(\mathcal{X})$  construit plus haut peut être aussi lié conjecturalement au bimodule réalisant la correspondance de Howe locale géométrique

modérément ramifiée. De plus, cette conjecture devient un théorème dans le cas des groupes linéaires  $\mathbf{GL}_1$  et  $\mathbf{GL}_m$ .

Supposons que la caractéristique du corps  $k$  soit différente de 2. Considérons une paire duale réductive  $(G, H)$  dans un certain groupe symplectique et supposons de plus que le revêtement métaplectique soit scindé au dessus de  $G(F)$  et  $H(F)$  (pour plus de détails voir [MVW87]). Dans [LL09], les auteurs ont introduit une catégorie de Weil  $\mathcal{W}$  munie d'une action de  $G(F)$  et  $H(F)$ . Cette catégorie est une version géométrique de la restriction de la représentation de Weil à  $G(F) \times H(F)$ . On peut considérer le groupe de Grothendieck de l'espace des invariants  $\mathcal{W}^{I_G \times I_H}$  sous l'action des deux sous groupes d'Iwahori  $I_G$  et  $I_H$ . Le groupe de Grothendieck  $K(\mathcal{W}^{I_G \times I_H})$  est naturellement un bimodule sous l'action des deux algèbres de Hecke-Iwahori  $\mathcal{H}_{I_H}$  et  $\mathcal{H}_{I_G}$ . D'un autre côté l'algèbre de Hecke-Iwahori  $\mathcal{H}_{I_H}$  s'identifie avec  $\mathbb{H}_H \otimes_{\mathbb{Z}[s, s^{-1}]} \overline{\mathbb{Q}}_\ell$  via le morphisme  $\mathbb{Z}[s, s^{-1}] \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell$  envoyant  $s$  sur  $q^{1/2}$  où  $q$  est le cardinal du corps résiduel de  $F$ . On peut alors formuler la conjecture suivante :

**Conjecture 2 ([FH12])** *Le bimodule  $K(\mathcal{W}^{I_G \times I_H})$  sous l'action des deux algèbres de Hecke affines étendues  $\mathbb{H}_H$  et  $\mathbb{H}_G$  réalisant la correspondance de Howe modérément ramifiée est isomorphe à  $K(\mathcal{X})$ .*

Si on se limite au cas des groupes linéaires  $G = \mathbf{GL}_n$  et  $H = \mathbf{GL}_m$  avec  $n \leq m$ , l'étude des deux bimodules  $K(\mathcal{W}^{I_G \times I_H})$  et  $K(\mathcal{X})$  est plus accessible. Pour conclure on dispose du résultat suivant affirmant que la correspondance de Howe géométrique modérément ramifiée pour les paires duales  $(\mathbf{GL}_1, \mathbf{GL}_m)$  provient de la functorialité de Langlands géométrique locale au niveau Iwahori.

**Théorème 1 ([FH12])** *La conjecture 2 est vraie pour la paires duales  $(\mathbf{GL}_1, \mathbf{GL}_m)$ , pour tout  $m$ .*

Ce théorème est démontré en décrivant le champs quotient  $\mathcal{X}$  comme la fibre de Springer d'un élément sous-régulier et en étudiant sa K-théorie.

## Références

- [Art03] James Arthur. The principle of functoriality. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 40(1) :39–53 (electronic), 2003. Mathematical challenges of the 21st century (Los Angeles, CA, 2000).
- [CG10] Neil Chriss and Victor Ginzburg. *Representation theory and complex geometry*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2010. Reprint of the 1997 edition.
- [Dri80] V. G. Drinfeld. Langlands' conjecture for  $\mathrm{GL}(2)$  over functional fields. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Helsinki, 1978)*, pages 565–574, Helsinki, 1980. Acad. Sci. Fennica.
- [Dri83] V. G. Drinfeld. Two-dimensional  $l$ -adic representations of the fundamental group of a curve over a finite field and automorphic forms on  $\mathrm{GL}(2)$ . *Amer. J. Math.*, 105(1) :85–114, 1983.
- [FH12] Banafsheh Farang-Hariri. *La correspondance de Howe géométrique modérément ramifiée pour les paires duales de type II dans le cadre du programme de Langlands géométrique*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 2012.

- [FLN10] Edward Frenkel, Robert Langlands, and Báo Châu Ngô. Formule des traces et functorialité : le début d'un programme. *Ann. Sci. Math. Québec*, 34(2) :199–243, 2010.
- [FN11] Edward Frenkel and Bao Châu Ngô. Geometrization of trace formulas. *Bull. Math. Sci.*, 1(1) :129–199, 2011.
- [Kud86] S. Kudla. On the local theta-correspondence. *Invent. Math.*, 83(2) :229–255, 1986.
- [Laf02] Laurent Lafforgue. Chtoucas de Drinfeld et correspondance de Langlands. *Invent. Math.*, 147(1) :1–241, 2002.
- [Lan70] R. P. Langlands. Problems in the theory of automorphic forms. In *Lectures in modern analysis and applications, III*, pages 18–61. Lecture Notes in Math., Vol. 170. Springer, Berlin, 1970.
- [Lan04] Robert P. Langlands. Beyond endoscopy. In *Contributions to automorphic forms, geometry, and number theory*, pages 611–697. Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD, 2004.
- [Lan07] Robert P. Langlands. Un nouveau point de repère dans la théorie des formes automorphes. *Canad. Math. Bull.*, 50(2) :243–267, 2007.
- [LL09] Vincent Lafforgue and Sergey Lysenko. Geometric Weil representation : local field case. *Compos. Math.*, 145(1) :56–88, 2009.
- [Lys11] Sergey Lysenko. Geometric theta-lifting for the dual pair  $\mathrm{SO}_{2m}, \mathrm{Sp}_{2n}$ . *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 44(3) :427–493, 2011.
- [MVW87] Colette Mœglin, Marie-France Vignéras, and Jean-Loup Waldspurger. *Correspondances de Howe sur un corps  $p$ -adique*, volume 1291 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [Ngô10] Báo Châu Ngô. Le lemme fondamental pour les algèbres de Lie. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (111) :1–169, 2010.
- [Ral82] Stephen Rallis. Langlands' functoriality and the Weil representation. *Amer. J. Math.*, 104(3) :469–515, 1982.
- [Wal09] Jean-Loup Waldspurger. Endoscopie et changement de caractéristique : intégrales orbitales pondérées. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 59(5) :1753–1818, 2009.

# LES UNITÉS DANS LES ANNEAUX DE GROUPES ET LA GÉOMÉTRIE HYPERBOLIQUE

**Kiefer Ann**

Vrije Universiteit Brussel

Boulevard de la Plaine 2, 1050 Bruxelles, Belgique

**akiefer@vub.ac.be**

**Résumé** - *On se propose de rechercher des générateurs et des relations d'un sous-groupe du groupe des unités de certains anneaux de groupes, en particulier de certains anneaux de groupes sur  $\mathbb{Z}$ , via la géométrie hyperbolique. Plus précisément, on utilise la théorie des domaines fondamentaux de groupes agissant discontinûment sur l'espace hyperbolique et le théorème de Poincaré, qui donne une méthode pour calculer des générateurs et des relations d'un tel groupe à partir de son domaine fondamental.*

**Mots clés** - Anneaux de groupes, Théorie des groupes, Géométrie hyperbolique

## 1 Présentation du projet de recherche

### 1.1 Introduction

Le groupe des unités  $\mathcal{U}(\Gamma)$  d'un ordre  $\Gamma$  d'une algèbre rationnelle  $A$  de dimension finie est un exemple important d'un groupe arithmétique et de ce fait constitue un sujet d'intérêt fondamental. Grâce à des résultats connus de Borel et Harish-Chandra ce groupe est de présentation finie. Rappelons qu'un sous-anneau  $\Gamma$  de  $A$  est un  $(\mathbb{Z})$ -ordre si  $\Gamma$  est finiment engendré en tant que  $\mathbb{Z}$ -module et si  $\Gamma$  contient une  $\mathbb{Q}$ -base de  $A$ . Des exemples connus d'ordres sont les anneaux d'entiers  $R$  des corps de nombres, les algèbres de quaternions sur  $R$  ou les anneaux de groupes  $RG$  sur des groupes finis  $G$ . La question de la structure du groupe des unités couvre plusieurs domaines mathématiques différents et possède ainsi un impact important. En termes globaux, mon projet de recherche porte sur la question de décrire la structure du groupe des unités  $\mathcal{U}(\Gamma)$  d'un  $\mathbb{Z}$ -ordre  $\Gamma$  d'une algèbre rationnelle de dimension finie  $A$  et ceci en premier lieu pour des algèbres semi-simples  $A$ , plus particulièrement pour des anneaux de groupes rationnels  $\mathbb{Q}G$  sur un groupe fini  $G$ . Le cas le plus naturel, mais aussi le plus dur, est celui de l'anneau de groupe sur les entiers  $\mathbb{Z}G$  pour un groupe fini  $G$ . Or, le groupe des unités  $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$  n'est connu que pour peu de groupes  $G$  et une présentation de  $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$  s'avère encore plus rare. La démarche générale pour obtenir des générateurs ainsi qu'une présentation de  $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$  est la suivante : par un résultat connu de Maschke l'anneau de groupe  $\mathbb{Q}G$  est semi-simple pour tout groupe fini  $G$  et donc par le théorème de Wedderburn-Artin,  $\mathbb{Q}G$  peut être décomposé en produit direct de matrices sur des corps. D'où  $\mathbb{Q}G = \prod_{i=1}^n M_{n_i}(D_i)$  où  $D_i$  est un corps. Soit  $\mathcal{O}_i$  un ordre dans  $D_i$  pour chaque  $1 \leq i \leq n$  et soit  $\mathcal{O} = \prod_{i=1}^n M_{n_i}(\mathcal{O}_i)$ , qui est clairement un ordre dans  $\mathbb{Q}G$ . Par la commensurabilité des groupes d'unités de deux ordres d'une même  $\mathbb{Q}$ -algèbre,  $\mathcal{U}(\mathcal{O})$  et  $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$  sont commensurables. Or,  $\mathcal{U}(\mathcal{O})$  n'est rien d'autre

que  $\prod_{i=1}^n \mathrm{GL}_{n_i}(\mathcal{O}_i)$  et chaque  $\mathrm{GL}_{n_i}(\mathcal{O}_i)$  est commensurable avec  $\mathcal{U}(\mathcal{Z}(\mathcal{O}_i)) \times \mathrm{SL}_{n_i}(\mathcal{O}_i)$ , où  $\mathcal{Z}(\mathcal{O}_i)$  désigne le centre de  $\mathcal{O}_i$ . Du coup le problème de rechercher des générateurs et des relations pour  $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$  à commensurabilité près se réduit à celui de rechercher des générateurs et des relations pour  $\mathrm{SL}_{n_i}(\mathcal{O}_i)$  pour chaque  $1 \leq i \leq n$ . Un problème supplémentaire est de décrire par la suite les générateurs dans  $\mathbb{Z}G$ , et non dans les groupes linéaires. Une bonne introduction à ce sujet est donnée dans [PMS02].

## 1.2 Notre démarche générale

Par des résultats de Bass, Vaseršteĭn et Venkataramana, voir notamment [Bas64, Ven94, Vas73], un ensemble fini  $B$  de générateurs pour un sous-groupe d'indice fini dans  $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$  peut être donné pour beaucoup de groupes  $G$ . En fait, ces résultats sont applicables aux cas où la valeur de  $n_i$  est supérieure ou égale à 2, à quelques exceptions près. Pour le cas  $n_i = 1$ , un résultat connu de Kleinert montre que si  $\mathcal{O}$  est un ordre dans un corps  $K$ , alors le groupe des unités  $\mathcal{U}(\mathcal{O})$  est fini si et seulement si  $K$  est soit égal à  $\mathbb{Q}$ , à une extension quadratique imaginaire de  $\mathbb{Q}$  ou à une algèbre de quaternions sur  $\mathbb{Q}$  qui est totalement définie. Dans les autres cas rien n'est connu. On se trouve donc confronté à quelques « cas exceptionnels » qui sont exclus par ces théorèmes et pour lesquels aucune démarche de base est connue. Ceux-ci sont les cas où l'algèbre de groupe rationnelle  $\mathbb{Q}G$  a une composante simple qui est soit égale à un corps non-commutatif différent d'une algèbre de quaternions totalement définie ou à un anneau de matrices  $2 \times 2$   $M_2(D)$  où  $D$  est soit égal à  $\mathbb{Q}$ , une extension quadratique imaginaire de  $\mathbb{Q}$  ou une algèbre de quaternions rationnelle totalement définie  $\mathcal{H}(a, b, \mathbb{Q})$ , qui est un corps. C'est sur ces cas-là que porte mon projet de recherche et nous essayons de les aborder via la géométrie hyperbolique.

Plus concrètement nous travaillons avec des groupes agissant discontinûment sur l'espace hyperboliques  $\mathbb{H}^n$ . Il est utile à cet endroit de rappeler qu'un sous-groupe  $\Gamma$  du groupe des isométries d'un espace métrique finiment compact agit discontinûment sur ce dernier si et seulement si  $\Gamma$  est un sous-groupe discret. Le but est d'appliquer le fameux théorème de Poincaré suivant.

**Théorème 1** *Soit  $\mathcal{F}$  un domaine fondamental exacte et convexe, qui est un polyèdre, d'un groupe  $\Gamma$  agissant discontinûment sur  $\mathbb{H}^n$ . Alors  $\Gamma$  est engendré par*

$$\Phi = \{g \in \Gamma \mid \mathcal{F} \cap g(\mathcal{F}) \text{ est un côté de } \mathcal{F}\}.$$

Remarquons en passant que « être un côté de  $\mathcal{F}$  » est bien défini vu que  $\mathcal{F}$  est défini comme polyèdre. Rappelons aussi qu'un ensemble fermé  $\mathcal{F} \subseteq X$  est appelé domaine fondamental d'un groupe  $\Gamma$  agissant discontinûment sur  $X$  si  $\mathcal{F}$  est connexe dans  $X$ , si les éléments de l'ensemble  $\{g(\mathcal{F}^\circ) \mid g \in \Gamma\}$  sont mutuellement disjoints et si  $X = \bigcup_{g \in \Gamma} g(\mathcal{F})$ . La méthode, dite de Poincaré, donne aussi les relations qui définissent le groupe  $\Gamma$  et l'établissement de ces relations est basé, non sur les côtés de  $\mathcal{F}$ , mais sur les arêtes de  $\mathcal{F}$ . Plus d'informations sur cette théorie peuvent être trouvées dans les ouvrages [Bea83, EGM98, Rat94]. Cette méthode est applicable par exemple aux cas exceptionnels de la forme  $\mathcal{H}(a, b, \mathbb{Q}(\sqrt{-d}))$  et de la forme  $M_2(\mathbb{Q}(\sqrt{-d}))$ , pour  $d$  un entier positif sans facteur carré. En effet les groupes des unités des ordres de ces algèbres agissent via transformation de Möbius en tant qu'isométries sur l'espace  $\mathbb{H}^3$  et comme ces groupes d'unités sont des sous-groupes discrets de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ , le groupe des isométries de  $\mathbb{H}^3$ , leur action est discontinue. En calculant un domaine fondamental pour ces

groupes et en appliquant la méthode de Poincaré, il est possible d'obtenir des générateurs et une présentation pour ces groupes.

### 1.3 Applications

Nous avons appliqué la théorie décrite dans le paragraphe précédent dans un travail commun avec E. Jespers, S. O. Juriaans, A. De A. E Silva, A. C. Souza Filho, [JK<sup>+</sup>]. Dans cet article nous déterminons des formules explicites pour les bissectrices utilisées dans la construction d'un domaine de Dirichlet dans l'espace hyperbolique de dimension 2 et 3. Ceci nous permet d'établir un algorithme facilement implémentable qui calcule les domaines fondamentaux ainsi que les générateurs pour les groupes mentionnés ci-dessus. Des applications sont données pour les corps de quaternions de la forme  $\mathcal{H}(a, b, \mathbb{Q}(\sqrt{-d}))$ , où  $d$  est un entier positif sans facteur carré et nous exécutons des exemples concrets pour les cas où  $a = b = -1$  et  $d = 7, 15$  et  $23$  et pour deux cas où  $a$  et  $b$  diffèrent de  $-1$ . Remarquons que le cas  $d = 7$  est traité dans [CJLdR04], et que notre méthode généralise en quelque sorte la démarche expliquée dans [CJLdR04]. D'autres applications sont les groupes de Bianchi pour lesquels nous faisons aussi le calcul pour quelques exemples concrets. Finalement nous donnons des applications au groupe des unités de l'anneau de groupe sur les entiers  $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$  pour  $G$  nilpotent.

La prochaine étape de mon projet s'inscrit dans un contexte plus difficile. Bien que quelques cas exceptionnels puissent être abordés par la méthode expliquée ci-dessus, tous les cas exceptionnels ne peuvent pas être résolus de cette manière. Prenons l'exemple d'un ordre de la forme d'une algèbre de quaternions classique sur  $\mathbb{Z}[\xi_n]$ , où  $\xi_n$  est une  $n$ ième racine primitive. L'exemple le plus facile de ce cas exceptionnel est l'anneau de groupe  $\mathbb{Z}(Q_8 \times C_7)$ , où  $Q_8$  est le groupe des quaternions et  $C_7$  est le groupe cyclique d'ordre 7. En prenant des ordres dans les composantes de la décomposition de Wedderburn-Artin de  $\mathbb{Q}(Q_8 \times C_7)$ , on tombe sur l'ordre  $\mathcal{H}(-1, -1, \mathbb{Z}[\xi_7])$ . On se voit donc confronté à chercher une présentation du groupe des unités de  $\mathcal{H}(-1, -1, \mathbb{Z}[\xi_7])$ , ce qui revient à chercher une présentation d'un sous-groupe de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}[\xi_7])$ . Comme ce groupe est loin d'être discret dans  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ , la méthode décrite précédemment n'est pas applicable. Or ce groupe peut être vu comme groupe discret du produit direct  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  et donc il agit discontinûment sur le produit direct de 3 copies d'espaces hyperboliques à 3 dimensions. Le but est donc de généraliser la méthode de Poincaré à des produits directs de copies d'espaces hyperboliques.

Pour cela, nous nous sommes donné un « test case » : au lieu de se lancer directement dans l'exemple précédent, nous commençons par l'exemple du groupe modulaire de Hilbert  $\mathcal{H}$ , qui est défini comme suit : soit  $\mathcal{O}$  égale à l'ordre  $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{d}}{d_0}]$  où  $d$  est un entier positif sans facteur carré et  $d_0 = 2$  si  $d \equiv 1 \pmod{4}$  et 1 sinon. Le groupe modulaire de Hilbert  $\mathcal{H}$  est le sous-groupe de  $\mathrm{GL}(2, \mathcal{O})$  des matrices  $P$  de déterminant totalement positif (ce qui signifie que le déterminant de  $P$  et de son conjugué algébrique est positif). En fait ceci est l'exemple le plus facile, car ce groupe agit discontinûment sur le produit direct de 2 copies d'espaces hyperboliques de dimension 2 de la manière suivante : une matrice  $p \in \mathcal{H}$  agit sur  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$  par action de  $P$  sur la première composante d'un point de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ , via transformation de Möbius, et par action du conjugué algébrique de  $P$  sur la deuxième composante. Pour simplifier encore un peu plus, nous nous restreignons aux cas où l'ordre  $\mathcal{O}$  est un anneau principal. L'idée est d'essayer de généraliser la théorie de Poincaré à cet exemple-ci. Une réussite donnerait de l'espoir pour des généralisations de plus haut degré. Concernant cette généralisation, plusieurs questions se posent. Tout d'abord il est fondamental de savoir si

la méthode de Poincaré peut être étendue à un produit de plusieurs espaces hyperboliques ou si le fait de travailler sur un seul espace est d'une importance majeure. Ensuite il faut trouver une méthode pour calculer le domaine fondamental d'un groupe dans ce cas-ci. En fait, dans le cas de l'espace hyperbolique de dimension 2 ou 3, les domaines de Dirichlet et de Ford (voir notamment [Bea83, EGM98, Rat94]) donnent des méthodes pour construire des domaines fondamentaux. Par ailleurs rappelons que la méthode de Poincaré repose sur des calculs effectués sur base des côtés et des arêtes du domaine fondamental, ceci étant possible car le domaine fondamental est défini comme polyèdre. Cependant, dans ce cas-ci, nous avons bel et bien trouvé une méthode de construction d'un domaine fondamental, mais celui-ci n'est plus un polyèdre, voire même plus convexe. Il faudra donc redéfinir les concepts de côtés et d'arêtes afin de pouvoir appliquer la méthode de Poincaré. Cette partie du projet constitue un travail en cours en collaboration avec E. Jespers et A. del Río. Nous nous basons essentiellement sur les articles des Cohn [Coh65b, Coh65a], et évidemment sur les ouvrages classiques cités plus haut.

## 2 Conclusions

Comme expliqué dans la section précédente, mon projet de recherche porte sur les deux sujets de la conférence. En fait nous nous intéressons à un problème qui est de nature purement algébrique, à savoir la recherche d'unités dans un ordre d'une algèbre semi-simple rationnelle de dimension finie. Or, le seul moyen que nous voyons pour le moment pour résoudre les cas qui nous intéressent, est de « traduire » le problème dans le langage de la géométrie hyperbolique, ou même de la géométrie du produit direct de plusieurs espaces hyperboliques, l'idée étant de résoudre le problème dans ce contexte-là pour ensuite le « retraduire » dans le contexte original de l'algèbre. Ce projet, alliant des concepts d'algèbre et de géométrie, me semblerait avoir sa place dans le cadre de ce forum des jeunes mathématicien-ne-s.

## Références

- [Bas64] H. Bass. *K*-theory and stable algebra. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (22) :5–60, 1964.
- [Bea83] Alan F. Beardon. *The geometry of discrete groups*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [CJLdR04] Capi Corrales, Eric Jespers, Guilherme Leal, and Angel del Río. Presentations of the unit group of an order in a non-split quaternion algebra. *Adv. Math.*, 186(2) :498–524, 2004.
- [Coh65a] Harvey Cohn. A numerical survey of the floors of various Hilbert fundamental domains. *Math. Comp.*, 19 :594–605, 1965.
- [Coh65b] Harvey Cohn. On the shape of the fundamental domain of the Hilbert modular group. In *Proc. Sympos. Pure Math., Vol. VIII*, pages 190–202. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1965.
- [EGM98] J. Elstrodt, F. Grunewald, and J. Mennicke. *Groups acting on hyperbolic space*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1998. Harmonic analysis and number theory.

- [JJK<sup>+</sup>] E. Jespers, S. O. Juriaans, A. Kiefer, A. De A. E Silva, and A. C. Souza Filho. Poincaré bisectors in hyperbolic spaces. *submitted*.
- [PMS02] César Polcino Milies and Sudarshan K. Sehgal. *An introduction to group rings*, volume 1 of *Algebras and Applications*. Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [Rat94] John G. Ratcliffe. *Foundations of hyperbolic manifolds*, volume 149 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1994.
- [Vas73] L. N. Vaseršteĭn. Structure of the classical arithmetic groups of rank greater than 1. *Mat. Sb. (N.S.)*, 91(133) :445–470, 472, 1973.
- [Ven94] T. N. Venkataramana. On systems of generators of arithmetic subgroups of higher rank groups. *Pacific J. Math.*, 166(1) :193–212, 1994.

# POINTS ALGÈBRIQUES ET CONJECTURE DE BATYREV-MANIN

**Cécile Le Rudulier**

IRMAR, Université de Rennes 1  
Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France  
[cecile.lerudulier@univ-rennes1.fr](mailto:cecile.lerudulier@univ-rennes1.fr)

**Résumé** - *Nous nous intéressons au nombre asymptotique de points algébriques de l'espace projectif, de degré  $m$  sur un corps de nombres  $K$  et de hauteur inférieure ou égale à une constante  $B$ , lorsque  $B$  tend vers l'infini. Nous aborderons ce problème d'un point de vue géométrique en montrant comment il peut être ramené à l'étude des points rationnels de hauteur bornée d'une certaine variété, c'est-à-dire à la conjecture de Batyrev-Manin. Nous traiterons le cas de la droite projective et aborderons celui du plan projectif.*

**Mots clés** - **Points algébriques, hauteurs, conjecture de Batyrev-Manin**

## 1 Introduction

Un des problèmes majeurs de la géométrie diophantienne est d'étudier les solutions rationnelles d'une équation diophantienne, ce qui se traduit par l'étude des points rationnels d'une variété projective lisse. Lorsque ces points sont en nombre infini et denses, il est naturel de les trier selon leur « taille », appelée ici *hauteur* et d'étudier leur répartition. En 1990, Batyrev et Manin [BM90] ont énoncé une conjecture proposant un équivalent asymptotique du nombre de points rationnels d'une variété (presque) de Fano définie sur un corps de nombres  $K$ , dont la hauteur est bornée par un réel  $B$ . Ici, nous souhaitons étudier un problème voisin. Soit  $\mathbf{P}_K^n$  l'espace projectif de dimension  $n$  défini sur un corps de nombres  $K$ . Nous noterons  $\bar{K}$  la clôture algébrique de  $K$ . Sur l'ensemble  $\mathbf{P}^n(\bar{K})$ , on peut définir une hauteur usuelle  $H$ , que nous expliciterons plus tard. Le théorème de Northcott établit alors que, pour tout entier  $m \geq 1$  et tout réel  $B$ , l'ensemble

$$\{x \in \mathbf{P}^n(\bar{K}) \mid [K(x) : K] = m, H(x) \leq B\}$$

est fini. On peut alors se demander quel est l'équivalent asymptotique du cardinal de cet ensemble lorsque la borne  $B$  tend vers l'infini. Plusieurs travaux ont déjà été menés dans ce sens. Tout d'abord, Schanuel [Sch79] a traité le cas  $m = 1$ , c'est-à-dire celui des points rationnels. Lorsque  $K = \mathbf{Q}$ , Schmidt [Sch95] puis Gao [Gao95] se sont intéressés aux cas  $m = 2$  et  $m \geq 3$ , respectivement. Plus récemment, Masser et Vaaler [MV07] ont traité le cas de la droite projective et Widmer [Wid09] le cas général sous certaines conditions.

Dans cet exposé, nous expliquerons comment l'étude des points algébriques de degré donné et de hauteur bornée, se ramène à l'étude des points rationnels de hauteur bornée d'une certaine variété et pour une certaine hauteur, c'est-à-dire à la conjecture de Batyrev-Manin. Nous traiterons le cas de la droite projective et proposerons quelques premières conclusions de cette étude, toujours en cours, pour le plan projectif.

## 2 Hauteurs et métriques adéliques sur un fibré en droites

La conjecture de Batyrev-Manin est énoncée pour des hauteurs définies par une métrique adélique sur un fibré en droites d'une variété projective lisse. Avant de s'intéresser à ces hauteurs, commençons par définir la hauteur usuelle, qui en est un cas particulier.

Soit  $M_K$  est l'ensemble des places de  $K$ . Nous noterons  $|\cdot|_v$  le représentant de la place  $v$  dont la restriction à  $\mathbf{Q}$  est la valeur absolue usuelle  $|\cdot|_\infty$  ou l'une des valeurs absolues  $p$ -adiques  $|\cdot|_p$ , pour  $p$  un nombre premier – avec  $|p|_p = 1/p$ . Par ailleurs,  $K_v$  désignera le complété de  $K$  pour la topologie donnée par  $v$  et  $\mathbf{C}_v$  sa clôture algébrique, qui est un espace complet. Ces valeurs absolues vérifient la *formule du produit* : pour tout  $\lambda \in K^*$ ,

$$\prod_{v \in M_K} |\lambda|_v^{[K_v:\mathbf{Q}_v]} = 1. \quad (1)$$

Nous pouvons alors définir une hauteur  $H_K$  sur  $\mathbf{P}^n(K)$ . Pour tout  $x = [x_0 : \dots : x_n] \in \mathbf{P}^n(K)$ ,

$$H_K(x) := \prod_{v \in M_K} \max\{|x_0|_v, \dots, |x_n|_v\}^{[K_v:\mathbf{Q}_v]}.$$

Cette définition est indépendante du choix des coordonnées homogènes de  $x$  par la formule (1). On définit la hauteur absolue usuelle sur  $\mathbf{P}^n(\bar{\mathbf{Q}})$ , notée  $H$ , par

$$H(x) = H_K(x)^{1/[K:\mathbf{Q}]},$$

où  $K$  est un corps de nombres quelconque tel que  $x \in \mathbf{P}^n(K)$ .

Une des propriétés essentielles pour ce qui suit est *l'invariance de la hauteur par conjugaison*. Soit  $x \in \mathbf{P}^n(\bar{\mathbf{Q}})$  et  $\sigma \in \text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ . Alors

$$H(\sigma(x)) = H(x).$$

Venons en aux métriques adéliques. Soit  $V$  une variété projective lisse définie sur  $K$  munie d'un fibré en droites très ample  $\mathcal{L}$ .

**Définition 1** Une métrique adélique sur  $\mathcal{L}$  est la donnée, pour tout  $x \in V(\mathbf{C}_v)$ , d'une famille de normes  $(\|\cdot\|_v)_{v \in M_K}$  sur la fibre  $\mathcal{L}_x$ , vue comme  $\mathbf{C}_v$ -espace vectoriel de dimension 1, telles que :

1. Pour toute section  $s$  de  $\mathcal{L}$ , l'application  $x \mapsto \|s(x)\|_v$  est continue pour la topologie  $v$ -adique.
2. Pour tout  $x \in V(\mathbf{C}_v)$ , toute section  $s$  de  $\mathcal{L}$  et tout  $\sigma \in \text{Gal}(\mathbf{C}_v/K_v)$ ,

$$\|\sigma(s)(x)\|_v = \|s(x^\sigma)\|_v.$$

3. Si  $(s_1, \dots, s_q)$  une base de  $\Gamma(V, \mathcal{L})$  et pour tout  $x \in V(\mathbf{C}_v)$ ,

$$\delta_v(x) = \log \left( \|s(x)\|_v \max_{1 \leq i \leq q} \left| \frac{s_i(x)}{s(x)} \right|_v \right),$$

où  $s \in \Gamma(V, \mathcal{L})$  est une section de  $\mathcal{L}$  quelconque ne s'annulant pas en  $x$ ,

- (a) la fonction  $\delta_v$  est bornée sur  $V(\mathbf{C}_v)$  pour toute place  $v$  ;
- (b)  $\delta_v = 0$  pour presque toute place  $v$ .

**Définition 2** Soit  $(\|\cdot\|_v)_{v \in M_K}$  une métrique adélique sur  $\mathcal{L}$ .

1. La hauteur  $H_{\mathcal{L},K}$  sur  $V(K)$  associée à cette métrique est donnée par

$$H_{\mathcal{L},K}(x) = \prod_{v \in M_K} \|s(x)\|_v^{-[K_v:\mathbf{Q}_v]},$$

où  $s$  est une section de  $\mathcal{L}$  ne s'annulant pas en  $x$ .

2. La hauteur (absolue)  $H_{\mathcal{L}}$  sur  $V(\mathbf{Q})$  associée à cette métrique est donnée par

$$H_{\mathcal{L}}(x) = H_{\mathcal{L},K}(x)^{1/[K:\mathbf{Q}]},$$

où  $K$  est un corps de nombres tel que  $x \in V(K)$ .

Exemple : lorsque  $V = \mathbf{P}^n$ , les hauteurs usuelles sont les hauteurs définies par la métrique adélique sur  $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1)$  vérifiant  $\delta_v = 0$ , pour toute place  $v$ .

Ces hauteurs sont *invariantes par conjugaison* et vérifient le *théorème de Northcott*. On peut généraliser ces définitions aux cas des fibrés amples et presque amples. Le théorème de Northcott reste vrai pour les fibrés amples.

### 3 Points algébriques de hauteur bornée

À un point algébrique, de degré donné  $m \geq 1$ , de  $\mathbf{P}^n(\bar{K})$  de hauteur bornée on souhaite associer un point rationnel de hauteur bornée. L'idée utilisée dans les articles cités précédemment est de dire qu'un tel point n'est autre qu'un point de  $\mathbf{P}^n(L)$  pour une certaine extension  $L$  de  $K$  de degré  $m$ . On doit alors disposer d'un théorème de Schanuel raffiné, avec un terme d'erreur le plus précis possible, pour ensuite sommer sur toutes ces extensions  $L$ . Nous allons ici développer une autre méthode.

Soit  $x \in \mathbf{P}^n(\bar{K})$  de degré  $m$  sur  $K$ . Il admet exactement  $m$  conjugués sous l'action de  $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ , notés  $x_1, \dots, x_m$ . Considérons le point  $(x_1, \dots, x_m) \in (\mathbf{P}^n)^m$ . Soit

$$\text{Sym}^m \mathbf{P}^n := (\mathbf{P}^n)^m / \mathfrak{S}_m$$

le *produit symétrique*  $m$ -ième de  $\mathbf{P}^n$ , où  $\mathfrak{S}_m$  désigne le  $m$ -ième groupe symétrique. Nous noterons  $\pi: (\mathbf{P}^n)^m \rightarrow \text{Sym}^m \mathbf{P}^n$  la projection canonique. Alors, l'image de  $(x_1, \dots, x_m)$  par  $\pi$  est invariant sous l'action de  $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ , c'est-à-dire un point  $K$ -rationnel de la variété projective  $\text{Sym}^m \mathbf{P}^n$ . On est ramené à compter les points rationnels de hauteur bornée sur  $\text{Sym}^m \mathbf{P}^n$ , après avoir choisit judicieusement une hauteur.

#### 3.1 Droite projective

Dans le cas où  $n = 1$ , cette méthode permet de retrouver facilement le théorème de Masser et Vaaler et de le généraliser à toute hauteur issue d'une métrique adélique sur  $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)$ . En effet, la variété  $\text{Sym}^m \mathbf{P}^1$  est très simple, elle est isomorphe à l'espace projectif  $\mathbf{P}^m$ . Notons  $\varepsilon: \text{Sym}^m \mathbf{P}^1 \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}^m$  l'isomorphisme donné par les polynômes symétriques élémentaires homogénéisés. On peut alors démontrer le théorème suivant :

**Théorème 1** Soit  $H_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1(1)}}$  une hauteur sur  $\mathbf{P}^1(\bar{\mathbf{Q}})$  définie par une métrique adélique sur le fibré en droites  $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1(1)}$ . Soient  $K$  un corps de nombres de degré  $d$ ,  $m$  un entier naturel non nul et  $B$  un réel. Alors,

$$\#\{x \in \mathbf{P}^1(\bar{K}) \mid [K(x) : K] = m \text{ et } H_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1(1)}}(x) \leq B\} \underset{B \rightarrow +\infty}{\sim} C_{m,K} B^{dm(m+1)},$$

où  $C_{m,K}$  est une constante explicite strictement positive.

*Preuve* : Donnons rapidement l'idée de la démonstration. La conjecture de Batyrev-Manin a été démontrée pour l'espace projectif par Peyre [Pey95]. Celle-ci donne

$$\#\{x \in \mathbf{P}^m(K) \mid H_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^m(1),K}}(x) \leq B\} \underset{B \rightarrow +\infty}{\sim} C B^{m+1}, \quad (2)$$

où  $C > 0$  dépend de la hauteur considérée et est explicite. Si la hauteur de départ sur  $\mathbf{P}^1(\bar{\mathbf{Q}})$  est, par exemple, la hauteur usuelle, il est naturel de définir l'application suivante sur  $\mathbf{P}^m(K)$  :

$$\varepsilon(\pi(x_1, \dots, x_m)) \longmapsto (H(x_1) \cdots H(x_m))^{[K:\mathbf{Q}]}.$$

On montre que celle-ci est bien une hauteur sur  $\mathbf{P}^m(K)$  associée à une métrique adélique sur le fibré en droites  $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^m(1)}$ , nous la noterons donc  $H_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^m(1),K}}$ . De plus, on remarque que si  $x_1, \dots, x_m$  sont les  $m$  conjugués d'un point  $x$  de degré  $m$ ,  $H(x) \leq B$ , alors, par invariance de la hauteur par conjugaison,

$$H_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^m(1),K}}(\varepsilon(\pi(x_1, \dots, x_m))) = H(x)^{dm} \leq B^{dm},$$

où  $d = [K : \mathbf{Q}]$ . On obtient le théorème en utilisant (2) et le fait que les points de  $\mathbf{P}^m$  ne provenant pas d'un point de  $(\mathbf{P}^1)^m$  formé de  $m$  conjugués sont négligeables.  $\square$

### 3.2 Plan projectif

Sur le plan projectif les choses se compliquent. La variété  $\text{Sym}^m \mathbf{P}^2$  n'est pas lisse pour  $m \geq 2$ . Il en existe cependant une résolution des singularités appelée *schéma de Hilbert de  $m$  points sur  $\mathbf{P}^2$* , noté  $\text{Hilb}^m \mathbf{P}^2$  (lorsque  $m = 2$ , c'est simplement l'éclatement de la diagonale), et on a un morphisme birationnel  $\varepsilon : \text{Hilb}^m \mathbf{P}^2 \rightarrow \text{Sym}^m \mathbf{P}^2$ . Il est possible d'énoncer la conjecture de Batyrev-Manin sur  $\text{Hilb}^m \mathbf{P}^2$  pour les hauteurs associées à une métrique adélique sur son fibré anticanonique  $\omega^{-1}$ .

**Conjecture 1 (Batyrev-Manin)** Il existe une extension finie  $L$  de  $K$ , un ouvert  $U$  de  $\text{Hilb}^m \mathbf{P}^2$  et une constante strictement positive  $c$  tels que

$$\#\{x \in U(L) \mid H_{\omega^{-1},L}(x) \leq B\} \underset{B \rightarrow +\infty}{\sim} c B \log B,$$

La restriction à un ouvert  $U$  est nécessaire pour éviter les phénomènes d'accumulation. On peut tout de suite donner des exemples de sous-variétés accumulatrices. La hauteur que nous utiliserons sur  $(\text{Hilb}^m \mathbf{P}^2)(K)$  est construite de manière analogue à ce qui a été fait précédemment : si  $\varepsilon(x) = \pi(x_1, \dots, x_m)$ ,

$$H_{\omega^{-1},K}(x) = (H(x_1) \cdots H(x_m))^{3[K:\mathbf{Q}]}.$$

Tout d'abord, il nous faut écarter les cas où un nombre infini de points de  $\text{Hilb}^m \mathbf{P}^2$  ont la même image par  $\epsilon$ , car alors ils tous la même hauteur (notons qu'ici le fibré  $\omega^{-1}$  n'est pas ample, le théorème de Northcott n'est donc pas garanti). Ceci arrive si au moins deux des  $x_i$  sont égaux. Nous noterons donc  $U_0$  l'ensemble des points  $x \in \text{Hilb}^m \mathbf{P}^2$  tels que  $\epsilon(x) = \pi(x_1, \dots, x_m)$  avec les  $x_i$  distincts. Cependant, la restriction à  $U_0$  ne suffit pas. On a également un phénomène d'accumulation, beaucoup moins trivial, lorsque les  $x_i$  sont distincts et alignés.

**Proposition 1** *Soit  $f$  une forme linéaire non nulle sur  $\mathbf{P}^2$  définie sur  $K$ . Nous noterons  $\mathcal{V}(f)$  l'ensemble des points de  $\mathbf{P}^2$  annulés par  $f$  et  $Z_f = \epsilon^{-1}(\text{Sym}^m \mathcal{V}(f))$ .*

1. *Il existe une constante strictement positive  $c$  telle que*

$$\#\{x \in (Z_f \cap U_0)(K) \mid H_{\omega^{-1}, K}(x) \leq B\} \underset{B \rightarrow +\infty}{\sim} c B^{\frac{m+1}{3}}.$$

2. *La réunion  $Z$  des  $Z_f$  est un fermé de  $\text{Hilb}^m \mathbf{P}^2$  de dimension  $m + 2$ .*

La formule se démontre à l'aide du théorème 1. Si  $m \geq 3$ , on a mis en évidence une sous-variété stricte  $Z$  de  $\text{Hilb}^m \mathbf{P}^2$  donnant plus de points que ce que prédit la conjecture de Batyrev-Manin. On voit apparaître un phénomène intéressant : l'équivalent recherché dans notre problème initial, pour le nombre de points de  $\mathbf{P}^2(\bar{K})$  de degré  $m \geq 3$  et de hauteur bornée, pourrait provenir uniquement des cas où les  $m$  conjugués sont alignés. Ceci s'accorderait avec les résultats de Gao [Gao95]. Dans le cas  $m = 2$ , la conjecture 1 sur  $U_0$  est compatible avec le résultat de Schmidt [Sch95].

## Références

- [BM90] V. V. Batyrev and Yu. I. Manin. Sur le nombre des points rationnels de hauteur borné des variétés algébriques. *Math. Ann.*, 286(1-3) :27–43, 1990.
- [Fog68] John Fogarty. Algebraic families on an algebraic surface. *Amer. J. Math.*, 90 :511–521, 1968.
- [Fog73] John Fogarty. Algebraic families on an algebraic surface. II. The Picard scheme of the punctual Hilbert scheme. *Amer. J. Math.*, 95 :660–687, 1973.
- [Gao95] Xia Gao. *On Northcott's theorem*. 1995. Thesis (Ph.D.)—University of Colorado.
- [MV07] David Masser and Jeffrey D. Vaaler. Counting algebraic numbers with large height. II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 359(1) :427–445, 2007.
- [Pey95] Emmanuel Peyre. Hauteurs et mesures de Tamagawa sur les variétés de Fano. *Duke Math. J.*, 79(1) :101–218, 1995.
- [Sch79] Stephen Hoel Schanuel. Heights in number fields. *Bull. Soc. Math. France*, 107(4) :433–449, 1979.
- [Sch95] Wolfgang M. Schmidt. Northcott's theorem on heights. II. The quadratic case. *Acta Arith.*, 70(4) :343–375, 1995.
- [Wid09] Martin Widmer. Counting points of fixed degree and bounded height. *Acta Arith.*, 140(2) :145–168, 2009.

# HOMOLOGIES DES STRUCTURES ALGÈBRIQUES : APPROCHE UNIFICATRICE VIA TRESSAGES

**Victoria LEBED**

IMJ, Paris 7

**lebed@math.jussieu.fr**

**Résumé** - *On introduit une théorie homologique des espaces vectoriels tressés et on montre comment voir les homologies des différentes structures algébriques familières à l'aide de cette approche unificatrice. On présente en détail l'exemple de la structure d'algèbre associative, et on fournit des tressages qui encodent quelques autres structures algébriques.*

**Mots clés** - Algèbre homologique, tressage, algèbres de battage quantiques, modules bi-simpliciaux, calcul graphique, homologie de Hochschild, homologie de Chevalley-Eilenberg, structures auto-distributives, algèbres de Leibniz

## 1 Introduction

Dans cet exposé, on s'intéresse à un procédé qu'on rencontre très souvent en mathématiques, schématiquement présenté comme suit :

structure algébrique $\longmapsto$ homologie.
---

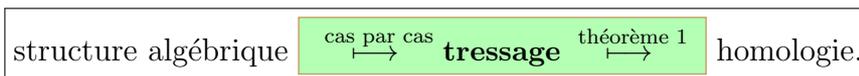
Le choix d'une théorie homologique pour une structure algébrique donnée peut avoir des motivations très variées : on peut vouloir étudier les déformations de la structure en question, ou généraliser une homologie provenant d'un cadre géométrique, ou classifier des structures, ou obtenir des invariants (des nœuds par exemple) à l'aide des (co)cycles. Les exemples de base sont pour nous les suivantes :

1. complexe de Koszul pour un espace vectoriel (= e.v.);
2. complexe bar et complexe de Hochschild pour une algèbre associative;
3. complexe de Chevalley-Eilenberg pour une algèbre de Lie;
4. complexes de rack et de quandle pour des structures auto-distributives.

Les complexes ci-dessus ont tous la même allure : c'est une algèbre tensorielle (ou extérieure dans le cas des algèbres de Lie) avec comme différentielle sur  $V^{\otimes n}$  une somme de type  $d = \sum_{i=1}^n (-1)^i \partial_i$ , où les  $\partial_i$  sont construites en utilisant seulement la structure algébrique de départ et correspondent au même procédé appliqué dans des positions  $i$  différentes. La vérification de l'identité  $d \circ d = 0$  est effectuée à partir de deux ingrédients :

1. les propriétés définissant la structure algébrique (e.g. l'associativité pour une algèbre associative);
2. un jeu de signes parfois mystérieux (e.g. pour le complexe de Chevalley-Eilenberg).

Il y a beaucoup d'autres phénomènes qui suggèrent l'existence d'une approche commune à toutes ces théories homologiques. Dans [10] par exemple, J.Przytycki développe la théorie homologique des structures auto-distributives en s'inspirant de celle des structures associatives. Dans cet exposé on propose une telle approche unificatrice, présentée en détail dans [7]. Elle apporte une lumière nouvelle sur, entre autres, les parallèles observés par J.Przytycki. Notre approche consiste à rajouter une étape au schéma précédent :



Dans la première partie de l'exposé on rappellera la notion des e.v. tressés et on présentera leur théorie homologique, introduite dans [7]. Dans la deuxième partie on introduira et étudiera en détail le tressage qui encode la structure d'une algèbre associative. On finira par une liste de tressages pour d'autres structures algébriques.

## 2 Homologie des espaces vectoriels tressés

**Définition 2.1.** Un *espace vectoriel tressé* est un  $\mathbb{k}$ -e.v.  $V$  muni d'un *tressage*, i.e. d'une application linéaire  $\sigma : V \otimes V \rightarrow V \otimes V$  qui satisfait *l'équation de Yang-Baxter*

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 : V \otimes V \otimes V \rightarrow V \otimes V \otimes V, \quad (\text{YB})$$

où  $\sigma_i$  est le tressage  $\sigma$  appliqué aux composantes  $i$  et  $i + 1$  de  $V^{\otimes 3}$ .

Contrairement à la majorité d'auteurs, on ne demande pas que  $\sigma$  soit inversible ; notamment, le tressage qu'on proposera pour les algèbres associatives ne le sera pas.

**Définition 2.2.** Deux co-éléments  $f, g \in V^*$  sont dits  *$\sigma$ -compatibles* si

$$(f \otimes g) \circ \sigma = g \otimes f, \quad \text{et} \quad (g \otimes f) \circ \sigma = f \otimes g.$$

Un *caractère tressé* est un  $\epsilon \in V^*$  auto- $\sigma$ -compatible, i.e.

$$(\epsilon \otimes \epsilon) \circ \sigma = \epsilon \otimes \epsilon.$$

Un tressage et un caractère tressé sur  $V$  s'avèrent suffisants pour définir une théorie homologique pour  $V$  :

**Théorème 1.** Soit  $(V, \sigma)$  un e.v. tressé muni de deux caractères tressés  $\epsilon$  et  $\zeta$ . Alors on dispose d'une bi-différentielle sur  $T(V)$  définie par les formules

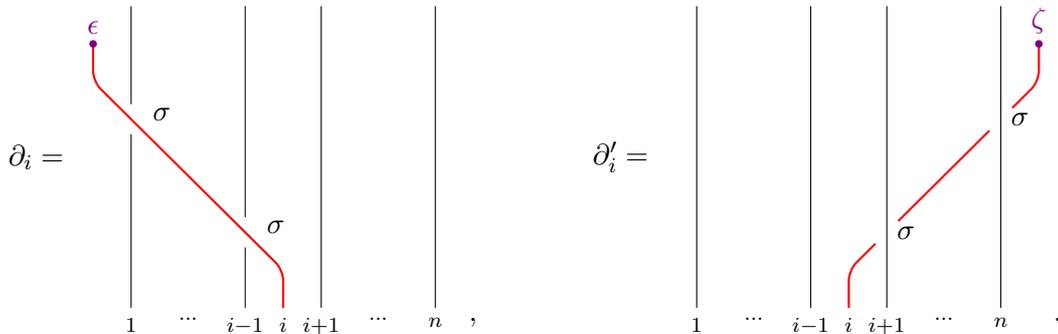
$$\begin{aligned}
 V^{\otimes n} &\longrightarrow V^{\otimes(n-1)} \\
 \epsilon d : \bar{v} &\longmapsto \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \partial_i(\bar{v}), & \partial_i &:= (\epsilon \otimes \text{Id}_{n-1}) \circ \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \dots \circ \sigma_{i-1}, \\
 \zeta d : \bar{v} &\longmapsto \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \partial'_i(\bar{v}), & \partial'_i &:= (\text{Id}_{n-1} \otimes \zeta) \circ \sigma_{n-1} \circ \sigma_{n-2} \circ \dots \circ \sigma_i.
 \end{aligned}$$

De plus, si les caractères  $\epsilon$  et  $\zeta$  sont  $\sigma$ -compatibles, alors  $\epsilon d$  et  $\zeta d$  deviennent également une bi-différentielle sur  $T(V)$ .

On donne brièvement les idées de deux preuves de ce théorème. On présente ainsi deux façons de traiter nos bi-différentielles “tressées”, chacune apportant des éclairages sur leur nature :

approche	avantages
graphique : diagrammes, tresses	→maniabilité, →structure bisimpliciale ;
battages quantiques et co-éléments de carré nul : $\epsilon d = (\epsilon \otimes \text{Id}_{n-1}) \circ \overline{\square}_{-\sigma}^{1,n-1}$ & $(\epsilon \otimes \epsilon) \circ \overline{\square}_{-\sigma} = 0$ & co-associativité de $\overline{\square}_{-\sigma} \Rightarrow \epsilon d \circ \epsilon d = 0$	→on “cache” le jeu de signes dans $-\sigma$ , →plus besoin de contrôler les indices $i$ , →on travaille au niveau “global”.

L’approche graphique consiste à travailler avec les diagrammes du type suivant (ici on lit un diagramme du bas en haut, et on compose consécutivement tous les morphismes qu’on rencontre ; un brin vertical correspond à l’application identité) :



En plus d’être facilement maniables, ces diagrammes suggèrent une structure pré-bisimpliciale sur  $T(V)$ , qui peut être complétée en une structure faiblement simpliciale (cf. [8] et [10]) si  $V$  possède en plus une comultiplication co-associative  $\sigma$ -cocommutative  $\Delta$  compatible avec le tressage  $\sigma$  ; en effet, on peut prendre comme dégénérescences

$$s_i := \text{Id}_{i-1} \otimes \Delta \otimes \text{Id}_{n-i} . \tag{s_i}$$

Pour plus de détails sur les algèbres de battages (=shuffle) quantiques, voir les travaux de M.Rosso ([11],[12]).

Notons que notre théorème donne plus qu’une simple homologie : en fait, elle associe à chaque caractère tressé deux différentielles compatibles, précisant aussi les conditions de compatibilité de ces différentielles pour des caractères différents.

On retrouve comme cas particulier les constructions de J.S.Carter, M.Elhamdadi et M.Saito, cf. [1].

*Remarque 2.3.* Les constructions ci-dessus se transportent facilement dans le cadre général des catégories pré-additives monoïdales. Entre autres, cela donne gratuitement deux nouvelles constructions :

1. des cohomologies des e.v. tressés ;
2. des “super-versions” de ces (co)homologies.

### 3 Exemples

Soit  $V$  un  $\mathbb{k}$ -e.v. muni d'une application bilinéaire  $\mu : V \otimes V \longrightarrow V$  et d'un élément distingué  $\mathbf{1} \in V$ . On introduit une application bilinéaire

$$\begin{aligned} \sigma = \sigma_\mu : V \otimes V &\longrightarrow V \otimes V, \\ v \otimes w &\longmapsto \mathbf{1} \otimes \mu(v \otimes w) \end{aligned}$$

**Proposition 3.1.** *Supposons que  $\mathbf{1}$  est un élément neutre pour  $\mu$ . Alors l'application  $\sigma_\mu$  est un tressage si et seulement si  $\mu$  est associative sur  $V$ .*

On a ainsi obtenu un tressage qui encode la propriété algébrique "associativité". Remarquons que ce tressage est loin d'être inversible.

Le lemme suivant explique le choix du terme *caractère tressé* :

**Lemme 3.2.** Soit  $(V, \mu, \mathbf{1})$  une algèbre associative unitaire munie d'un *caractère*  $\epsilon$ , i.e. une application  $\epsilon : V \rightarrow \mathbb{k}$  qui respecte la structure d'algèbre :

$$\begin{aligned} \epsilon(\mu(v \otimes w)) &= \epsilon(v)\epsilon(w) \quad \forall v, w \in V, \\ \epsilon(\mathbf{1}) &= 1. \end{aligned}$$

Alors  $\epsilon$  est un caractère tressé pour l'e.v. tressé  $(V, \sigma_\mu)$ .

On a ainsi tous les ingrédients nécessaires pour appliquer le théorème 1. Etant donné deux caractères  $\epsilon$  et  $\zeta$  d'une algèbre associative unitaire  $(V, \mu, \mathbf{1})$ , ce théorème donne la bi-différentielle suivante sur  $T(V)$  :

$$\begin{aligned} \epsilon d(v_1 \dots v_n) &= \epsilon(v_1)v_2 \dots v_n + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i v_1 \dots v_{i-1} \mu(v_i \otimes v_{i+1}) v_{i+2} \dots v_n, \\ d^\zeta(v_1 \dots v_n) &= (-1)^{n-1} \zeta(v_n) v_1 \dots v_{n-1} \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^i \zeta(v_{i+1}) \dots \zeta(v_n) v_1 \dots v_i \mathbf{1} \dots \mathbf{1}. \end{aligned}$$

L'algèbre  $V$  possède également une comultiplication (assez exotique)

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{1}} : V &\longrightarrow V \otimes V, \\ v &\longmapsto \mathbf{1} \otimes v. \end{aligned}$$

Cette comultiplication satisfait à toutes les propriétés décrites dans la section précédente et donne ainsi les dégénérescences  $(s_i)$ , d'où le *sous-bicomplexe dégénéré* qui est dans ce cas l'idéal de  $T(V)$  engendré par  $\mathbf{1}$ . Le passage au quotient donne le *bicomplexe normalisé* et en particulier la différentielle

$$\begin{aligned} (\epsilon d - d^\zeta)(v_1 \dots v_n) &= \epsilon(v_1)v_2 \dots v_n \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i v_1 \dots v_{i-1} \mu(v_i \otimes v_{i+1}) v_{i+2} \dots v_n, \\ &\quad + (-1)^n \zeta(v_n) v_1 \dots v_{n-1} \end{aligned}$$

sur  $T(V/\mathbb{k}\mathbf{1})$ . On reconnaît le *complexe de Hochschild* avec des coefficients triviaux (cf. par exemple [8]).

On termine avec un tableau des tressages, caractères tressés, co-multiplications compatibles  $\Delta$ , et exemples de complexes retrouvés pour d'autres structures algébriques. Quelques rappels sont nécessaires pour cela.

L'*algèbre de Leibniz* est une version non-anticommutative d'algèbre de Lie, introduite by J.L.Loday dans le but de relever la différentielle  $d_{CE}$  de Chevalley-Eilenberg sur  $\Lambda(V)$  en une différentielle sur  $T(V)$  (cf. [8] et [4]). Concrètement, c'est un e.v.  $V$  muni d'un crochet bilinéaire  $[\cdot, \cdot]$  qui satisfait à la version suivante de l'identité de Jacobi :

$$[v, [w, u]] = [[v, w], u] - [[v, u], w] \quad \forall v, w, u \in V.$$

Nos méthodes "tressées" permettent de retrouver la notion d'algèbre de Leibniz en expliquant notamment ce choix de version de l'identité de Jacobi parmi toutes les versions possibles (équivalentes dans le cas des algèbres de Lie à cause de l'anticommutativité), et donnent automatiquement le bon relèvement de  $d_{CE}$ .

Une opération  $\triangleleft$  sur un ensemble  $S$  est dite *auto-distributive* (= AD) si

$$(a \triangleleft b) \triangleleft c = (a \triangleleft c) \triangleleft (b \triangleleft c) \quad \forall a, b, c \in S.$$

On obtient les notions de *rack* et de *quandle* en ajoutant des conditions supplémentaires. Ces structures sont importantes en topologie (cf. par exemple [6]), et leur homologies sont très fructueusement utilisées dans la construction d'invariants des nœuds.

structure	tressage	caractères tressés	$\Delta$	complexes
e.v. $V$	flip $v \otimes w \mapsto w \otimes v$	tout $\epsilon \in V^*$	–	Koszul
alg. de Leibniz/ Lie unitaire ( $V, [\cdot, \cdot], \mathbf{1}$ )	$\sigma_{[\cdot, \cdot]} :$ $v \otimes w \mapsto w \otimes v$ $+\mathbf{1} \otimes [v, w]$	caractère de Lie $\epsilon :$ $\epsilon([v, w]) = 0,$ $\epsilon(\mathbf{1}) = 1$	$\Delta(v) =$ $v \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes v,$ $\Delta(\mathbf{1}) = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$	Leibniz, Chevalley- Eilenberg
ensemble AD ( $S, \triangleleft$ )	$\sigma_{\triangleleft} :$ $S \times S \rightarrow S \times S$ $(a, b) \mapsto (b, a \triangleleft b)$	caractère AD $\epsilon :$ $\epsilon(a \triangleleft b) = \epsilon(a)$	$\Delta(a) =$ $(a, a)$	homologies de rack (cf. [5])/ quandle (cf. [2])

Notons que dans un article en préparation, on utilise cette approche "tressée" pour étudier les homologies des bigèbres, algèbres de Hopf, (bi)modules de Hopf et modules de Yetter-Drinfeld. Ces techniques s'avèrent également efficaces dans la présentation de bimodules, (bi)modules de Hopf et modules de Yetter-Drinfeld en tant que modules sur des algèbres, dans l'esprit de [3] et [9].

## Références

- [1] J. Scott Carter, Mohamed Elhamdadi, and Masahico Saito. Homology theory for the set-theoretic Yang-Baxter equation and knot invariants from generalizations of quandles. *Fund. Math.*, 184 :31–54, 2004.

- [2] J. Scott Carter, Daniel Jelsovsky, Seiichi Kamada, Laurel Langford, and Masahico Saito. Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 355(10) :3947–3989, 2003.
- [3] Claude Cibils and Marc Rosso. Hopf bimodules are modules. *J. Pure Appl. Algebra*, 128(3) :225–231, 1998.
- [4] Christian Cuvier. Homologie de Leibniz et homologie de Hochschild. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 313(9) :569–572, 1991.
- [5] Roger Fenn, Colin Rourke, and Brian Sanderson. Trunks and classifying spaces. *Appl. Categ. Structures*, 3(4) :321–356, 1995.
- [6] David Joyce. A classifying invariant of knots, the knot quandle. *J. Pure Appl. Algebra*, 23(1) :37–65, 1982.
- [7] Victoria Lebed. Homologies of Algebraic Structures via Braidings and Quantum Shuffles. *ArXiv e-prints*, April 2012.
- [8] Jean-Louis Loday. *Cyclic homology*, volume 301 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1992. Appendix E by María O. Ronco.
- [9] Florin Panaite. Hopf bimodules are modules over a diagonal crossed product algebra. *Comm. Algebra*, 30(8) :4049–4058, 2002.
- [10] Józef H. Przytycki. Distributivity versus associativity in the homology theory of algebraic structures. *Demonstratio Math.*, 44(4) :823–869, 2011.
- [11] Marc Rosso. Groupes quantiques et algèbres de battage quantiques. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 320(2) :145–148, 1995.
- [12] Marc Rosso. Integrals of vertex operators and quantum shuffles. *Lett. Math. Phys.*, 41(2) :161–168, 1997.

# COHOMOLOGIE ÉTALE DES ENSEMBLES SEMI-ALGÈBRIQUES DANS LES ESPACES DE BERKOVICH

Florent Martin

IMJ

4 Place de Jussieu, Paris, France

[fmartin@math.jussieu.fr](mailto:fmartin@math.jussieu.fr)

**Résumé** - Soit  $k$  un corps non-archimédien complet algébriquement clos, et  $\mathcal{X}$  une variété algébrique sur  $k$ . Par analogie avec ce que l'on fait sur  $\mathbb{C}$ , on peut lui associer un espace  $k$ -analytique,  $\mathcal{X}^{an}$  [Ber90]. Pour  $\mathcal{X} = \text{Spec}(A)$  affine, un sous-ensemble  $S$  de  $\mathcal{X}^{an}$  est semi-algébrique si c'est une combinaison booléenne finie d'ensembles définis par des inégalités  $|f| \leq |g|$  où  $f$  et  $g \in A$ . Cette définition se globalise à  $\mathcal{X}$  une variété algébrique. En suivant la théorie développée par Berkovich dans [Ber93], on définit des groupes de cohomologie étale à support compact  $H_c^i(S, \mathbb{Q}_l)$ , et pour  $l \neq \text{car}(\tilde{k})$ , et  $S$  localement-fermé, on montre qu'ils vérifient les propriétés attendues, en particulier, ce sont des espaces vectoriels de type fini.

**Mots clés** - Espaces de Berkovich, Cohomologie étale, ensembles semi-algébriques

## 1 Introduction

Soit  $k$  un corps non-archimédien complet algébriquement clos, et  $\mathcal{X}$  une variété algébrique sur  $k$ . Il est assez naturel de vouloir définir un objet géométrique,  $\mathcal{X}^{an}$ , qui serait la variété analytique sur  $k$  naturellement associée à  $\mathcal{X}$ . Les définitions naturelles qui viennent à l'esprit ne marchent pas, car  $k$ , muni de sa topologie naturelle est totalement discontinu. Dans les années 60, Tate a élaboré une théorie satisfaisante de la géométrie analytique sur  $k$ . Les espaces qu'il construit sont appelés espaces rigides, et sont construits en recollant des espaces affinoïdes, analogues non-archimédien des ouverts de  $\mathbb{C}^n$ . Cependant, une théorie cohomologique satisfaisante manquait, et quelques années plus tard, Berkovich, en s'inspirant des idées de Tate pour en proposer un nouveau point de vue, définissait une cohomologie étale des espaces  $k$ -analytiques vérifiant de nombreuses propriétés espérées : finitude dans des cas raisonnables, théorèmes de comparaison... Cette théorie a trouvé de nombreuses applications. En arithmétique d'abord en prenant  $k = \mathbb{Q}_p$ , mais en géométrie complexe également en utilisant  $k = \mathbb{C}((X))$ . Le présent travail répond par exemple à une question de François Loeser et a été utilisé dans un travail concernant l'étude des fibres de Milnor [HL11].

## 2 Ensembles semi-algébriques

Soit  $\mathcal{X} = \text{Spec}(A)$  une variété affine de type fini sur  $k$ . Un ensemble semi-algébrique de  $\mathcal{X}^{an}$  est une combinaison booléenne finie d'ensembles de la forme  $\{x \in \mathcal{X}^{an} \mid |f(x)| \diamond |g(x)|\}$  avec  $f, g \in A$  et  $\diamond \in \{\leq, <, =\}$ . On peut naturellement étendre cette définition à  $\mathcal{X}$  une  $k$ -variété

(pour nous un  $k$ -schéma de type fini sur  $k$  et séparé) en décrétant que  $S \subseteq \mathcal{X}^{an}$  est semi-algébrique s'il existe un recouvrement affine  $(U_i)$  de  $\mathcal{X}$  tel que pour tout  $i$ ,  $S \cap U_i^{an}$  est semi-algébrique dans  $U_i^{an}$ . On montre que dans le cas affine, les deux définitions coïncident. De plus, si  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  est un morphisme de  $k$ -variétés, et  $S$  un ensemble semi-algébrique de  $\mathcal{X}^{an}$ ,  $f^{an}(S)$  est semi-algébrique (dans le cas affine, le résultat [Duc03] est une conséquence de l'élimination des quantificateurs dans la théorie des corps valués algébriquement clos).

### 3 Cohomologie des semi-algébriques

D'après les théorèmes de [Ber93],

$$H_c^i(\mathcal{X}^{an}, \mathbb{Q}_l) = H_c^i(\mathcal{X}, \mathbb{Q}_l)$$

donc en particulier est de dimension finie. Mais, si  $\mathcal{X} = \text{Spec}(A)$  est affine et  $S = \{x \in \mathcal{X}^{an} \mid |f(x)| \leq |g(x)|\}$ ,  $S$  est l'exemple typique d'un semi-algébrique, mais ne peut pas s'identifier à  $\mathcal{S}^{an}$  pour  $\mathcal{S}$  une  $k$ -variété, et en fait n'est même pas a priori un espace  $k$ -analytique. Pour définir sa cohomologie, on peut cependant utiliser la théorie des  $k$ -germes ([Ber93]) qui permet de définir  $H_c^i(\mathcal{X}^{an}, S, \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})$  que l'on notera  $H_c^i(S, \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})$ . Notre résultat principal est alors

**Théorème 1** *Si  $l$  est premier à la caractéristique résiduelle de  $k$ , et  $S$  un semi-algébrique localement fermé de  $\mathcal{X}^{an}$ ,  $H_c^i((\mathcal{X}^{an}, S), \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})$  est un  $\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}$ -module de type fini.*

Pour prouver ce résultat, on se ramène dans un premier temps au cas où  $\mathcal{X}$  est propre. Dans ce cas, par un argument de compacité, on se ramène à montrer le résultat pour des *espaces affinoïdes algébrisables*, i.e. des espaces affinoïdes de  $\mathcal{X}^{an}$  définis par des fonctions algébriques de  $\mathcal{X}$ . Dans ce dernier cas, l'ingrédient principal est le suivant. Pour  $X = \mathcal{M}(\mathcal{A})$  un espace affinoïde algébrisable,  $f, g$  des fonctions algébriques de  $X$ , et  $S = \{x \in X \mid |f(x)| \leq |g(x)|\}$ , on considère  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$  l'éclatement de  $X$  le long de l'idéal  $(f, g)$ , de sorte que  $S' = \pi^{-1}(S)$  est maintenant naturellement muni d'une structure d'espace affinoïde. En particulier, on en déduit la finitude de  $H_c^i((\tilde{X}, S'), \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})$ . En travaillant un peu, on peut descendre ce résultat de finitude au germe  $(X, S)$ . Une récurrence sur le nombre d'inégalités utilisées pour définir  $S$  permet alors de conclure.

### 4 Extension aux ensembles semi-analytiques

On peut étendre ce qui précède au cas suivant. Si  $X = \mathcal{M}(\mathcal{A})$  est un espace affinoïde, on appelle ensemble semi-analytique de  $X$  une combinaison booléenne finie d'ensemble définis par des inégalités  $|f| \leq |g|$  avec  $f, g \in \mathcal{A}$ . Comme précédemment, on peut globaliser cette définition. Si  $X$  est un espace  $k$ -analytique Hausdorff,  $S \subseteq X$  est dit semi-analytique rigide s'il existe un recouvrement affinoïde  $(U_i)$  de  $X$  tel que  $U_i \cap S$  est semi-analytique dans  $U_i$  pour tout  $i$ . Contrairement au cas algébrique, ici si  $X$  est un espace affinoïde, les ensembles semi-analytiques rigides ne sont pas nécessairement semi-analytiques. Dans ce contexte, en adaptant la preuve du résultat précédent, on peut montrer :

**Théorème 2** *Si  $X$  est un espace  $k$ -analytique compact,  $S$  un semi-analytique rigide localement fermé de  $X$ ,  $k$  est algébriquement clos, de caractéristique nulle, et  $l$  premier à sa caractéristique résiduelle,  $H_c^i((X, S), \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})$  est fini.*

On montre également un analogue de ce résultat, en utilisant la théorie des espaces adiques [Hub96].

## Références

- [Ber90] V.G. Berkovich. *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*. Amer Mathematical Society, 1990.
- [Ber93] V.G. Berkovich. Etale cohomology for non-Archimedean analytic spaces. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 78(1) :5–161, 1993.
- [Duc03] Antoine Ducros. Parties semi-algébriques d'une variété algébrique  $p$ -adique. *Manuscripta Math.*, 111(4) :513–528, 2003.
- [HL11] E. Hrushovski and F. Loeser. Monodromy and the Lefschetz fixed point formula. *ArXiv e-prints*, November 2011.
- [Hub96] Roland Huber. *Étale cohomology of rigid analytic varieties and adic spaces*. Aspects of Mathematics, E30. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1996.

# INVARIANTS DE TYPE FINI DES SPHÈRES D'HOMOLOGIE RATIONNELLE DE DIMENSION 3

**Delphine Moussard**

Institut Fourier

100, rue des maths, BP 74, 38402 St Martin d'Hères cedex, France

**Delphine.Moussard@ujf-grenoble.fr**

**Résumé** - Dans l'étude d'objets géométriques comme les sphères d'homologie rationnelle, l'un des principaux objectifs est d'en donner une classification. On définit dans ce but des invariants des objets étudiés. L'idée d'une théorie d'invariants de type fini est de mettre de l'ordre dans l'ensemble de ces invariants. Dans ce texte, on explique d'abord de manière générale la notion d'invariants de type fini. On décrit ensuite une théorie d'invariants de type fini des sphères d'homologie rationnelle de dimension 3, et on énonce un résultat qui fournit une description des espaces d'invariants de type fini de ces sphères.

**Mots clés** - invariants de type fini, sphère d'homologie rationnelle, chirurgie LP

## 1 Notion d'invariants de type fini

Considérons un ensemble  $X$ . Dans la suite, cet ensemble sera  $\mathbb{Z}^d$ , l'ensemble  $\mathcal{K}$  des nœuds de  $\mathbb{R}^3$ , c'est-à-dire des classes d'isotopie de plongements d'un cercle orienté dans  $\mathbb{R}^3$ , ou l'ensemble  $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$  des sphères d'homologie rationnelle de dimension 3 (qui seront définies dans la deuxième section). Un *invariant rationnel* des éléments de  $X$  est une fonction de  $X$  dans  $\mathbb{Q}$ . Pour étudier une fonction, il est souvent pratique d'étudier ses dérivées, les dérivées de ses dérivées, et ainsi de suite. Si  $X = \mathbb{Z}^d$ , pour  $f : \mathbb{Z}^d = \bigoplus_{i=1}^d \mathbb{Z}e_i \rightarrow \mathbb{Q}$ , on peut définir des dérivées partielles de  $f$  par :

$$\frac{\partial f}{\partial e_i}(z) = f(z + e_i) - f(z).$$

La fonction  $f$  a toutes ses dérivées nulles si et seulement si elle est constante. Définissons par récurrence les dérivées  $n$ -ièmes de  $f$ . On peut alors vérifier que  $f$  a toutes ses dérivées  $(n+1)$ -ièmes nulles si et seulement si  $f$  est une fonction polynômiale de degré  $n$ .

De la même façon, pour étudier les invariants topologiques, on peut s'intéresser à leurs variations sous l'effet d'opérations élémentaires. Notons  $\mathcal{O}(X)$  un ensemble d'opérations élémentaires agissant sur certains éléments de  $X$ . Pour  $X = \mathbb{Z}^d$ ,  $\mathcal{O}(\mathbb{Z}^d)$  est l'ensemble des  $(z \mapsto z \pm e_i)$ . Pour  $X = \mathcal{K}$ ,  $\mathcal{O}(\mathcal{K})$  est l'ensemble des changements de croisements ( $\nearrow \leftrightarrow \nwarrow$ ). Pour  $X = \mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$ , on définira dans la suite comme opérations élémentaires des chirurgies spécifiques.

Si plusieurs opérations élémentaires commutent, on peut les effectuer de façon simultanée. C'est le cas ci-dessus pour  $X = \mathbb{Z}^d$ , c'est le cas pour des changements de croisements s'ils sont

effectués dans des boules disjointes, et ce sera le cas pour des chirurgies à support disjoint. On parle alors d'opérations élémentaires *indépendantes*. Soit  $\mathcal{F}_0(X)$  le  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel engendré par les éléments de  $X$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , si  $x \in X$  et si  $o_1, o_2, \dots, o_n$  sont des opérations élémentaires deux à deux indépendantes agissant sur  $x$ , on définit :

$$[x; o_1, o_2, \dots, o_n] = \sum_{I \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{|I|} x((o_i)_{i \in I}) \in \mathcal{F}_0(X),$$

où  $x((o_i)_{i \in I}) \in X$  est obtenu en appliquant à  $x$  les opérations  $o_i$  pour  $i \in I$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $\mathcal{F}_n(X)$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}_0(X)$  engendré par les  $[x; o_1, o_2, \dots, o_n]$  pour tout  $x \in X$  et tout  $n$ -uplet  $(o_1, o_2, \dots, o_n)$  d'opérations élémentaires deux à deux indépendantes agissant sur  $x$ . L'égalité

$$[x; o_1, o_2, \dots, o_n, o_{n+1}] = [x; o_1, o_2, \dots, o_n] - [x(o_{n+1}); o_1, o_2, \dots, o_n]$$

montre que  $\mathcal{F}_{n+1}(X) \subset \mathcal{F}_n(X)$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . On note  $\mathcal{G}_n(X) = \frac{\mathcal{F}_n(X)}{\mathcal{F}_{n+1}(X)}$ .

**Définition 1** Une fonction  $f : X \rightarrow \mathbb{Q}$  s'étend de manière unique en une application  $\mathbb{Q}$ -linéaire  $f : \mathcal{F}_0(X) \rightarrow \mathbb{Q}$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , l'invariant  $f$  est de degré au plus  $n$  si et seulement si  $f(\mathcal{F}_{n+1}(X)) = 0$ . L'invariant  $f$  est de type fini s'il est de degré au plus  $n$  pour un certain entier  $n$ . Le degré d'un tel invariant  $f$  est le plus petit entier  $n$  tel que  $f$  est de degré au plus  $n$ .

On note  $\mathcal{I}_n(X)$  le  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel des invariants de degré au plus  $n$ . On a  $\mathcal{I}_n(X) \subset \mathcal{I}_{n+1}(X)$  pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{I}_n(X)$  est canoniquement isomorphe à  $(\frac{\mathcal{F}_0(X)}{\mathcal{F}_{n+1}(X)})^* = \text{Hom}(\frac{\mathcal{F}_0(X)}{\mathcal{F}_{n+1}(X)}, \mathbb{Q})$ . On a la suite exacte suivante :

$$0 \rightarrow \mathcal{G}_n(X) \rightarrow \frac{\mathcal{F}_0(X)}{\mathcal{F}_{n+1}(X)} \rightarrow \frac{\mathcal{F}_0(X)}{\mathcal{F}_n(X)} \rightarrow 0.$$

Comme le foncteur  $\text{Hom}(\cdot, \mathbb{Q})$  est exact, la suite duale

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_{n-1}(X) \rightarrow \mathcal{I}_n(X) \rightarrow (\frac{\mathcal{F}_n(X)}{\mathcal{F}_{n+1}(X)})^* \rightarrow 0$$

est aussi exacte. Donc  $\frac{\mathcal{I}_n(X)}{\mathcal{I}_{n-1}(X)} \cong (\mathcal{G}_n(X))^*$ .

La première notion d'invariants de type fini a été introduite par Vassiliev. Il s'agit du cas  $X = \mathcal{K}$ . On parle alors d'*invariants de Vassiliev*. Vassiliev a défini une application surjective d'un espace gradué de diagrammes dans l'espace gradué  $\mathcal{G}(\mathcal{K}) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{G}_n(\mathcal{K})$ . Grâce à l'intégrale de Kontsevich  $Z^K = (Z_n^K)_{n \in \mathbb{N}}$ , Maxim Kontsevich et Dror Bar-Natan [1] ont montré que cette application est en fait un isomorphisme.

## 2 Le cas des sphères d'homologie rationnelle de dimension 3

Une variété topologique  $M$  de dimension 3 est une *sphère d'homologie rationnelle de dimension 3*, ou  *$\mathbb{Q}$ -sphère*, si elle est compacte, connexe, sans bord, et orientée, et si elle a la même homologie singulière à coefficients rationnels que la sphère standard  $S^3$ . On peut donner une

traduction géométrique de cette dernière condition technique. Soit  $\gamma \subset M$  une courbe fermée simple. Un *voisinage tubulaire* de  $\gamma$  est un tore plongé dans  $M$  dont l'âme est la courbe  $\gamma$ . Un *multiple* de  $\gamma$  est une courbe fermée simple tracée sur le bord d'un voisinage tubulaire  $T(\gamma)$  de  $\gamma$  qui n'est pas le bord d'un disque dans  $T(\gamma)$ . La variété  $M$  vérifie la condition ci-dessus sur son homologie si et seulement si toute courbe fermée simple dans  $M$  a un multiple  $\tilde{\gamma}$  qui est le bord d'une surface compacte orientée plongée dans  $M$ , appelée *surface de Seifert* de  $\tilde{\gamma}$ . On note  $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$  l'ensemble des  $\mathbb{Q}$ -sphères à homéomorphisme préservant l'orientation près.

On veut définir un ensemble d'opérations  $\mathcal{O}(\mathcal{M}_{\mathbb{Q}})$ . L'idée est de définir une notion de chirurgie, c'est-à-dire une manière de "découper un morceau" d'une  $\mathbb{Q}$ -sphère, et de recoller à la place un "morceau similaire", en respectant certaines conditions. On commence par définir les "morceaux" qui nous intéressent.

Un *corps en anses d'homologie rationnelle de genre  $g$* , ou  $\mathbb{Q}HH$ , est une variété topologique à bord de dimension 3, compacte, connexe, et orientée, qui a la même homologie singulière à coefficients rationnels que le corps en anses standard de genre  $g$  (à  $g$  "trous", voir Figure 1). Le bord d'un tel  $\mathbb{Q}HH$  est toujours une surface compacte de genre  $g$ . Dans une  $\mathbb{Q}$ -sphère  $M$ ,

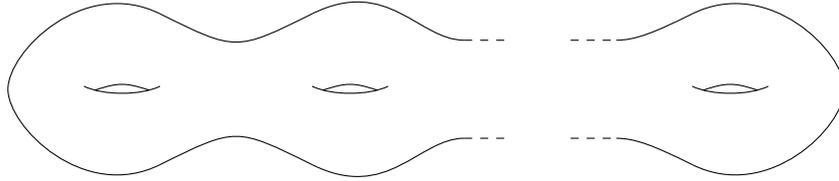


FIGURE 1 – Corps en anses

une sous-variété à bord  $A$  est un  $\mathbb{Q}HH$  de genre  $g$  si et seulement si  $A$  est l'adhérence d'une des deux composantes connexes de  $M \setminus \Sigma$  pour une surface compacte  $\Sigma$  de genre  $g$  plongée dans  $M$ .

Soit  $M$  une  $\mathbb{Q}$ -sphère. Soit  $A$  un  $\mathbb{Q}HH$  de genre  $g$  plongé dans  $M$ . Soit  $B$  un  $\mathbb{Q}HH$  de genre  $g$ . Soit  $h : \partial A \xrightarrow{\cong} \partial B$  un homéomorphisme préservant l'orientation, tel que l'image d'une courbe fermée simple dont un multiple admet une surface de Seifert dans  $A$  est une courbe fermée simple dont un multiple admet une surface de Seifert dans  $B$ . La variété obtenue à partir de  $M$  par la *chirurgie LP*  $(\frac{B}{A})$  est la variété  $M(\frac{B}{A}) = (M \setminus \text{Int}(A)) \cup_h B$ , réunion de  $M \setminus \text{Int}(A)$  et de  $B$  recollés le long de leurs bords à l'aide de l'homéomorphisme  $h$ . La condition sur  $h$  implique que  $M(\frac{B}{A})$  est encore une  $\mathbb{Q}$ -sphère.

On définit l'ensemble  $\mathcal{O}(\mathcal{M}_{\mathbb{Q}})$  comme l'ensemble des chirurgies LP sur les  $\mathbb{Q}$ -sphères. Les quotients  $\mathcal{G}_n(\mathcal{M}_{\mathbb{Q}})$  associés peuvent être identifiés à des espaces de diagrammes.

Un *diagramme de Jacobi* est un graphe trivalent dont les sommets sont orientés. Une *orientation d'un sommet* d'un tel diagramme est un ordre cyclique des trois demi-arêtes qui se rencontrent à ce sommet. Dans les figures, cette orientation est induite par l'ordre cyclique



. Un *diagramme augmenté* est l'union d'un diagramme de Jacobi et de sommets isolés pondérés par des entiers premiers. Le *degré* d'un diagramme augmenté est son nombre de sommets. On note  $\mathcal{A}_n^{aug}$  le  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel engendré par les diagrammes augmentés de degré  $n$ , quotienté par les relations AS et IHX (Figure 3).

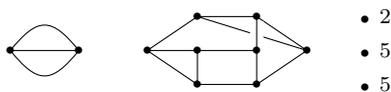


FIGURE 2 – Diagramme augmenté de degré 13

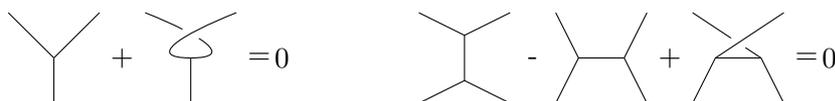


FIGURE 3 – Les relations AS et IHX

**Théorème 1 ([5] Theorem 1.7)** *Pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{A}_n^{aug} \cong \mathcal{G}_n(\mathcal{M}_{\mathbb{Q}})$ .*

L'idée de ces isomorphismes est d'associer à un plongement d'un diagramme augmenté de degré  $n$  dans une  $\mathbb{Q}$ -sphère  $M$  une famille de  $n$  chirurgies LP sur des QHH disjoints dans  $M$ , ce qui définit un crochet dans  $\mathcal{G}_n(\mathcal{M}_{\mathbb{Q}})$ . À un sommet isolé pondéré par un entier premier  $p$ , on associe une chirurgie qui remplace une boule standard  $B^3$  par une boule d'homologie rationnelle dont le premier groupe d'homologie a cardinal  $p$ . Aux composantes trivalentes, on associe des chirurgies borroméennes. Ces chirurgies ont été définies par Matveev [4], et utilisées par Goussarov [2] et Habiro [3] pour définir une notion d'invariants de type fini des variétés topologiques compactes connexes orientées sans bord de dimension 3.

## Références

- [1] D. Bar-Natan (1995), On the Vassiliev knot invariants, *Topology*, **vol. 34 (2)** p. 423-472.
- [2] S. Garoufalidis, M. Goussarov, M. Polyak (2001), Calculus of clovers and finite type invariants of 3-manifolds, *Geometry & Topology*, **vol. 5** p. 75-108.
- [3] K. Habiro (2000), Claspers and finite type invariants of links, *Geometry & Topology* **vol. 4** p. 1-83.
- [4] S. V. Matveev (1987), Generalized surgeries of three-dimensional manifolds and representations of homology spheres, *Mat. Zametki*, **vol. 42 (2)** p. 268-278, 345.
- [5] D. Moussard (2012), Finite type invariants of rational homology 3-spheres, *arXiv : 1203.1603v1*, to appear in *Algebraic & Geometric Topology*.

# APPROCHE FORMELLE À LA MANIÈRE DE NEUKIRCH DE LA THÉORIE $\ell$ -ADIQUE DU CORPS DES CLASSES

**Reglade Stéphanie**

Doctorante à l'IMB

17 Rue Arnaud Miqueu, 33000 Bordeaux, France

**Stephanie.Reglade@math.u-bordeaux1.fr**

7 septembre 2012

**Résumé :** *La théorie  $\ell$ -adique du corps des classes a été développée par J.-F JAULENT dans [1]. La théorie abstraite de Neukirch permet de démontrer l'existence de l'isomorphisme de réciprocité à partir d'un homomorphisme appelé degré, d'un  $G$ -module, d'une valuation dite hensélienne par rapport au degré et de l'axiome du corps des classes. Le but est ici de démontrer l'existence de l'isomorphisme de réciprocité de la théorie  $\ell$ -adique dans le cas local et dans le cas global en utilisant la théorie abstraite de Neukirch.*

**Mots clefs :** théorie du corps des classes

## 1 Rappel sur les théories du corps des classes

### 1.1 Les résultats de la théorie $\ell$ -adique

Les résultats fondamentaux de la théorie  $\ell$ -adique du corps des classes local et global sont les suivants :

Pour la théorie locale :

**Théorème 1.1.1 (Ja1)** *Etant donné un corps local  $K_{\mathfrak{p}}$ , l'application de réciprocité induit un isomorphisme de  $\mathbb{Z}_{\ell}$ -modules topologiques de  $\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}} = \varprojlim_k K_{\mathfrak{p}}^{\times} / K_{\mathfrak{p}}^{\ell^k}$  sur le groupe de Galois  $\mathcal{D}_{\mathfrak{p}} = \text{Gal}(K_{\mathfrak{p}}^{\text{ab}} / K_{\mathfrak{p}})$  de la pro- $\ell$ -extension abélienne maximale du corps  $K_{\mathfrak{p}}$ .*

*Et dans cet isomorphisme l'image du sous groupe d'inertie  $\mathcal{I}_{\mathfrak{p}}$  est l'image du sous groupe des unités  $\mathcal{U}_{K_{\mathfrak{p}}}$  de  $\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}}$ .*

*L'application de réciprocité locale établit alors une correspondance bijective entre les sous-modules fermés de  $\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}}$  et les pro- $\ell$ -extensions abéliennes de  $K_{\mathfrak{p}}$  : dans cette correspondance les  $\ell$ -extensions abéliennes finies de  $K_{\mathfrak{p}}$  sont associés aux sous-modules fermés d'indice fini de  $\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}}$  ; c'est à dire aux sous-modules ouverts de  $\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}}$ .*

Pour la théorie globale :

Dans ce cas l'objet étudié est le  **$\ell$ -groupe des idèles**, défini par :

$$\mathcal{J}_K = \prod_{\mathfrak{p} \in Pl_K}^{res} (\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}})$$

Il s'agit donc du produit restreint des  $\ell$ -adifiés des groupes multiplicatifs des complétés, et le groupe s'écrit comme la réunion :

$$\mathcal{J}_K = \bigcup_S \mathcal{J}_K^S$$

avec

$$\mathcal{J}_K^S = \prod_{\mathfrak{p} \in S} (\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}}) \prod_{\mathfrak{p} \notin S} (\mathcal{U}_{K_{\mathfrak{p}}})$$

où S parcourt les ensembles finis de places de K.

Chacun des  $\mathcal{J}_K^S$  est compact pour sa topologie naturelle  $\mathbb{Z}_{\ell}$ -module produit. Et  $\mathcal{J}_K$  est lui même un  $\mathbb{Z}_{\ell}$ -module topologique pour la limite inductive des topologies de  $\mathcal{J}_K^S$  (ce n'est pas la topologie classique sur les idèles).

Le  **$\ell$ -groupe des idèles principaux** est quant à lui défini par :

$$\mathcal{R}_K = (\mathbb{Z}_{\ell} \otimes_{\mathbb{Z}} K^{\times}) ,$$

Il s'identifie canoniquement à un sous-groupe fermé de  $\mathcal{J}_K$ .

Le  **$\ell$ -groupe des classes d'idèles** est défini enfin comme le quotient :

$$\mathcal{C}_K = \mathcal{J}_K / \mathcal{R}_K ,$$

Il s'agit d'un groupe topologique compact.

**Théorème 1.1.2 (Ja1)** *Etant donné un corps de nombres K, l'application de réciprocité induit un isomorphisme continu du  $\ell$ -groupe des idèles  $\mathcal{J}_K$  de K sur le groupe de Galois  $G_K^{ab} = Gal(K^{ab}/K)$  de la pro- $\ell$ -extension abélienne maximale du corps K. Le noyau de ce morphisme est le sous groupe  $\mathcal{R}_K$  formé des idèles principaux.*

*Dans la correspondance obtenue, le sous groupe de décomposition  $\mathcal{D}_{\mathfrak{p}}$  d'une place  $\mathfrak{p}$  de K est l'image dans  $G_K^{ab}$  du sous groupe  $\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}}$  de  $\mathcal{J}_K$ ; et son sous groupe d'inertie  $\mathcal{I}_{\mathfrak{p}}$  est celle du sous groupe des unités  $\mathcal{U}_{K_{\mathfrak{p}}}$  de  $\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}}$ .*

*L'application de réciprocité globale établit alors une correspondance bijective entre les sous-modules fermés de  $\mathcal{J}_K$  qui contiennent  $\mathcal{R}_K$  et les pro- $\ell$ -extensions abéliennes de K. Chaque sous-extension de  $K^{ab}$  étant le corps des points fixes d'un unique sous module fermé de  $\mathcal{J}_K$  contenant  $\mathcal{R}_K$ .*

*Dans la correspondance bijective obtenue les  $\ell$ -extensions abéliennes finies de K sont associées aux sous modules fermés d'indice fini de  $\mathcal{J}_K$  contenant  $\mathcal{R}_K$ , c'est-à-dire aux sous modules ouverts de  $\mathcal{J}_K$  contenant  $\mathcal{R}_K$ .*

## 1.2 La théorie abstraite de Neurkirch

La théorie de Neurkirch, détaillée dans *Class Field Theory* (1987), nécessite trois points. Elle se place dans le contexte général suivant :  $G$  désigne un groupe profini, dont on dénote les sous groupes fermés par  $G_K$ , les indices  $K$  étant dits "corps". On note  $k$  le corps tel que :  $G = G_k$ , et  $\bar{k}$  le corps tel que l'on ait  $G_{\bar{k}} = 1$ .

1) Le premier point de la théorie est **un homomorphisme appelé degré** :

Le degré est un homomorphisme surjectif et continu :  $deg : G \longrightarrow \widehat{\mathbb{Z}}$ , le noyau de ce morphisme de groupe est un sous groupe de  $G$  dénoté par  $G_{\bar{k}} = I$  de telle sorte que  $G/G_{\bar{k}} \simeq \widehat{\mathbb{Z}}$ .

2) Le deuxième point de la théorie nécessite **un  $G$ -module et une valuation dite hensélienne par rapport au degré** :

Pour Neurkirch  $A$  est un  $G$  module multiplicatif signifie (Algebraic Number Theory p.276) :  $A$  est un groupe abélien multiplicatif sur lequel les éléments de  $G$  opèrent en tant qu'automorphismes à droite. On note alors  $A_K$  les éléments du  $G$ -module  $A$  fixés par l'action du sous groupe  $G_K$  de  $G$ . Pour Neurkirch (Algebraic Number Theory p.288), une valuation hensélienne de  $A_k$  par rapport au degré  $deg : G \rightarrow \widehat{\mathbb{Z}}$  est un homomorphisme vérifiant les propriétés suivantes :

(i)  $v(A_k) = Z$  tel que  $\mathbb{Z} \subset Z$  et  $Z/n.Z \simeq \mathbb{Z}/n.\mathbb{Z}$  pour tout  $n$

(ii)  $v(N_{K/k}A_K) = f_K.Z$  pour toute extension finie  $K$  de  $k$ . La norme désigne ici l'application du  $G$ -module  $A_K$  dans  $A_k$  définie par :

$$N_{K/k}(a) = \prod_{\sigma} a^{\sigma}$$

où  $\sigma$  parcourt un système représentatif de  $G_K/G_L$

3)Le troisième point de la théorie est **l'axiome du corps des classes** :

**Axiome 1** Pour toute extension cyclique  $L/K$ , on a :

$$|H^i(G(L/K), A_L)| = \begin{cases} [L : K] & \text{pour } i = 0 \\ 1 & \text{pour } i = -1 \end{cases}$$

Dans ce contexte Neurkirch a démontré le théorème fondamental suivant :

**Théorème 1.2.1** Pour toute extension galoisienne finie  $L/K$  l'homomorphisme de réciprocité  $r_{L/K} : G(L/K)^{ab} \rightarrow A_K/N_{L/K}(A_L)$  est un isomorphisme.

## 2 $\ell$ -adification de l'approche de Neukirch

### 2.1 La cohomologie

À cause de la construction des objets de la théorie  $\ell$ -adique la cohomologie envisagée est à valeurs dans  $\mathbb{Z}_\ell$  et non plus dans  $\mathbb{Z}$ . Le point de départ est une  $\mathbb{Z}[G]$ -résolution projective avec  $G$  un  $\ell$ -groupe :

$$F_n \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

En appliquant le foncteur  $Hom_G(., \mathbb{Z}_\ell \otimes A)$  on obtient :

$$0 \longrightarrow Hom_G(\mathbb{Z}_\ell, \mathbb{Z}_\ell \otimes A) \longrightarrow Hom_G(\mathbb{Z}_\ell \otimes F_0, \mathbb{Z}_\ell \otimes A) \longrightarrow Hom_G(\mathbb{Z}_\ell \otimes F_1, \mathbb{Z}_\ell \otimes A) \longrightarrow \dots \longrightarrow Hom_G(\mathbb{Z}_\ell \otimes F_{n-1}, \mathbb{Z}_\ell \otimes A) \xrightarrow{\delta'_{n-1}} Hom_G(\mathbb{Z}_\ell \otimes F_n, \mathbb{Z}_\ell \otimes A) \xrightarrow{\delta'_n} \dots$$

On notera  $H_\ell^n(G, \mathbb{Z}_\ell \otimes A) = Ker \delta'_n / Im \delta'_{n-1}$ .

**Théorème 2.1.1**  $G$  étant un  $\ell$ -groupe, et  $A$  un  $G$ -module alors :

$$H_\ell^i(G, \mathbb{Z}_\ell \otimes A) = \mathbb{Z}_\ell \otimes H^i(G, A)$$

### 2.2 La théorie locale $\ell$ -adique formalisée à la Neukirch

#### Définition-Proposition

L'application degré est définie par :

$$\begin{aligned} deg & : G \rightarrow \mathbb{Z}_\ell \\ \phi & \mapsto \phi|_{K_{\mathfrak{p}}^{nr}} \end{aligned}$$

où  $G$  désigne le groupe de Galois de  $\widehat{K}_{\mathfrak{p}}/K_{\mathfrak{p}}$  avec  $\widehat{K}_{\mathfrak{p}}$  est la pro- $\ell$ -extension maximale de  $K_{\mathfrak{p}}$  et  $K_{\mathfrak{p}}^{nr}$  est la pro- $\ell$ -extension maximale non ramifiée. Il s'agit alors bien d'un homomorphisme surjectif.

**Proposition 2.2.1** Pour une extension finie  $L_{\mathfrak{p}}$  du corps local  $K_{\mathfrak{p}}$

$$A_{L_{\mathfrak{p}}} = \mathcal{R}_{L_{\mathfrak{p}}} = \varprojlim_k L_{\mathfrak{p}}^{\times} / L_{\mathfrak{p}}^{\times \ell^k}$$

est le  $Gal(L_{\mathfrak{p}}/K_{\mathfrak{p}})$ -module considéré. Et étant donné l'expression explicite de  $\mathcal{R}_{L_{\mathfrak{p}}}$  :

$$\mathcal{R}_{L_{\mathfrak{p}}} \simeq U_{\mathfrak{p}}^1 \cdot \pi_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{Z}_\ell} \text{ si } \mathfrak{p} | \ell$$

$$\mathcal{R}_{L_{\mathfrak{p}}} \simeq \mu_{\mathfrak{p}} \cdot \pi_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{Z}_\ell} \text{ si } \mathfrak{p} \nmid \ell$$

la valuation  $v_L$  indique la puissance en  $\mathbb{Z}_\ell$  de l'image de l'uniformisante.

Cette valuation est hensélienne par rapport au degré selon la définition rapportée plus haut.

**Théorème 2.2.1 (L'axiome du corps des classes local)** *Pour toute  $\ell$ -extension cyclique  $L_{\mathfrak{P}}$  d'un corps local  $K_{\mathfrak{p}}$*

$$|H_\ell^i(G(L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}), \mathcal{R}_{L_{\mathfrak{P}}})| = \begin{cases} [L_{\mathfrak{P}} : K_{\mathfrak{p}}] & \text{pour } i = 0 \\ 1 & \text{pour } i = 1 \end{cases}$$

### 2.3 La théorie globale $\ell$ -adique formalisée à la Neurkirch

**Théorème 2.3.1 (L'axiome global du corps des classes)** *Si  $L/K$  est une  $\ell$ -extension cyclique d'un corps de nombres alors :*

$$|H_\ell^i(G(L/K), \mathcal{C}_L)| = \begin{cases} [L : K] & \text{pour } i = 0 \\ 1 & \text{pour } i = 1 \end{cases}$$

**Définition-Proposition :**

On fixe un isomorphisme tel que :

$$\text{Gal}(\tilde{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}_\ell$$

et ainsi on obtient un homomorphisme continu et surjectif :

$$d : G_{\mathbb{Q}} = \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell$$

**Proposition 2.3.1** *Pour une extension finie  $L$  du corps de nombres  $K$ , le groupe des classes d'idèles  $\mathcal{C}_L$  est le  $\text{Gal}(L/K)$ -module considéré.*

**Définitions :**

Pour une  $\ell$ -extension abélienne arbitraire finie, on définit l'homomorphisme suivant :

$$[\cdot, L/K] : \mathcal{J}_K \longrightarrow G(L/K) \text{ par } [\alpha, L/K] = \prod_{\mathfrak{p}} (\alpha_{\mathfrak{p}}, L_{\mathfrak{p}}/K_{\mathfrak{p}}) \text{ pour } \alpha \in \mathcal{J}_K$$

où  $L_{\mathfrak{p}}$  désigne la complétion de  $K_{\mathfrak{p}}$  par rapport à une place  $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$  et  $(\alpha_{\mathfrak{p}}, L_{\mathfrak{p}}/K_{\mathfrak{p}})$  désigne le symbole local.

Pour une  $\ell$ -extension abélienne infinie  $L/K$  on définit l'homomorphisme

$$[\cdot, L/K] : \mathcal{J}_K \longrightarrow G(L/K) \text{ par restriction : } [\cdot, L/K]_{/L'} = [\cdot, L'/K] \text{ où } L' \text{ parcourt les sous-extensions finies de } L/K.$$

Comme pour tout  $a \in \mathcal{R}_K$  on a  $[a, \tilde{K}/K] = 1$  l'application suivante est correctement définie :

$$\mathcal{C}_K \xrightarrow{[\cdot, \tilde{K}/K]} G(\tilde{K}/K) \xrightarrow{d_K} \mathbb{Z}_\ell \text{ où } \tilde{K} = K\tilde{\mathbb{Q}}, d_K = \frac{1}{[K\tilde{\mathbb{Q}}:\mathbb{Q}]} \cdot d : G_K \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell.$$

Cet homomorphisme définit la valuation  $v_K : \mathcal{C}_K \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell$ .

**Proposition 2.3.2** *Cette application ainsi définie  $v_K : \mathcal{C}_K \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell$  est surjective et il s'agit d'une valuation hensélienne par rapport au degré.*

### 3 Conclusion

La théorie abstraite de Neukirch se transpose ainsi *mutatis mutandis* dans le cadre  $\ell$ -adique considéré par Jaulent et permet de déduire l'existence de l'isomorphisme de réciprocité des trois axiomes repérés plus haut. Cela ouvre d'autant plus de perspectives que, dans ce contexte, d'autres valuations henséliennes apparaissent naturellement ; ainsi les valuations logarithmiques introduites dans [Ja2].

### Références

- [Ja1] J.-F. JAULENT, *Théorie  $\ell$ -adique du corps des classes*, J. Théor. Nombres Bordeaux, **10**, fasc.2 (1998), 355–397.
- [Ja2] J.-F. JAULENT, *Classes logarithmiques des corps de nombres*, J. Théor. Nombres Bordeaux, **6** (1985), 301–325. 355–397.
- [Ne] J. NEUKIRCH, *Class Field Theory*, Springer-Verlag, GTM 280, 1986
- [Ne] J. NEUKIRCH, *Algebraic Number Theory*, Springer-Verlag, GTM 322, 1986

## ALGEBRAS FOR $\mathfrak{sl}_3$ -HOMOLOGY

**Louis-Hadrien Robert**

IMJ

175, rue du chevaleret

75015 Paris

France

**lrobert@math.jussieu.fr**

**Résumé** - *The  $\mathfrak{sl}_3$ -homology is a link invariant which categorify a variant of the Jones polynomial called the  $\mathfrak{sl}_3$ -polynomial. We introduce some algebras  $K^\varepsilon$  which allow to extend this invariant to tangles in a functorial way.*

**Mots clés** - **Knot theory, TQFT, 2-category, Foams.**

### 1 Introduction

In 1996, Greg Kuperberg ([Kup96]), following Reshetikhin-Turaev's point of view, gave a diagrammatic presentation of a basis of invariant spaces of tensor products of the canonical representation (and its dual) of the quantum group  $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ . This basis is given by non-elliptic webs i. e. oriented 3-valent plane graphs with certain geometric conditions. Along the way he showed that the webs thought of in terms of  $U_q(\mathfrak{sl}_3)$  representation theory satisfy some relations and this leads to the definition of a Laurent polynomial associated with closed webs, the Kuperberg bracket. In 1999, Khovanov ([Kho04]) gave a categorification of this Laurent polynomial in a TQFT fashion : with a web he associates a graded  $\mathbb{Z}$ -module with graded dimension given by the Kuperberg bracket and with a foam, which is a natural cobordism in this context, he associates a graded linear map, with a geometrically understandable degree. This approach allows Khovanov and Kuperberg to show that the web bases are not dual canonical. The aim of this talk is to extend this 1+1 TQFT to a 0+1+1 TQFT. For this purpose we mimic the strategy of [Kho02] and construct an algebra associated with 0 dimensional objects. The results stated here are fully detailed in [Rob12].

### 2 The category Foam and Khovanov's TQFT

**Definition 2.1.** A *web* is a plane cubic oriented graph with possibly some vertex-less loops, such that every vertex is either a source or a sink for the orientation (this implies that the graph is bipartite).

**Definition 2.2.** The *Kuperberg bracket* of a web  $w$  is a symmetric Laurent polynomial in  $q$ .

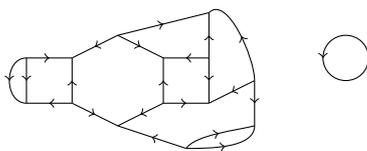


Figure 1: Example of a web.

It is denoted by  $\langle w \rangle$  and it satisfies the following relations :

$$\begin{aligned} \langle \text{square with arrows} \rangle &= \langle \text{two arcs} \rangle + \langle \text{two arcs} \rangle, \\ \langle \text{diamond with arrows} \rangle &= [2] \cdot \langle \text{two arcs} \rangle, \\ \langle \text{circle with arrow} \rangle &= \langle \text{circle with arrow} \rangle = [3], \end{aligned}$$

where  $[2] = q^{-1} + q$  and  $[3] = q^{-2} + 1 + q^2$ .

**Remark 2.3.** • The formulae are enough to compute the Kuperberg bracket of a web since any web contains a circle, a digon or a square (this comes from the Euler characteristic of a plane graph).

- One should check that this formulae are coherent, but this is an easy task, and anyway, the Kuperberg bracket has a representation theoretic meaning and this ensure that the Kuperberg bracket exists.
- The evaluation of the Kuperberg bracket in 1 gives the number of 3-colorings of the edges.

The webs will be the objects of a category, one should define now what are the cobordisms (i. e. the morphisms) between two webs.

**Definition 2.4.** A *foam* is an embedded (in  $\mathbb{R}^3$ ) CW-complex with two local models, either a plane or a Y-shape times an interval (see figure 2), with orientation conditions and possibly some dots on it. One can think it as well as a collection of surfaces glued 3 by 3 together along some circles. A *foam with boundaries* or a  $(w_0, w_1)$ -foam is a nice intersection of a foam  $f$  with  $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$  such that  $f \cap \mathbb{R}^2 \times \{0\} = -w_0$  and  $f \cap \mathbb{R}^2 \times 1 = w_1$ . The minus sign means that all the orientations are reversed.

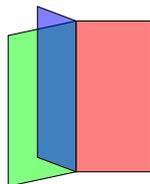


Figure 2: Singularity of a foam

**Definition 2.5.** The category **Foam** has webs as objects and foams with boundaries as morphisms, the composition is given by stacking foams with boundary and resizing. There is a tensor product given by disjoint union.

**Theorem 2.6** (Khovanov, 2004). *One can construct  $\mathcal{F}$ , a graded TQFT from **Foam** to the category of graded  $\mathbb{Q}$ -vector spaces such that the Kuperberg bracket gives the graded dimension. The relations satisfied by the Kuperberg bracket are translated into isomorphisms which are understood in the category **Foam**. Moreover, this TQFT comes from a universal construction à la BHMV meaning in particular that every element of  $\mathcal{F}(w)$  is a sum of images of  $(\emptyset, w)$ -foam, and every morphism between  $\mathcal{F}(w_1)$  and  $\mathcal{F}(w_2)$  is a sum of images of  $(w_1, w_2)$ -foams.*

This TQFT allows Khovanov to define the  $\mathfrak{sl}_3$ -homology which is an analogue of the Khovnaov homology which categorifies the  $\mathfrak{sl}_3$ -polynomial instead of the Jones polynomial.

### 3 The $K^\varepsilon$ algebras

In knot theory, it is relevant to study tangles instead of knots or links. If one wants to adapt the  $\mathfrak{sl}_3$ -homology to tangle, it is natural to try to construct a TQFT with corners for an extended version of the category **Foam**. This extended version is actually a 2-category, the essentially new things in this category are finite sequences of signs.

**Definition 3.1.** A finite sequence of signs is *admissible* if its sum is equal to 0 modulo 3.

**Definition 3.2.** An  $(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ -webtangle is the intersection of a web  $w$  with  $\mathbb{R} \times [0, 1]$  such that  $w \cap \mathbb{R} \times \{0\} = -\varepsilon_0$  and  $w \cap \mathbb{R} \times \{1\} = \varepsilon_1$ . A  $(\emptyset, \varepsilon)$ -webtangle is called an  $\varepsilon$ -web. The symmetric of a webtangle with respect to  $\mathbb{R} \times \{\frac{1}{2}\}$  with all orientations reversed is denoted by  $\overline{w}$

Given two webtangles  $w_1$  and  $w_2$  one can define a notion of  $(w_1, w_2)$ -foam with corner, which is an analogue of foam in this context.

**Definition 3.3.** The 2-category **2Foam** is defined by the following data :

- the 0-object are admissible sequence of signs,
- the 1-morphism between  $\varepsilon_1$  and  $\varepsilon_2$  are  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ -webtangles,
- the 2-morphism between  $w_1$  and  $w_2$  are  $(w_1, w_2)$ -foams with corner.

A TQFT with corners would assign to 0-objects, finite dimensional algebras, to 1-morphisms, bi-modules, and to 2-morphism, bimodules maps. We will describe the algebra  $K^\varepsilon$  associated with the admissible sequence of signs  $\varepsilon$

**Definition 3.4.** A webtangle is *non-elliptic* if it contains no circle, no digon and no square.

**Definition 3.5.** If  $\varepsilon$  is a sequence of signs, we define  $K^\varepsilon$  to be the graded  $\mathbb{Q}$ -algebra with the following underlying vector space :

$$K^\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{(w_1, w_2)} {}_{w_1}(K^\varepsilon)_{w_2} \quad \text{where} \quad {}_{w_1}(K^\varepsilon)_{w_2} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}(\overline{w_2}w_1),$$

where  $w_1$  and  $w_2$  run over all non-elliptic webs. The multiplication is defined as follows : the product of one element of  ${}_{w_1}(K^\varepsilon)_{w_2}$  with  ${}_{w_2}(K^\varepsilon)_{w_4}$  is 0 if  $w_2$  and  $w_3$  don't match, and else the target space is  ${}_{w_1}(K^\varepsilon)_{w_4}$  and in this case the multiplication is given by the figure 3.

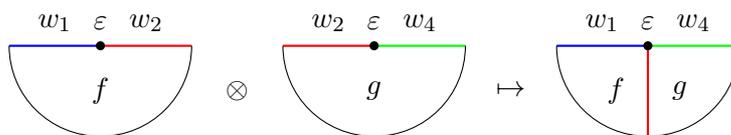


Figure 3: The multiplication map :  ${}_{w_1}(K^\varepsilon)_{w_2} \otimes {}_{w_2}(K^\varepsilon)_{w_4} \rightarrow {}_{w_1}(K^\varepsilon)_{w_4}$ .

The rest of the construction of the TQFT with corners is very similar, and one can check that it is a 2-functor. The functoriality is essential in the construction of a  $\mathfrak{sl}_3$  invariant for tangles because it is the reason why we have a gluing formula. This is a motivation for studying the algebras  $K^\varepsilon$ .

To study the category  $K^\varepsilon - \text{proj}$  of finite dimensional projective modules over  $K^\varepsilon$  we can use the Kuperberg bracket as it encodes the graded dimensions of the hom-spaces of some modules defined by webs. A combinatorial analysis of the Kuperberg bracket allows us to find a large family of projective indecomposable modules.

## Rferences

- [Kho02] Mikhail Khovanov. A functor-valued invariant of tangles. *Algebr. Geom. Topol.*, 2:665–741 (electronic), 2002.
- [Kho04] Mikhail Khovanov.  $\mathfrak{sl}(3)$  link homology. *Algebr. Geom. Topol.*, 4:1045–1081, 2004.
- [Kup96] Greg Kuperberg. Spiders for rank 2 Lie algebras. *Comm. Math. Phys.*, 180(1):109–151, 1996.
- [Rob12] Louis-Hadrien Robert. A large family of indecomposable projective modules for the khovanov-kuperberg algebra of  $\mathfrak{sl}_3$ -webs. *pre-print*, 2012. arXiv:1207.6287v2.

# INTERSECTION MULTIPLICITY GROWTH IN LOCAL DYNAMICAL SYSTEMS

**Anna Leah Seigal**  
Cambridge University  
Cambridge, UK  
[als81@cam.ac.uk](mailto:als81@cam.ac.uk)

**Résumé** - *We wish to examine the long-term behaviour of the multiplicity of intersection of two submanifolds in a holomorphic dynamical system*

**Mots clés** - **Multiplicity of intersection, Quasipolynomial**

## 1 Dynamics of intersection

Consider two subvarieties  $X, Y \subseteq M$ . We apply a map  $F$  to our variety  $X$ , keeping  $Y$  fixed, and count the number of intersections (counted with multiplicity) between  $F^n(X)$  and  $Y$ . Let  $F$  be a smooth self-map of a manifold  $M$ ; it may be that this number of intersections grows exponentially in  $n$ . See example, below.

### 1.1 Example

If we take the map  $F(x, y) = (x, y^2)$ , with  $X = \{x = y\}$ , and  $Y = \{y = 0\}$ , then we obtain  $F^n X = \{y = x^{2^n}\}$  which intersects with  $Y$   $2^n$  times.

## 2 Dynamics of local intersections

If  $F$  is the germ of a map at a fixed point then, rather than isolated intersection points, we consider the multiplicity of intersection at the fixed point. This is the 'order of tangency' between  $F^n(X)$  and  $Y$ , but can also be defined for non-smooth subvarieties using a local parametrisation at the fixed point. We define

$$\mu(n) := \text{multiplicity of intersection of } F^n(X) \text{ and } Y \text{ at the fixed point}$$

**Théorème 1 (Arnold)** *If  $F$  is invertible and  $\mu(n) < \infty \forall n$ , then  $\mu(n)$  is uniformly bounded with respect to  $n$ .*

The proof is based on the Skolem theorem from the Number theory which describes the integer roots of exponential sums  $\sum c_i e^{\lambda_i t}$

## 2.1 Questions

1. What about if our map  $F$  gave us non-isolated intersections ( $\mu(n) := \infty$ ) for some values of  $n$ ? Would Arnold's Theorem break down altogether in this case, or would we be able to consider boundedness over  $\{n : \mu(n) < \infty\}$ ?
2. Why does Arnold's proof involve Skolem theorem from number theory?
3. What if, for suitable  $F$ , instead of  $\{F^n : n \in \mathbb{Z}\}$ , we consider a real one-parameter semigroup of germs  $\{F^t : t \in \mathbb{R}\}$ ? Can we still show the bound to be locally uniform? Skolem Theorem only gives us information over the integers, not the reals?
4. Can we generalise to a situation in which  $F$ ,  $X$  and  $Y$  depend analytically on some parameters?
5. What happens if we consider the action of finitely generated multi-parametric subgroups  $G \in \text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$  (not just one-parameter subgroups)?

**Théorème 2 (Main Result)** *Assume a subgroup  $G \subseteq \text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$  is Abelian finitely generated (isomorphic to  $\mathbb{C}^p + \mathbb{Z}^q$ ). Consider the function*

$$\mu = \mu_{X,Y} : G \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}, \quad \mu(g) = \text{multiplicity of } g^{-1}(X) \cap Y$$

*Then there exists a finite constant  $C \in \mathbb{R}$  depending on the group  $G$  and the two varieties  $X, Y$ , such that  $\forall g \in G \quad \mu(g) < +\infty \Rightarrow \mu(g) \leq C$ .*

### Sketch of proof :

- The condition  $\mu(g) \geq m$  is the zero-set of a finite set of polynomials in the Taylor coefficients of the submanifold  $g^{-1}(X)$
- The polynomials defining these conditions generate an ideal  $\mathcal{J}_m$
- The ideals  $\mathcal{J}_1 \subsetneq \mathcal{J}_2 \subsetneq \dots \subsetneq \mathcal{J}_m \subsetneq \dots$  form an infinite ascending chain in the space of the ring of polynomials in infinitely many variables
- Consider the ring of quasipolynomials whose spectrum is the lattice generated by the eigenvalues of the linear parts of the maps in  $G$ . We show this ring to be Noetherian.
- Each ideal  $\mathcal{J}_m$  corresponds to an ideal  $I_m$  in this ring
- Noetherianity means the chain  $I_1 \subset I_2 \subset \dots \subset I_m \subset \dots$  stabilises, i.e.  $\exists m : I_m = I_{m+1} = \dots$
- Then  $\mu(g) \geq m \Rightarrow \mu(t) = +\infty$  and we have, therefore, bounded  $\mu$  over  $\{g : \mu(g) < +\infty\}$

If, in addition, the subgroup,  $G$ , depends analytically on an additional finite-dimensional parameter  $\epsilon$  in such a way that the linear parts of the generators remain constant, then the above finite bound is locally uniform over the parameters.

The generalization for non-Abelian subgroups may fail even for  $n = 1$ .

## Références

- [1] V. I. Arnold (1993), Bounds for Milnor numbers of intersections in holomorphic dynamical systems, *Topological methods in modern mathematics*, p. 379-390.
- [2] This research was done with my advisor, Sergei Yakovenko, over the course of the 2 month Kupcinec Getz summer school at the Weizmann Institute, Israel.

# BIRATIONAL GEOMETRY OF VARIETIES OF MAXIMAL ALBANESE DIMENSION VIA INTEGRAL TRANSFORMS

**Sofia Tirabassi**

Faculty of Mathematics Informatics and Mechanics, University of Warsaw  
Al. Banacha 2, Warsaw, Poland  
[tirabassi@mimuw.edu.pl](mailto:tirabassi@mimuw.edu.pl)

**Abstract** - *We prove that the varieties with  $\chi = 1$ , of maximal Albanese dimension and whose Albanese image is not fibered in subtori have a birational Albanese map. We use this fact to give a new characterization of theta divisors in principally polarized abelian varieties and provide results on the birational classification of 3-folds with irregularity 5.*

**Keywords** - *M-regularity, Integral transforms, Maximal Albanese Dimension*

## The Problem:

It is well known that the holomorphic Euler characteristic of varieties of maximal Albanese dimension is non-negative. Ein–Lazarsfeld ([2]) proved that if the Euler characteristic of  $X$ ,  $\chi(X)$ , is zero, then the Albanese image of  $X$  is fibered in tori. Augmenting the Euler characteristic by one, we find the first examples of varieties of maximal Albanese dimension whose Albanese image is not fibered by translates of abelian subvarieties of  $\text{Alb}(X)$ : smooth models of (irreducible) theta divisor in principally polarized abelian varieties. An interesting line of research started by Ein–Lazarsfeld ([2]) and later pursuit by Hacon ([3]), Hacon–Pardini ([4]), Lazarsfeld–Popa ([7]), and Barja–Lahoz–Naranjo–Pareschi ([1]), consists in characterizing smooth models of theta divisors by their birational invariants. The next step along the road of better comprehension of varieties of maximal Albanese dimension and Euler characteristic one would be to provide a similar description for *products* of irreducible theta divisors. In this setting Pareschi conjectured the following

**Conjecture 1 (Pareschi)** *A complex smooth projective variety  $X$  of maximal Albanese dimension such that  $\chi(X, \omega_X) = 1$  and its Albanese image is not fibered in tori is birational to a product of theta divisors.*

The above statement is known to hold for surfaces, thank to the work of Beauville, who proved that a surface  $S$  with irregularity  $q(S) = 1$  and  $\chi(S) = 1$  is following product of genus 2 curves, Pirola ([8]) and Hacon–Pardini ([5]) who studied surfaces  $S$  with  $\chi(S) = 1$  and  $q(S) = 3$ . The conjecture is also known to be true for highly irregular varieties thank to [6] where the authors proved that the irregularity  $q(X) := h^1(X, X)$  of a variety as above satisfies the inequality

$$q(X) \leq 2 \dim X$$

and equality holds if and only if  $X$  is birational to a product of curves of genus 2.

## Main Results:

We present a study of smooth complex projective varieties  $X$  of maximal Albanese dimension with Albanese image not fibered in subtori of  $\text{Alb}(X)$  and whose Euler characteristic is equal to one, proving some partial results toward the resolution of Pareschi's conjecture. In particular we prove the following:

**Theorem 1** *If  $X$  is as above, then its Albanese map has degree 1.*

This result led us to a new characterization of theta divisors.

**Theorem 2** *Let  $X$  be as in the above theorem and suppose furthermore that its Albanese image is normal. Consider the generic vanishing loci*

$$V_{\text{alb}_X}^i(\omega_X) := \{[\alpha] \in \text{Pic}^0(X) \mid h^i(\omega_X \otimes \alpha) \neq 0\}.$$

*If  $[\mathcal{O}_X]$  is an isolated point of  $V_{\text{alb}_X}^i(\omega_X)$  for every  $i > 0$  then  $X$  is birational to an irreducible theta divisor in a principally polarized abelian variety.*

Finally we turned our attention to 3-folds with irregularity 5 and we proved the following result, that tells us where to look for possible counterexamples to Pareschi's conjecture:

**Theorem 3** *If  $X$  is a smooth projective 3-fold of maximal Albanese dimension such that  $\chi(\omega_X) = 1$ ,  $q(X) = 5$  and the Albanese image not fibered by subtori, then either*

1.  *$X$  is birational to a product of (smooth models of) theta divisors.*
2. *there exist  $C_1$  and  $C_2$  two curves of genus 3, an elliptic curve  $E$  and two morphisms  $\gamma_i : C_i \rightarrow E$  such that  $X$  is birational to  $S^2C_1 \times_E S^2C_2$  where the fiber product is taken with respect of the maps  $F_i : S^2C_i \rightarrow E$  defined by  $[p, q] \mapsto \gamma_i(p) + \gamma_i(q)$ .*

## Tools:

Since  $X$  is of maximal Albanese dimension, then it comes with attached a generically finite map

$$a : X \rightarrow A$$

with  $A$  an abelian variety. Furthermore we can suppose that  $a(X)$  is not ruled by subtori. Let  $\mathcal{P}$  be the normalized Poincaré line bundle over  $A \times \text{Pic}^0(A)$  and denote by  $p_i : X \times \text{Pic}^0(A)$  the  $i$ -th projection. The main tool we use in this investigation is the following integral transform:

$$\mathbf{R}\Phi_a(\star) := \mathbf{R}p_{2*}(p_1^*(\star) \otimes (a \times 1)^*\mathcal{P}) : D^b(X) \rightarrow D^b(\text{Pic}^0(A)).$$

The philosophy behind the proofs is that, under our hypothesis, the complex  $\mathbf{R}\Phi_a(\mathcal{O}_X)$  is indeed a sheaf  $\mathcal{F}$  shifted of  $\dim X$  places to the right. In addition  $\mathcal{F}$  is torsion free of rank 1. Therefore we can write  $\mathcal{F}$  as  $\mathcal{I}_Z \otimes L$  with  $L$  a line bundle (that turns out to be ample) and  $\mathcal{I}_Z$  an ideal sheaf. The zero locus of  $\mathcal{I}_Z$  encodes much of the birational geometry of  $X$ , hence by studying it we can derive information on the birational behavior of  $X$ .

## References

- [1] M. A. Barja, M. Lahoz, J. C. Naranjo and G. Pareschi (2009), On the bicanonical map of irregular varieties, preprint [arXiv:0907.4363](https://arxiv.org/abs/0907.4363).
- [2] L. Ein and R. Lazarsfeld (1997), Singularities of theta divisors and the birational geometry of irregular varieties, *J. Amer. Math. Soc.*, **vol. 10**, n. 1, p.243-258.
- [3] C. D. Hacon (2000), Fourier-Mukai transforms, generic vanishing theorems and polarizations in abelian varieties, *Mathematische Zeitschrift*, **vol. 235** p.717-726.
- [4] C. D. Hacon and R. Pardini (2002), On the birational geometry of varieties of maximal Albanese dimension, *J. Reine Angew. Math*, **vol. 546** p. 177-199.
- [5] C. D. Hacon and R. Pardini (2002), Surfaces with  $p_g = q = 3$ , *Transactions of the Amer. Math. Soc.*, **vol. 354** p. 2631â2638.
- [6] C. D. Hacon and R. Pardini (2005), Birational characterization of product of curves of genus 2, *Mathematical Research Letters*, **vol. 12** p. 129-140.
- [7] R. Lazarsfeld and M. Popa (2009),BGG correspondence of cohomology of compact Kähler manifolds, and a numerical invariants, preprint [arXiv:0907.0651v1](https://arxiv.org/abs/0907.0651v1).
- [8] G. P. Pirola (2002), Surfaces with  $p_g = q = 3$ , *Manuscripta Mathematica* **vol. 108**, n. 2, p. 163-170.

# ORBITES PÉRIODIQUES DU CHAMP DE REEB ET HYPERBOLICITÉ

**Anne Vaugon**

Université de Lyon, France

CNRS, UMR 5669

ENS Lyon, UMPA

46, allée d'Italie, 69364 Lyon Cedex 07

[anne.vaugon@ens-lyon.fr](mailto:anne.vaugon@ens-lyon.fr)

**Résumé** - *Dans le cadre de l'étude des liens entre la géométrie d'une variété et le nombre d'orbites périodiques des champs de Reeb, Colin et Honda ont conjecturé que, sur une variété hyperbolique munie d'une structure de contact universellement tendue, le nombre d'orbites périodiques du champ de Reeb croît exponentiellement avec la période. On considère ici les variétés possédant une composante hyperbolique qui fibre sur le cercle et on montre que le nombre d'orbites périodiques de tout champ de Reeb non dégénéré croît exponentiellement avec la période pour une infinité de structures de contact.*

**Mots clés** - **Géométrie de contact, Champ de Reeb, Homologie de contact, Croissance.**

Je propose d'illustrer les liens entre la géométrie d'une variété et le comportement asymptotique (avec la période) du nombre d'orbites périodiques du champ de Reeb, champ de vecteurs associé à une forme de contact. Les résultats présentés ici sont tirés de ma thèse [22] et exposés dans [23].

Ce texte est organisé de la façon suivante. La section 1 est consacrée à la présentation de la géométrie de contact et à l'énoncé du théorème principal. La section 2 présente l'outil fondamental d'étude des orbites périodiques du champ de Reeb : l'*homologie de contact*. Enfin, la section 3 aborde les perspectives de ce travail.

## 1 Géométrie de contact

### 1.1 Structures de contact

La *géométrie de contact* est l'étude des structures de contact. Une *structure de contact* co-orientée sur une variété  $V$  de dimension 3 est un champ de plans co-orienté  $\xi$  localement décrit comme le noyau de la 1-forme  $dz - ydx$  au voisinage de 0 dans  $\mathbb{R}^3$  (voir figure 1). De façon équivalente, pour une 1-forme  $\alpha$  sur  $V$  telle que  $\xi = \ker(\alpha)$  on a  $\alpha \wedge d\alpha \neq 0$ . Une telle forme est appelée *forme de contact*. Le théorème de Martinet [15] assure que toute variété de dimension 3, orientée, compacte sans bord porte une structure de contact.

Le modèle local  $(\mathbb{R}^3, \ker(dz - ydx))$  fournit un premier exemple de variété de contact. Sur le fibré unitaire tangent à une surface  $S$ , le champ de plans  $\xi$  dont la projection sur  $T_p S$  au

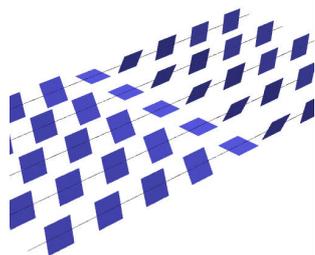


FIGURE 1 – Modèle local pour une structure de contact

point  $(p, v)$  est  $\mathbb{R}v$  est également un exemple fondamental (voir figure 2). La restriction de la forme de Liouville sur le fibré cotangent induit alors une forme de contact.

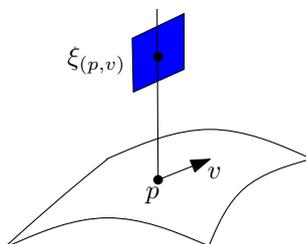


FIGURE 2 – Structure de contact sur le fibré unitaire tangent

La géométrie de contact entretient des liens étroits avec la géométrie symplectique. En particulier, avoir pour bord une variété de contact est une condition naturelle à imposer à une variété symplectique à bord. Par ailleurs, la géométrie de contact interagit avec la topologie, par exemple à travers l'étude des nœuds et le théorème des livres ouverts de Giroux [9] qui établit une bijection entre des objets purement topologiques appelés livres ouverts et les structures de contact. Il existe aussi des liens avec la géométrie complexe, la géométrie riemannienne et la dynamique.

La classification des structures de contact sur les variétés de dimension 3 est loin d'être complète. Les exemples connus jusqu'à présent révèlent des situations très différentes : une variété peut porter entre un nombre fini de structures dites tendues (par exemple  $S^3$  qui porte une unique structure tendue) et une infinité non dénombrable (voir [8]). Les travaux d'Eliashberg [5] ont permis de séparer les structures de contact en deux catégories : les structures *tendues* et *vrillées*. Les structures tendues sont les plus étudiées, ce sont les structures qui apparaissent le plus naturellement et celles qui reflètent le plus la topologie de la variété ambiante.

## 1.2 Propriétés dynamiques du champ de Reeb

À partir d'une forme de contact  $\alpha$ , on définit un champ de vecteurs, appelé *champ de Reeb* et noté  $R_\alpha$ , par  $d\alpha(R_\alpha, \cdot) = 0$  et  $\alpha(R_\alpha) = 1$ . Ce champ dépend fortement du choix de la forme  $\alpha$ . Dans le cas du fibré unitaire tangent à une surface, le flot de Reeb est le flot géodésique (voir par exemple [7]).

Le champ de Reeb possède des propriétés dynamiques très particulières. Ainsi, sur une variété compacte sans bord de dimension 3, il admet toujours une orbite périodique. Ce résultat est l'objet d'un théorème de Taubes [19] publié en 2007. L'existence d'orbites périodiques pour un champ de vecteurs lisse n'est pas automatique comme le montrent les exemples construits par Kuperberg [13] sur la sphère  $S^3$ . Par ailleurs le nombre d'orbites périodiques de Reeb est en général infini ce qui contraste avec les exemples construits par Wilson [24] sur toute variété fermée de dimension 3.

Au-delà de l'existence d'une orbite périodique, on s'intéresse ici au nombre  $N_L(\alpha)$  d'orbites périodiques de période inférieure à  $L$  du champ de Reeb associé à la forme de contact  $\alpha$ . L'objectif est de comprendre les liens reliant les propriétés asymptotiques de  $N_L(\alpha)$  et la géométrie de la variété.

Dans le cas du fibré unitaire tangent, les orbites de Reeb correspondent aux géodésiques. Or, il existe exactement une géodésique fermée par classe d'homotopie libre [12, Theorem 3.9.5] et le nombre de classes d'homotopie libre croît exponentiellement [17] avec la longueur. On obtient donc une croissance exponentielle du nombre d'orbites périodiques de Reeb. À l'inverse, il existe une forme de contact sur  $S^3$  n'ayant que deux orbites périodiques.

Colin et Honda [4] conjecturent que l'hyperbolicité de la variété implique un comportement exponentiel des orbites périodiques de Reeb associées à des structures de contact universellement tendues. On dit qu'une structure de contact est *universellement tendue* si son rappel dans le revêtement universel est tendu.

**Conjecture 1 (Colin-Honda [4, Conjecture 2.10])** *Sur une variété hyperbolique de dimension 3 compacte sans bord, pour toute équation de contact non dégénérée associée à une structure universellement tendue,  $N_L(\alpha)$  croît exponentiellement avec  $L$ .*

Dans [4], Colin et Honda obtiennent une croissance exponentielle de l'homologie de contact pour des structures de contact portées par certains livres ouverts de monodromie pseudo-Anosov. D'après Thurston [20], un fibré sur le cercle de fibre  $S$  est hyperbolique si et seulement s'il est une suspension de  $S$  par un difféomorphisme homotope à un pseudo-Anosov.

On s'intéresse ici au cas des variétés possédant un découpage JSJ non vide et contenant une composante hyperbolique qui fibre sur le cercle (voir [1]).

**Théorème 1 ([22, Théorème 0.4])** *Soit  $V$  une variété de dimension 3 orientée, close, connexe, qui peut être découpée le long d'une famille non vide de tores incompressibles en variétés irréductibles comprenant une composante hyperbolique qui fibre sur le cercle. Alors  $V$  porte une infinité de structures de contact non isomorphes telles que  $N_L(\alpha)$  croisse exponentiellement avec  $L$  pour toute forme de contact  $\alpha$  non dégénérée et sans orbite périodique de Reeb contractile.*

L'étude des propriétés dynamiques de tous les champs de Reeb associés à une forme de contact repose sur l'étude d'un invariant des structures de contact appelé l'*homologie de contact*. Plus précisément, le théorème 1 découle du théorème 1 qui garantit que l'homologie de contact croît exponentiellement.

## 2 Homologie de contact

Introduite dans l'esprit de l'homologie de Floer par Eliashberg, Givental et Hofer [6] en 2000, l'*homologie de contact* permet de calculer un invariant de la structure de contact à l'aide d'un

champ de Reeb. Elle est définie à partir d'un complexe engendré par les orbites périodiques d'un champ de Reeb et d'une différentielle obtenue en « comptant » des courbes holomorphes dans la symplectisation<sup>1</sup>  $(\mathbb{R} \times V, d(e^\tau \alpha))$ . Cet invariant est en général délicat à calculer. En effet, il repose sur la détermination d'orbites périodiques puis sur la résolution d'équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires.

L'homologie de contact et plus généralement la théorie symplectique des champs (Symplectic Field Theory) est un outil puissant d'étude des structures de contact permettant, par exemple, de les distinguer. Ainsi Ustilovsky [21] a montré l'existence de structures de contact exotiques sur les sphères et Bourgeois [2] l'existence d'une infinité de structures non isomorphes sur  $T^5$  et  $T^2 \times S^{2k+1}$ . Elle permet aussi de hiérarchiser les structures de contact via la notion de torsion algébrique introduite par Latschev et Wendl [14].

La *croissance de l'homologie de contact* [3] est un invariant déduit du précédent et plus simple à évaluer. Intuitivement, il décrit le comportement asymptotique avec  $L$  du nombre d'orbites périodiques de période inférieure à  $L$  qui contribuent à l'homologie de contact. C'est l'analogue de la notion de croissance de l'homologie symplectique introduite par Seidel [18] et utilisée par McLean [16] pour différencier des structures symplectiques.

Plus précisément, si  $(V, \alpha)$  est une variété de contact et  $L > 0$ , on note  $C_{\leq L}(V, \alpha)$  la restriction du complexe de l'homologie de contact aux orbites périodiques de Reeb de période inférieure à  $L$ . Cette restriction correspond à un filtrage par l'action. On note  $HC_{\leq L}(V, \alpha)$  l'homologie associée. L'inclusion  $i : C_{\leq L}(V, \alpha) \rightarrow C_{\leq L'}(V, \alpha)$  pour  $L \leq L'$  induit un morphisme en homologie et la famille  $(HC_{\leq L}(V, \alpha))_{L>0}$  est un système inductif dont la limite est l'homologie de contact  $HC(V, \alpha)$ . On obtient ainsi le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccc} HC_{\leq L}(V, \alpha) & \longrightarrow & HC_{\leq L'}(V, \alpha) \\ & \searrow \varphi_L & \swarrow \varphi_{L'} \\ & & HC(V, \alpha) \end{array}$$

La *croissance de l'homologie de contact* est la croissance<sup>2</sup> de l'application  $L \mapsto \text{rg}(\varphi_L)$ .

**Proposition 1** *Soient  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  deux formes de contact homotopes et sans orbite périodique de Reeb contractile sur une variété compacte sans bord. Alors<sup>3</sup>, les homologies de contact associées ont la même croissance.*

La croissance de l'homologie de contact minore la croissance du nombre d'orbites de Reeb avec la période. Ainsi, une croissance plus que linéaire de l'homologie garantit l'existence d'une infinité d'orbites périodiques géométriquement distinctes. En outre, le théorème 1 découle du théorème suivant qui est un des résultats principaux de [22].

---

1.  $\tau$  est la coordonnée sur  $\mathbb{R}$

2. Pour  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , on dit que la croissance de  $f$  est *polynomiale de degré  $\leq n$*  s'il existe  $a > 0$  tel que pour tout  $x$ , on ait  $f(x) \leq ax^n$  et *exponentielle* s'il existe  $a > 0$  et  $b > 0$  tels que pour tout  $x$ , on ait  $f(x) \geq a \exp(bx)$ .

3. Bien que communément admises l'existence et l'invariance de l'homologie de contact demeurent non démontrées. Plusieurs théories, dont la théorie des polyfolds [10, 11] sont en cours de développement pour résoudre ce problème. La proposition 1 dépend de ces résultats.

**Théorème 1 ([22, Théorème 0.5])** *Soit  $V$  une variété de dimension 3 orientée, close, connexe, qui peut être découpée le long d'une famille non vide de tores incompressibles en variétés irréductibles comprenant une composante hyperbolique qui fibre sur le cercle. Alors  $V$  porte une infinité de structures de contact non isomorphes dont la croissance l'homologie de contact est exponentielle.*

Pour démontrer ce théorème, on construit pour chaque structure une forme de contact adaptée à l'évaluation de la croissance de l'homologie de contact. Par hypothèse, la partie hyperbolique est la suspension d'un difféomorphisme isotope à un pseudo-Anosov. Elle admet une forme de contact naturelle de champ de Reeb transverse à la fibre. L'application retour sur la fibre est alors isotope au difféomorphisme décrivant la suspension du fibré et est donc isotope à un pseudo-Anosov. La partie hyperbolique crée ainsi un nombre exponentiel d'orbites de Reeb associées aux points périodiques du pseudo-Anosov. La preuve comprend une analyse des courbes holomorphes impliquées dans la différentielle pour prouver qu'après passage à l'homologie le comportement exponentiel demeure. Ce travail s'inspire de [4].

### 3 Perspectives

La conjecture de Colin et Honda s'étend de façon plus vague en prédisant un comportement linéaire dans le cas des géométries sphériques et un comportement généralement quadratique dans le cas des géométries ni hyperboliques ni sphériques. Le mot « généralement » cache le fait que cet énoncé est faux en toute généralité. Ainsi pour la structure standard sur le fibré unitaire tangent d'une surface hyperbolique la croissance de l'homologie de contact est exponentielle et non pas quadratique comme espéré. Le résultat suivant confirme cette conjecture sur certains fibrés en cercles.

**Théorème 2 ([22, Théorème 0.7])** *La croissance de l'homologie de contact des structures universellement tendues non transversales aux fibres sur un fibré en cercles de base de genre au moins 1 est quadratique.*

Ainsi, les liens entre la géométrie de la variété et les propriétés du nombre d'orbites périodiques du champ de Reeb demeurent mystérieux, tant dans les cas hyperboliques où la conjecture de Colin-Honda est complètement ouverte même dans le cas d'une variété qui fibre sur le cercle, que dans les cas non hyperboliques où il n'existe pas encore d'énoncé précis.

### Références

- [1] L. Bessières, G. Besson, M. Boileau, S. Maillot, and J. Porti. *Geometrisation of 3-manifolds*, volume 13 of *Tracts in Mathematics*. European Mathematical Society, 2010.
- [2] F. Bourgeois. *A Morse-Bott approach to Contact Homology*. PhD thesis, Stanford University, 2002.
- [3] F. Bourgeois and V. Colin. Homologie de contact des variétés toroïdales. *Geometry and Topology*, 9:299–313, 2005.
- [4] V. Colin and K. Honda. Reeb Vector Fields and Open Book Decomposition. arXiv:0809.5088v1, 2008.

- [5] Y. Eliashberg. Classification of overtwisted contact structures on 3-manifolds. *Inventiones Mathematicae*, 98(3):623–637, 1989.
- [6] Y. Eliashberg, A. Givental, and H. Hofer. Introduction to Symplectic Field Theory. In Noga Alon, Jean Bourgain, Alain Connes, Mikhaïl Gromov, and Vitali Milman, editors, *Visions in Mathematics*, pages 560–673. Birkhäuser, 2000. Special volume, Part II.
- [7] H. Geiges. *An Introduction to Contact Topology*. Cambridge University Press, 2008.
- [8] E. Giroux. Topologie de contact en dimension 3 (autour des travaux de Yakov Eliashberg). *Astérisque*, (216):No. 760, 3, 7–33, 1993. Séminaire Bourbaki, Vol. 1992/93.
- [9] E. Giroux. Géométrie de contact: de la dimension trois vers les dimensions supérieures. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II*, pages 405–414, Beijing, 2002. Higher Ed. Press.
- [10] H. Hofer. Polyfolds and a General Fredholm Theory. arXiv:0809.3753, September 2008. To appear in Proceedings of the 2008 Clay research conference.
- [11] H. Hofer, K. Wysocki, and E. Zehnder. Applications to Polyfold Theory I : The Polyfolds of Gromov-Witten Theory. arXiv:1107.2097, July 2011.
- [12] W. Klingenberg. *Riemannian Geometry*, volume 1 of *Studies in mathematics*. Gruyter and Co, Berlin, 1982.
- [13] K. Kuperberg. A smooth counterexample to the Seifert conjecture in dimension 3. *Annals of Mathematics*, 140:723–732, 1994.
- [14] J. Latschev and C. Wendl. Algebraic Torsion in Contact Manifolds. arXiv:1009.3262v2, 2010. With an appendix by Michael Hutchings. To appear in *Geometric and Functional Analysis (GAFA)*.
- [15] J. Martinet. Formes de contact sur les variétés de dimension 3. In *Proceedings of Liverpool Singularities - Symposium II*, volume 209 of *Lecture Notes in mathematics*, pages 142–163. Springer-Verlag, 1971.
- [16] M. McLean. The growth rate of symplectic homology and affine varieties. arXiv:1011.2542v3, 2010.
- [17] J. Milnor. A note on curvature and fundamental group. *Journal of Differential Geometry*, 2:1–7, 1968.
- [18] P. Seidel. A biased view of symplectic cohomology. *Current Developments in Mathematics*, 2006:211–253, 2008.
- [19] C. H. Taubes. The Seiberg-Witten equations and the Weinstein conjecture. *Geometry & Topology*, 11:2117–2202, 2007.
- [20] W. Thurston. Hyperbolic structures on 3-manifolds, II: Surface groups and 3-manifolds which fiber over the circle, 1998.
- [21] I. Ustilovsky. Infinitely many contact structures on  $S^{4m+1}$ . *International Mathematics Research Notices*, (14):781–791, 1999.
- [22] A. Vaugon. *Étude dynamique des champs de Reeb et propriétés de croissance de l'homologie de contact*. Thèse de doctorat, Université de Nantes, December 2011.
- [23] A. Vaugon. On growth rate and contact homology. Prépublication, 2012. Soumis.
- [24] Jr F. W. Wilson. On the Minimal Sets of Non-Singular Vector Fields. *Annals of Mathematics*, 84(3):529–536, 1966.