Bulletin
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

CLASSIFICATION DES REPRÉSENTATIONS MODULO p DE $\mathrm{SL}(2, F)$

Ramla Abdellatif

Tome 142
Fascicule 3

2014

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 537-589

Bull. Soc. math. France
142 (3), 2014, p. 537–589

CLASSIFICATION DES REPRÉSENTATIONS MODULO p DE $\mathrm{SL}(2,F)$

PAR RAMLA ABDELLATIF

RÉSUMÉ. — Nous étudions les représentations lisses irréductibles modulo p de $\mathrm{SL}(2,F)$, où F est un corps local complet non archimédien de caractéristique résiduelle p et de corps résiduel fini. En particulier, nous relions ces objets aux représentations modulo p de $\mathrm{GL}(2,F)$ étudiées par Barthel-Livné et Breuil. Lorsque $F = \mathbb{Q}_p$, nous décrivons complètement les représentations dites supersingulières, qui apparaissent par paquets de taille 1 ou 2, et définissons une correspondance de Langlands modulo p pour $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Q}_p)$ qui diffère légèrement mais sensiblement de la correspondance construite par Breuil pour $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Q}_p)$.

ABSTRACT (*Classification of mod p representations of* $\mathrm{SL}(2,F)$)

We study mod p irreducible smooth representations of $\mathrm{SL}(2,F)$ for F a complete non-archimedean local field of residual characteristic p and with finite residue field. In particular, we link these objects to the mod p representations of $\mathrm{GL}(2,F)$ studied by Barthel-Livné and Breuil. When $F = \mathbb{Q}_p$, we give an explicit description of the so-called supersingular representations, that do appear by packets of size 1 or 2, and we define a mod p Langlands correspondence for $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Q}_p)$ that slightly but significantly differs from the correspondence built by Breuil for $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Q}_p)$.

Soient p un entier premier et F un corps local non archimédien complet pour une valuation discrète, de caractéristique résiduelle p, d'anneau des entiers $\mathcal{O}_F$ et de corps résiduel fini. Dans les années 90, Barthel et Livné [2, 3] ont classifié les représentations modulo p de $\mathrm{GL}_2(F)$. Ils font ainsi apparaître une nouvelle

Texte reçu le 20 février 2012 et accepté le 3 juillet 2012.

RAMLA ABDELLATIF, UMPA - ENS Lyon, 46 allée d'Italie, 69 034 Lyon Cedex 07 •
E-mail : `ramla.abdellatif@ens-lyon.fr`

Classification mathématique par sujets (2010). — 11F70, 20C08, 20G05, 22E50.

Mots clefs. — Correspondance de Langlands modulo p, groupe spécial linéaire.

famille de représentations, qu'ils ont appelées représentations *supersingulières* et qui restent en général complètement inconnues. Le seul cas bien compris jusqu'alors est celui de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, où les travaux de Breuil fournissent une description explicite des représentations supersingulières de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ [5, théorème 1.1] qui mènent à une *correspondance de Langlands locale semi-simple modulo* p [5, définition 4.2.4].

Cet article porte sur les représentations modulo p de $\mathrm{SL}_2(F)$, pour lesquelles nous démontrons des résultats de classification semblables à ceux existants pour $\mathrm{GL}_2(F)$. Cependant, nous verrons qu'apparaissent déjà des différences significatives au niveau de la structure des représentations supersingulières, ce qui isole un peu plus $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ dans la théorie des représentations modulo p des groupes réductifs p-adiques.

Présentation des principaux résultats. — On fixe une clôture algébrique $\overline{\mathbb{F}}_p$ du corps résiduel k_F, un plongement $\iota : k_F \hookrightarrow \overline{\mathbb{F}}_p$ et une uniformisante ϖ_F de F. Nous commençons par donner une description exhaustive des représentations non supercuspidales de $\mathrm{SL}_2(F)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. On rappelle qu'une représentation lisse irréductible est dite *supercuspidale* lorsqu'elle n'est pas isomorphe à un sous-quotient d'une représentation $\mathrm{Ind}_{B_S}^{\mathrm{SL}_2(F)}(\eta)$ obtenue par induction parabolique d'un caractère lisse $\eta : B_S \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ du sous-groupe de Borel B_S des matrices triangulaires supérieures de $\mathrm{SL}_2(F)$.

THÉORÈME 0.1. — *Soit $\eta : B_S \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ un caractère lisse.*

1. *Le $\overline{\mathbb{F}}_p[B_S]$-module $\mathrm{Ind}_{B_S}^{\mathrm{SL}_2(F)}(\eta)$ est de longueur 2. Il est totalement décomposé si $\eta = \mathbf{1}$ est le caractère trivial, indécomposable sinon.*
2. *Le $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{SL}_2(F)]$-module $\mathrm{Ind}_{B_S}^{\mathrm{SL}_2(F)}(\eta)$ est réductible si et seulement si $\eta = \mathbf{1}$. Dans ce cas, c'est un module indécomposable de longueur 2 admettant le caractère trivial comme sous-objet et la représentation de Steinberg comme quotient.*
3. *Il n'existe pas d'isomorphisme entre sous-quotients d'induites paraboliques provenant de caractères distincts de B_S.*

Nous obtenons en particulier une relation forte entre les représentations lisses irréductibles non supercuspidales de $\mathrm{GL}_2(F)$ et de $\mathrm{SL}_2(F)$, qui reste valable pour les représentations non irréductibles obtenues par induction parabolique.

THÉORÈME 0.2. — *Soit V une $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible non supercuspidale de $\mathrm{SL}_2(F)$. A torsion par un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $\mathrm{GL}_2(F)$ près, il existe une unique représentation lisse irréductible non supercuspidale de $\mathrm{GL}_2(F)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ dont la restriction à $\mathrm{SL}_2(F)$ est isomorphe à V.*

Pour attraper les autres représentations lisses irréductibles de $\mathrm{SL}_2(F)$, nous suivons les idées développées dans [2] et étudions donc tout d'abord la structure des algèbres de Hecke attachées aux $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations lisses irréductibles d'un sous-groupe ouvert compact maximal de $\mathrm{SL}_2(F)$. L'action par conjugaison de $\mathrm{SL}_2(F)$ sur l'ensemble de ses sous-groupes ouverts compacts maximaux possède deux orbites respectivement représentées par le sous-groupe $K_0 := \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_F)$ des points $\mathcal{O}_F$-rationnels de SL_2 et par $K_1 := \alpha K_0 \alpha^{-1}$, où $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_F \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathrm{GL}_2(F)$ n'appartenant pas à $\mathrm{SL}_2(F)$. Nous verrons dans la section 3.5 que choisir l'un ou l'autre de ces sous-groupes ne modifie pas les résultats que l'on obtient, ce qui permet de se limiter à l'étude des objets associés à K_0.

Nous démontrons alors le résultat suivant, qui affirme que ces algèbres de Hecke sphériques sont des algèbres de polynômes en une indéterminée (donc sont en particulier commutatives) et que leur action est compatible avec celle des algèbres de Hecke attachées à $\mathrm{GL}_2(F)$ [(1)]. Rappelons ici que, par abus de notation, on note encore $\sigma_{\vec{r}}$ la $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)$ obtenue par inflation de la représentation $\mathrm{Sym}^{\vec{r}}(\overline{\mathbb{F}}_p^2)$ du groupe fini $\mathrm{GL}_2(k_F)$, puis étendue à $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)Z$ en faisant agir trivialement l'élément central $\varpi_F I_2$.

Théorème 0.3. — *Soient K un sous-groupe ouvert compact maximal de $\mathrm{SL}_2(F)$ et σ une représentation lisse irréductible de K sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.*

1. *L'algèbre de Hecke attachée au triplet $(\mathrm{SL}_2(F), K, \sigma)$ est une algèbre de polynômes en un opérateur de Hecke τ explicitement déterminé.*
2. *Supposons que $K = K_0$ et que $\sigma = \sigma_{\vec{r}}$ soit la représentation lisse irréductible de K_0 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ obtenue par inflation de la représentation $\mathrm{Sym}^{\vec{r}}(\overline{\mathbb{F}}_p^2)$ du groupe fini $\mathrm{SL}_2(k_F)$. Notons $T_{\vec{r}} \in \mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_2(F), \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)Z, \sigma_{\vec{r}})$ l'opérateur de Hecke donné dans* [2, proposition 8]. *L'action de l'opérateur τ introduit dans le point précédent est donnée par le carré de l'opérateur $T_{\vec{r}}$:*
$$\forall\ g \in \mathrm{SL}_2(F),\ \forall\ v \in \sigma_{\vec{r}},\ \tau([g,v]) = T_{\vec{r}}^2([g,v]).$$

Nous pouvons ainsi définir des représentations conoyaux indexées par les paires de paramètres $(\vec{r}, \lambda) \in \{0, \ldots, p-1\}^f \times \overline{\mathbb{F}}_p$ en posant :
$$\forall\ i \in \{0,1\},\ \pi_i(\vec{r}, \lambda) := \mathrm{Coker}(\tau_{\vec{r}}^i - \lambda)\ ,$$
où $\tau_{\vec{r}}^i$ est l'opérateur de Hecke τ fourni par le théorème 0.3 pour $K = K_i$ et $\sigma = \sigma_{\vec{r}}^{\alpha^i}$. On obtient alors une nouvelle description des représentations non supercuspiales de $\mathrm{SL}_2(F)$ qui est de plus compatible - après application du

(1) Le sens précis donné à cette dernière assertion est défini dans la section 3.3.

foncteur de restriction - avec celle donnée par [2, Theorems 30 & 33] pour les représentations non supercuspidales de $\mathrm{GL}_2(F)$. Dans le prochain énoncé, on note encore $\iota : \mathcal{O}_F^\times \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ l'application obtenue par composition de ι avec la projection $\mathcal{O}_F^\times \twoheadrightarrow k_F^\times$ définie par la réduction modulo ϖ_F et $\mu_\lambda : F^\times \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ désigne le caractère non ramifié envoyant ϖ_F sur $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$.

THÉORÈME 0.4. — *Soit $(\vec{r}, \lambda) \in \{0, \dots, p-1\}^f \times \overline{\mathbb{F}}_p$ une paire de paramètres.*

1. *La conjugaison par α induit un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{SL}_2(F)]$-modules :*
$$\pi_1(\vec{r}, \lambda) \simeq (\pi_0(\vec{r}, \lambda))^\alpha.$$
2. *Si λ est non nul et si $(\vec{r}, \lambda) \neq (\vec{0}, 1)$, alors $\pi_0(\vec{r}, \lambda)$ et $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mu_{\lambda^{-1}} \iota^{\overrightarrow{p-1-r}})$ sont des représentations isomorphes de $\mathrm{SL}_2(F)$. En particulier, $\pi_0(\vec{r}, \lambda)$ est une représentation irréductible de $\mathrm{SL}_2(F)$ lorsque $(\vec{r}, \lambda) \notin \{(\vec{0}, 1), (\overrightarrow{p-1}, 1)\}$.*
3. *Le $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{SL}_2(F)]$-module $\pi_0(\vec{0}, 1)$ est une extension non scindée du caractère trivial par la représentation de Steinberg.*

On déduit directement de cet énoncé qu'une représentation lisse irréductible *supersingulière relativement à K_i*, i.e. isomorphe à un quotient d'une représentation de la forme $\pi_i(\vec{r}, 0)$ avec $\vec{r} \in \{0, \dots, p-1\}^f$, est nécessairement supercuspidale. La relation entre supersingularité et supercuspidalité est en réalité bien plus profonde, comme en atteste le résultat suivant.

THÉORÈME 0.5. — *Soit $i \in \{0, 1\}$ et soit π une représentation lisse irréductible de $\mathrm{SL}_2(F)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Si F est de caractéristique 2, on suppose de plus que π est admissible. Les assertions suivantes sont alors équivalentes :*

i) *π est supercuspidale ;*
ii) *π est supersingulière relativement à K_i.*

La notion de supersingularité ne nécessite donc pas de préciser un choix de sous-groupe ouvert compact maximal. On obtient ainsi l'énoncé de classification suivant, qui est l'exact pendant de [2, Theorem 33 & Corollary 36].

THÉORÈME 0.6. — 1. *Les classes d'isomorphisme des représentations lisses irréductibles admissibles de $\mathrm{SL}_2(F)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ se partitionnent en quatre familles :*
   (a) *le caractère trivial $\mathbf{1}$;*
   (b) *la représentation de Steinberg St_S ;*
   (c) *les représentations de la série principale, i.e. paraboliquement induites à partir d'un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse non trivial de B_S ;*
   (d) *les représentations supersingulières.*

2. *Cette classification est compatible avec la classification de Barthel-Livné pour les $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations lisses irréductibles à caractère central de* $\mathrm{GL}_2(F)$ *: si W est une $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible à caractère central de* $\mathrm{GL}_2(F)$ *qui contient une représentation lisse irréductible V de* $\mathrm{SL}_2(F)$*, alors V appartient à une famille de la classification ci-dessus si et seulement si W appartient à la même famille dans la classification de Barthel-Livné.*
3. *Si F n'est pas de caractéristique* 2*, on peut supprimer l'hypothèse d'admissibilité.*

Supposons désormais que $F = \mathbb{Q}_p$. Nous disposons alors d'une description explicite des représentations supersingulières de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$ qui repose sur celle donnée par Breuil pour les représentations supersingulières de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ [5][(2)].

THÉORÈME 0.7. — 1. *A isomorphisme près, il existe p représentations supersingulières de* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *notées $\pi_0, \ldots, \pi_{p-1}$.*
2. *Pour tout paramètre $r \in \{0, \ldots, p-1\}$, l'espace des vecteurs $I_S(1)$-invariants de π_r est de dimension* 1 *sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ et l'on a $\pi_r^\alpha \simeq \pi_{p-1-r}$.*
3. *La restriction à* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *d'une représentation supersingulière de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *est un* $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)]$*-module de longueur* 2 *totalement décomposé. Plus précisément :*

$$\forall\ r \in \{0, \ldots, p-1\},\ \ \pi(r, 0, \mathbf{1})|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)} \simeq \pi_r \oplus \pi_{p-1-r}.$$

On peut ainsi définir pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$ un analogue de la correspondance de Langlands locale semi-simple modulo p définie par Breuil pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ qui lui soit compatible par restriction à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Il met en bijection les classes d'isomorphisme des représentations projectives de dimension 2 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ avec certaines familles de classes d'isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations lisses semi-simples de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$.

DÉFINITION 0.8. — On appelle *correspondance de Langlands locale semi-simple modulo p pour* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$ la bijection entre les classes d'isomorphisme des représentations projectives de dimension 2 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ et certaines familles de classes d'isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations lisses semi-simples de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$ définie par les flèches suivantes :

– pour tout entier $r \in \{0, \ldots, \frac{p-1}{2}\}$, on pose[(3)]

$$\mathrm{proj} \circ \mathrm{ind}(\omega_2^{r+1}) \longleftrightarrow \{\pi_r\ ;\ \pi_{p-1-r}\}\ ;$$

(2) Dont on reprend les notations dans le prochain énoncé.

(3) L'ensemble qui apparaît à droite lorsque $r = \frac{p-1}{2}$ est réduit à l'élément $\left\{\pi_{\frac{p-1}{2}}\right\}$. C'est le seul cas où l'on obtient un singleton, les autres paquets étant tous de taille 2.

– pour toute paire de paramètres $(r, \lambda) \in \{0, \ldots, r-1\} \times \overline{\mathbb{F}}_p^{\times}$, on pose

$$\operatorname{proj} \circ \begin{pmatrix} \varepsilon^{r+1}\mu_\lambda & 0 \\ 0 & \mu_{\lambda^{-1}} \end{pmatrix} \longleftrightarrow \pi_0(r, \lambda)^{ss} \oplus \pi_0([p-3-r], \lambda^{-1})^{ss}.$$

Plan de l'article. — La section 1 est constituée de quelques rappels techniques. Nous consacrons la section 2 à l'étude des représentations non supercuspidales de $\mathrm{SL}_2(F)$. Dans la section 3, qui est le cœur de cet article, nous établissons une classification des représentations lisses irréductibles de $\mathrm{SL}_2(F)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ et approfondissons les liens existants avec la théorie des représentations lisses irréductibles à caractère central de $\mathrm{GL}_2(F)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. La section 4 traite enfin des spécificités du cas $F = \mathbb{Q}_p$.

Remerciements. — Nous remercions chaleureusement Guy Henniart pour son intérêt constant et pour ses divers commentaires sur une version préliminaire de cet article. Nous tenons aussi à remercier le rapporteur pour ses remarques précises.

1. Préliminaires

1.1. Notations générales. — On fixe un entier premier p et un corps local non archimédien F complet pour une valuation discrète, de caractéristique résiduelle p et de corps résiduel fini. On désigne par $\mathcal{O}_F$ l'anneau des entiers de F, par $\mathfrak{p}_F$ son idéal maximal et par $q = p^f$ le cardinal de $k_F = \mathcal{O}_F/\mathfrak{p}_F$. On fixe une uniformisante $\varpi_F \in \mathfrak{p}_F$, une clôture algébrique $\overline{\mathbb{F}}_p$ de k_F et un plongement $\iota : k_F \hookrightarrow \overline{\mathbb{F}}_p$. On note $v_F : F \twoheadrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ la valuation ϖ_F-adique de F normalisée par $v_F(\varpi_F) = 1$ et $\operatorname{red} : \mathcal{O}_F \twoheadrightarrow k_F$ l'application de réduction modulo ϖ_F.

On note $k_F^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble des suites de longueur finie d'éléments de k_F. On définit alors l'application $A : k_F^{(\mathbb{N})} \to \mathcal{O}_F$ par la formule suivante : pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et toute famille $\lambda = (\lambda_i)_{i=0}^n$ d'éléments de k_F, on pose

$$A(\lambda) := \sum_{i=0}^{n} \varpi_F^i [\lambda_i] \in \mathcal{O}_F \ ,$$

où $[.] : k_F \hookrightarrow \mathcal{O}_F^{\times}$ désigne l'application de Teichmüller.

Pour tout scalaire non nul $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^{\times}$, on note $\mu_\lambda : F^{\times} \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\times}$ le caractère lisse non ramifié (i.e. trivial sur $\mathcal{O}_F^{\times}$) valant λ en ϖ_F. Pour tout entier $r \in \{0, \ldots, q-1\}$, on note $\iota^r : F^{\times} \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\times}$ le caractère trivial sur ϖ_F dont l'action sur $\mathcal{O}_F^{\times}$ est définie par la composition suivante :

$$\mathcal{O}_F^{\times} \xrightarrow{\operatorname{red}} k_F^{\times} \longrightarrow k_F^{\times} \xrightarrow{\iota} \overline{\mathbb{F}}_p^{\times} \ ,$$

la flèche du milieu étant donnée par l'élévation à la puissance r. Pour tout f-uplet d'entiers $\vec{r}=(r_0,\dots,r_{f-1})\in\{0,\dots,p-1\}^f$, on pose $\iota^{\vec{r}}:=\iota^r$, où $r=\sum_{i=0}^{f-1}p^ir_i$ est bien un élément de $\{0,\dots,q-1\}$.

On note $G:=\mathrm{GL}_2(F)$, dont $K:=\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)$ est à conjugaison près l'unique sous-groupe ouvert compact maximal. On note I le sous-groupe d'Iwahori standard de K et $I(1)$ le pro-p-radical de I. Rappelons que I est formé des éléments de K dont la réduction modulo ϖ_F est une matrice triangulaire supérieure du groupe fini $\mathrm{GL}_2(k_F)$ tandis que $I(1)$ est le sous-groupe des éléments de I dont l'image par l'application de réduction modulo ϖ_F est unipotente. On note $Z=F^\times I_2$ le centre de G (où I_2 est l'élément neutre de G), B le sous-groupe de Borel formé des matrices triangulaires supérieures de G, T le tore maximal déployé des matrices diagonales de G, $U=\{u(x):=\left(\begin{smallmatrix}1&x\\0&1\end{smallmatrix}\right),\ x\in F\}$ le radical unipotent de B et $\overline{U}=\{\overline{u}(x):=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\x&1\end{smallmatrix}\right),\ x\in F\}$. On introduit aussi les éléments suivants de G, dont le rôle dans l'étude des représentations modulo p de G est important [2, 5] :

$$\alpha:=\begin{pmatrix}1&0\\0&\varpi_F\end{pmatrix},\ \beta:=\begin{pmatrix}0&1\\\varpi_F&0\end{pmatrix},\ \omega:=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},$$

et $\omega_\lambda:=\begin{pmatrix}0&1\\1&-A(\lambda)\end{pmatrix}$ avec $\lambda\in k_F^{(\mathbb{N})}$ arbitraire.

Cet article étudie les représentations du groupe spécial linéaire $G_S:=\mathrm{SL}_2(F)$, dont les sous-groupes ouverts compacts maximaux sont partitionnés en deux classes de conjugaison représentées par les sous-groupes $K_0:=\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_F)$ et $K_1:=\alpha K_0\alpha^{-1}$. Le centre de G_S est réduit à l'ensemble $\{I_2,-I_2\}$ qui est contenu dans $K_0\cap K_1$. On note $B_S=B\cap G_S$ le sous-groupe de Borel de G_S consitué des matrices triangulaires supérieures et $T_S=T\cap G_S$ le tore maximal déployé des matrices diagonales. Le sous-groupe d'Iwahori standard de K_0 est noté I_S et est égal à $I\cap G_S$; son pro-p-radical $I_S(1)$ est quant à lui égal à $I(1)\cap G_S$. On note Γ_S le noyau de l'application $K_0\twoheadrightarrow\mathrm{SL}_2(k_F)$ induite par la réduction modulo ϖ_F, qui n'est autre que le premier sous-groupe de congruence de G_S. On introduit enfin les éléments suivants de G_S :

$$\alpha_0:=\begin{pmatrix}\varpi_F^{-1}&0\\0&\varpi_F\end{pmatrix},\ w_0:=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\ \beta_0:=\begin{pmatrix}0&-\varpi_F^{-1}\\\varpi_F&0\end{pmatrix}.$$

On vérifie facilement que l'on a $\beta_0=\alpha_0w_0$ ainsi que les relations suivantes :

$$\forall\, n\in\mathbb{Z},\ w_0\alpha_0^nw_0^{-1}=\alpha_0^{-n}=w_0^{-1}\alpha_0^nw_0\ ; \tag{1.1}$$

$$\forall\, x\in F,\ w_0u(x)=\overline{u}(-x)w_0. \tag{1.2}$$

La relation (1.2) montre en particulier que $\overline{U}w_0=w_0U$.

1.2. Actions de groupes sur l'arbre de Bruhat-Tits de $\mathrm{SL}_2(F)$**.** — Nous renvoyons le lecteur à [10] pour la définition et les propriétés de l'arbre de Bruhat-Tits X de G_S. Rappelons toutefois que G agit transitivement sur l'ensemble des sommets de X tandis que l'action de G_S possède deux orbites : celle du sommet standard(4) v_0, que l'on note $\mathscr{C}_{\mathrm{pair}}$, et celle de son voisin $v_1 := \alpha v_0$, que l'on note $\mathscr{C}_{\mathrm{impair}}$. Pour tout indice $i \in \{0,1\}$, le stabilisateur de v_i sous l'action de G_S est égal à K_i, et le stabilisateur de v_0 sous l'action de G est égal à KZ.

L'arbre X est par ailleurs muni d'une distance pour laquelle G agit par isométries. Pour tout entier $n \geq 0$, on appelle *cercle de rayon* n l'ensemble des sommets de X situés à distance n du sommet standard v_0. D'après [5, page 5], le cercle de rayon n est donné par la réunion disjointe

$$\{g^0_{n,\lambda} v_0,\ \lambda \in k_F^n\} \sqcup \{g^1_{n-1,\mu} v_0,\ \mu \in k_F^{n-1}\}\ , \tag{1.3}$$

où les éléments $g^0_{m,\lambda}$ et $g^1_{m,\lambda}$ sont définis comme suit : $g^0_{0,0} = I_2$, $g^1_{0,0} = \alpha$,

$$g^0_{m,\lambda} := \begin{pmatrix} \varpi_F^m & A(\lambda) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } g^1_{m,\lambda} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi_F A(\lambda) & \varpi_F^{m+1} \end{pmatrix}.$$

Puisque l'action de Z fixe chaque sommet de l'arbre, on obtient la description suivante des cercles de X à l'aide de l'action de G_S sur X.

Proposition 1.1. — *Soit* $n \in \mathbb{N}$.

1. *Une partition du cercle* S_{2n} *de rayon* $2n$ *dans* X *est donnée par*

$$S_{2n} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & A(\lambda) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \alpha_0^{-n} v_0,\ \lambda \in k_F^{2n} \right\} \sqcup \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi_F A(\mu) & 1 \end{pmatrix} \alpha_0^{n} v_0,\ \mu \in k_F^{2n-1} \right\}.$$

2. *Une partition du cercle* S_{2n+1} *de rayon* $2n+1$ *dans* X *est donnée par*

$$S_{2n+1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & A(\lambda) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \alpha_0^{-(n+1)} v_1,\ \lambda \in k_F^{2n+1} \right\} \sqcup \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi_F A(\mu) & 1 \end{pmatrix} \alpha_0^{n} v_1,\ \mu \in k_F^{2n} \right\}.$$

(4) Défini comme le sommet donné par la classe d'homothétie du réseau standard $\mathscr{O}_F \oplus \mathscr{O}_F$ de $F \oplus F$.

Démonstration. — Il suffit de remarquer que l'on a, pour tous $\lambda \in k_F^{2n}$ et $\mu \in k_F^{2n+1}$:

$$\begin{cases} g^0_{2n,\lambda} &= \begin{pmatrix} 1 & A(\lambda) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi_F^n & 0 \\ 0 & \varpi_F^{-n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi_F^n & 0 \\ 0 & \varpi_F^n \end{pmatrix}; \\ g^0_{2n+1,\mu} &= \begin{pmatrix} 1 & A(\mu) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi_F^{n+1} & 0 \\ 0 & \varpi_F^{-(n+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi_F^n & 0 \\ 0 & \varpi_F^n \end{pmatrix}; \\ g^1_{2n,\lambda} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi_F A(\lambda) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi_F^{-n} & 0 \\ 0 & \varpi_F^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi_F^n & 0 \\ 0 & \varpi_F^n \end{pmatrix}; \\ g^1_{2n+1,\mu} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi_F A(\mu) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi_F^{-(n+1)} & 0 \\ 0 & \varpi_F^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi_F^{n+1} & 0 \\ 0 & \varpi_F^{n+1} \end{pmatrix}; \end{cases}$$

puis d'intégrer ces relations matricielles dans la description (1.3) du cercle S_n en distinguant selon la parité de n. □

Ces considérations permettent donc d'identifier :

- le quotient G/KZ à l'ensemble des sommets de X par l'application $[gKZ \mapsto gv_0]$;
- le quotient G_S/K_0 à l'orbite $\mathscr{O}_{\mathrm{pair}}$ par l'application $[gK_0 \mapsto gv_0]$;
- le quotient G_S/K_1 à l'orbite $\mathscr{O}_{\mathrm{impair}}$ par l'application $[gK_1 \mapsto gv_1]$.

Nous pouvons alors définir le support dans l'arbre d'un élément f de $\mathrm{ind}_{KZ}^G(\sigma)$ (resp. $\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma)$; $\mathrm{ind}_{K_1}^{G_S}(\sigma)$) lorsque σ est une $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible de KZ (resp. de K_0 ; de K_1) : on dit qu'*un sommet v appartient au support de f* s'il est de la forme gv_0 (resp. g_sv_0 ; g_sv_1) avec $g \in G$ (resp. $g_s \in G_S$) élément du support de f. Le support de f dans X sera donc une partie finie de l'ensemble des sommets de X (resp. de l'orbite $\mathscr{O}_{\mathrm{pair}}$; de l'orbite $\mathscr{O}_{\mathrm{impair}}$).

1.3. Décompositions en doubles classes. — Nous rappelons sans démonstration quelques décompositions en doubles classes de G_S. On commence par les décompositions d'Iwasawa de G_S par rapport à K_0 et à K_1 [1, lemme 3.2.2].

LEMME 1.2. — *Pour tout $i \in \{0,1\}$, on a : $G_S = B_SK_i = K_iB_S$.*

Enonçons maintenant la décomposition de Bruhat pour G_S [4, théorème 11.4.(ii)] ainsi qu'un raffinement provenant de la factorisation $B_S = T_SU$ [12, section 3.7].

LEMME 1.3 (Décomposition de Bruhat). — *Le groupe G_S admet les décompositions en doubles classes disjointes suivantes :*

$$G_S = B_S \sqcup B_Sw_0B_S = B_S \sqcup B_Sw_0U.$$

De plus, l'écriture d'un élément de G_S dans la seconde décomposition est unique.

Remarque 1.4. — La double classe $B_S w_0 U$ est une partie ouverte dense de G_S. Par ailleurs, l'égalité $\beta_0 = \alpha_0 w_0$ avec $\alpha_0 \in B_S$ permet d'écrire les décompositions du lemme 1.3 sous la forme

$$G_S = B_S \sqcup B_S \beta_0 B_S = B_S \sqcup B_S \beta_0 U, \tag{1.4}$$

ce qui simplifiera l'étude des espaces de vecteurs $I_S(1)$-invariants des représentations obtenues par induction parabolique.

Remarque 1.5. — Il existe de même une décomposition de Bruhat et une version raffinée pour le groupe fini $\mathrm{SL}_2(k_F)$:

$$\mathrm{SL}_2(k_F) = B_S(k_F) \sqcup B_S(k_F) w_0 B_S(k_F) = B_S(k_F) \sqcup B_S(k_F) w_0 U(k_F)\ ,$$

avec unicité de la factorisation dans la seconde décomposition.

Nous rappelons à présent la décomposition de Cartan de G_S par rapport à K_0 et K_1 [1, lemme 3.2.6].

Lemme 1.6 (Décomposition de Cartan). — *Le groupe G_S admet les décompositions en doubles classes disjointes suivantes :*

$$G_S = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} K_0 \alpha_0^{-n} K_0 = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} K_1 \alpha_0^{-n} K_1.$$

Nous décomposons enfin G_S en classes modulo B_S à droite et I_S (ou $I_S(1)$) à gauche.

Lemme 1.7. — *Le groupe G_S admet les décompositions en doubles classes disjointes suivantes :*

$$G_S = B_S I_S \sqcup B_S \beta_0 I_S = B_S I_S(1) \sqcup B_S \beta_0 I_S(1).$$

Démonstration. — Ces décompositions s'obtiennent par un calcul explicite effectué dans [1, lemme 3.2.8]. □

1.4. Un lemme clé de théorie des représentations. — Nous terminons cette section de préliminaires par un résultat fondamental de la théorie des représentations modulo p [2, Lemma 3].

Proposition 1.8. — *Soient P un pro-p-groupe et V une représentation lisse non nulle de P sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Alors V contient un vecteur non nul invariant sous l'action de P.*

2. Induction parabolique et représentations de la série principale

Cette section étudie les représentations de G_S obtenues par induction parabolique d'un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de B_S, et contient notamment une preuve du théorème 0.1. Cet énoncé repose sur la compréhension de la structure de $\overline{\mathbb{F}}_p[B_S]$-module portée par $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$, qui contient suffisamment d'informations pour déterminer entièrement sa structure de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module.

2.1. Caractères de G_S et de B_S. — Rappelons tout d'abord la structure des $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractères de G_S et de son sous-groupe de Borel B_S [1, section 3.3].

PROPOSITION 2.1. — 1. *Le seul $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de G_S est le caractère trivial.*

2. *L'ensemble des $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractères lisses de B_S est en bijection avec l'ensemble des $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractères lisses de $F^\times$. Plus précisément, tout $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de B_S est de la forme*
$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mapsto \chi(a)$$
avec $\chi : F^\times \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ un caractère lisse uniquement déterminé.

Par abus de notation, on note de la même manière un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $F^\times$ et le $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de B_S qu'il définit à l'aide de la bijection ci-dessus. L'argument qui prouve la proposition 2.1 permet aussi de démontrer que tout caractère lisse de B sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ s'obtient par inflation à partir de deux caractères lisses $\eta_1, \eta_2 : F^\times \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$. On note $\eta_1 \otimes \eta_2$ le $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de B ainsi obtenu et l'on remarque que l'on a en particulier :

$$\forall\ \eta_1, \eta_2 : F^\times \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times,\ (\eta_1 \otimes \eta_2)|_{B_S} = \eta_1 \eta_2^{-1}. \tag{2.1}$$

2.2. Structure de $\overline{\mathbb{F}}_p[B_S]$-module. — Les arguments développés dans cette sous-section sont inspirés des méthodes utilisées pour l'étude des représentations complexes [6, section 9]. On fixe désormais un caractère lisse $\eta : B_S \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ et l'on considère la représentation $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ obtenue par induction parabolique de ce caractère. L'application d'évaluation en I_2 définit un morphisme surjectif de $\overline{\mathbb{F}}_p[B_S]$-modules

$$\phi : \mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta) \twoheadrightarrow \eta \tag{2.2}$$

dont le noyau V_η est égal, par décomposition de Bruhat raffinée, au sous-espace des fonctions de $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ à support dans $B_S w_0 U$. La lissité de ces fonctions fournit alors la caractérisation suivante des éléments de V_η [6, section 9.3, lemme page 64].

Lemme 2.2. — *Un élément* $f \in \mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ *appartient à* V_η *si et seulement s'il existe un sous-groupe ouvert compact* U_0 *de* U *tel que le support de* f *soit contenu dans* $B_S w_0 U_0$.

Ce résultat permet de démontrer la proposition suivante, qui constitue le point-clé de cette sous-section.

Proposition 2.3. — V_η *est une représentation lisse irréductible de* B_S.

Démonstration. — La preuve consiste à donner un modèle de V_η pour lequel l'irréductibilité provient directement d'arguments topologiques. L'espace $C_c^\infty(U)$ des fonctions lisses $U \to \overline{\mathbb{F}}_p$ à support compact est muni de l'action lisse de B_S définie par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \cdot \phi := [u(y) \mapsto \phi\left(u\left(\frac{a^{-1}y+b}{a}\right)\right)]. \tag{2.3}$$

L'application $[f \mapsto [u \mapsto f(w_0u)]]$ induit alors un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[B_S]$-modules

$$\Psi : V_\eta \simeq C_c^\infty(U) \otimes \eta^{-1} \tag{2.4}$$

dont l'inverse est, grâce au lemme 2.2, la fonction envoyant un élément $\phi \in C_c^\infty(U)$ sur la fonction $f \in V_\eta$ définie par $f(bw_0u) = \eta(b)\phi(u)$ pour tous $u \in U$ et $b \in B_S$. L'opérateur Ψ et son inverse sont tous deux B_S-équivariants : on a en effet, pour tout élément $a \in F^\times$ et toute paire $(x, z) \in F \times F$,

$$w_0u(z)\begin{pmatrix} a & x \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} w_0 u\left(\frac{a^{-1}z+x}{a}\right),$$

ce qui implique que l'on a, pour tout triplet $(b, f, y) \in B_S \times V_\eta \times F$,

$$\Psi(b \cdot f)(u(y)) = \eta(b^{-1})(b \cdot \Psi(f))(u(y)).$$

Puisque la torsion par un caractère ne modifie pas la longueur, il nous suffit de prouver l'irréductibilité du $\overline{\mathbb{F}}_p[B_S]$-module $C_c^\infty(U)$ pour conclure. Commençons par rappeler que U est réunion de ses sous-groupes ouverts compacts et que tout $f \in C_c^\infty(U)$ est, par lissité, à support dans un sous-groupe ouvert compact de U. Si U_0 est un tel sous-groupe, on note $C_c^\infty(U_0)$ l'espace des fonctions de $C_c^\infty(U)$ à support dans U_0. On vérifie alors facilement que l'espace des vecteurs U_0-invariants de $C_c^\infty(U_0)$ est de dimension 1 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ et de base la fonction indicatrice 1_{U_0} : en effet, si f est un élément U_0-invariant de $C_c^\infty(U_0)$, l'application de la formule (2.3) pour $a = 1$ montre que l'on doit avoir, pour tout $x \in F$,

$$f(u(x)) = (u(x) \cdot f)(I_2) = f(I_2).$$

ce qui prouve que f est constante et donc colinéaire à 1_{U_0}.

Comme U_0 est un pro-p-groupe, le lemme 1.8 assure que toute sous-représentation non nulle de $C_c^\infty(U_0)$ contient 1_{U_0}. Pour conclure, il nous suffit de prouver que pour tout choix de sous-groupe ouvert compact U_0, sa fonction indicatrice engendre le $\overline{\mathbb{F}}_p[B_S]$-module $C_c^\infty(U)$. Pour cela, on remarque que la famille de sous-groupes ouverts $U_n := \alpha_0^n U_0 \alpha_0^{-n}$ ($n \in \mathbb{N}$) est un système fondamental de voisinages de I_2 dans U et que l'action de U sur la fonction 1_{U_n} permet de construire toutes les fonctions indicatrices translatées $1_{U_n u}$ avec $u \in U$. En écrivant par ailleurs que $U_0 = \alpha_0^{-n} U_n \alpha_0^n$ avec $\alpha_0 \in T_S$, on voit que l'action de $B_S = T_S U$ sur 1_{U_0} permet de construire tout élément de l'espace $C_c^\infty(U)$, ce qui termine la démonstration. □

Corollaire 2.4. — *$\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ est un $\overline{\mathbb{F}}_p[B_S]$-module de longueur* 2.

Démonstration. — C'est une reformulation de la proposition 2.3 à partir de la définition de V_η comme noyau de la surjection (2.2). □

Remarque 2.5. — La proposition 2.3 assure en particulier que les seuls sous-quotients irréductibles du $\overline{\mathbb{F}}_p[B_S]$-module $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ sont le caractère η et le sous-$\overline{\mathbb{F}}_p[B_S]$-module V_η, qui sont tous deux de multiplicité 1.

Étudions maintenant la décomposabilité du $\overline{\mathbb{F}}_p[B_S]$-module $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$. Autrement dit, cherchons sous quelles conditions la suite exacte courte de $\overline{\mathbb{F}}_p[B_S]$-modules

$$0 \longrightarrow V_\eta \longrightarrow \mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta) \longrightarrow \eta \longrightarrow 0 \tag{2.5}$$

peut admettre un scindage, ce qui revient à déterminer les cas où η est isomorphe à un sous-$\overline{\mathbb{F}}_p[B_S]$-module de $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$. Supposons donc qu'il existe une fonction lisse non nulle $f : G_S \to \overline{\mathbb{F}}_p$ telle que $b \cdot f = \eta(b) f$ pour tout élément $b \in B_S$, i.e. telle que :

$$\forall\, b \in B_S,\ \forall\, g \in G_S,\ f(gb) = \eta(b) f(g) = f(bg). \tag{2.6}$$

La droite engendrée par f est alors stable sous l'action de B_S et f est fixe sous l'action de U. Comme f est lisse, on sait qu'il existe aussi un entier $N \geq 0$ tel que f soit fixe sous l'action du sous-groupe $U_N := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \varpi_F^N \mathcal{O}_F & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Un calcul direct montre que l'on a $\overline{u}(x) = \alpha_0^k \overline{u}(x\varpi_F^{2k}) \alpha_0^{-k}$ pour tout $x \in F^\times$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, ce qui permet de déduire de la relation (2.6) que f est fixe sous l'action du groupe $\overline{U}$ des matrices unipotentes inférieures. Il suffit alors de remarquer que $w_0 = u(-1)\overline{u}(1)u(-1)$ pour obtenir l'invariance de f sous l'action de w_0, puis d'utiliser la décomposition de Bruhat pour conclure que la droite engendrée par f est stable sous l'action de G_S. Elle définit donc un $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module de dimension 1, qui est nécessairement le caractère trivial d'après le premier point de la proposition 2.1. Le caractère η, qui est par construction égal à la restriction à B_S du $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module engendré par f, est donc lui aussi trivial.

Réciproquement, la fonction constante égale à 1 engendre un sous-$\overline{\mathbb{F}}_p[B_S]$-module de $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1})$ qui est canoniquement isomorphe au caractère trivial. La proposition 2.3 assure de plus que ce sous-module est d'intersection nulle avec le noyau $V_{\mathbf{1}}$ de la surjection (2.2), ce qui prouve grâce au corollaire 2.4 que $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1})$ est somme directe de ses deux sous-quotients irréductibles. Nous avons donc démontré le résultat suivant, qui n'est autre que la seconde partie de la première assertion du théorème 0.1.

PROPOSITION 2.6. — *Le $\overline{\mathbb{F}}_p[B_S]$-module $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ est décomposable si et seulement si η est le caractère trivial. Dans ce cas, il est totalement décomposé.*

2.3. Structure de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module. — Les résultats qui précèdent vont nous permettre de déterminer la structure des représentations de G_S obtenues par induction parabolique. En particulier, nous obtiendrons un critère simple d'irréductibilité.

PROPOSITION 2.7. — *Soit $\eta : B_S \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ un caractère lisse.*

1. *Si η est non trivial, alors $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ est une représentation irréductible de G_S.*
2. *Le $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1})$ est indécomposable de longueur 2, avec le caractère trivial comme sous-objet et la représentation de Steinberg $\mathrm{St}_S := \frac{\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1})}{\mathbf{1}}$ comme quotient.*

Démonstration. — Si $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ est un $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module réductible, le corollaire 2.4 et la remarque 2.5 impliquent que c'est un objet de longueur 2 admettant un sous-quotient de dimension 1. La proposition 2.1 implique donc que $\mathbf{1}$ est sous-quotient du $\overline{\mathbb{F}}_p[B_S]$-module $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$, ce qui prouve que $\eta = \mathbf{1}$ grâce à la remarque 2.5.

Réciproquement, la fonction constante égale à 1 engendre un sous-$\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module de $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1})$ isomorphe au caractère trivial. On déduit donc du corollaire 2.4 que le $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1})$ est de longueur 2 avec pour quotient irréductible la représentation $\mathrm{St}_S := \frac{\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1})}{\mathbf{1}}$. Ce module est cependant indécomposable : dans le cas contraire, la remarque 2.5 impliquerait que le sous-espace des fonctions de $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1})$ à support dans $B_S w_0 U$, qui n'est autre que l'espace $V_{\mathbf{1}}$ introduit dans la section 2.2, soit stable sous l'action de G_S. Ceci est faux puisque pour tout sous-groupe ouvert compact U_0 de U, l'image de la fonction indicatrice de l'ouvert $B_S w_0 U_0$ sous l'action de w_0 est égale à la fonction indicatrice du fermé $B_S \overline{U}_0$, où $\overline{U_0} := w_0 U_0 w_0$ est un sous-groupe ouvert compact de $\overline{U}$, et n'est donc pas à support dans $B_S w_0 U$. □

Une conséquence immédiate de ce résultat concerne le comportement des représentations non supercuspidales vis-à-vis de la conjugaison par α. Elle sera utile dans la section 3.5, où nous devrons nous préoccuper de l'influence de certains choix sur nos résultats.

PROPOSITION 2.8. — *Toute $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible non supercuspidale de G_S est isomorphe à sa représentation α-conjuguée, où $\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_F \end{pmatrix}$.*

Démonstration. — Si V est une représentation lisse irréductible non supercuspidale de G_S, la proposition 2.7 assure qu'elle vérifie l'un des trois cas suivants :

- V est le caractère trivial ;
- $V \simeq \mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ avec $\eta : B_S \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ caractère lisse non trivial ;
- V est isomorphe à la représentation de Steinberg St_S.

Si V est le caractère trivial, il n'y a rien à démontrer. S'il existe un caractère lisse $\eta : B_S \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ tel que $V \simeq \mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$, on vérifie directement[(5)] que l'application qui envoie $f \in V$ sur la fonction $[x \mapsto f(\alpha^{-1}x\alpha)]$ établit un isomorphisme de V^α sur V. Enfin, si V est isomorphe à la représentation de Steinberg, la proposition 2.7 assure que V est l'unique quotient irréductible du $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1})$. Par suite, V^α est un quotient irréductible du $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module $\left(\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1})\right)^\alpha \simeq \mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1})$, et est donc elle aussi isomorphe à St_S. □

2.4. Espaces de vecteurs invariants sous $I_S(1)$. — Le lemme 1.7 assure que tout élément $I_S(1)$-invariant de $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ est entièrement déterminé par ses valeurs en I_2 et en β_0, ce qui prouve directement le résultat suivant.

PROPOSITION 2.9. — *L'espace des vecteurs $I_S(1)$-invariants de $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ est de dimension 2 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ et admet pour base la famille de fonctions $I_S(1)$-invariantes $\{\ell_{1,\eta},\ \ell_{2,\eta}\}$ satisfaisant aux égalités suivantes :*

$$\begin{cases} \ell_{1,\eta}(I_2) = 1 \ ; \ \ell_{2,\eta}(I_2) = 0 \ ; \\ \ell_{1,\eta}(\beta_0) = 0 \ ; \ \ell_{2,\eta}(\beta_0) = 1. \end{cases}$$

Étudions l'action du sous-groupe d'Iwahori I_S sur ces fonctions. Un élément $i \in I_S$ peut être écrit sous la forme $i = ti_1$ avec $t \in T_S(\mathcal{O}_F^\times)$ et $i_1 \in I_S(1)$. On a alors :

$$\forall\, f \in \left(\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)\right)^{I_S(1)},\ \forall\, x \in G_S,\ (i \cdot f)(x) = (t \cdot f)(x) = f(xt). \tag{2.7}$$

Le lemme 1.7 permet de distinguer deux possibilités pour l'élément $x \in G_S$.

(5) Comme cela est fait dans [1, proposition 2.2.5].

- Si $x = b\xi$ avec $b \in B_S$ et $\xi \in I_S(1)$, alors on a $xt = bt(t^{-1}\xi t)$. Comme $t \in T_S(\mathcal{O}_F^\times)$ normalise $I_S(1)$ et comme f est invariante sous l'action de $I_S(1)$, on obtient :

$$(t \cdot f)(x) = \eta(bt)f(1) = \eta(t)f(b) = \eta(t)f(x). \tag{2.8}$$

- Si $x = b\beta_0\xi$ avec $b \in B_S$ et $\xi \in I_S(1)$, on a $xt = b(\beta_0 t\beta_0^{-1})\beta_0(t^{-1}\xi t)$ avec $t^{-1}\xi t \in I_S(1)$ et $\beta_0 t\beta_0^{-1} \in T_S(\mathcal{O}_F^\times)$. On en déduit donc que l'on a :

$$(t \cdot f)(x) = \eta(b\beta_0 t\beta_0^{-1})f(\beta_0) = \eta(\beta_0 t\beta_0^{-1})f(b\beta_0) = \eta(\beta_0 t\beta_0^{-1})f(x). \tag{2.9}$$

Notons η^+ et η^- les $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractères lisses de I_S respectivement obtenus par inflation de la restriction à $T_S(\mathcal{O}_F^\times)$ des caractères η et $\eta^{w_0} := \eta(w_0.w_0^{-1})$: nous avons alors démontré le résultat suivant.

Lemme 2.10. — *Le sous-groupe d'Iwahori I_S agit respectivement sur les fonctions $\ell_{1,\eta}$ et $\ell_{2,\eta}$ par les caractères η^+ et η^-. Autrement dit, on a :*

$$\forall\ i \in I_S,\ \begin{cases} i \cdot \ell_{1,\eta} = \eta^+(i)\ell_{1,\eta}\ ; \\ i \cdot \ell_{2,\eta} = \eta^-(i)\ell_{2,\eta}. \end{cases}$$

En particulier, les seules composantes I_S-isotypiques non nulles de $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ sont celles associées à η^+ et à η^-. Un calcul direct reposant sur l'égalité $w_0^2 = I_2$ montre par ailleurs que $\eta^+ = \mathbf{1}$ si et seulement si η est un caractère non ramifié de $F^\times$, ce qui fournit directement le résultat suivant.

Corollaire 2.11. — *Soit $\eta : B_S \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ un caractère lisse.*

1. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*
   i) $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ *admet des vecteurs I_S-invariants non nuls ;*
   ii) $\eta^+ = \mathbf{1}$ *;*
   iii) $\eta^- = \mathbf{1}$ *;*
   iv) η *est non ramifié.*
2. *Pour tout caractère lisse non ramifié $\eta : B_S \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$, on a*

$$\left(\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)\right)^{I_S} = \left(\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)\right)^{I_S(1)}.$$

Passons à l'étude des vecteurs $I_S(1)$-invariants de la représentation de Steinberg.

Proposition 2.12. — *L'espace des vecteurs $I_S(1)$-invariants du $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module St_S est de dimension 1 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Plus précisément, on dispose de la suite exacte courte suivante de $\overline{\mathbb{F}}_p$-espaces vectoriels :*

$$0 \longrightarrow \mathbf{1} \longrightarrow (\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1}))^{I_S(1)} \longrightarrow (\mathrm{St}_S)^{I_S(1)} \longrightarrow 0. \tag{2.10}$$

Démonstration. — En appliquant le foncteur des $I_S(1)$-invariants, qui est exact à gauche, à la suite exacte courte de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules

$$0 \longrightarrow \mathbf{1} \longrightarrow \mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1}) \longrightarrow \mathrm{St}_S \longrightarrow 0$$

définissant la représentation de Steinberg, on obtient la suite exacte suivante de $\overline{\mathbb{F}}_p$-espaces vectoriels :

$$(2.11) \qquad 0 \longrightarrow \overline{\mathbb{F}}_p 1_{G_S} \longrightarrow \overline{\mathbb{F}}_p \ell_{1,\mathbf{1}} \oplus \overline{\mathbb{F}}_p \ell_{2,\mathbf{1}} \longrightarrow (\mathrm{St}_S)^{I_S(1)}.$$

Nous cherchons donc à prouver la surjectivité de la flèche de droite dans la suite exacte (2.11). Soit $f \in (\mathrm{St}_S)^{I_S(1)}$ et $\tilde{f} \in \mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1})$ un relèvement de f. L'invariance de f sous l'action de $I_S(1)$ se traduit alors de la manière suivante pour $\tilde{f}$:

$$(2.12) \qquad \forall\, i \in I_S(1),\ \exists\, \lambda(i) \in \overline{\mathbb{F}}_p \mid i \cdot \tilde{f} - \tilde{f} = \lambda(i) 1_{G_S}.$$

Il nous suffit donc de démontrer la nullité de la fonction $\lambda : I_S(1) \to \overline{\mathbb{F}}_p$ pour conclure. Pour cela, rappelons tout d'abord que la définition des éléments de $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1})$ assure que nous disposons des identités suivantes :

$$(2.13) \quad \forall\, b \in B_S,\ \forall\, x, i \in I_S(1), \begin{cases} (i \cdot \tilde{f} - \tilde{f})(bx) = \tilde{f}(xi) - \tilde{f}(x)\ ; \\ (i \cdot \tilde{f} - \tilde{f})(bw_0x) = \tilde{f}(w_0xi) - \tilde{f}(w_0x). \end{cases}$$

Remarquons ensuite que λ est un homomorphisme de groupes puisqu'il vérifie :

$$\begin{aligned} \forall\, u, v \in I_S(1),\ \lambda(uv)1_{G_S} &= u \cdot (v \cdot \tilde{f}) - u \cdot \tilde{f} + u \cdot \tilde{f} - \tilde{f} \\ &= u \cdot (\tilde{f} + \lambda(v)1_{G_S}) - u \cdot \tilde{f} + \lambda(u)1_{G_S} \\ &= (\lambda(u) + \lambda(v))1_{G_S}\ , \end{aligned}$$

la dernière égalité provenant de l'invariance de la fonction 1_{G_S} sous l'action de $I_S(1)$.

Sachant d'une part que $I_S(1)$ est engendré par $U(\mathcal{O}_F)$, $\overline{U}(\mathfrak{p}_F)$ et $T_S(1+\mathfrak{p}_F)$, et d'autre part que la relation (2.12) implique que $\lambda(u) = (u \cdot \tilde{f} - \tilde{f})(I_2)$ pour tout $u \in I_S(1)$, on termine la démonstration comme suit : l'appartenance de $\tilde{f}$ à $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1})$ implique que pour tout élément u de $U(\mathcal{O}_F)$ ou de $T_S(1+\mathfrak{p}_F)$, on a $\lambda(u) = 0$. Par ailleurs, si $u = w_0^{-1} v w_0 \in \overline{U}(\mathfrak{p}_F)$ avec $v \in U(\mathfrak{p}_F)$, la seconde relation de (2.13) assure que l'on a

$$\lambda(u) = \lambda(w_0^{-1} v w_0) = \tilde{f}(vw_0) - \tilde{f}(w_0) = 0$$

car v appartient à B_S. L'homomorphisme λ est donc identiquement nul puisque nul sur un système générateur de $I_S(1)$, et $\tilde{f}$ est bien invariant sous l'action de $I_S(1)$. □

COROLLAIRE 2.13. — *Pour tout caractère lisse $\eta : B_S \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\times}$, le $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module porté par $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ est engendré par ses vecteurs $I_S(1)$-invariants.*

Démonstration. — Si η est non trivial, la proposition 2.7 assure que la représentation $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ est irréductible et le résultat découle immédiatement du lemme 1.8. Considérons à présent un élément $\tilde{F}$ de $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1})$. Comme St_S est une représentation irréductible de G_S, elle est engendrée par ses vecteurs $I_S(1)$-invariants. L'image de $\tilde{F}$ dans ce quotient est donc de la forme $\sum_{j\in J} g_j \cdot f_j$ avec J ensemble fini d'indices et, pour tout $j \in J$, $g_j \in G_S$ et $f_j \in (\mathrm{St}_S)^{I_S(1)}$. La suite exacte courte (2.10) assure que chaque f_j se relève en un élément $F_j \in \left(\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1})\right)^{I_S(1)}$ et que la différence $\tilde{F} - \sum_{j\in J} g_j \cdot F_j$ appartient au caractère trivial, et est donc une fonction constante ℓ. Nous avons ainsi écrit $\tilde{F}$ sous la forme $\ell + \sum_{j\in J} g_j \cdot F_j$ avec ℓ et les fonctions F_j qui sont des éléments $I_S(1)$-invariants de $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1})$, ce qui termine la démonstration. □

2.5. Absence d'isomorphismes non triviaux. — Le caractère trivial est le seul $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module de dimension finie apparaissant parmi les représentations non supercuspidales de G_S, donc n'est pas isomorphe à une représentation paraboliquement induite ou à la représentation de Steinberg, qui sont de dimension infinie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.
Puisque les $\overline{\mathbb{F}}_p$-espaces vectoriels formés par les vecteurs $I_S(1)$-invariants de deux $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules isomorphes sont isomorphes, donc de même dimension sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, les propositions 2.9 et 2.12 excluent toute possibilité d'isomorphisme entre la représentation de Steinberg et une représentation de la forme $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$[6].
Reste donc à étudier la possibilité d'un isomorphisme entre deux représentations obtenues par induction parabolique. Si η et χ sont deux $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractères lisses de B_S, la réciprocité de Frobenius lisse assure que

$$\mathrm{Hom}_{G_S}(\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta), \mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\chi)) = \mathrm{Hom}_{B_S}(\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)|_{B_S}, \chi).$$

Par conséquent, l'existence d'un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules entre $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ et $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\chi)$ nécessite que χ soit un quotient du $\overline{\mathbb{F}}_p[B_S]$-module $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$, donc que $\chi = \eta$ d'après la remarque 2.5. Cette même remarque assure que χ est quotient de multiplicité 1 pour $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\chi)$, donc que l'espace $\mathrm{End}_{G_S}(\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\chi)) = \mathrm{Hom}_{B_S}(\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\chi), \chi)$ est de dimension 1 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Nous avons ainsi démontré le résultat suivant.

Proposition 2.14. — *Deux représentations lisses irréductibles non supercuspidales π_1 et π_2 de G_S sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ sont isomorphes si et seulement s'il existe un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse η de B_S tel que $\pi_1 \simeq \pi_2 \simeq \mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$. Dans ce cas, l'espace d'entrelacements associé est de dimension 1 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.*

[6] On peut aussi remarquer que le corollaire 2.4 implique que la restriction à B_S de la représentation de Steinberg est irréductible, tandis que la restriction à B_S d'une représentation paraboliquement induite est de longueur 2.

2.6. Lien avec les représentations non supercuspidales de $\mathrm{GL}_2(F)$**.** — On rappelle tout d'abord la structure des $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-modules obtenus, à torsion par un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de G et isomorphisme près, par induction parabolique d'un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de B [2, Theorem 30].

THÉORÈME 2.15. — *Soit $\eta : F^\times \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ un caractère lisse.*

1. *Si η est non trivial, la représentation de G portée par $\mathrm{Ind}_B^G(\eta \otimes \mathbf{1})$ est irréductible.*
2. *Le $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-module $\mathrm{Ind}_B^G(\mathbf{1})$ est indécomposable de longueur 2 avec la représentation triviale comme sous-objet et la représentation de Steinberg* St *comme quotient.*

Le prochain résultat établit un lien très fort entre représentations non supercuspidales de $\mathrm{SL}_2(F)$ et de $\mathrm{GL}_2(F)$.

THÉORÈME 2.16. — *Pour tout $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse η de $F^\times$, l'application de restriction à G_S induit un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules entre $\mathrm{Ind}_B^G(\eta \otimes \mathbf{1})|_{G_S}$ et $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$, ainsi qu'un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules entre $\mathrm{St}|_{G_S}$ et St_S.*

Démonstration. — Puisque $G = BG_S$, la décomposition de Mackey pour les induites lisses [13, section I.5.5] assure l'existence de l'isomorphisme annoncé entre les $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules portés par $\mathrm{Ind}_B^G(\eta\otimes\mathbf{1})|_{G_S}$ et $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$. En particulier, il existe donc un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules $\mathrm{Ind}_B^G(\mathbf{1})|_{G_S} \simeq \mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1})$ qui induit un morphisme injectif de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules

$$\mathrm{Ind}_B^G(\mathbf{1})/\mathbf{1} \hookrightarrow \mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1})/\mathbf{1}.$$

Le membre de droite (resp. de gauche) de cette application est par définition égal à St_S (resp. à $\mathrm{St}|_{G_S}$), ce qui permet de conclure par irréductibilité de ces représentations $\mathrm{St}|_{G_S} \simeq \mathrm{St}_S$ et termine la démonstration. □

REMARQUE 2.17. — Grâce au théorème 2.16, on déduit immédiatement l'énoncé suivant des résultats de la section 2.4, de [2, Lemma 28 & Corollary 36(1)] et de [3, Lemma 27] : *si W est une représentation lisse de G sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ isomorphe à un sous-quotient d'une représentation de la forme $\mathrm{Ind}_B^G(\eta)$ avec $\eta : B \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ caractère lisse, et si V désigne la restriction à G_S de W, alors $W^{I(1)} = V^{I_S(1)}$.*

3. Classification des représentations lisses irréductibles de $\mathrm{SL}_2(F)$

3.1. Représentations lisses irréductibles des sous-groupes ouverts compacts maximaux de G_S. — Pour tout entier $r \in \{0, \dots, p-1\}$, on note $\mathrm{Sym}^r(\overline{\mathbb{F}}_p^2)$ la représentation du groupe fini $\mathrm{SL}_2(k_F)$ ayant pour espace sous-jacent $\bigoplus_{i=0}^{r} \overline{\mathbb{F}}_p x^{r-i} y^i$ sur lequel un élément $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(k_F)$ agit par :

$$\mathrm{Sym}^r\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)(x^{r-i}y^i) := (ax+cy)^{r-i}(bx+dy)^i.$$

Pour tout f-uplet d'entiers $\vec{r} :=(r_0, \dots, r_{f-1})$ de $\{0, \dots, p-1\}^f$, on définit $\mathrm{Sym}^{\vec{r}}(\overline{\mathbb{F}}_p^2)$ comme la représentation de $\mathrm{SL}_2(k_F)$ ayant pour espace vectoriel sous-jacent

$$V_{\vec{r}} := \mathrm{Sym}^{r_0}(\overline{\mathbb{F}}_p^2) \otimes_{\overline{\mathbb{F}}_p} \mathrm{Sym}^{r_1}(\overline{\mathbb{F}}_p^2) \otimes_{\overline{\mathbb{F}}_p} \cdots \otimes_{\overline{\mathbb{F}}_p} \mathrm{Sym}^{r_{f-1}}(\overline{\mathbb{F}}_p^2),$$

sur lequel un élément $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(k_F)$ agit par

$$\mathrm{Sym}^{\vec{r}}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)(v_0 \otimes \cdots v_{f-1}) := \bigotimes_{j=0}^{f-1} \mathrm{Sym}^{r_j}\left(\begin{pmatrix} a^{p^j} & b^{p^j} \\ c^{p^j} & d^{p^j} \end{pmatrix}\right)(v_j).$$

Toute représentation irréductible de $\mathrm{SL}_2(k_F)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ est isomorphe à une représentation de la forme $\mathrm{Sym}^{\vec{r}}(\overline{\mathbb{F}}_p^2)$ pour un unique $\vec{r} \in \{0, \dots, p-1\}^f$ [7, section 1]. On obtient alors la description suivante des $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations lisses irréductibles(7) de K_0.

Lemme 3.1. — *Soit π une représentation lisse irréductible de K_0 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Il existe un unique f-uplet $\vec{r} \in \{0, \dots, p-1\}^f$ tel que π soit isomorphe à la représentation de K_0 obtenue par inflation de la représentation $\mathrm{Sym}^{\vec{r}}(\overline{\mathbb{F}}_p^2)$. On note $\sigma_{\vec{r}}$ cette représentation.*

Démonstration. — Soit π une représentation lisse irréductible de K_0 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. D'après le lemme 1.8, elle contient un vecteur non nul invariant sous l'action de Γ_S. Comme Γ_S est un sous-groupe distingué de K_0, l'irréductibilité de π assure que l'action de K_0 sur π se factorise à travers le quotient $K_0/\Gamma_S \simeq \mathrm{SL}_2(k_F)$, d'où le résultat. □

(7) De telles représentations sont parfois appelées *poids de Serre* dans la littérature. Vignéras nous a cependant signalé l'étrangeté de cette terminologie étant donné que Serre n'avait rien à voir avec l'étude de ces objets. C'est pourquoi nous n'utilisons pas cette appellation ici.

COROLLAIRE 3.2. — *Pour toute représentation lisse irréductible π de K_1 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, il existe un unique paramètre $\vec{r} \in \{0,\dots,p-1\}^f$ tel que π soit isomorphe à la représentation $\sigma_{\vec{r}}^{\alpha}$.*

Démonstration. — Si π est une $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible de K_1, alors $\pi^{\alpha^{-1}}$ est une représentation lisse irréductible de $\alpha^{-1}K_1\alpha = K_0$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Le lemme 3.1 implique donc que la représentation $\pi^{\alpha^{-1}}$ est isomorphe à une unique représentation de la forme $\sigma_{\vec{r}}$, donc que la représentation $\pi = (\pi^{\alpha^{-1}})^{\alpha}$ est isomorphe à $\sigma_{\vec{r}}^{\alpha}$ avec unicité du paramètre $\vec{r}$. □

REMARQUE 3.3. — Dans [2, proposition 4], Barthel et Livné prouvent que toute représentation lisse irréductible de KZ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ à caractère central trivial sur ϖ_F est isomorphe à $\sigma_{\vec{r},m} := \sigma_{\vec{r}} \otimes \det^m$ avec $\vec{r} \in \{0,\dots,p-1\}^f$ et $m \in \{0,\dots,p-2\}$ uniques.

Nous terminons cette première sous-section en introduisant une notation déjà présente dans les travaux de Barthel-Livné [2, 3] et de Breuil [5] : pour tout $\vec{r} = (r_0,\dots,r_{f-1})$, on pose $U_{\vec{r}} := \bigotimes_{i=0}^{f-1} U_{r_i} \in \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\sigma_{\vec{r}})$, où $U_{r_i} \in \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\sigma_{r_i})$ est défini par $U_{r_i}(y^{r_i}) = y^{r_i}$ et :

$$\forall\ j \in \{0,\dots,r_i-1\},\ U_{r_i}(x^{r_i-j}y^j) = 0.$$

3.2. Algèbres de Hecke associées à K_0

3.2.1. *Rappels sur les algèbres de Hecke.* — Soit H un sous-groupe ouvert d'un groupe topologique localement profini Γ et (σ, V) une $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse de H. On appelle *algèbre de Hecke associée au triplet* (Γ, H, σ) la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre $\mathscr{H}(\Gamma, H, \sigma)$ des endomorphismes du $\overline{\mathbb{F}}_p[\Gamma]$-module $\mathrm{ind}_H^{\Gamma}(\sigma)$ obtenu par induction compacte :

$$\mathscr{H}(\Gamma, H, \sigma) := \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p[\Gamma]}(\mathrm{ind}_H^{\Gamma}(\sigma)).$$

Nous utiliserons volontiers une autre description de cette algèbre lorsque nous voudrons faire des calculs explicites [2, proposition 5].

PROPOSITION 3.4. — *La réciprocité de Frobenius compacte induit un isomorphisme d'algèbres entre l'algèbre de Hecke $\mathscr{H}(\Gamma, H, \sigma)$ et l'algèbre de convolution $\mathbb{H}(\Gamma, H, \sigma)$ formée des fonctions $f : \Gamma \to \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(V)$ telles que :*

i) *pour tout $v \in V$, l'application $[g \mapsto f(g)(v)]$ est lisse et à support compact modulo H (à gauche) ;*
ii) $\forall\ h_1, h_2 \in H,\ \forall\ g \in \Gamma,\ f(h_1 g h_2) = \sigma(h_1) f(g) \sigma(h_2)$.

La structure d'algèbre de $\mathbb{H}(\Gamma, H, \sigma)$ est donnée par le produit de convolution défini par la formule suivante :

$$\forall\ f_1, f_2 \in \mathbb{H}(\Gamma, H, \sigma),\ \forall g \in \Gamma,\ (f_1 \star f_2)(g) = \sum_{x \in \Gamma/H} f_1(x) f_2(x^{-1}g).$$

Remarque 3.5. — Lorsque V est de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, l'espace $\mathbb{H}(\Gamma, H, \sigma)$ est celui des fonctions $f : \Gamma \to \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(V)$ lisses à support compact modulo H qui vérifient la condition (ii) ci-dessus.

Désignons par $T_f \in \mathscr{H}(\Gamma, H, \sigma)$ l'opérateur de Hecke associé à $f \in \mathbb{H}(\Gamma, H, \sigma)$ par l'isomorphisme de la proposition 3.4. Lorsque le support de f est réduit à une seule double classe Hg_0H, on dispose d'une formule explicite assez simple permettant de calculer T_f sur les fonctions standard [2, Equation (9)]. Rappelons que pour toute paire $(g, v) \in \Gamma \times \sigma$, on note $[g, v] \in \mathrm{ind}_H^\Gamma(\sigma)$ la fonction standard définie par

$$\forall\ x \in \Gamma,\ [g, v](x) := \begin{cases} \sigma(xg)(v) & \text{si } x \in Hg^{-1}\ ; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $\{k_i g_0^{-1}\}_{i \in I}$ est un système de représentants des classes à gauche modulo H de $Hg_0^{-1}H$, i.e. si $Hg_0^{-1}H = \bigsqcup_{i \in I} k_i g_0^{-1} H$, alors on a :

$$\forall\ g \in \Gamma,\ \forall\ v \in V,\ T_f([g, v]) = \sum_{i \in I} [g k_i g_0^{-1}, f(g_0)\sigma(k_i^{-1})v]. \tag{3.1}$$

Terminons par un énoncé utile concernant le comportement de ces algèbres vis-à-vis de l'action par conjugaison [1, corollaire 2.3.6]. On rappelle que l'on pose $H^\gamma := \gamma H \gamma^{-1}$.

Proposition 3.6. — *Pour tout élément $\gamma \in \Gamma$, l'application identité induit un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbres :*

$$\mathscr{H}(\Gamma, H, \sigma) \simeq \mathscr{H}(\Gamma, H^\gamma, \sigma^\gamma).$$

3.2.2. *Définition de l'opérateur $\tau_{\vec{r}}$.* — Fixons une $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible $\sigma_{\vec{r}}$ de K_0 et intéressons-nous à la structure de l'algèbre de Hecke $\mathscr{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G_S, K_0, \sigma_{\vec{r}})$, soit donc à celle de l'algèbre de convolution $\mathbb{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G_S, K_0, \sigma_{\vec{r}})$. La décomposition de Cartan de G_S relative à K_0 permet de reprendre la preuve de [2, Lemma 7], qui ne repose que sur l'action des éléments de U, pour obtenir l'énoncé suivant.

Lemme 3.7. — *L'espace vectoriel $\mathbb{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G_S, K_0, \sigma_{\vec{r}})$ admet pour base sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ la famille $\{\phi_n,\ n \geq 0\}$ définie comme suit :*

i) *le support de ϕ_n est égal à la double classe $K_0 \alpha_0^{-n} K_0$;*

ii) *si n est strictement positif,* $\phi_n(\alpha_0^{-n}) = U_{\vec{r}}$ *;*
iii) $\phi_0(I_2) = \mathrm{Id}$.

Pour tout entier $n \geq 0$, on note $\tau_n \in \mathscr{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G_S, K_0, \sigma_{\vec{r}})$ l'opérateur de Hecke correspondant à la fonction $\phi_n \in \mathbb{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G_S, K_0, \sigma_{\vec{r}})$ par réciprocité de Frobenius compacte[8]. La famille $\{\tau_n,\ n \geq 0\}$ est donc une base sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ de $\mathscr{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G_S, K_0, \sigma_{\vec{r}})$, et elle satisfait de plus aux relations suivantes.

PROPOSITION 3.8. — *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\tau_{n+1} = \begin{cases} (\tau_1)^{n+1} & si\ \vec{r} \neq \vec{0}\,; \\ (\tau_1+1)^{n+1} - (\tau_1+1)^n & si\ \vec{r} = \vec{0}. \end{cases}$$

Démonstration. — Il suffit de remarquer que l'égalité suivante est vérifiée dans G :

$$\alpha_0^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_F^{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi_F^{-n} & 0 \\ 0 & \varpi_F^{-n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varpi_F^{-n} & 0 \\ 0 & \varpi_F^{-n} \end{pmatrix} \alpha^{2n},$$

avec $\begin{pmatrix} \varpi_F^{-n} & 0 \\ 0 & \varpi_F^{-n} \end{pmatrix}$ élément central de G, de sorte que la double classe $K_0\alpha_0^{-n}K_0$ est contenue dans la double classe $KZ\alpha^{-2n}K$. Comme $\phi_n(\alpha_0^{-n})$ est égal à la valeur en α^{-2n} de la $2n$-ième fonction définissant la base sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ de l'algèbre de convolution associée au triplet $(G, KZ, \sigma_{\vec{r}})$ donnée par [2, Lemma 7], on peut conclure en reprenant les calculs de [2, proposition 8] qui lient les opérateurs $T_{2n} \in \mathscr{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, KZ, \sigma_{\vec{r}})$ entre eux. On obtient ainsi que

$$\tau_n = \begin{cases} \tau_1^n & \text{si } \vec{r} \neq \vec{0}\ ; \\ (\tau_1+1)^{n-1}\tau_1 & \text{si } \vec{r} = \vec{0}\ ; \end{cases}$$

ce qui prouve le résultat annoncé. □

COROLLAIRE 3.9. — *La $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre $\mathscr{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G_S, K_0, \sigma_{\vec{r}})$ est égale à l'algèbre de polynômes $\overline{\mathbb{F}}_p[\tau_{\vec{r}}]$, où l'on a posé*

$$\tau_{\vec{r}} = \begin{cases} \tau_1 & si\ \vec{r} \neq \vec{0}\ ; \\ \tau_1 + 1 & si\ \vec{r} = \vec{0}. \end{cases} \tag{3.2}$$

REMARQUE 3.10. — Il suffirait de prendre $\tau_{\vec{r}} = \tau_1$ pour obtenir la structure polynomiale de $\mathscr{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G_S, K_0, \sigma_{\vec{r}})$. Le choix effectué ici pour définir $\tau_{\vec{r}}$ provient d'un souci de compatibilité avec la théorie développée pour $\mathrm{GL}_2(F)$, et sera notamment justifié par la proposition 3.14 ci-après.

[8] i.e. par l'isomorphisme de la proposition 3.4.

3.2.3. *Action de $\tau_{\vec{r}}$ sur les fonctions standard.* — Nous avons précédemment rappelé pourquoi le quotient G_S/K_0 est en bijection avec l'ensemble des sommets de l'arbre de Bruhat-Tits X situés à distance paire du sommet standard v_0. Cette remarque permet d'obtenir une description assez simple des doubles classes modulo K_0 de G_S en termes de classes à gauche modulo K_0.

PROPOSITION 3.11. — *Pour tout entier $n \geq 0$, la double classe $K_0\alpha_0^n K_0$ possède la décomposition suivante en classes à gauche disjointes :*

$$K_0\alpha_0^n K_0 = \left(\bigsqcup_{\lambda \in k_F^{2n}} \begin{pmatrix} A(\lambda) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \alpha_0^n K_0 \right) \sqcup \left(\bigsqcup_{\mu \in k_F^{2n-1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi_F A(\mu) & 1 \end{pmatrix} \alpha_0^n K_0 \right).$$

Démonstration. — Comme G_S agit par isométries sur l'ensemble des sommets de X, l'action de $K_0 = \mathrm{Stab}_{G_S}(v_0)$ sur ces sommets ne modifie pas la distance à v_0. Tout élément de $K_0\alpha_0^n K_0$ envoie donc v_0 sur un sommet du cercle S_{2n}, et la proposition 1.1 implique alors que la double classe $K_0\alpha_0^n K_0$ est contenue dans la réunion de classes disjointes

$$\left(\bigsqcup_{\lambda \in k_F^{2n}} \begin{pmatrix} 1 & A(\lambda) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \alpha_0^{-n} K_0 \right) \sqcup \left(\bigsqcup_{\mu \in k_F^{2n-1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi_F A(\mu) & 1 \end{pmatrix} \alpha_0^n K_0 \right).$$

Cette réunion est égale au membre de droite de l'égalité figurant dans l'énoncé puisque l'on dispose de l'identité suivante, valable pour tout élément $\lambda \in k_F^{(\mathbb{N})}$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & A(\lambda) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \alpha_0^{-n} &= \begin{pmatrix} 1 & A(\lambda) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \alpha_0^n \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A(\lambda) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \alpha_0^n \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Comme la fonction $A(.)$ est par définition à valeurs dans $\mathcal{O}_F$, l'inclusion réciproque est évidente et l'égalité annoncée est ainsi démontrée. □

Ce dernier énoncé permet d'expliciter la formule (3.1) lorsque $T_f = \tau_1$ est l'opérateur qui apparaît dans la proposition 3.8.

COROLLAIRE 3.12. — *Pour tout élément $g \in G_S$ et tout vecteur $v \in \sigma_{\vec{r}}$, on a l'identité suivante :*

$$\begin{aligned} \tau_1([g, v]) = &\sum_{\lambda \in k_F^2} \left[g \begin{pmatrix} A(\lambda) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \alpha_0,\ U_{\vec{r}}\sigma_{\vec{r}} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & A(\lambda) \end{pmatrix} \right) v \right] \\ &+ \sum_{\mu \in k_F} \left[g \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi_F A(\mu) & 1 \end{pmatrix} \alpha_0,\ U_{\vec{r}} v \right]. \end{aligned}$$

Démonstration. — Il suffit d'appliquer la formule (3.1) en prenant pour système de représentants des classes à gauche modulo K_0 de $K_0\alpha_0^{-1}K_0 = K_0\alpha_0K_0$ celui donné par la proposition 3.11, puis de remarquer que l'on a, pour tout élément $\mu \in k_F^{(\mathbb{N})}$,

$$\sigma_{\vec{r}}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varpi_F A(\mu) & 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Sym}^{\vec{r}}(I_2) = \mathrm{Id}. \qquad \square$$

3.3. Lien avec les algèbres de Hecke associées à $\mathrm{GL}_2(F)$**.** — Pour toute représentation lisse irréductible à caractère central $\sigma_{\vec{r},m}$ de KZ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, Barthel et Livné exhibent un opérateur $T_{\vec{r},m} \in \mathscr{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, KZ, \sigma_{\vec{r},m})$ tel que

$$\mathscr{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, KZ, \sigma_{\vec{r},m}) = \overline{\mathbb{F}}_p[T_{\vec{r},m}]. \tag{3.3}$$

Comme la restriction à G_S de $\sigma_{\vec{r},m}$ ne dépend pas de la valeur de m, on peut imposer $m = 0$ et considérer $\sigma_{\vec{r}}$. La valeur de l'opérateur $T_{\vec{r}} := T_{\vec{r},0}$ sur les fonctions standard de $\mathrm{ind}_{KZ}^G(\sigma_{\vec{r}})$ est alors donnée par la formule suivante [5, équation (4)] :

$$\forall\, g \in G,\ \forall\, v \in \sigma_{\vec{r}},\ T_{\vec{r}}([g,v]) = [g\alpha, U_{\vec{r}}v] + \sum_{\lambda \in k_F} [gg^0_{1,\lambda}, \sigma_{\vec{r}}(\omega)U_{\vec{r}}\sigma_{\vec{r}}(\omega_\lambda)v]. \tag{3.4}$$

Elle montre notamment que l'image par $T_{\vec{r}}$ d'une fonction $f \in \mathrm{ind}_{KZ}^G(\sigma_{\vec{r}})$ à support inclus dans $\mathscr{C}_{\mathrm{pair}}$ (resp. : dans $\mathscr{C}_{\mathrm{impair}}$) est de support contenu dans $\mathscr{C}_{\mathrm{impair}}$ (resp. : dans $\mathscr{C}_{\mathrm{pair}}$). Remarquons maintenant que l'on dispose d'un morphisme injectif de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}) & \to & \mathrm{ind}_{KZ}^G(\sigma_{\vec{r}}) \ , \\ [g,v] & \mapsto & [g,v] \end{array}$$

dont l'image est l'ensemble des éléments de $\mathrm{ind}_{KZ}^G(\sigma_{\vec{r}})$ à support dans KZG_S, i.e. de support dans l'arbre inclus dans $\mathscr{C}_{\mathrm{pair}}$. De même, l'application définie par

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{ind}_{K_1}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}^{\alpha}) & \to & \mathrm{ind}_{KZ}^G(\sigma_{\vec{r}}) \\ [g,v] & \mapsto & [g\alpha,v] \end{array}$$

est un morphisme injectif de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules d'image l'ensemble des éléments de $\mathrm{ind}_{KZ}^G(\sigma_{\vec{r}})$ de support dans l'arbre inclus dans $\mathscr{C}_{\mathrm{impair}}$. Nous obtenons ainsi un premier résultat qui s'énonce comme suit.

Proposition 3.13. — *Pour toute représentation lisse irréductible $\sigma_{\vec{r}}$ de K_0 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, l'application*

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}) \oplus \mathrm{ind}_{K_1}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}^{\alpha}) & \to & \mathrm{ind}_{KZ}^G(\sigma_{\vec{r}}) \\ ([g_1,v_1],[g_2,v_1]) & \mapsto & [g_1,v_1] + [g_2\alpha, v_2] \end{array}$$

est un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules. De plus, l'action de l'opérateur de Hecke $T_{\vec{r}} \in \mathscr{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, KZ, \sigma_{\vec{r}})$ échange les deux facteurs directs apparaissant dans le membre de gauche.

L'opérateur $T_{\vec{r}}^2$ induit donc un endomorphisme G_S-équivariant du facteur $\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}})$, i.e. un élément de l'algèbre de Hecke $\mathscr{H}(G_S, K_S, \sigma_{\vec{r}})$. Le théorème 3.9 légitime alors l'interrogation suivante : quel polynôme en $\tau_{\vec{r}}$ décrit l'action de $T_{\vec{r}}^2$ sur $\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}})$? La réponse est très simple et conforme à l'intuition, comme en atteste le prochain énoncé.

Proposition 3.14. — *Soit $\sigma_{\vec{r}}$ une représentation lisse irréductible de K_0 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Pour tout élément $g \in G_S$ et tout vecteur $v \in \sigma_{\vec{r}}$, on a*

$$T_{\vec{r}}^2([g, v]) = \tau_{\vec{r}}([g, v]).$$

Démonstration. — Par G_S-équivariance et $\overline{\mathbb{F}}_p$-linéarité des opérateurs $T_{\vec{r}}$ et $\tau_{\vec{r}}$, il suffit de vérifier que notre énoncé est vrai pour $g = I_2$. Le corollaire 3.12 assure d'une part que

$$\begin{aligned}\tau_1([I_2, v]) &= \sum_{\lambda \in k_F^2} \left[\begin{pmatrix} A(\lambda) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \alpha_0,\ U_{\vec{r}} \sigma_{\vec{r}} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & A(\lambda) \end{pmatrix} \right) v \right] \\ &\quad + \sum_{\mu \in k_F} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi_F A(\mu) & 1 \end{pmatrix} \alpha_0,\ U_{\vec{r}} v \right]\end{aligned}$$

soit donc que

$$\begin{aligned}\tau_1([I_2, v]) &= \sum_{\lambda \in k_F^2} \left[\begin{pmatrix} \varpi_F^{-1} A(\lambda) & -\varpi_F \\ \varpi_F^{-1} & 0 \end{pmatrix},\ U_{\vec{r}} \sigma_{\vec{r}} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & A(\lambda) \end{pmatrix} \right) v \right] \\ &\quad + \sum_{\mu \in k_F} \left[\begin{pmatrix} \varpi_F^{-1} & 0 \\ A(\mu) & \varpi_F \end{pmatrix},\ U_{\vec{r}} v \right].\end{aligned}$$

Puisque $\sigma_{\vec{r}}$ agit via la réduction modulo ϖ_F des éléments de K_0 et puisque le support de l'opérateur $U_{\vec{r}}$ est égal à la droite engendrée par $y^{\vec{r}}$, on peut écrire que

$$U_{\vec{r}} \sigma_{\vec{r}} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & A(\lambda) \end{pmatrix} \right) v = U_{\vec{r}} \sigma_{\vec{r}} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \sigma_{\vec{r}}(\omega_{\lambda_0}) v = (-1)^{\vec{r}} U_{\vec{r}} \sigma_{\vec{r}}(\omega_{\lambda_0})(v) \ ,$$

en considérant à présent $\sigma_{\vec{r}}$ comme une représentation de KZ. On obtient ainsi que :

$$\tau_1([I_2, v]) = \sum_{\lambda \in k_F^2} \left[\begin{pmatrix} \varpi_F^2 & A(\lambda) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi_F^{-1} & 0 \\ 0 & \varpi_F^{-1} \end{pmatrix},\ (-1)^{\vec{r}} U_{\vec{r}} \sigma_{\vec{r}}(\omega_{\lambda_0})(v) \right]$$
$$+ \sum_{\mu \in k_F} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi_F A(\mu) & \varpi_F^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi_F^{-1} & 0 \\ 0 & \varpi_F^{-1} \end{pmatrix}, U_{\vec{r}} v \right].$$

D'autre part, les calculs effectués par Breuil [5, Equations (4) à (8)] montrent que :

$$\begin{aligned} T_{\vec{r}}^2([I_2, v]) = {} & \sum_{\lambda \in k_F^2} \left[\begin{pmatrix} \varpi_F^2 & A(\lambda) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \sigma_{\vec{r}}(w) U_{\vec{r}} \sigma_{\vec{r}}(\omega_{\lambda_1}) \sigma(w) U_{\vec{r}} \sigma_{\vec{r}}(\omega_{\lambda_0})(v) \right] \\ & + \sum_{\mu \in k_F} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi_F A(\mu) & \varpi_F^2 \end{pmatrix},\ U_{\vec{r}} \sigma_{\vec{r}}(\omega_\mu w) U_{\vec{r}} v \right] \\ & + [I_2, \sum_{\mu \in k_F} U_{\vec{r}} \sigma_{\vec{r}}(w) U_{\vec{r}} \sigma_{\vec{r}}(\omega_\mu)(v)] + [I_2, \sigma_{\vec{r}}(w) U_{\vec{r}} \sigma_{\vec{r}}(w) U_{\vec{r}} v] \\ = {} & \sum_{\lambda \in k_F^2} \left[\begin{pmatrix} \varpi_F^2 & A(\lambda) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi_F^{-1} & 0 \\ 0 & \varpi_F^{-1} \end{pmatrix},\ (-1)^{\vec{r}} U_{\vec{r}} U_{\vec{r}} \sigma_{\vec{r}}(\omega_{\lambda_0})(v) \right] \\ & + \sum_{\mu \in k_F} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi_F A(\mu) & \varpi_F^2 \end{pmatrix},\ U_{\vec{r}} U_{\vec{r}} v \right] \\ & + [I_2, \sum_{\mu \in k_F} U_{\vec{r}} \sigma_{\vec{r}}(w) U_{\vec{r}} \sigma_{\vec{r}}(\omega_\mu)(v)] + [I_2, \sigma_{\vec{r}}(w) U_{\vec{r}} \sigma_{\vec{r}}(w) U_{\vec{r}} v]. \end{aligned}$$

Comme le support et l'image de $U_{\vec{r}}$ sont tous deux égaux à la droite engendrée par $y^{\vec{r}}$, on sait que :

$$\forall\ a, d \in \mathcal{O}_F^\times,\ \forall\ c \in \mathcal{O}_F,\ \sigma_{\vec{r}} \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \right) U_{\vec{r}} v = d^{\vec{r}} U_{\vec{r}} v.$$

L'égalité $U_{\vec{r}}U_{\vec{r}} = U_{\vec{r}}$ permet finalement d'obtenir l'expression suivante de $T_{\vec{r}}^2([I_2, v])$:

$$\begin{aligned} T_{\vec{r}}^2([I_2, v]) &= \sum_{\lambda \in k_F^2} \left[\begin{pmatrix} \varpi_F^2 & A(\lambda) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi_F^{-1} & 0 \\ 0 & \varpi_F^{-1} \end{pmatrix}, (-1)^{\vec{r}} U_{\vec{r}}\sigma_{\vec{r}}(\omega_{\lambda_0})(v) \right] \\ &+ \sum_{\mu \in k_F} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi_F A(\mu) & \varpi_F^2 \end{pmatrix}, U_{\vec{r}} v \right] \\ &+ [I_2, \sum_{\mu \in k_F} U_{\vec{r}}\sigma_{\vec{r}}(w)U_{\vec{r}}\sigma_{\vec{r}}(\omega_\mu)(v)] + [I_2, \sigma_{\vec{r}}(w)U_{\vec{r}}\sigma_{\vec{r}}(w)U_{\vec{r}}v]. \end{aligned}$$

Il suffit alors de rappeler [2, page 271] que $U_{\vec{r}}\sigma_{\vec{r}}(w)U_{\vec{r}}$ est nul si $\vec{r} \neq \vec{0}$ tandis que $U_{\vec{0}}\sigma_{\vec{0}}(w)U_{\vec{0}}$ est l'application identité pour obtenir, par nullité de $\mathrm{Card}(k_F)$ dans $\overline{\mathbb{F}}_p$:

$$[I_2, \sum_{\mu \in k_F} U_{\vec{r}}\sigma_{\vec{r}}(w)U_{\vec{r}}\sigma_{\vec{r}}(\omega_\mu)(v)] + [I_2, \sigma_{\vec{r}}(w)U_{\vec{r}}\sigma_{\vec{r}}(w)U_{\vec{r}}v] = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{r} \neq \vec{0} \,; \\ [I_2, v] & \text{si } \vec{r} = \vec{0}. \end{cases}$$

Nous avons ainsi démontré que

$$\begin{aligned} T_{\vec{r}}^2([I_2, v]) &= \begin{cases} \tau_1([I_2, v]) & \text{si } \vec{r} \neq \vec{0} \\ (\tau_1 + 1)([I_2, v]) & \text{si } \vec{r} = \vec{0} \end{cases} \\ &= \tau_{\vec{r}}([I_2, v]) \text{ par (3.2)}, \end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat annoncé. □

3.4. Autre description des représentations non supercuspidales de G_S. — Nous allons à présent donner une autre description des représentations non supercuspidales de G_S à l'aide des induites compactes des représentations $\sigma_{\vec{r}}$ et $\sigma_{\vec{r}}^{\alpha}$. Pour cela, nous utiliserons certains résultats de Barthel-Livné que nous rappelons maintenant.

3.4.1. *Rappels concernant* $\mathrm{GL}_2(F)$. — Pour toute paire de paramètres $(\vec{r}, \lambda) \in \{0, \ldots, p-1\}^f \times \overline{\mathbb{F}}_p$, on note $\pi(\vec{r}, \lambda)$ la représentation de G portée par le conoyau de l'opérateur $T_{\vec{r}} - \lambda$:

$$\pi(\vec{r}, \lambda) := \frac{\mathrm{ind}_{KZ}^G(\sigma_{\vec{r}})}{(T_{\vec{r}} - \lambda)}.$$

On dispose alors de l'énoncé suivant, qui reprend une partie des résultats de [2, Theorem 30 & Theorem 33].

THÉORÈME 3.15. — 1. *Toute représentation lisse irréductible à caractère central de G sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ est quotient d'une représentation $\pi(\vec{r}, \lambda) \otimes (\chi \circ \det)$ où $\chi : F^\times \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ est un caractère lisse modérément ramifié.*

2. *Lorsque* $\lambda \neq 0$ *et* $(\vec{r},\lambda) \neq (\vec{0},\pm 1)$, *la représentation* $\pi(\vec{r},\lambda)$ *est isomorphe à* $\mathrm{Ind}_B^G(\mu_{\lambda^{-1}} \otimes \mu_\lambda \iota^{\vec{r}})$, *et est irréductible si et seulement si* $(\vec{r},\lambda) \neq (\overrightarrow{p-1},\pm 1)$.
3. *La représentation* $\pi(\vec{0},\pm 1)$ *est une extension non triviale du caractère* $\mu_{\pm 1} \circ \det$ *par la représentation* $(\mu_{\pm 1} \circ \det) \otimes \mathrm{St}$.

Si π est une représentation lisse irréductible à caractère central de G sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, nous dirons que :

– $(\vec{r},\lambda,\chi)$ est une *paramétrisation de* π lorsqu'il existe un morphisme surjectif de $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-modules $\pi(\vec{r},\lambda) \otimes (\chi \circ \det) \twoheadrightarrow \pi$;
– π est *supersingulière* lorsqu'elle admet une paramétrisation de la forme $(\vec{r},0,\chi)$.

On dispose alors du résultat suivant [2, Theorem 34].

Théorème 3.16. — *Soient* π *une représentation lisse irréductible à caractère central de* G *sur* $\overline{\mathbb{F}}_p$ *et* $(\vec{r},\lambda,\chi)$ *une paramétrisation de* π. *On est nécessairement dans l'un des quatre cas suivants :*

1. π *est un caractère* $\eta \circ \det$, *et l'on a alors* $(\vec{r},\lambda,\chi) = (\vec{0},\ \pm 1,\ \eta\mu_{\pm 1})$;
2. π *est de la forme* $\mathrm{Ind}_B^G(\chi_1 \otimes \chi_2)$, *et la paire* $(\vec{r},\lambda)$ *vérifie alors* $\chi_2|_{\mathcal{O}_F^\times} = \iota^{\vec{r}}\chi_1|_{\mathcal{O}_F^\times}$ *et* $\lambda^2 = (\chi_1\chi_2^{-1})(\varpi_F)$. *En outre, on a forcément* $\lambda \neq 0$, $\chi = \chi_1\mu_\lambda$ *et, dans le cas où* $\vec{r} \in \{\vec{0},\ \overrightarrow{p-1}\}$, *on a de plus* $\lambda \neq \pm 1$.
3. π *est de la forme* $(\eta \circ \det) \otimes \mathrm{St}$, *et l'on a alors* $(\vec{r},\lambda,\chi) = (\overrightarrow{p-1},\ \pm 1,\ \eta\mu_{\pm 1})$.
4. π *est supersingulière, et l'on a alors forcément* $\lambda = 0$.

3.4.2. *Conséquences pour* $\mathrm{SL}_2(F)$. — Pour toute paire de paramètres $(\vec{r},\lambda) \in \{0,\ldots,p-1\}^f \times \overline{\mathbb{F}}_p$, on note $\pi_0(\vec{r},\lambda)$ le conoyau de l'opérateur $\tau_{\vec{r}} - \lambda$:

$$\pi_0(\vec{r},\lambda) := \frac{\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}})}{(\tau_{\vec{r}} - \lambda)}.$$

On définit ainsi des représentations lisses de G_S sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ qui vérifient la propriété suivante.

Proposition 3.17. — *Soit* $(\vec{r},\lambda)$ *une paire de paramètres telle que* $\lambda \neq 0$. *La restriction à* G_S *du* $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-*module* $\pi(\vec{r},\lambda)$ *est alors isomorphe à* $\pi_0(\vec{r},\lambda^2)$.

Démonstration. — La proposition 3.13 assure que l'application identité induit une injection de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules $\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}) \hookrightarrow \mathrm{ind}_{KZ}^{G}(\sigma_{\vec{r}})$. Par composition à gauche avec l'application de réduction modulo $T_{\vec{r}} - \lambda$, on obtient un morphisme non nul[9] de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules :

$$\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}) \to \pi(\vec{r},\lambda). \tag{3.5}$$

[9] Par exemple car l'élément $[I_2, x^{\vec{r}}]$ est clairement d'image non nulle dans $\pi(\vec{r},\lambda)$.

Grâce à la proposition 3.14, l'égalité $T_{\vec{r}}^2 - \lambda^2 = (T_{\vec{r}} - \lambda)(T_{\vec{r}} + \lambda)$ permet de factoriser le morphisme (3.5) en un morphisme non nul de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules

$$\pi_0(\vec{r}, \lambda^2) \to \pi(\vec{r}, \lambda). \tag{3.6}$$

Démontrons tout d'abord l'injectivité de l'application (3.6). Soit $\overline{f} \in \pi_0(\vec{r}, \lambda^2)$ et soit $f \in \mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}})$ un relèvement de $\overline{f}$. Dire que $\overline{f}$ est dans le noyau du morphisme (3.6) signifie qu'il existe des fonctions $g \in \mathrm{ind}_{KZ}^{G}(\sigma_{\vec{r}})$ et $h \in \mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}})$ telles que

$$f - (T_{\vec{r}} - \lambda)(g) = (T_{\vec{r}}^2 - \lambda^2)(h). \tag{3.7}$$

Utilisons la proposition 3.13 pour décomposer la fonction g en $g = g_0 + g_1$ avec g_i élément de $\mathrm{ind}_{K_i}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}^{\alpha^i})$. L'identité (3.7) peut alors être réécrite sous la forme

$$f - T_{\vec{r}}(g_1) + \lambda g_0 - (T_{\vec{r}}^2 - \lambda^2)(h) = T_{\vec{r}}(g_0) - \lambda g_1. \tag{3.8}$$

Cette égalité n'est toutefois possible que lorsque ses deux membres sont nuls : en effet, le terme de gauche est à support dans l'orbite $\mathscr{O}_{\mathrm{pair}}$ de l'action de G_S sur les sommets de X tandis que le membre de droite est à support dans l'orbite $\mathscr{O}_{\mathrm{impair}}$. On obtient donc que $T_{\vec{r}}(g_0) = \lambda g_1$, ou encore que $g_1 = \lambda^{-1} T_{\vec{r}}(g_0)$ puisque λ est non nul, puis que

$$f = T_{\vec{r}}(g_1) - \lambda g_0 + (T_{\vec{r}}^2 - \lambda^2)(h) = \lambda^{-1}(T_{\vec{r}}^2 - \lambda^2)(g_0 + \lambda h)$$

avec $g_0 + \lambda h \in \mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}})$. La proposition 3.14 assure alors que f appartient à l'image de $\tau_{\vec{r}} - \lambda^2$, ce qui montre que $\overline{f} = 0$ et que le morphisme (3.6) est injectif.

D'après les propositions 3.13 et 3.14, prouver la surjectivité du morphisme (3.6) revient à montrer que pour toute paire $(x, y) \in \mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}) \times \mathrm{ind}_{K_1}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}^{\alpha})$, il existe des éléments $z_0, x_0, x_1 \in \mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}})$ et $z_1 \in \mathrm{ind}_{K_1}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}^{\alpha})$ tels que

$$(x + y) + (T_{\vec{r}} - \lambda)(z_0 + z_1) = x_0 + (T_{\vec{r}}^2 - \lambda^2)(x_1).$$

L'étude du support dans X de chaque terme montre que cette égalité est équivalente au système suivant :

$$\begin{cases} x + T_{\vec{r}}(z_1) - \lambda z_0 = x_0 + (T_{\vec{r}}^2 - \lambda^2)(x_1) \ ; \\ y + T_{\vec{r}}(z_0) - \lambda z_1 = 0. \end{cases} \tag{3.9}$$

Posons $z_1 := \lambda^{-1} y$ et $x_0 = x + T_{\vec{r}}(\lambda^{-1} y)$, ce qui a un sens car λ est supposé non nul. Ce sont respectivement des éléments de $\mathrm{ind}_{K_1}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}^{\alpha})$ et $\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}})$ qui vérifient

$$\begin{cases} x + T_{\vec{r}}(z_1) = x + T_{\vec{r}}(\lambda^{-1} y) = x_0 \ ; \\ y + T_{\vec{r}}(0) - \lambda z_1 = y - y = 0. \end{cases}$$

Le quadruplet $(z_0,x_0,x_1,z_1)=(0,\lambda^{-1}y,x+T_{\vec{r}}(\lambda^{-1}y),0)$ est donc solution du système (3.9), ce qui prouve la surjectivité du morphisme (3.6) et termine la démonstration. □

Ce résultat permet en particulier d'obtenir une nouvelle description des représentations non supercuspidales de G_S.

THÉORÈME 3.18. — *Soit* $(\vec{r},\lambda)\in\{0,\dots,p-1\}^f\times\overline{\mathbb{F}}_p^\times$ *une paire de paramètres.*

1. *Supposons que* $(\vec{r},\lambda)\neq(\vec{0},1)$*, le* $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$*-module* $\pi_0(\vec{r},\lambda)$ *est isomorphe à* $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mu_{\lambda^{-1}}\iota^{\overrightarrow{p-1-r}})$.
2. *La représentation* $\pi_0(\vec{0},1)$ *est une extension non triviale du caractère trivial* $\mathbf{1}$ *par la représentation de Steinberg* St_S.

Démonstration. — Soit $(\vec{r},\lambda)$ une paire de paramètres vérifiant $\lambda\neq0$ et $(\vec{r},\lambda)\neq(\vec{0},1)$. Puisque $(\vec{r},\sqrt{\lambda^{-1}})\neq(\vec{0},\pm1)$, le second point du théorème 3.15 assure l'existence d'un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-modules de la forme

$$\pi(\vec{r},\sqrt{\lambda^{-1}})\simeq\mathrm{Ind}_B^G(\mu_{\sqrt{\lambda}}\otimes\mu_{\sqrt{\lambda^{-1}}}\iota^{\vec{r}}).\tag{3.10}$$

Comme $\mathrm{Ind}_B^G(\mu_{\sqrt{\lambda}}\otimes\mu_{\sqrt{\lambda^{-1}}}\iota^{\vec{r}})$ est isomorphe à $\mathrm{Ind}_B^G(\mu_\lambda\iota^{\overrightarrow{p-1-r}}\otimes\mathbf{1})\otimes(\mu_{\sqrt{\lambda^{-1}}}\iota^{\vec{r}}\circ\det)$, l'isomorphisme (3.10) induit un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules

$$\pi(\vec{r},\sqrt{\lambda^{-1}})|_{G_S}\simeq\mathrm{Ind}_B^G(\mu_\lambda\iota^{\overrightarrow{p-1-r}}\otimes\mathbf{1})|_{G_S}.\tag{3.11}$$

Le premier point du théorème 2.16 permet de réécrire cet isomorphisme sous la forme

$$\pi(\vec{r},\sqrt{\lambda^{-1}})|_{G_S}\simeq\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mu_\lambda\iota^{\overrightarrow{p-1-r}})\ ,$$

ce qui achève de montrer que $\pi_0(\vec{r},\lambda^{-1})$ est isomorphe à $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mu_\lambda\iota^{\overrightarrow{p-1-r}})$ grâce à la proposition 3.17. Remarquons que le choix de la racine $\sqrt{\lambda^{-1}}$ n'a pas d'influence sur le résultat.

Pour démontrer le second point, on rappelle d'abord que le théorème 3.15 fournit une suite exacte courte non scindée de $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-modules de la forme :

$$0\longrightarrow\mathrm{St}\longrightarrow\pi(\vec{0},1)\longrightarrow\mathbf{1}\longrightarrow0.\tag{3.12}$$

La proposition 3.13 assure par ailleurs que la restriction à $\pi_0(\vec{0},1)$ de la surjection $\pi(\vec{0},1)\twoheadrightarrow\mathbf{1}$ reste surjective. Comme le théorème 2.16 affirme que la restriction à G_S de St est isomorphe à St_S, on déduit de la suite exacte (3.12) l'existence d'une suite exacte courte de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules de la forme

$$0\longrightarrow(\mathrm{St}_S\cap\pi_0(\vec{0},1))\longrightarrow\pi_0(\vec{0},1)\longrightarrow\mathbf{1}\longrightarrow0.$$

Puisque $\pi_0(\vec{0},1)$ est de dimension infinie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, elle n'est pas isomorphe au caractère trivial et il faut donc que l'intersection $\mathrm{St}_S\cap\pi_0(\vec{0},1)$ soit non nulle. L'irréductibilité du $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module St_S implique alors que $\mathrm{St}_S\cap\pi_0(\vec{0},1)=\mathrm{St}_S$, ce qui prouve que l'on dispose de la suite exacte courte suivante de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules :

$$0 \longrightarrow \mathrm{St}_S \longrightarrow \pi_0(\vec{0}, 1) \longrightarrow \mathbf{1} \longrightarrow 0. \tag{3.13}$$

Cette extension de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules n'est pas scindée car chaque terme de (3.12) est le $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-module engendré par le terme lui correspondant dans la suite exacte (3.13). Un scindage de (3.13) fournirait donc un scindage de (3.12), ce qui contredirait la troisième assertion du théorème 3.15. □

COROLLAIRE 3.19. — *Soit* $(\vec{r}, \lambda) \in \{0, \dots, p-1\}^f \times \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ *une paire de paramètres.*

1. *La représentation* $\pi_0(\vec{r}, \lambda)$ *admet un unique quotient irréductible. Ce quotient est non supercuspidal et n'est isomorphe à aucune autre représentation de* G_S *qui s'obtient comme quotient de* $\pi(\vec{s}, \mu)$ *avec* $\mu \neq 0$ *et* $(\vec{r}, \lambda) \neq (\vec{s}, \mu)$.
2. *L'isomorphisme* (3.11) *induit des isomorphismes de* $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$*-modules :*
$$\pi(\vec{r}, \pm\lambda)|_{G_S} \simeq \pi_0(\vec{r}, \lambda^2).$$

Démonstration. — Le premier point est conséquence directe du théorème 3.18 combiné au théorème 2.7 (pour l'unicité du quotient irréductible) et à la proposition 2.14 (pour l'absence d'isomorphismes). Le second point découle quant à lui directement de la proposition 3.17. □

Par analogie avec la théorie des représentations modulo p de $\mathrm{GL}_2(F)$, nous dirons qu'une $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible V de G_S :

- admet la paire $(\vec{r}, \lambda)$ comme *paramétrisation par rapport à* K_0 lorsque V est un quotient du $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module $\pi_0(\vec{r}, \lambda)$;
- est *supersingulière par rapport à* K_0 lorsqu'elle admet une paramétrisation par rapport à K_0 de la forme $(\vec{r}, 0)$.

PROPOSITION 3.20. — *La notion de supersingularité par rapport à* K_0 *est bien définie : si* V *admet une paramétrisation par rapport à* K_0 *de la forme* $(\vec{r}, 0)$*, alors toute paramétrisation de* V *par rapport à* K_0 *est de cette forme.*

Démonstration. — Supposons par l'absurde que V ait une paramétrisation par rapport à K_0 de la forme $(\vec{\rho}, \lambda)$ avec $\lambda \neq 0$. Le corollaire 3.19 et le théorème 2.16 assurent alors qu'il existe une représentation lisse irréductible non supercuspidale W de G sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ à caractère central trivial sur ϖ_F et de restriction à G_S isomorphe à V. D'après le théorème 3.16, toute paramétrisation du $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-module W est de la forme $(\vec{s}, \mu)$ avec μ non nul, tandis que la remarque 2.17 assure que le foncteur de restriction à G_S établit un isomorphisme d'espaces vectoriels entre $W^{I(1)}$ et $V^{I_S(1)}$.

Rappelons maintenant que V est supersingulière par rapport à K_0, ce qui signifie qu'il existe un morphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules $\phi : \mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}) \twoheadrightarrow V$ tel que $\phi \circ \tau_{\vec{r}} = 0$. Par réciprocité de Frobenius compacte, ϕ correspond à un morphisme non nul de $\overline{\mathbb{F}}_p[K_0]$-modules $f : \sigma_{\vec{r}} \hookrightarrow V$ qui est injectif par irréductibilité de $\sigma_{\vec{r}}$. Comme l'élément $I(1)$-invariant $x^{\vec{r}} \in \sigma_{\vec{r}}$ engendre le $\overline{\mathbb{F}}_p[KZ]$-module $\sigma_{\vec{r}}$, son image par f doit être un élément non nul de $V^{I_S(1)}$ et s'identifie donc à un élément non nul $w \in W^{I(1)} \simeq V^{I_S(1)}$.
Notons alors $\tilde{f} : \sigma_{\vec{r}} \hookrightarrow W$ le morphisme KZ-équivariant qui envoie $x^{\vec{r}}$ sur w et $\psi : \mathrm{ind}_{KZ}^{G}(\sigma_{\vec{r}}) \twoheadrightarrow W$ le morphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-modules qui lui correspond par réciprocité de Frobenius compacte. La formule permettant de construire ψ à partir de $\tilde{f}$ et ϕ à partir de f montre[10] que $\psi(v) = \phi(v)$ pour tout élément $v \in \mathrm{ind}_{K_0}^{G_0}(\sigma_{\vec{r}})$ vu comme un élément de $\mathrm{ind}_{KZ}^{G}(\sigma_{\vec{r}})$ grâce à la proposition 3.13. La proposition 3.14 permet d'en déduire que :

$$\forall\ v \in \sigma_{\vec{r}},\ (\psi \circ T_{\vec{r}}^2)([I_2, v]) = (\phi \circ \tau_{\vec{r}})([I_2, v]) = 0\ ,$$

ce qui prouve la nullité de $\psi \circ T_{\vec{r}}^2$ par G-équivariance de ψ et de $T_{\vec{r}}$. L'image de $T_{\vec{r}}$ est donc contenue dans le noyau de l'application $\psi \circ T_{\vec{r}}$, ce qui permet de factoriser $\psi \circ T_{\vec{r}}$ en un morphisme G-équivariant $\pi(\vec{r}, 0) \to W$. Puisque la paire $(\vec{r}, 0)$ n'est pas une paramétrisation de W, il faut que $\psi \circ T_{\vec{r}} = 0$, donc que ψ se factorise à travers $\pi(\vec{r}, 0)$. Le même argument montre que ψ doit être nulle, ce qui est absurde car l'application surjective ϕ serait alors identiquement nulle tandis que V est non nul. □

COROLLAIRE 3.21. — *Toute représentation supersingulière par rapport à K_0 est supercuspidale.*

Démonstration. — Les théorèmes 2.7 et 3.18 assurent que toute représentation non supercuspidale admet une paramétrisation relative à K_0 de la forme $(\vec{r}, \lambda)$ avec $\lambda \neq 0$. Une telle représentation ne peut être supersingulière d'après la proposition 3.20, ce qui prouve le résultat annoncé par contraposition. □

3.5. De l'inutilité relative de K_1. — Contrairement à $\mathrm{GL}_2(F)$, qui admet une unique classe de conjugaison de sous-groupes ouverts compacts maximaux, $\mathrm{SL}_2(F)$ possède deux classes de sous-groupes ouverts compacts maximaux représentées par K_0 et K_1. N'ayant aucune raison de privilégier K_0 par rapport à K_1, nous devons vérifier si les objets associés à K_1 (algèbres de Hecke, représentations conoyaux) ne fournissent pas de nouvelles représentations de $\mathrm{SL}_2(F)$, ou des paramétrisations différentes de représentations déjà obtenues. Comme K_0 et K_1 sont conjugués dans $\mathrm{GL}_2(F)$, dont $\mathrm{SL}_2(F)$ est un sous-groupe distingué fermé, nous allons pouvoir déduire des propriétés de compatibilité existant

[10] C'est immédiat sur les fonctions de la forme $[I_2, v]$ avec $v \in \sigma_{\vec{r}}$, et l'on conclut par G_S-équivariance des fonctions ψ et ϕ.

entre induction compacte et conjugaison des représentations que toute l'information fournie par K_1 est équivalente à celle fournie par K_0.

Si $\sigma_{\vec{r}}^{\alpha}$ est une $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible de K_1, la proposition 3.6 fournit un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbres

$$\mathscr{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G_S, K_1, \sigma_{\vec{r}}^{\alpha}) \simeq \mathscr{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G_S, K_0, \sigma_{\vec{r}}). \tag{3.14}$$

Si l'on note $\tau_{\vec{r}}^{1}$ l'image de l'opérateur de Hecke $\tau_{\vec{r}}$ par cet isomorphisme, nous pouvons directement déduire du corollaire 3.9 et de l'isomorphisme (3.14) le résultat suivant.

PROPOSITION 3.22. — *$\mathscr{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G_S, K_1, \sigma_{\vec{r}}^{\alpha})$ est l'algèbre de polynômes $\overline{\mathbb{F}}_p[\tau_{\vec{r}}^{1}]$.*

Pour toute paire $(\vec{r}, \lambda) \in \{0, \dots, p-1\}^f \times \overline{\mathbb{F}}_p$, on pose $\pi_1(\vec{r}, \lambda) := \frac{\mathrm{ind}_{K_1}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}^{\alpha})}{(\tau_{\vec{r}}^{1} - \lambda)}$ et l'on dit qu'une représentation lisse irréductible de G_S sur $\overline{\mathbb{F}}_p$:

- admet $(\vec{r}, \lambda)$ comme *paramétrisation par rapport à* K_1 lorsqu'elle est quotient du $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module $\pi_1(\vec{r}, \lambda)$;
- est *supersingulière par rapport à* K_1 lorsqu'elle admet une paramétrisation par rapport à K_1 de la forme $(\vec{r}, 0)$.

PROPOSITION 3.23. — *Pour toute paire de paramètres $(\vec{r}, \lambda)$, la conjugaison par α induit un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules entre $\pi_1(\vec{r}, \lambda)$ et $(\pi_0(\vec{r}, \lambda))^{\alpha}$.*

Démonstration. — Un calcul immédiat montre que l'application envoyant un élément $f \in \left(\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}})\right)^{\alpha}$ sur la fonction $[x \mapsto f(\alpha^{-1} x \alpha)]$ établit un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules :

$$\mathrm{ind}_{K_1}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}^{\alpha}) \simeq \left(\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}})\right)^{\alpha}. \tag{3.15}$$

La définition de l'opérateur $\tau_{\vec{r}}^{1}$ assure l'équivariance de cet isomorphisme sous l'action des algèbres de Hecke associées au paramètre $\vec{r}$, à savoir $\mathscr{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G_S, K_1, \sigma_{\vec{r}}^{\alpha})$ sur le membre de gauche et $\mathscr{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G_S, K_0, \sigma_{\vec{r}})$ sur le membre de droite, d'où le résultat. □

COROLLAIRE 3.24. — *Soit $(\vec{r}, \lambda) \in \{0, \dots, p-1\}^f \times \overline{\mathbb{F}}_p$ avec $\lambda \neq 0$ et soit V une représentation lisse irréductible de G_S sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.*

1. *Le $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module $\pi_1(\vec{r}, \lambda)$ admet un unique quotient irréductible, et les quotients associés à deux telles paramétrisations distinctes ne sont pas isomorphes.*
2. *Si $(\vec{r}, \lambda)$ est une paramétrisation de V par rapport à K_1, alors V n'est pas supercuspidale.*
3. *La notion de supersingularité par rapport à K_1 est bien définie, et toute représentation supersingulière par rapport à K_1 est supercuspidale.*

Démonstration. — Les deux premiers points découlent directement du corollaire 3.19 une fois que l'on a remarqué que V est un quotient de $\pi_1(\vec{r},\lambda)$ si et seulement si $V^{\alpha^{-1}}$ est un quotient de $\pi_0(\vec{r},\lambda)$, et que l'on a rappelé que toute représentation non supercuspidale est isomorphe à sa représentation α-conjuguée par la proposition 2.8. Le troisième énoncé provient de la combinaison des propositions 3.20 et 3.23 avec le corollaire 3.21. □

3.6. Décomposition des conoyaux associés à G et à G_S.— La décomposition du $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module $\mathrm{ind}_{KZ}^{G}(\sigma_{\vec{r}})$ issue de la proposition 3.13 induit par passage au quotient un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules

$$\pi(\vec{r},0)\simeq\frac{\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}})}{T_{\vec{r}}(\mathrm{ind}_{K_1}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}^{\alpha}))}\oplus\frac{\mathrm{ind}_{K_1}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}^{\alpha})}{T_{\vec{r}}(\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}))}. \tag{3.16}$$

L'isomorphisme (3.15) permet par ailleurs de réécrire l'isomorphisme donné par la proposition 3.13 sous la forme :

$$\mathrm{ind}_{KZ}^{G}(\sigma_{\vec{r}})|_{G_S}\simeq\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}})\oplus\left(\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}})\right)^{\alpha}.$$

Ces deux remarques vont permettre une analyse partielle de la structure des $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules portés par $\pi(\vec{r},0)$, $\pi_0(\vec{r},0)$ et $\pi_1(\vec{r},0)$. Nous utiliserons pour ce faire la proposition suivante, dont la preuve consiste à vérifier[11] que l'application envoyant $f\in\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}})$ sur la fonction $[g\mapsto f(\alpha_0^{-1}g)]\in\mathrm{ind}_{\alpha_0K_0\alpha_0^{-1}}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}^{\alpha_0})$ est bien définie et fournit l'isomorphisme demandé par appartenance de $\alpha^2\alpha_0^{-1}$ à Z.

Proposition 3.25. — *Les $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules $\left(\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}})\right)^{\alpha^2}$ et $\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}})$ sont isomorphes.*

Posons $\pi_{\vec{r}}:=\frac{\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}})}{T_{\vec{r}}(\mathrm{ind}_{K_1}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}^{\alpha}))}$. On dispose alors du résultat de structure suivant.

Corollaire 3.26. —
1. *L'isomorphisme* (3.16) *peut être réécrit sous la forme :*
$$\pi(\vec{r},0)|_{G_S}\simeq\pi_{\vec{r}}\oplus\pi_{\vec{r}}^{\alpha}.$$
2. *Les $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules $(\pi(\vec{r},0))^{\alpha}$ et $\pi(\vec{r},0)$ sont isomorphes.*
3. *L'opérateur $T_{\vec{r}}$ induit les suites exactes courtes non scindées suivantes de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules :*
$$\begin{cases}0\longrightarrow\pi_{\vec{r}}^{\alpha}\longrightarrow\pi_0(\vec{r},0)\longrightarrow\pi_{\vec{r}}\longrightarrow 0\ ;\\ 0\longrightarrow\pi_{\vec{r}}\longrightarrow\pi_1(\vec{r},0)\longrightarrow\pi_{\vec{r}}^{\alpha}\longrightarrow 0.\end{cases}$$

[11] Comme cela est fait dans [1, proposition 3.5.25].

Dans chaque suite, la première flèche est définie par l'opérateur $T_{\vec{r}}$ et la seconde flèche est donnée par la projection induite par l'isomorphisme du premier point.

Démonstration. — Les deux premières assertions découlent de la proposition 3.25, qui implique notamment que $\pi_{\vec{r}}^{\alpha^2} \simeq \pi_{\vec{r}}$, et de la G-équivariance de l'opérateur $T_{\vec{r}}$. Nous allons montrer l'existence de la première suite exacte donnée dans la troisième assertion, la seconde suite exacte s'en déduisant par α-conjugaison. Par définition de $\pi_0(\vec{r},0)$ et de $\pi_{\vec{r}}$, l'application identité de $\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}})$ induit un morphisme surjectif de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules $\pi_0(\vec{r},0) \twoheadrightarrow \pi_{\vec{r}}$ dont le noyau est égal au quotient $\frac{T_{\vec{r}}(\mathrm{ind}_{K_1}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}^{\alpha}))}{T_{\vec{r}}^2(\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}))}$, donc naturellement isomorphe à l'image de $\pi_{\vec{r}}^{\alpha}$ par l'opérateur G-équivariant $T_{\vec{r}}$. Par injectivité de $T_{\vec{r}}$ [2, Lemma 20], on obtient bien la suite exacte courte annoncée. Il reste à vérifier qu'elle n'est pas scindée, ce qui se prouve par l'absurde : notons j la surjection définie par la flèche de droite de la suite exacte et supposons qu'il existe un morphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules $F : \pi_{\vec{r}} \to \pi_0(\vec{r},0)$ tel que $F\circ j$ soit l'application identité. D'après la proposition 3.14, nous devrions alors avoir :

$$\forall\ f \in \mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}),\ F(f \bmod T_{\vec{r}}) = (F\circ j)(f \bmod T_{\vec{r}}^2) = f \bmod T_{\vec{r}}^2.$$

Appliquons cette égalité à l'élément $T_{\vec{r}}([I_2, x^{\vec{r}}])$: on obtient ainsi que

$$T_{\vec{r}}([I_2, x^{\vec{r}}]) \bmod T_{\vec{r}}^2 = F(T_{\vec{r}}([I_2, x^{\vec{r}}]) \bmod T_{\vec{r}}) = 0\ ,$$

ce qui signifie que $T_{\vec{r}}[I_2, x^{\vec{r}}]$ appartient à $T_{\vec{r}}^2(\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}))$. C'est absurde : l'égalité (3.4) implique en effet que le support dans X de $T_{\vec{r}}([I_2, x^{\vec{r}}])$ est inclus dans le cercle S_1, tandis que la proposition 3.14 assure qu'un élément de $T_{\vec{r}}^2(\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}})) = \tau_{\vec{r}}(\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}))$ est toujours de support dans X inclus dans $\mathscr{C}_{\mathrm{pair}} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} S_{2n}$. □

3.7. Introduction de l'hypothèse d'admissibilité. — Pour poursuivre le parallèle avec l'étude de Barthel-Livné, il nous faudrait un analogue du résultat suivant [2, proposition 32 & Theorem 33].

THÉORÈME 3.27. — *Soit V une représentation lisse irréductible à caractère central de G sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Il existe une paire de paramètres $(\vec{r},\lambda) \in \{0,\dots,p-1\}^f \times \overline{\mathbb{F}}_p$ et un caractère lisse $\chi : F^\times \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ tels que V soit quotient de la représentation $\pi(\vec{r},\lambda)\otimes(\chi\circ\det)$.*

La preuve de ce théorème repose sur une bonne connaissance de l'action de IZ sur l'espace des vecteurs $I(1)$-invariants de $\mathrm{ind}_{KZ}^{G}(\sigma_{\vec{r}})$ et sur l'énoncé de finitude suivant, donné par [3, proposition 16] lorsque $\sigma_{\vec{r}} = \mathbf{1}$ et par [2, proposition 18] sinon.

PROPOSITION 3.28. — *Soit $\vec{r} \in \{0,\dots,p-1\}^f$ un paramètre et soit η un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de IZ. Tout sous-$\mathscr{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,IZ,\eta)$-module non nul de la composante (IZ,η)-isotypique de $\mathrm{ind}_{KZ}^G(\sigma_{\vec{r}})$ est de codimension finie dans ladite composante isotypique.*

Une adaptation directe des arguments de Barthel-Livné nécessiterait donc de disposer d'analogues de ces énoncés pour les $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations lisses irréductibles de G_S. Nous allons expliquer pourquoi on ne peut en espérer autant en construisant un contre-exemple à l'assertion de finitude demandée dans la proposition 3.28 lorsque $\vec{r} = \overrightarrow{\frac{p-1}{2}}$.

REMARQUE 3.29. — Ceci ne signifie pas qu'il est impossible d'obtenir un énoncé comparable à celui du théorème 3.27 pour $\mathrm{SL}_2(F)$! C'est simplement que la méthode utilisée par Barthel-Livné n'est pas celle qu'il convient d'utiliser dans notre cas. Comme nous le verrons ci-après (théorèmes 3.35 et 3.36), nous savons démontrer l'existence d'une paramétrisation par rapport à un sous-groupe ouvert compact fixé pour l'essentiel des représentations lisses irréductibles considérées[12].

3.7.1. *Structure des algèbres de Hecke-Iwahori attachées à* $\mathrm{SL}_2(F)$. — D'après le lemme 1.8, un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse χ de I_S provient par inflation d'un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère du groupe fini $I_S/I_S(1) \simeq k_F^\times$, et il existe donc un paramètre $\vec{r} \in \{0,\dots,p-1\}^f$ tel que :

$$\forall\, x \in k_F^\times,\ \chi\left(\begin{pmatrix} [x] & 0 \\ 0 & [x]^{-1} \end{pmatrix}\right) = x^{\vec{r}} = \omega^{\vec{r}}(x).$$

En particulier, on a $\chi^2 = \mathbf{1}$ si et seulement si $\omega^{\vec{r}} = \omega^{\overrightarrow{p-1-r}}$, ce qui signifie que $\vec{r}$ prend l'une des trois valeurs suivantes : $\vec{0}$, $\overrightarrow{\frac{p-1}{2}}$ ou $\overrightarrow{p-1}$.
Par ailleurs, les doubles classes de G_S modulo I_S sont paramétrées par le groupe de Weyl[13] W_S de G_S, dont un système de représentants dans G_S est donné par $\{\alpha_0^n,\ w_0\alpha_0^n;\ n \in \mathbb{Z}\}$. Notons ϕ_n la fonction de support $I_S\alpha_0^{-n}I_S$ qui vaut 1 en α_0^{-n}, et ψ_n la fonction de support égal à $I_S w_0\alpha_0^{-n}I_S$ qui vaut 1 en $w_0\alpha_0^{-n}$: on dispose alors du résultat suivant.

PROPOSITION 3.30. — *L'algèbre $\mathbb{H}(G_S,I_S,\chi)$ est un espace vectoriel sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ de base :*

---

(12) Très précisément, nous verrons que seul le cas où F est de caractéristique 2 nécessite effectivement une hypothèse supplémentaire.

(13) Bien entendu, nous ne parlons pas ici du groupe de Weyl fini $W_0 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de $\mathrm{SL}_2(F)$, mais du groupe de Weyl $W_S \simeq W_0 \rtimes \mathbb{Z}$ qui peut être défini comme le quotient $N_{G_S}(T_S)/T_S(\mathscr{O}_F)$ du normalisateur du tore diagonal T_S dans $\mathrm{SL}_2(F)$ par le sous-groupe $T_S(\mathscr{O}_F)$ des éléments de T_S à coefficients entiers. Il est parfois appelé *groupe d'Iwahori-Weyl* dans la littérature [9].

- *la famille* $\{\phi_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ *si* $\chi^2 \neq \mathbf{1}$ *;*
- *la famille* $\{\phi_n, \psi_n;\ n \in \mathbb{Z}\}$ *si* $\chi^2 = \mathbf{1}$.

Démonstration. — Tout élément de $\mathbb{H}(G_S, I_S, \chi)$ est à support dans un nombre fini de doubles classes modulo I_S, et est donc combinaison linéaire finie d'éléments à support dans une seule double classe. Supposons que $f \in \mathbb{H}(G_S, I_S, \chi)$ soit à support dans une unique double classe modulo I_S.

- Si f est à support dans $I_S \alpha_0^{-n} I_S$, il est entièrement déterminé par sa valeur en α_0^{-n}, celle-ci devant vérifier la condition suivante : pour tous $i_1, i_2 \in I_S$ tels que $i_1 \alpha_0^{-n} = \alpha_0^{-n} i_2$,

$$\chi(i_1) f(\alpha_0^{-n}) = \chi(i_2) f(\alpha_0^{-n}). \tag{3.17}$$

  Un calcul direct montre alors que deux tels éléments i_1,i_2 vérifient $i_1 i_2^{-1} \in I_S(1)$, donc $\chi(i_1) = \chi(i_2)$, de sorte que l'égalité (3.17) est toujours vérifiée.
- Si f est à support dans $I_S w_0 \alpha_0^{-n} I_S$, il est entièrement déterminé par sa valeur en $w_0 \alpha_0^{-n}$, qui doit satisfaire à la condition suivante : pour tous éléments $i_1, i_2 \in I_S$ tels que $w_0^{-1} i_1 w_0 \alpha_0^{-n} = \alpha_0^{-n} i_2$,

$$\chi(i_1) f(w_0 \alpha_0^{-n}) = \chi(i_2) f(w_0 \alpha_0^{-n}).$$

  L'égalité $w_0^{-1} i_1 w_0 \alpha_0^{-n} = \alpha_0^{-n} i_2$ implique que χ doit prendre la même valeur en $w_0^{-1} i_1 w_0$ et en i_2. On doit donc en particulier avoir :

$$\forall\ x \in k_F^\times,\ \chi\left(\begin{pmatrix} [x] & 0 \\ 0 & [x]^{-1} \end{pmatrix}\right) = \chi\left(\begin{pmatrix} [x]^{-1} & 0 \\ 0 & [x] \end{pmatrix}\right) ,$$

  ce qui revient à demander que $\chi^2 = \mathbf{1}$ et termine la démonstration. □

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, notons $T_n \in \mathscr{H}(G_S, I_S, \chi)$ l'opérateur de Hecke correspondant à la fonction ϕ_n et S_n celui qui correspond à la fonction ψ_n lorsqu'elle existe. De même, on dispose pour $\mathrm{GL}_2(F)$ d'opérateurs $T_{n,n+1}$, et $T_{n+1,n}$ définis comme suit ([2, Lemma 9] et [3, Notation page 8]) : pour tout caractère lisse $\tilde{\chi} : IZ \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ et tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on note $T_{n,n+1}$ (resp. $T_{n+1,n}$ lorsqu'il existe) l'opérateur de Hecke correspondant à la fonction de $\mathbb{H}(G, IZ, \tilde{\chi})$ de support égal à $IZ\alpha^{-n}I$ (resp. $IZ\beta\alpha^{-n}I$) et de valeur 1 en α^{-n} (resp. $\beta\alpha^{-n}$).
Remarquons que si $\tilde{\chi}$ est un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de IZ, la décomposition de G sous la forme $G = IZG_S \sqcup IZ\alpha G_S$ permet d'obtenir par décomposition de Mackey une écriture du $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module $\mathrm{ind}_{IZ}^G(\tilde{\chi})$ sous la forme

$$\mathrm{ind}_{IZ}^G(\tilde{\chi})|_{G_S} = \mathrm{ind}_{I_S}^{G_S}(\chi) \oplus \mathrm{ind}_{I_S^\alpha}^{G_S}(\chi^\alpha) ,$$

où χ désigne la restriction à I_S de $\tilde{\chi}$ et où χ^α désigne le caractère lisse de $I_S^\alpha = \alpha I_S \alpha^{-1}$ obtenu par α-conjugaison du caractère χ. Un calcul direct à partir des formules de convolution montre alors que l'action des opérateurs $T_{2n,2n+1}$ et $T_{2n,2n-1}$ associés au caractère $\tilde{\chi}$ laisse stable le facteur $\mathrm{ind}_{I_S}^{G_S}(\chi)$, puis que les endormorphismes de $\mathrm{ind}_{I_S}^{G_S}(\chi)$ ainsi définis correspondent aux éléments suivants de $\mathscr{H}(G_S, I_S, \chi)$.

PROPOSITION 3.31. — *Si $\tilde{\chi}$ est un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de IZ prolongeant χ, alors on a, pour tout élément $f \in \mathrm{ind}_{I_S}^{G_S}(\chi) \subset \mathrm{ind}_{IZ}^{G}(\tilde{\chi})$ et tout entier $n \in \mathbb{Z}$:*

$$T_{2n,2n+1}(f) = T_n(f).$$

Lorsque cela a un sens, i.e. lorsque $\tilde{\chi}$ se factorise par le déterminant (et alors $\chi = \mathbf{1}$), on a aussi :

$$\forall\, n \in \mathbb{Z},\ T_{2n+2,2n+1}(f) = S_n(f).$$

3.7.2. *Étude des composantes (I_S, χ)-isotypiques de* $\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}})$

PROPOSITION 3.32. — *Le groupe G_S admet la décomposition suivante en doubles classes disjointes :*

$$G_S = \bigsqcup_{n\in\mathbb{Z}} K_0 \alpha_0^{-n} I_S(1).$$

Démonstration. — On part de la décomposition suivante de G [2, proposition 14] :

$$G = \bigsqcup_{n\in\mathbb{Z}} KZ\alpha^{-n} I(1)\ ,$$

qui assure déjà que les doubles classes de notre énoncé sont deux à deux disjointes puisque $K_0\alpha_0^{-n} I_S(1)$ est contenue dans $KZ\alpha^{-2n}I(1)$. Si g est un élément de G_S, il existe alors des éléments $k \in K$, $z \in Z$ et $i \in I(1)$ ainsi qu'un entier $n \in \mathbb{Z}$ tels que $g = kz\alpha^{-n}i$. Le calcul du déterminant de g montre que l'on doit avoir $\det(k)\det(z)\varpi_F^{-n}\det(i) = 1$. En écrivant $\det(z)$ sous la forme $u\varpi_F^{2x}$ avec $u \in \mathcal{O}_F^\times$, on obtient d'abord que $n = 2x$, puis que $\det(k)u\det(i) = 1$. La commutativité du tore diagonal T permet de conclure en écrivant $g = k_1\alpha_0^{-x}i_1$, où $k_1 \in K_0$ et $i_1 \in I_S(1)$ sont définis par les formules suivantes :

$$k_1 := k\begin{pmatrix} \det(i)u & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\ ;\ i_1 := \begin{pmatrix} \det(i)^{-1} & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} i. \qquad \square$$

Fixons un entier $n \in \mathbb{Z}$. Un élément $I_S(1)$-invariant $f \in \mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}})$ ayant pour support $K_0\alpha_0^{-n}I_S(1)$ est alors entièrement déterminé par sa valeur en α_0^{-n}, qui doit vérifier la condition suivante : pour tout $k \in K_0$ tel que $\alpha_0^n k \alpha_0^{-n}$ appartient à $I_S(1)$, on a

$$\sigma_{\vec{r}}(k) f_n(\alpha_0^{-n}) = f_n(\alpha_0^{-n}). \tag{3.18}$$

Si $n \geq 1$, l'égalité (3.18) appliquée à $k = \overline{u}(x)$ avec $x \in \mathcal{O}_F^\times$ montre que $f(\alpha_0^{-n}) \in \sigma_{\vec{r}}$ est invariant sous l'action de $\overline{U}(k_F)$ et est donc colinéaire à $y^{\vec{r}}$ par [2, Lemma 2]. Si $n \leq 0$, l'application de l'égalité (3.18) à $k = u(x)$ avec $x \in \mathcal{O}_F^\times$

montre que $f(\alpha_0^{-n})$ est invariant sous l'action de $U(k_F)$ et donc colinéaire à $x^{\vec{r}}$ par [2, Lemma 2].
Par conséquent, si f_n désigne l'élément $I_S(1)$-invariant de $\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}})$ ayant pour support $K_0\alpha_0^{-n}I_S(1)$ et dont la valeur en α_0^{-n} est $x^{\vec{r}}$ lorsque $n \leq 0$ (resp. $y^{\vec{r}}$ lorsque $n \geq 1$), nous obtenons l'énoncé suivant, où le second point découle d'un calcul direct.

Proposition 3.33. — 1. *L'espace vectoriel des éléments $I_S(1)$-invariants de $\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}})$ admet pour base sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ la famille $\{f_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$.*
2. *L'action de I_S sur la fonction f_n est donnée par le caractère $\omega^{\vec{r}}$ (resp. $\omega^{-\vec{r}}$) si $n \leq 0$ (resp. si $n \geq 1$).*

Corollaire 3.34. — *Si χ est un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de I_S pour lequel la composante (I_S, χ)-isotypique de $\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}})$ est non nulle, alors $\chi = \omega^{\vec{r}}$ ou $\chi = \omega^{-\vec{r}}$.*

Démonstration. — Si f est un élément non nul de la composante (I_S, χ)-isotypique de $\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}})$, il appartient en particulier à l'espace des vecteurs $I_S(1)$-invariants de $\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}})$ et peut donc être écrit sous la forme $\sum_{j\in J} \lambda_j f_j$ avec J ensemble fini d'indices. On dispose alors des égalités suivantes pour tout $i \in I_S$:

$$\sum_{j\in J} \lambda_j \chi(i) f_j = \chi(i) f = i \cdot f = \sum_{j\in J} \lambda_j (i \cdot f_j) = \sum_{j\in J} \lambda_j \epsilon_j(i) f_j \ ,$$

où ϵ_j vaut $\omega^{\vec{r}}$ lorsque $j \leq 0$ et $\omega^{-\vec{r}}$ lorsque $j \geq 1$. On doit donc avoir

$$\sum_{j\in J} \lambda_j (\chi(i) - \epsilon_j(i)) f_j = 0.$$

Les supports des fonctions f_n étant deux à deux disjoints, on en déduit que :

$$\forall\ i \in I_S,\ \forall\ j \in J,\ \lambda_j(\chi(i) - \epsilon_j(i)) = 0.$$

Comme f est non nulle, il existe un indice j tel que $\lambda_j \neq 0$, donc tel que $\chi = \epsilon_j$. □

3.7.3. *Construction du contre-exemple annoncé.* — Supposons que $\vec{r} = \frac{\overrightarrow{p-1}}{2}$ avec p impair. On a tout d'abord $\omega^{\vec{r}} = \omega^{-\vec{r}}$, et la proposition 3.33 assure donc que la composante $(I_S, \omega^{\vec{r}})$-isotypique de $\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}})$ est égale à $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \overline{\mathbb{F}}_p f_n$. Par ailleurs, la non-trivialité du caractère $\omega^{\vec{r}}$ implique qu'un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse χ de IZ prolongeant le caractère $\omega^{\vec{r}}$ ne se factorise pas à travers le déterminant. La proposition 3.31 et [2, second point de Lemma 9] impliquent donc que chaque élément de l'algèbre de Hecke $\mathscr{H}(G_S, I_S, \omega_{\vec{r}})$ agit comme un polynôme en des opérateurs $T_{2n,2n+1}$. La description de l'action de ces opérateurs fournie par [2, Lemma 12 & proposition 16] assure alors que le $\mathscr{H}(G_S, I_S, \omega_{\vec{r}})$-module engendré par la fonction f_1 est égal à $\bigoplus_{n\geq 1} \overline{\mathbb{F}}_p f_n$ et est donc de codimension infinie dans la composante $(I_S, \omega^{\vec{r}})$-isotypique de $\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}})$.

Nous avons ainsi mis en défaut la possibilité d'une adaptation inconditionnelle de la proposition 3.28 au cas de G_S. Ceci explique que nous soyons amenée à nous limiter aux représentations lisses irréductibles de G_S sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ qui admettent une paramétrisation par rapport à K_0. Cette hypothèse n'est en fait guère contraignante, puisque nous allons prouver qu'elle est vérifiée :

- par toute $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible *admissible* de G_S ;
- par toute $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible de G_S *lorsque le corps* F *n'est pas de caractéristique* 2.

En particulier, les résultats démontrés dans la suite seront valables pour toute $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible de $\mathrm{SL}_2(F)$ lorsque F est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$.

3.7.4. *Cas des représentations lisses irréductibles admissibles*

THÉORÈME 3.35. — *Toute représentation lisse irréductible admissible de G_S sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ admet une paramétrisation par rapport à K_0.*

Démonstration. — Soit V une représentation lisse irréductible admissible de G_S sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Comme Γ_S est un pro-p-sous-groupe distingué de K_0, le lemme 1.8 et l'admissibilité de V assurent que V^{Γ_S} est une représentation de dimension finie de $\mathrm{SL}_2(k_F)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, de sorte qu'elle contient une $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible $\sigma_{\vec{r}}$ de K_0. La réciprocité de Frobenius compacte implique alors $\mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]}(\mathrm{ind}_{K_S}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}), V)$ est un espace vectoriel non nul de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Par suite, il contient un vecteur propre sous l'action de l'algèbre commutative $\mathscr{H}(G_S, K_0, \sigma_{\vec{r}}) = \overline{\mathbb{F}}_p[\tau_{\vec{r}}]$, ce qui signifie qu'il existe un scalaire $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$ et un homomorphisme non nul $\Phi : \mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}) \to V$ tels que $\Phi \circ \tau_{\vec{r}} = \lambda\Phi$. Autrement dit, Φ se factorise à travers le quotient $\frac{\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}})}{(\tau_{\vec{r}}-\lambda)(\mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}))} = \pi_0(\vec{r}, \lambda)$ en un homomorphisme non nul $\pi_0(\vec{r}, \lambda) \to V$, qui est surjectif par irréductibilité de V. □

3.7.5. *Cas où F n'est pas de caractéristique* 2. — Nous allons montrer que toute représentation lisse irréductible de G_S admet une paramétrisation par rapport à K_0 lorsque F n'est pas de caractéristique 2. Pour ce faire, nous utilisons le résultat du théorème 3.27 et un argument de filtration par le socle qui utilise de manière cruciale la finitude du quotient G/G_SZ, celle-ci étant mise en défaut si F est de caractéristique 2.

THÉORÈME 3.36. — *Soit σ une $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible de G_S.*

1. *Il existe une représentation de G sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ qui est lisse irréductible à caractère central prolongeant celui de σ et dont la restriction à G_S contient σ.*
2. *Il existe une représentation de G sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ qui est lisse irréductible à caractère central et dont la restriction à G_S admet σ comme quotient.*

3. *Le $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module σ admet une paramétrisation par rapport à K_0. De plus, cette paramétrisation est unique si σ n'est pas supersingulière par rapport à K_0.*

Démonstration. — Pour prouver la première assertion, on étend σ en une représentation lisse irréductible à caractère central de G_SZ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ que l'on note encore σ. Comme F n'est pas de caractéristique 2, G_SZ est un sous-groupe normal d'indice fini dans G et le $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-module $\mathrm{Ind}_{G_SZ}^G(\sigma)$ est donc de longueur finie. Par suite, il possède une filtration finie par des $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-modules

$$\{0\} = \Pi_m \subset \Pi_{m-1} \subset \cdots \subset \Pi_1 \subset \Pi_0 = \mathrm{Ind}_{G_SZ}^G(\sigma)$$

tels que pour tout entier $i \in \{0, \ldots, m-1\}$, le quotient $\pi_i := \Pi_i/\Pi_{i+1}$ est une représentation lisse irréductible de G sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Notons alors r le plus grand entier $i \in \{0, \ldots, m-1\}$ tel que l'intersection $\Pi_i \cap \sigma$ soit non nulle. L'irréductibilité du $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module σ assure que σ est inclus dans Π_r tandis que la maximalité de r assure que $\Pi_{r+1} \cap \sigma = \{0\}$. Par conséquent, σ peut être vu comme un sous-$\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module de π_r, ce qui prouve le premier point de l'énoncé.
La seconde assertion se démontre par un argument analogue : la finitude du quotient G/G_SZ assure que l'induite lisse $\mathrm{Ind}_{G_SZ}^G(\sigma)$ est égale à l'induite compacte $\mathrm{ind}_{G_SZ}^G(\sigma)$, dont σ est un $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module quotient par réciprocité compacte de Frobenius.
On montre alors la troisième assertion comme suit : choisissons Π une représentation lisse, irréductible et à caractère central de G sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ dont la restriction à G_S admet σ comme quotient. Le premier point du théorème 3.15 assure l'existence d'un caractère lisse $\chi : F^\times \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$, d'une paire de paramètres $(\vec{r}, \lambda) \in \{0, \ldots, p-1\}^f \times \overline{\mathbb{F}}_p$ et d'un morphisme surjectif de $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-modules

$$\pi(\vec{r}, \lambda) \otimes (\chi \circ \det) \twoheadrightarrow \Pi.$$

Par suite, il existe un morphisme surjectif de $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-modules

$$\psi : \mathrm{ind}_{KZ}^G(\sigma_{\vec{r}}) \otimes (\chi \circ \det) \twoheadrightarrow \Pi$$

vérifiant $\psi \circ T_{\vec{r}} = \lambda\psi$, ainsi que $\psi \circ T_{\vec{r}}^2 = \lambda^2\psi$. La proposition 3.13 implique alors que ce morphisme induit un morphisme non nul de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules

$$\psi_S : \mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}) \oplus \mathrm{ind}_{K_1}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}^\alpha) \twoheadrightarrow \sigma$$

qui induit lui-même deux morphismes de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules

$$\psi_{S,0} : \mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}) \to \sigma \text{ et } \psi_{S,1} : \mathrm{ind}_{K_1}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}^\alpha) \to \sigma.$$

L'un de ces deux morphismes est non nul, donc surjectif par irréductibilité de σ. Si $\psi_{S,0}$ est non nul, la proposition 3.14 implique que l'on a $\psi_{S,0} \circ \tau_{\vec{r}} = \lambda^2\psi_{S,0}$, donc que $\psi_{S,0}$ se factorise à travers le quotient $\pi_0(\vec{r}, \lambda^2)$: ainsi, $(\vec{r}, \lambda^2)$ est une

paramétrisation de σ par rapport à K_0. Si $\psi_{S,0}$ est identiquement nul, la proposition 3.23 permet de déduire du morphisme $\psi_{S,1}$ l'existence d'un morphisme non nul de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules $\pi_0(\vec{r}, \lambda^2) \twoheadrightarrow \sigma^{\alpha^{-1}}$. On distingue alors deux cas : si $\lambda \neq 0$, la proposition 2.8 et le corollaire 3.19 impliquent que les représentations $\sigma^{\alpha^{-1}}$ et σ sont isomorphes, ce qui prouve que la paire $(\vec{r}, \lambda^2)$ est une paramétrisation de σ par rapport à K_0. Si $\lambda = 0$, la preuve de la proposition 3.25 assure que la composition à droite du morphisme ψ_S par la conjugaison des représentations par α définit un morphisme surjectif de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules $\psi_S^\alpha : \mathrm{ind}_{K_1}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}^\alpha) \oplus \mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}) \twoheadrightarrow \sigma$. L'homomorphisme $\psi_{S,0}^\alpha : \mathrm{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_{\vec{r}}) \to \sigma$ obtenu par projection de ψ_S^α est alors égal à la composée à droite du morphisme non nul $\psi_{S,1}$ par la conjugaison par α. Par suite, $\psi_{S,0}^\alpha$ est non nul, donc surjectif, ce qui prouve que $(\vec{r}, 0)$ est une paramétrisation de σ par rapport à K_0.
L'unicité de la paramétrisation par rapport à K_0 dans le cas non-supersingulier est une conséquence directe du corollaire 3.19. □

REMARQUE 3.37. — Lorsque F est de caractéristique nulle[(14)], on peut démontrer [8, Lemma 2.4] que la restriction à G_S d'une $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible admissible de G est une somme directe finie de $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations lisses irréductibles admissibles de G_S.

Notons que la preuve du théorème 3.36 démontre aussi le résultat suivant *sans hypothèse sur la caractéristique du corps F*.

COROLLAIRE 3.38. — *Soit σ une $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible de G_S. Supposons qu'il existe une $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible à caractère central Π de G dont la restriction à G_S contient σ. Alors σ est supersingulière par rapport à K_0 si et seulement si Π est supersingulière.*

Démonstration. — La preuve du théorème 3.36 montre que si $(\vec{r}, \lambda)$ est une paramétrisation de Π, alors $(\vec{r}, \lambda^2)$ est une paramétrisation par rapport à K_0 de σ. Ceci assure déjà que si Π est une représentation supersingulière de G, alors σ est supersingulière par rapport à K_0. L'implication réciproque se déduit tout aussi directement de cette assertion grâce à la proposition 3.20. □

3.8. Equivalence entre supersingularité et supercuspidalité. — Nous commençons par vérifier que les rôles de K_0 et K_1 sont encore parfaitement symétriques.

PROPOSITION 3.39. — *Soit σ une représentation lisse irréductible de G_S sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Si F est de caractéristique 2, on suppose de plus que σ est admissible.*

1. *La représentation σ admet une paramétrisation par rapport à K_1. Celle-ci est unique si σ n'est pas supersingulière par rapport à K_1.*

(14) Et, plus généralement, lorsque le quotient $G/G_S Z$ est fini.

2. *Supposons que* Π *soit une représentation lisse, irréductible, à caractère central de* G *sur* $\overline{\mathbb{F}}_p$ *dont la restriction à* G_S *contient* σ. *Alors* σ *est supersingulière par rapport à* K_1 *si et seulement si* Π *est supersingulière.*

Démonstration. — Il suffit d'échanger les rôles tenus par K_0 et K_1 dans les preuves des théorèmes 3.35, 3.36 et du corollaire 3.38. C'est possible grâce à la définition de l'opérateur $\tau^1_{\vec{r}}$, dont l'action coïncide avec celle de l'opérateur $T^2_{\vec{r}}$, ainsi qu'à la proposition 3.13, qui implique que le $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-module $\mathrm{ind}_{KZ}^G(\sigma_{\vec{r}})$ est isomorphe à sa représentation α-conjuguée pour tout choix du paramètre $\vec{r}$, et au corollaire 3.24. $\square$

Nous prouvons maintenant que le choix du sous-groupe ouvert compact maximal n'a pas d'influence sur les informations obtenues pour une représentation donnée.

Théorème 3.40. — *Soit* σ *une représentation lisse irréductible de* G_S *sur* $\overline{\mathbb{F}}_p$. *On suppose que* F *est de caractéristique différente de* 2 *ou que* σ *est admissible.*

1. *Si* $\lambda \neq 0$, *la paire* $(\vec{r}, \lambda)$ *est une paramétrisation de* σ *par rapport à* K_0 *si et seulement si c'en est une par rapport à* K_1.
2. *La notion de supersingularité ne dépend pas du choix du sous-groupe ouvert compact maximal.*

Démonstration. — Supposons que $(\vec{r}, \lambda)$ soit une paramétrisation de σ par rapport à K_0 avec $\lambda \neq 0$. Il existe donc un morphisme surjectif de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules $\pi_0(\vec{r}, \lambda) \twoheadrightarrow \sigma$ qui induit, d'après la proposition 3.23, un morphisme surjectif de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules $\pi_1(\vec{r}, \lambda) \twoheadrightarrow \sigma^\alpha$. Comme λ est non nul, le second point du corollaire 3.24 implique que σ^α n'est pas supercuspidale, donc isomorphe à σ d'après la proposition 2.8. On obtient ainsi un morphisme surjectif $\pi_1(\vec{r}, \lambda) \twoheadrightarrow \sigma$ qui montre que $(\vec{r}, \lambda)$ est une paramétrisation de σ par rapport à K_1.

Prouvons maintenant que si σ est supersingulière par rapport à K_1, alors elle l'est par rapport à K_0. Supposons par l'absurde que σ admette une paramétrisation par rapport à K_0 de la forme $(\vec{r}, \lambda)$ avec $\lambda \neq 0$. Le point précédent implique que $(\vec{r}, \lambda)$ est une paramétrisation de σ relative à K_1, ce qui contredit le corollaire 3.24.

Pour chaque assertion, l'implication réciproque s'obtient en échangeant les rôles de K_0 et de K_1 dans l'argument développé ci-dessus, ce qui est possible grâce aux propositions 3.20 et 3.39 ainsi qu'aux corollaires 3.21 et 3.24. $\square$

Nous pouvons désormais parler de représentation supersingulière sans préciser de choix de sous-groupe ouvert compact maximal. Nous obtenons ainsi l'énoncé suivant.

COROLLAIRE 3.41. — *Soit σ une représentation lisse irréductible de G_S sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, que l'on suppose de plus admissible si F est de caractéristique 2. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *σ est supersingulière ;*
2. *σ est supercuspidale.*

Démonstration. — Les corollaires 3.21 et 3.24 assurent déjà que la supersingularité implique la supercuspidalité. Réciproquement, si σ est une représentation supercuspidale et si $(\vec{r}, \lambda)$ en est une paramétrisation par rapport à K_0, le corollaire 3.19 implique que l'on doit avoir $\lambda = 0$, ce qui signifie que σ est supersingulière par rapport à K_0 et termine la démonstration grâce au dernier point du théorème 3.40. □

3.9. Classification des représentations lisses irréductibles de G_S

THÉORÈME 3.42. —
1. *Les classes d'isomorphisme des représentations lisses irréductibles admissibles de $\mathrm{SL}_2(F)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ se partitionnent en quatre familles :*
   (a) *le caractère trivial* $\mathbf{1}$ *;*
   (b) *la représentation de Steinberg* St_S *;*
   (c) *les représentations paraboliquement induites* $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\eta)$ *avec η un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse non trivial de B_S ;*
   (d) *les représentations supersingulières.*
2. *Cette classification est compatible avec la classification de Barthel-Livné pour les représentations lisses irréductibles à caractère central de* $\mathrm{GL}_2(F)$ *sur $\overline{\mathbb{F}}_p$: si W est une représentation lisse irréductible à caractère central de G sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ dont la restriction à G_S contient une représentation lisse irréductible admissible V, alors V appartient à une famille de la classification ci-dessus si et seulement si W appartient à la même famille dans la classification de Barthel-Livné.*
3. *Si F n'est pas de caractéristique 2, on peut supprimer l'hypothèse d'admissibilité dans les assertions précédentes.*

Démonstration. — Soit V une $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse irréductible admissible de G_S. Grâce au théorème 3.35, elle admet une paramétrisation par rapport à K_0 de la forme $(\vec{r}, \lambda) \in \{0, \ldots, p-1\}^f \times \overline{\mathbb{F}}_p$. Si λ est non nul, le corollaire 3.19 assure que V appartient à l'une des trois premières familles. Si $\lambda = 0$, alors V appartient à la quatrième famille par définition de la supersingularité.

Les familles de l'énoncé sont deux à deux disjointes : le corollaire 3.41 prouve que la quatrième famille est disjointe des trois premières tandis que la disjonction entre deux quelconques des trois premières familles provient de la proposition 2.14.

La compatibilité de notre classification avec celle de Barthel-Livné découle quant à elle directement du théorème 2.16 et du corollaire 3.38. Ces arguments restent valables pour toute représentation lisse irréductible de G_S sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ lorsque F n'est pas de caractéristique 2 car le théorème 3.36 assure dans ce cas l'existence d'une paramétrisation par rapport à K_0. □

4. Le cas $F = \mathbb{Q}_p$

Nous supposons désormais que $F = \mathbb{Q}_p$, ce qui permet de choisir $\varpi_F = p$ comme uniformisante. Le corps résiduel $\mathbb{F}_p$ contient p éléments, de sorte que $f = 1$: nous écrirons donc r au lieu de $\vec{r}$ pour alléger les notations.

Cette dernière section s'organise comme suit : nous donnons d'abord une description explicite des représentations supersingulières de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$ à partir des résultats de Breuil pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ [5]. Nous définissons ensuite une correspondance de Langlands locale semi-simple pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$ compatible à celle définie par Breuil pour les représentations modulo p de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ [5, définition 4.2.4].

4.1. Représentations supersingulières de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$. — La description des représentations supersingulières de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ est due à Breuil, qui a notamment démontré le théorème suivant [5, corollaires 4.1.1, 4.1.3, 4.1.4 et 4.1.5]. On désigne par $\overline{f} \in \pi(r, 0)$ l'image modulo $T_{\vec{r}}$ d'un élément $f \in \mathrm{ind}_{KZ}^{G}(\sigma_r)$, et par ε le caractère cyclotomique modulo p vu comme caractère de $\mathbb{Q}_p^\times$ grâce à l'isomorphisme de réciprocité faisant correspondre les uniformisantes aux Frobenius géométriques.

THÉORÈME 4.1. —

1. *Pour tout paramètre $r \in \{0, \dots, p-1\}$, la représentation $\pi(r, 0)$ est irréductible.*
2. *Il existe un unique isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-modules*
$$\pi(r, 0) \simeq \pi(p-1-r, 0) \otimes (\varepsilon^r \circ \det)$$
envoyant $\overline{[I_2, x^r]}$ sur $\overline{[\alpha, y^r]}$.
3. *Les seules représentations de la forme $\pi(s, 0) \otimes \chi$ avec $\chi : G \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ caractère lisse qui sont isomorphes à $\pi(r, 0)$ sont les suivantes :*
$$\pi(r, 0)\ ;\ \pi(r, 0) \otimes (\mu_{-1} \circ \det)\ ;\ \pi(p-1-r, 0) \otimes (\varepsilon^r \circ \det)\ ;$$
$$\pi(p-1-r, 0) \otimes (\mu_{-1}\varepsilon^r \circ \det).$$

Fixons un paramètre $r \in \{0, \dots, p-1\}$. La compréhension du $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-module $\pi(r, 0)$ repose complètement sur la structure de l'espace de ses vecteurs $I(1)$-invariants, donnée par le résultat suivant [5, théorème 3.2.4 et remarque 3.2.5].

THÉORÈME 4.2. — *L'espace des vecteurs $I(1)$-invariants de $\pi(r,0)$ est égal à*

$$\pi(r,0)^{I(1)} = \overline{\mathbb{F}}_p\overline{[I_2, x^r]} \oplus \overline{\mathbb{F}}_p\overline{[\alpha, y^r]}. \tag{4.1}$$

La preuve de cet énoncé démontre en fait que l'espace des vecteurs de $\pi(r,0)$ invariants sous l'action du groupe engendré par U et $\overline{U}$, qui est encore un sous-groupe de G_S, est contenu dans le membre de droite de (4.1). Breuil conclut en vérifiant que les vecteurs $\overline{[I_2, x^r]}$ et $\overline{[\alpha, y^r]}$ sont fixes sous l'action de $I(1)$. En particulier, ils sont fixes sous l'action de $I_S(1)$, ce qui fournit le résultat suivant.

THÉORÈME 4.3. — *L'espace des vecteurs $I_S(1)$-invariants de $\pi(r,0)$ est égal à*

$$\pi(r,0)^{I_S(1)} = \overline{\mathbb{F}}_p\overline{[I_2, x^r]} \oplus \overline{\mathbb{F}}_p\overline{[\alpha, y^r]} = \pi(r,0)^{I(1)}.$$

Cet énoncé justifie l'introduction des deux sous-$\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules de $\pi(r,0)|_{G_S}$ suivants : celui engendré par le vecteur $v_{r,\infty} := \overline{[I_2, x^r]}$, que l'on note $\pi_{r,\infty}$, et celui engendré par le vecteur $v_{r,0} := \overline{[\alpha, y^r]}$, que l'on note $\pi_{r,0}$. La proposition suivante atteste que ces représentations définissent bien des objets distincts.

PROPOSITION 4.4. — *Les sous-$\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules $\pi_{r,\infty}$ et $\pi_{r,0}$ de $\pi(r,0)|_{G_S}$ sont d'intersection nulle :*

$$\pi_{r,0} \cap \pi_{r,\infty} = \{0\}.$$

Démonstration. — Notons que le vecteur $v_{r,\infty}$ appartient au $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module $\pi_r = \frac{\operatorname{ind}_{K_0}^{G_S}(\sigma_r)}{T_r(\operatorname{ind}_{K_1}^{G_S}(\sigma_r^\alpha))}$ défini avant le corollaire 3.26. Par conséquent, π_r contient *a fortiori* la représentation $\pi_{r,\infty}$. De même, la proposition 3.13 assure que le $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module π_r^α contient la représentation $\pi_{r,0}$. On conclut alors grâce au corollaire 3.26 qui implique en particulier que l'intersection $\pi_r \cap \pi_r^\alpha$ est réduite à $\{0\}$. □

Ceci permet de considérer la représentation en somme directe $\pi_{r,\infty} \oplus \pi_{r,0}$, qui est naturellement munie d'une structure de sous-$\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module de $\pi(r,0)|_{G_S}$.

PROPOSITION 4.5. — *L'inclusion de $\pi_{r,\infty}$ et $\pi_{r,0}$ dans $\pi(r,0)$ induit un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules $\pi(r,0)|_{G_S} \simeq \pi_{r,\infty} \oplus \pi_{r,0}$.*

Démonstration. — Seule la surjectivité de l'application définie par l'inclusion du $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module $\pi_{r,\infty} \oplus \pi_{r,0}$ dans $\pi(r,0)$ reste à vérifier. Comme $v_{r,\infty}$ appartient au $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-module irréductible $\pi(r,0)$, c'en est en particulier un générateur. Tout élément de $\pi(r,0)$ est donc une combinaison linéaire finie à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_p$ d'éléments de la forme $g \cdot \overline{[I_2, x^r]}$ avec $g \in G$. Remarquons maintenant que tout $g \in G$ s'écrit sous la forme $g_s\alpha^j k$ avec $g_s \in G_S$, $j \in \{0,1\}$ et $k \in KZ$. La définition de $\sigma_{\vec{r}}$ assurant que $\left(\begin{smallmatrix} p^m & 0 \\ 0 & p^m u \end{smallmatrix}\right) \cdot x^r = x^r$ pour tout entier $m \in \mathbb{Z}$ et tout élément $u \in \mathbb{Z}_p^\times$, on en conclut que l'on a $g \cdot \overline{[I_2, x^r]} = g_s \cdot \overline{[\alpha^j, x^r]}$, ce qui prouve que $g \cdot \overline{[I_2, x^r]}$ appartient à $\pi_{r,\infty}$ lorsque $j = 0$ (resp. $\pi_{r,0}$ lorsque $j = 1$) et termine la démonstration. □

Corollaire 4.6. — *Les $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules $(\pi_{r,\infty})^\alpha$ et $\pi_{r,0}$ sont isomorphes.*

Démonstration. — La comparaison de la proposition 4.5 au second point du corollaire 3.26 montre que $\pi_{r,\infty} \oplus \pi_{r,0} = \pi_r \oplus \pi_r^\alpha$. Comme $\pi_{r,\infty}$ est contenue dans π_r tandis que $\pi_{r,0}$ est contenue dans π_r^α, cette égalité n'est possible que si $\pi_{r,\infty} = \pi_r$ et $\pi_{r,0} = \pi_r^\alpha$, ce qui termine la démonstration. □

Intéressons-nous à présent aux propriétés de réductibilité des représentations $\pi_{r,\infty}$ et $\pi_{r,0}$, ainsi qu'à leurs entrelacements éventuels. Pour cela, nous étudions leurs espaces de vecteurs $I_S(1)$-invariants, qui sont l'objet de la proposition suivante.

Proposition 4.7. — *L'espace des $I_S(1)$-invariants de $\pi_{r,\infty}$ (resp. $\pi_{r,0}$) est de dimension 1 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ et admet pour base $v_{r,\infty}$ (resp. $v_{r,0}$).*

Démonstration. — Traitons le cas de $\pi_{r,\infty}$, celui de $\pi_{r,0}$ s'obtenant de la même manière. Grâce au théorème 4.3, la droite $\overline{\mathbb{F}}_p v_{r,\infty}$ est incluse dans $\pi_{r,\infty}^{I_S(1)}$. Réciproquement, si f est un élément non nul de $\pi_{r,\infty}^{I_S(1)}$, il appartient a fortiori à $\pi(r,0)^{I_S(1)}$ et le théorème 4.3 assure alors l'existence de coefficients $a, b \in \overline{\mathbb{F}}_p$ non simultanément nuls tels que $f = av_{r,\infty} + bv_{r,0}$. Comme f appartient au $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module $\pi_{r,\infty}$ engendré par $v_{r,\infty}$, il peut aussi être écrit sous la forme $f = \sum_{i \in I} \lambda_i s_i v_{r,\infty}$ avec $\lambda_i \in \overline{\mathbb{F}}_p$ et $s_i \in G_S$ pour tout $i \in I$. La comparaison des deux expressions de f obtenues montre que l'on doit alors avoir

$$bv_{r,0} = -av_{r,\infty} + \sum_{i \in I} \lambda_i s_i v_{r,\infty} \in \pi_{r,0} \cap \pi_{r,\infty}.$$

Grâce à la proposition 4.4, on en conclut que $b = 0$ et que $f = av_{r,\infty}$ appartient à $\overline{\mathbb{F}}_p v_{r,\infty}$. □

Corollaire 4.8. — *Les représentations $\pi_{r,0}$ et $\pi_{r,\infty}$ sont des représentations lisses irréductibles supersingulières de G_S.*

Démonstration. — Si π est un sous-$\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module non nul de $\pi_{r,0}$, le lemme 1.8 assure que $\pi^{I_S(1)}$ est non nul. Comme c'est un sous-espace vectoriel de $\pi_{r,0}^{I_S(1)} = \overline{\mathbb{F}}_p v_{r,0}$, on a forcément $\pi^{I_S(1)} = \pi_{r,0}^{I_S(1)}$, donc $\pi = \pi_{r,0}$ puisque $v_{r,0}$ engendre le $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module $\pi_{r,0}$. Le même argument démontre l'irréductibilité de $\pi_{r,\infty}$, ce qui termine la démonstration car le corollaire 3.38 assure la supersingularité de ces deux objets. □

Corollaire 4.9. — *Le $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module $\pi(r,0)|_{G_S}$ est totalement décomposé de longueur 2, avec pour sous-quotients irréductibles $\pi_{r,0}$ et $\pi_{r,\infty}$.*

Démonstration. — C'est une reformulation de la proposition 4.5 à la lumière du corollaire 4.8. □

Etudions à présent les éventuels entrelacements entre représentations supersingulières de G_S. On commence par remarquer que le second point du théorème 4.1 fournit des isomorphismes de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules entre $\pi_{p-1-r,\infty}$ et $\pi_{r,0}$, ce qui permet de se limiter à l'étude des entrelacements entre $\pi_{r,\infty}$ et $\pi_{s,\infty}$. Un tel entrelacement est alors entièrement déterminé par sa valeur en $v_{r,\infty}$, qui doit appartenir à $\pi_{s,\infty}^{I_S(1)}$ par G_S-équivariance. La proposition 4.7 fournit donc directement le fait suivant.

Corollaire 4.10. — *Pour tous entiers $(r,s) \in \{0,\dots,p-1\}^2$, on a*

$$\dim_{\overline{\mathbb{F}}_p} \mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]}(\pi_{r,\infty}, \pi_{s,\infty}) \leq 1.$$

Pour déterminer les cas où cet espace est non nul, nous allons calculer la représentation de I_S portée par l'espace des vecteurs $I_S(1)$-invariants. L'application de réduction modulo p permet d'identifier le quotient $I_S/I_S(1)$ au tore fini $T_S(\mathbb{F}_p) \simeq \mathbb{F}_p^\times$ des matrices diagonales de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$, de sorte que la représentation que nous voulons calculer est simplement un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de $\mathbb{F}_p^\times$.

Proposition 4.11. — *Soient $r, s \in \{0,\dots,p-1\}$.*

1. *Le $\overline{\mathbb{F}}_p[I_S]$-module porté par $\pi_{r,\infty}^{I_S(1)}$ est isomorphe au caractère ι^r.*
2. *Les $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules $\pi_{r,\infty}$ et $\pi_{s,\infty}$ sont isomorphes si et seulement si $s = r$.*

Démonstration. — Le premier point s'obtient en calculant directement l'action de $T_S(\mathbb{F}_p) = I_S/I_S(1)$ sur le vecteur $v_{r,\infty}$:

$$\forall\ \lambda \in \mathbb{F}_p^\times\ ,\ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} [I_2, x^r] = [I_2, \sigma_r(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix})(x^r)] = \lambda^r [I_2, x^r].$$

Si $\pi_{r,\infty}$ et $\pi_{s,\infty}$ sont deux représentations isomorphes de G_S, leurs espaces de vecteurs $I_S(1)$-invariants doivent porter le même caractère de I_S. On doit donc avoir $\iota^r = \iota^s$, ce qui signifie que $p-1$ divise $r-s$ et ne laisse que trois possibilités :

- ou bien $r - s = -(p-1)$, ce qui équivaut à dire que $(r,s) = (0, p-1)$;
- ou bien $r - s = 0$, ce qui équivaut à dire que $r = s$;
- ou bien $r - s = p - 1$, ce qui équivaut à dire que $(r,s) = (p-1, 0)$.

Reste donc à vérifier que les représentations $\pi_{0,\infty}$ et $\pi_{p-1,\infty}$ ne sont pas isomorphes. Pour cela, on remarque que deux représentations isomorphes de G_S ont des espaces de vecteurs K_0-invariants de même dimension sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. L'isomorphisme $\pi_{p-1,\infty} \simeq \pi_{0,0}$ assure donc qu'il nous suffit de vérifier que $v_{0,0}$ n'est pas K_0-invariant tandis que $v_{0,\infty}$ l'est pour conclure. L'invariance de $v_{0,\infty}$ sous l'action de K_0 est immédiate puisque σ_0 est égal au caractère trivial :

$$\forall\ k \in K_0,\ k \cdot [I_2, 1] = [I_2, \sigma_0(k)(1)] = [I_2, 1].$$

Par ailleurs, le calcul direct de $\begin{pmatrix} & 1\ 1 \\ -1\ 0 & \end{pmatrix} [\alpha, 1] - [\alpha, 1]$ suivi d'une comparaison avec la formule (3.4) montre que cette différence ne définit pas un élément de l'image de l'opérateur T_0. Autrement dit, le vecteur $v_{0,0}$ n'est pas fixe sous l'action de l'élément $\begin{pmatrix} & 1\ 1 \\ -1\ 0 & \end{pmatrix} \in K_0$, ce qui termine la démonstration. □

4.2. Correspondance de Langlands locale semi-simple. — Pour tout paramètre $r \in \{0, \ldots, p-1\}$, on pose $\pi_r := \pi_{r,\infty}$, ce qui est compatible avec les notations du corollaire 3.26. Nous récapitulons les principaux résultats de la sous-section précédente.

THÉORÈME 4.12. — 1. *Il existe p classes d'isomorphisme de représentations supersingulières de* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$, *et $\pi_0, \ldots, \pi_{p-1}$ en est un système de représentants.*

2. *La restriction à* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *d'une représentation supersingulière de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *est un* $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)]$*-module totalement décomposé de longueur* 2. *Plus précisément :*

$$\forall\ r \in \{0, \ldots, p-1\},\ \pi(r, 0)|_{G_S} \simeq \pi_r \oplus \pi_{p-1-r}.$$

3. *Pour tout $r \in \{0, \ldots, p-1\}$, l'espace des vecteurs $I_S(1)$-invariants de π_r est de dimension 1 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ et l'on a $(\pi_r)^\alpha \simeq \pi_{p-1-r}$.*

Grâce à ce théorème, nous allons déduire des travaux de Breuil une correspondance de Langlands locale semi-simple modulo p pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$. On reprend les notations de [5, section 4.2] : on désigne par $G_{\mathbb{Q}_p} := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ le groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}_p$, par ω_2 le caractère fondamental de Serre de niveau 2 et par $\mathrm{ind}(\omega_2^{r+1})$ l'unique représentation irréductible de $G_{\mathbb{Q}_p}$ de dimension 2 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ dont le déterminant est ε^{r+1} et dont la restriction au sous-groupe d'inertie de $G_{\mathbb{Q}_p}$ est $\omega_2^{r+1} \oplus \omega_2^{p(r+1)}$.

Dans [5, définition 4.2.4], Breuil établit une correspondance de Langlands locale semi-simple modulo p entre les classes d'isomorphisme des représentations semi-simples de $G_{\mathbb{Q}_p}$ de dimension 2 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ et certaines classes d'isomorphisme de représentations lisses semi-simples de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ que nous rappelons maintenant.

DÉFINITION 4.13. — Pour tout entier $r \in \{0,\dots,p-1\}$, on note $[p-3-r]$ l'unique entier de $\{0,\dots,p-2\}$ congru à $p-3-r$ modulo $p-1$. On note π^{ss} la semi-simplifiée d'une représentation lisse π et l'on rappelle que l'injection $\mathbb{Q}_p^\times \hookrightarrow G_{\mathbb{Q}_p}^{ab}$ de la théorie du corps de classes local normalisée pour envoyer les uniformisantes sur les Frobenius géométriques permet d'identifier un caractère lisse de $\mathbb{Q}_p^\times$ à un caractère fini de $G_{\mathbb{Q}_p}$.

On appelle *correspondance de Langlands locale semi-simple modulo p pour* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ la bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphisme des représentations semi-simples de $G_{\mathbb{Q}_p}$ de dimension 2 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ et un ensemble de classes d'isomorphisme de représentations lisses semi-simples de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ définie comme suit :

– pour tout caractère lisse $\chi : \mathbb{Q}_p^\times \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$, tout entier $r \in \{0,\dots,p-1\}$ et tout scalaire $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$,

$$\begin{pmatrix} \varepsilon^{r+1}\mu_\lambda & 0 \\ 0 & \mu_{\lambda^{-1}} \end{pmatrix} \otimes\chi \leftrightarrow (\pi(r,\lambda)^{ss}\otimes(\chi\circ\det))\oplus(\pi([p-3-r],\lambda^{-1})^{ss}\otimes(\chi\circ\det)) ;$$

– pour tout entier $r \in \{0,\dots,p-1\}$ et tout caractère lisse $\chi : \mathbb{Q}_p^\times \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$,

$$\mathrm{ind}(\omega_2^{r+1}) \otimes \chi \leftrightarrow \pi(r,0) \otimes (\chi \circ \det).$$

Regardons ce qu'il advient lorsque l'on tente d'établir une relation analogue entre représentations galoisiennes et représentations supersingulières de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$ qui soit en outre compatible à la correspondance de Breuil. Le second point du théorème 4.12 implique que chaque représentation galoisienne $\mathrm{ind}(\omega_2^{r+1})$ correspond à une *famille* de représentations supersingulières de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$:

$$\mathrm{ind}(\omega_2^{r+1}) \longleftrightarrow \{\pi_r;\pi_{p-1-r}\}.$$

Cette famille est de taille 2 si $r \neq \frac{p-1}{2}$ et réduite à un élément si $r = \frac{p-1}{2}$. De plus, les ensembles correspondant à r et à $p-1-r$ sont les mêmes, ce qui se traduit du côté galoisien par l'isomorphie des représentations projectives induites par $\mathrm{ind}(\omega_2^{r+1})$ et $\mathrm{ind}(\omega_2^{p-1-(r+1)})$. Une autre différence notable avec le cas de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ est que l'on ne distingue plus une représentation galoisienne de sa tordue par un caractère non trivial. En effet, la restriction à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$ de la correspondance obtenue par Breuil montre que pour tout caractère $\chi : F^\times \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ et pour tout entier $r \in \{0,\dots,p-1\}$, les représentations galoisiennes $\mathrm{ind}(\omega_2^{r+1})$ et $\mathrm{ind}(\omega_2^{r+1})\otimes\chi$ correspondent au même paquet $\{\pi_r;\pi_{p-1-r}\}$ de représentations supersingulières de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Il nous faut donc considérer la correspondance suivante pour les représentations supersingulières[15] :

$$\forall\, r \in \{0,\dots,\frac{p-1}{2}\}\ ,\ \mathrm{proj}\circ \mathrm{ind}(\omega_2^{r+1}) \longleftrightarrow \{\pi_r;\pi_{p-1-r}\}.$$

Elle met en bijection l'ensemble des *paquets* de représentations supersingulières de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$ avec celui des classes d'isomorphismes de représentations galoisiennes *projectives* irréductibles de dimension 2 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.

Intéressons-nous maintenant au devenir des représentations galoisiennes scindées de dimension 2 dans une telle correspondance. Le second point du corollaire 3.19 assure que pour toute paire de paramètres (r,λ) avec $\lambda\neq 0$, on dispose d'isomorphismes de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules :

$$\pi(r,\lambda)|_{G_S} \simeq \pi_0(r,\lambda^2) \simeq \pi(r,-\lambda)|_{G_S}.$$

L'interprétation galoisienne de ces isomorphismes est donnée par les égalités suivantes :

$$\begin{pmatrix}\varepsilon^{r+1}\mu_\lambda & 0\\ 0 & \mu_{\lambda^{-1}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\varepsilon^{r+1}\mu_{\lambda^2}\mu_{\lambda^{-1}} & 0\\ 0 & \mu_{\lambda^{-1}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\varepsilon^{r+1}\mu_{-\lambda}\mu_{-1} & 0\\ 0 & \mu_{-\lambda^{-1}}\mu_{-1}\end{pmatrix}.$$

Pour que notre correspondance soit compatible après restriction à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$ à celle existant pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, il nous faut définir la correspondance suivante pour les paires (r,λ) avec $\lambda\neq 0$ et $r\in\{0,\dots,p-1\}$:

$$\mathrm{proj}\circ \begin{pmatrix}\varepsilon^{r+1}\mu_\lambda & 0\\ 0 & \mu_{\lambda^{-1}}\end{pmatrix} \longleftrightarrow \pi_0(r,\lambda)^{ss}\oplus \pi_0([p-3-r],\lambda^{-1})^{ss}\ ,$$

ce qui établit une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphisme des représentations galoisiennes *projectives* scindées de dimension 2 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ et une famille de classes d'isomorphisme de représentations modulo p lisses semi-simples de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$ construites à partir de représentations non supersingulières.

Remarque 4.14. — En décomposant $\overline{\mathbb{F}}_p^\times$ comme somme des $\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell$ avec $\ell\neq p$ premier et en travaillant sur chaque composante ℓ-primaire, on peut reprendre l'argument développé par Serre dans le cas complexe [11, section 6, cas local du théorème 4] pour prouver la nullité de $H^2(G_{\mathbb{Q}_p},\overline{\mathbb{F}}_p^\times)$, où $G_{\mathbb{Q}_p}$ agit trivialement sur $\overline{\mathbb{F}}_p^\times$. Toute représentation projective de $G_{\mathbb{Q}_p}$ de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ se relève donc en une représentation linéaire de $G_{\mathbb{Q}_p}$ de même dimension sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, ce qui atteste de l'exhaustivité des représentations considérées du côté galoisien de notre correspondance.

[15] On note proj la projection canonique de $\mathrm{GL}_2(\dots)$ vers $\mathrm{PGL}_2(\dots)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Abdellatif – « Autour des représentations modulo p des groupes réductifs p-adiques de rang 1 », thèse de doctorat, université Paris-Sud 11, 2011.

[2] L. Barthel & R. Livné – « Irreducible modular representations of GL_2 of a local field », *Duke Math. J.* **75** (1994), p. 261–292.

[3] ———, « Modular representations of GL_2 of a local field : the ordinary, unramified case », *J. Number Theory* **55** (1995), p. 1–27.

[4] A. Borel – *Introduction aux groupes arithmétiques*, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, XV. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1341, Hermann, Paris, 1969.

[5] C. Breuil – « Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. I », *Compositio Math.* **138** (2003), p. 165–188.

[6] C. J. Bushnell & G. Henniart – *The local Langlands conjecture for* GL(2), Grundl. Math. Wiss., vol. 335, Springer, Berlin, 2006.

[7] A. V. Jeyakumar – « Principal indecomposable representations for the group SL(2, q) », *J. Algebra* **30** (1974), p. 444–458.

[8] J.-P. Labesse & R. P. Langlands – « L-indistinguishability for SL(2) », *Canad. J. Math.* **31** (1979), p. 726–785.

[9] G. Pappas & M. Rapoport – « Local models in the ramified case. III. Unitary groups », *J. Inst. Math. Jussieu* **8** (2009), p. 507–564.

[10] J-P. Serre – « Arbres, amalgames, SL_2 », *Astérisque* **46** (1977).

[11] ———, « Modular forms of weight one and Galois representations », in *Algebraic number fields : L-functions and Galois properties (Proc. Sympos., Univ. Durham, Durham, 1975)*, Academic Press, London, 1977, p. 193–268.

[12] T. A. Springer – « Reductive groups », in *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 1*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979, p. 3–27.

[13] M.-F. Vignéras – *Représentations l-modulaires d'un groupe réductif p-adique avec $l \neq p$*, Progress in Math., vol. 137, Birkhäuser, 1996.