Mathématiques

UE Libre : Arithmétique

Td 1 **2nd semestre** **2016-2017**

Exercice 1

Rappel : Le tableau suivant donne la correspondance entre les symboles du système de numération attique (Grèce Ve siècle avant JC) et les nombres actuels en base 10.

Ι	Γ	Δ	𐅄	Η	𐅅	Χ	𐅆	Μ	𐅇
1	5	10	50	100	500	1 000	5 000	10 000	50 000

1. Traduire ΜΜ𐅅ΧΧΗΔΓΙΙ dans le système décimal actuel.
2. Traduire dans le système attique le nombre 137 783.
3. Faire l'opération suivante (sans repasser par le système décimal actuel) :

𐅆ΧΧΧΗΗΔΔΓΙΙ + ΧΧΗΔΔΔΔΙΙΙ

Exercice 2

Rappel : Le tableau suivant donne la correspondance entre les symboles du système de numération égyptien (3000 ans avant JC) et les nombres actuels en base 10.

𓏺	𓎆	𓍢	𓆼	𓂭	𓆐	𓁨
1	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000

1. Traduire dans le système décimal actuel les nombres suivants :
   a. 𓂭𓆐𓍢𓍢𓍢𓎆𓎆𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺
   b. 𓂭𓂭𓂭𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓏺𓏺
   c. 𓁨𓁨𓆐𓆐𓆐𓂭𓂭𓂭𓂭𓂭𓂭𓂭𓂭𓆼𓆼𓆼𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓎆𓎆𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺
2. Ecrire les nombres suivants dans le système égyptien :
   a. 234 b. 15 456 c. 2 234 900
3. Effectuer les opérations suivantes
   a. 𓍢𓎆𓎆𓏺𓏺𓏺 + 𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺
   b. 𓍢𓎆𓎆𓏺𓏺𓏺 − 𓎆𓎆𓎆𓏺𓏺𓏺
   c. 𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺 × 𓏺𓏺

Frédéric Vallery - Francis Wlazinski

4. *Rappel : Hormis les fractions 1/2, 2/3 et 3/4 qui avaient leur propre symbole, les égyptiens ne connaissaient que les fractions de numérateur 1. Pour écrire une telle fraction, ils écrivaient le dénominateur. Puis ils le surmontaient du symbole de l'œil d'Horus.*

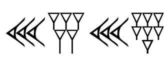
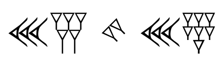
Ecrire en utilisant le système égyptien les fractions :
a 1/11 b. 16/30 c. 19/6.

Exercice 3

Rappel : Le tableau suivant donne la correspondance entre les symboles du système de numération babylonien et les nombres actuels en base 10.

0		10		20		30		40		50	
1		11		21		31		41		51	
2		12		22		32		42		52	
3		13		23		33		43		53	
4		14		24		34		44		54	
5		15		25		35		45		55	
6		16		26		36		46		56	
7		17		27		37		47		57	
8		18		28		38		48		58	
9		19		29		39		49		59	

1. Faire la division euclidienne (celle de l'école primaire) de 377 par 60.
   En déduire la transcription de 377 dans le système numérique babylonien.
2. En déduire aussi la transcription en babylonien de 2016.
3. a. Combien y-a-t-il de secondes dans 2 heures 11 minutes et 22 secondes?
   b. En déduire la transcription en babylonien de 7 882.
4. a. Transformer 36 691 secondes en heures, minutes et secondes.
   b. En déduire la transcription en babylonien de 36 691.
5. Traduire dans le système actuel les nombres suivants :

a.  b.  c. 

Exercice 4

Rappel : Le tableau suivant donne la correspondance entre les symboles du système de numération romain et les nombres actuels en base 10.

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1 000

1. Transcrire en chiffres romains les nombre 599 et 1984
2. Traduire MMXIV puis $\overline{\text{XVIII}}$ CDXXVIII.

Exercice 5

Une énigme : Expliquer pourquoi l'égalité romaine X = XI + I est fausse d'un point vue et pourtant vraie d'un autre point de vue?

Exercice 6

Rappel : Le tableau suivant donne la correspondance entre les symboles du système de numération maya et les nombres actuels en base 10.

0	𝋠	1	𝋡	2	𝋢	3	𝋣	4	𝋤
5	𝋥	6	𝋦	7	𝋧	8	𝋨	9	𝋩
10	𝋪	11	𝋫	12	𝋬	13	𝋭	14	𝋮
15	𝋯	16	𝋰	17	𝋱	18	𝋲	19	𝋳

1. Ecrire les nombres suivants dans le système maya.
   a. 228 b. 2016 c. 6868.
2. Traduire dans le système décimal actuel :

   a. 𝋮
𝋫
𝋠

   b. 𝋮
𝋫
𝋠
𝋢

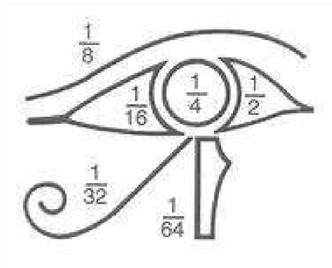
Exercice 7

On écrit la suite des chiffres de 0 à 9 en colonne dans l'ordre croissant et juste à côté dans une autre colonne les chiffres dans l'ordre décroissant (donc de 9 à 0). Expliquer pourquoi on obtient ainsi les résultats de la table de multiplication par 9

Exercice 8 (Professeur des Ecoles septembre 2011)

On appelle *fraction égyptienne* toute fraction de la forme $\frac{1}{n}$ où n désigne un nombre entier naturel non nul. Dans l'Egypte ancienne, on n'écrivait les nombres rationnels positifs inférieurs à 1 que sous la forme de sommes de fractions égyptiennes toutes différentes.

Partie A : Ecrire $\frac{11}{32}$ en somme de fractions égyptiennes présentent dans l'œil d'Horus ci-dessous.



Partie B : *Présentation d'une méthode de décomposition dans un cas particulier*

On s'intéresse au cas où la fraction à décomposer possède un numérateur égal à 2 et un dénominateur égal au produit de deux nombres entiers naturels impairs p et q.

1. Démontrer la formule $\frac{2}{pq} = \frac{1}{p\left(\frac{p+q}{2}\right)} + \frac{1}{q\left(\frac{p+q}{2}\right)}$.
2. Justifier que les dénominateurs des fractions précédentes sont des nombres entiers naturels.

3. En utilisant la formule établie à la question 1, trouver deux décompositions différentes de $\frac{2}{15}$ en somme de fractions égyptiennes différentes.
4. Soit n un entier naturel non nul. Donner une décomposition de la fraction $\frac{2}{2n+1}$ en somme de deux fractions égyptiennes différentes.

Partie C : Algorithme "glouton" de Fibonacci

En 1201, Léonard de Pise (1175-1250), dit "Fibonacci", prouva que tout nombre rationnel compris entre 0 et 1 peut s'écrire sous la forme d'une somme de "fractions égyptiennes" toutes différentes et proposa la méthode suivante pour obtenir une telle décomposition.

Algorithme : Soustraire à la fraction donnée la plus grande fraction égyptienne possible qui lui est inférieure, répéter l'opération avec la nouvelle fraction, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on obtienne 0.

1. Appliquer cet algorithme à $\frac{13}{81}$ et donner sa décomposition en fractions égyptiennes.
2. Dans le papyrus Rhind (1650 av JC), exposé au British Museum, figure une des plus anciennes approximations du nombre π égale avec la fraction $\frac{256}{81}$ (écriture moderne).
   a. Ecrire $\frac{256}{81}$ sous la forme d'une somme d'un entier naturel et d'une fraction comprise entre 0 et 1.
   b. Proposer une écriture de l'approximation de π donnée dans le papyrus Rhind sous forme d'une somme d'un nombre entier naturel et de fractions égyptiennes toutes différentes.