



#### Exercice 1

Rappel : calculer  $n$  modulo  $p$  c'est trouver un nombre  $r$  entre  $0$  et  $p - 1$  tel que  $n \equiv r [p]$ . Pour cela, il suffit de faire la division euclidienne de  $n$  par  $p$ . Le nombre  $r$  en est le reste.

1. Combien vaut 37 modulo 13 (donner un résultat entre 0 et 12)?
2. Compléter  $234\ 567\ 876 \equiv \dots [100]$  (mettre un résultat entre 0 et 99).
3.
  - a. Vrai ou faux  $1 \equiv 11 [2]$ ?
  - b. Vrai ou faux  $11 \equiv -1 [5]$ ?
  - c. Vrai ou faux  $100 \equiv -2 [17]$ ?

#### Exercice 2

1. Calculer 10 modulo 7.
2. Calculer 100 modulo 7.
3. En déduire (de tête) 110 modulo 7 ainsi que 1000 modulo 7.
4. Combien vaut 36 modulo 7? En déduire le reste de un million divisé par 7.

#### Exercice 3

1. Calculer 10 modulo 9,  $10^2$  modulo 9,  $10^3$  modulo 9, etc.
2. Montrer qu'un nombre écrit en base 10 est égal à la somme de ses chiffres modulo 9.  
Indication : on pourra faire la preuve seulement avec les nombres à quatre chiffres  $abcd$ .

#### Exercice 4

Voici une table qui, à un symbole, associe l'un des nombres de 0 à 28.

@	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	*	\$
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
										0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8

Pour écrire un message secret, on transforme une lettre ou un symbole de numéro  $n$  de la façon suivante :  
On calcule  $10n + 15$  modulo 29 et le résultat donnera le numéro de la nouvelle lettre.

Par exemple, la lettre  $E$  a le numéro  $n = 5$ . On calcule  $10 \times 5 + 15 = 65$  modulo 29. Puisque  $65 = 2 \times 29 + 7$ , le reste de 65 divisé par 29 est  $r = 7$  qui correspond à  $G$ . Conclusion la lettre  $E$  sera codée par la lettre  $G$ .

1. Par ce principe, coder le mot "TERRE".
2.
  - a. Combien vaut 30 modulo 29? Combien vaut  $(3 \times 15 + 13)$  modulo 29?
  - b. En déduire que si  $r \equiv 10n + 15 [29]$  alors  $3r + 13 \equiv n [29]$ .
  - c. Puis en déduire le décodage du mot @YUB.

### Exercice 5 Clé des billets de 20 euros

Les billets en euros sont numérotés de la façon suivante soit une lettre suivie de onze chiffres pour la série 1 soit deux lettres suivies de dix chiffres pour la série 2.

En remplaçant la lettre par son numéro d'ordre dans l'alphabet, nous obtenons un nombre de douze ou treize chiffres. Alors, le reste de ce nombre dans la division par 9 doit être 8 pour la série 1 et 7 pour la série 2.

1. Le code d'un billet de 20 € de la série 1 est u 01 3 089 37097. Montrer qu'il y a un problème.
2. Sur un billet de 20€ authentique de la série 1, la lettre du code est effacée et les 11 numéros qui la suivent sont 1 6 1 2 2 3 4 0 2 4 2 . Quelles sont les possibilités pour la lettre effacée?
3. Si vous avez un billet de 20 € sur vous, vérifiez la règle du code.

### Exercice 6 Clé des codes barres EAN-13.

Les codes barres que l'on trouve sur les produits de vente sont composés de 13 chiffres que nous allons nommer  $R C_1 C_2 C_3 C_4 C_5 C_6 C_7 C_8 C_9 C_{10} C_{11} C_{12}$ . Nous ne nous intéressons pas à la signification de ces chiffres mais du fait que le chiffre  $C_{12}$  est un chiffre correcteur qui est adapté de façon à ce que :

$$R + 3 \times (C_1 + C_3 + C_5 + C_7 + C_9 + C_{11}) + C_2 + C_4 + C_6 + C_8 + C_{10} + C_{12} \equiv 0 \pmod{10}$$

1. Vérifier si les codes suivants sont corrects :
  - a. 3 714787 813919
  - b. 5 901234 123457
  - c. 6 775915 936368
2. Trouver le chiffre manquant symbolisé par un X dans les cas suivants :
  - a. 3 111111 11111X
  - b. 3 596X10 216079
  - c. 3 59X610 216078

### Exercice 7 Clé du numéro INSEE

Vous devez connaître (voir aussi votre carte vitale) votre numéro INSEE (dit "de sécurité sociale") qui est composé de quinze chiffres. Les deux derniers en sont un code correcteur. On dit aussi qu'ils forment une clé de vérification. Hormis pour la Corse où des règles spécifiques sont utilisées pour déterminer la clé de vérification, celle-ci est calculée à partir du nombre formé par les treize premiers chiffres.

Si celui-ci a pour reste  $r$  dans la division par 97 alors la clé sera  $97 - r$ .

1.
  - a. Vérifier à la calculatrice que  $1\,000\,000 \equiv 27 \pmod{97}$
  - b. En déduire à la calculatrice le calcul de  $1\,690\,549\,588\,157 \pmod{97}$
  - c. En déduire la clé de vérification d'une carte vitale possédant ce numéro.
2. Vérifier la clé de votre numéro INSEE.

### Exercice 8 Comment "cacher" un code de carte bleu.

1. Combien vaut  $3 \times 6667 \pmod{10000}$ ?
2. Soit  $c$  un vrai code (à quatre chiffres), on veut lui faire correspondre un faux code  $f$  que l'on pourra noter sans soucis (ou presque). On se propose de faire l'opération  $c \times 6667 \pmod{10\,000}$  pour obtenir  $f$ .
  - a. Que devient le code  $c = 3478$  par cette opération?
  - b. Que faut-il faire comme opération sur le faux code  $f$  pour retrouver le vrai code  $c$ ?
3. Question subsidiaire : Montrer qu'il existe un code  $c_0$  pour lequel l'opération proposée est inefficace car le faux code sera le même que le vrai code!

### Exercice 9

917 personnes doivent être transportées dans des cars de 52 places.

Combien faudra-t-il de cars et combien de personnes se trouveront dans le car non plein?

### Exercice 10

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de  $10^n$  par 9.

### Exercice 11

Combien trouve-t-on de multiples de 17 compris entre 1000 et 5900?

### Exercice 12

1. Prenez un nombre à deux chiffres, formez un deuxième nombre en renversant l'ordre des chiffres, additionnez ces deux nombres et observez que la somme des deux nombres est divisible par 11.
2. Montrez que ce sera toujours le cas, quelque soit le nombre à deux chiffres choisi.
3. A-t-on la même chose en partant d'un nombre à 3 chiffres? Et avec 4 chiffres?

### Exercice 13

1. Combien vaut 365 modulo 7? Et 366?
2. Si nous sommes le jeudi 11 février 2016, quelle jour de la semaine sera le 11 février 2017?
3. Même question pour le 11/02/2018?

### Exercice 14

Trouver l'entier naturel  $n$  sachant qu'en le divisant par 139 et 142, on trouve le même quotient avec des restes respectifs de 120 et 24.