

Contrôle continu 1.

On se place sur un espace de probabilité (Ω, \mathcal{A}, P) .

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire réelle à densité $f_X(x) = 1_{[1,+\infty[}ke^{-x}$.

- (1) (a) Déterminer k .
- (b) Calculer la fonction de répartition F_X de X .
- (c) Calculer l'espérance et la variance de X .
- (2) On considère la variable aléatoire $Y = X^2$. On souhaite trouver la loi de Y . On propose deux méthodes.
 - (a) (Par les fonctions de répartitions) Montrer que $F_Y(x) = F_X(\sqrt{x})$. En déduire que F_Y est C^1 par morceaux et calculer la densité f_Y de Y .
 - (b) (Par le transfert) Soit h une fonction mesurable bornée sur \mathbb{R} . Montrer que

$$\int_{\Omega} h \circ Y(\omega) dP(\omega) = \int_1^{\infty} h(x^2) ke^{-x} dx.$$

Effectuer un changement de variable et en déduire la densité de Y .