**Université de Picardie Jules Verne**
**Licence de Mathématiques L3** **Probabilités**

**Correction du contrôle continu.**

**Exercice 1.** (1) (a) Comme $f_X(x) = 1_{[1,+\infty[}ke^{-x}$ est une fonction intégrable positive sur $\mathbb{R}$, elle définit une densité si et seulement si $\int_{\mathbb{R}} f_X = 1$. Autrement dit :

$$1 = \int_{\mathbb{R}} 1_{[1,+\infty[}ke^{-x}dx = \left[-ke^{-x}\right]_1^{\infty} = ke^{-1}.$$

Donc $k = e$.

(b) Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$F_X(x) = P_X(]-\infty, x]) = \int_{]-\infty,x]} 1_{[1,+\infty[}e^{1-t}dt = \int 1_{]-\infty,x]\cap[1,+\infty[}e^{1-t}dt.$$

On distingue suivant la valeur de $x$ :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 1 \\ \int_1^x e^{1-t}dt = \left[-e^{1-t}\right]_1^x = 1 - e^{1-x} \text{ si } x \geq 1 \end{cases}.$$

(c) La variable aléatoire $X$ admet un moment d'ordre 2 car $x^2$ est intégrable par rapport à $f_X$ par croissance comparée. On a alors :

$$E(X) = \int xf_X(x)dx = \int_1^{\infty} xe^{1-x}dx = \left[-xe^{1-x}\right]_1^{\infty} + \int_1^{\infty} e^{1-x}dx = 2.$$

De même,

$$E(X^2) = \int x^2 f_X(x)dx = \int_1^{\infty} x^2e^{1-x}dx = \left[-x^2e^{1-x}\right]_1^{\infty} + 2\int_1^{\infty} xe^{1-x}dx = 5.$$

D'où $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1$.

(2) On considère la variable aléatoire $Y = X^2$. On souhaite trouver la loi de $Y$. On propose deux méthodes.

(a) (Par les fonctions de répartitions) On a que pour $x \in \mathbb{R}$, $F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(X^2 \leq x)$. Comme $X$ est à valeurs presque sûrement dans $[1, +\infty[$, on a que $X^2$ aussi et donc $F_Y(x) = 0$ si $x < 1$. De plus, si $x \geq 1$, alors $X^2 \leq x$ ssi $X \leq \sqrt{x}$ ($X$ est presque sûrement positive). D'où

$$F_Y(x) = P(X \leq \sqrt{x}) = F_X(\sqrt{x}).$$

La fonction $F_Y$ est alors $C^1$ par morceaux comme composée de fonctions $C^1$ par morceaux ($x \mapsto \sqrt{x}$ est $C^1$ sur $[1, +\infty[$). On en déduit que $Y$ est à densité $F_Y'$, autrement dit $f_Y = 1_{[1,\infty[}\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{1-\sqrt{x}}$.

(b) (Par le transfert) Soit $h$ une fonction mesurable bornée sur $\mathbb{R}$. Alors, par transfert :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} h \circ Y(\omega)dP(\omega) &= \int_{\Omega} h \circ X^2(\omega)dP(\omega) \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(x^2)dP_X(x) \\ &= \int_1^{\infty} h(x^2)e^{1-x}dx. \end{aligned}$$

On pose alors $x = \sqrt{y}$ (qui est un $C^1$ difféomorphisme de $[1, +\infty[$ dans $[1, +\infty[$). On reconnaît :

$$\int_{\Omega} h \circ Y(\omega)dP(\omega) = \int_1^{\infty} h(y)e^{1-\sqrt{y}}\frac{dy}{2\sqrt{y}}.$$

On reconnaît que $Y$ est à densité $f_Y = 1_{[1,+\infty[}\frac{e^{1-\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}}$.